MAURICE FRÉCHET

Sur les fonctions de lignes fermées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 557-571
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__557_0>

SUR LES

FONCTIONS DE LIGNES FERMÉES,

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

1. La Physique mathématique conduit à l'étude de fonctions beaucoup plus générales que les fonctions dépendant de la valeur d'une ou de plusieurs variables (fonctions que j'appellerai *ordinaires*). Je veux parler des expressions qui ne sont déterminées que par la connaissance de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs *fonctions ordinaires*. Par exemple, la température en un point d'une lame conductrice dépend de l'ensemble des valeurs de la température sur le contour de la plaque.

L'étude de ces fonctions n'étant encore qu'à son début, il convient de ne considérer d'abord que les plus simples d'entre elles. Nous nous bornerons au cas des fonctions U_L dont la valeur varie seulement avec la forme d'une *ligne* L plane ou gauche, continue, *fermée* et dont la tangente varie d'une manière continue, sauf en des points isolés en nombre fini. Considérons une famille G de ces lignes, dépendant d'un paramètre α de façon que, si α tend vers α_0, L tende *uniformément* en tous ses points vers les points correspondants de L_0. Pour ces lignes L, U_L sera une fonction de α et nous ajoutons l'hypothèse que ce soit une fonction continue et dérivable en α. Dans ces conditions, nous pourrons parler, comme dans le calcul des variations, de la variation première de U_L : δU_L, laquelle dépend, bien entendu, de la famille G considérée.

2. Relativement à cette classe très générale de fonctions de lignes fermées, je démontrerai le théorème suivant :

Étant données $n+1$ fonctions de lignes : U_L, $V_L^{(1)}$, ..., $V_L^{(n)}$, *la condition nécessaire et suffisante pour que* U_L *soit une* FONCTION ORDINAIRE *de* $V_L^{(1)}$, ..., $V_L^{(n)}$ *est qu'il existe une relation de la forme*

$$\delta U_L \equiv K_L^{(1)}\,\delta V_L^{(1)} + \ldots + K_L^{(n)}\,\delta V_L^{(n)} \tag{1}$$

$$(\text{sauf peut-être pour } \delta V_L^{(1)} = \ldots = \delta V_L^{(n)} = 0),$$

où $K_L^{(1)}$, ..., $K_L^{(n)}$ *sont des fonctions déterminées de la ligne* L *indépendantes de la manière dont* L *est fonction de* α.

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, considérons une famille H de lignes C à $n+1$ paramètres : $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ et désignons par $\delta^{(1)}, \ldots, \delta^{(n+1)}$ les variations obtenues en ne faisant varier qu'un seul des paramètres. Dans la famille H, les quantités U_C, $V_C^{(1)}$, ..., $V_C^{(n)}$ seront certaines fonctions de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$, et l'on aura

$$\delta^{(i)} U_C = K_C^{(1)}\,\delta^{(i)} V_C^{(1)} + \ldots + K_C^{(n)}\,\delta^{(i)} V_C^{(n)} \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

ou

$$\frac{\partial U_C}{\partial \alpha_i} = K_C^{(1)} \frac{\partial V_C^{(1)}}{\partial \alpha_i} + \ldots + K_C^{(n)} \frac{\partial V_C^{(n)}}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

D'où

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial U_C}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial V_C^{(1)}}{\partial \alpha_1} & \ldots & \dfrac{\partial V_C^{(n)}}{\partial \alpha_1} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial U_C}{\partial \alpha_{n+1}} & \dfrac{\partial V_C^{(1)}}{\partial \alpha_{n+1}} & \ldots & \dfrac{\partial V_C^{(n)}}{\partial \alpha_{n+1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Par conséquent, U_C est une fonction ordinaire de $V_C^{(1)}$, ..., $V_C^{(n)}$:

$$U_C = \varphi_H(V_C^{(1)}, \ldots, V_C^{(n)}),$$

mais on ne sait pas encore si la fonction φ_H ne varie pas avec la famille H. Considérons maintenant deux lignes L_1 et L_2 pour lesquelles $V^{(1)}$, ..., $V^{(n)}$ aient respectivement les mêmes valeurs, on pourra toujours trouver une famille H à $n+1$ paramètres qui contienne L_1 et L_2. Dans cette famille, on aura

$$U_{L_1} = \varphi_H(V_{L_1}^{(1)}, \ldots, V_{L_1}^{(n)}) = \varphi_H(V_{L_2}^{(1)}, \ldots, V_{L_2}^{(n)}) = U_{L_2}.$$

Ainsi, quelle que soit la ligne L, la fonction U_L ne peut varier que si l'une des fonctions $V_L^{(i)}$ varie, ce qui démontre la proposition [1].

De plus, il est évident que les fonctions $K_L^{(i)}$ ne pourront être quelconques; si l'on a

$$U_L = \varphi(V_L^{(1)}, \ldots, V_L^{(n)}),$$

il faudra que

$$K_L^{(i)} = \frac{\partial\varphi}{\partial V_L^{(i)}} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

3. L'énoncé du théorème précédent répond à une question qu'il était naturel de se poser. Les fonctions analytiques sont telles que le rapport de leur variation à celle de l'une d'entre elles, z, soit une fonction de la même espèce. De même, ne pourrait-on obtenir, à partir d'une fonction de ligne très simple, V_L, une classe intéressante de fonctions de lignes U_L, par la condition que $\frac{\partial U_L}{\partial V_L}$ ne dépende que de la ligne L? La réponse est négative; d'après ce qui précède, ces fonctions U_L seraient tout simplement des *fonctions ordinaires* de V_L; et, connaissant V_L, l'étude des fonctions U_L ne constituerait plus, à proprement parler, une question de calcul fonctionnel.

4. Il y a donc lieu de rechercher, dans une autre direction, la définition d'une classe de fonctions de lignes qui présente des propriétés simples et soit une généralisation des fonctions connues. Pour cela, nous rappellerons que la variation de l'intégrale

$$(2) \qquad I_L = \int_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

---

(1) Ce mode de raisonnement s'étend facilement au cas où U dépend de la forme d'un nombre fini de multiplicités à un nombre fini de dimensions.

peut s'écrire sous la forme suivante (lorsque L est une ligne fermée) :

$$(3) \qquad \delta I_L = \int_L (I'_x\,\delta x + I'_y\,\delta y + I'_z\,\delta z)\,ds,$$

I'_x, I'_y, I'_z étant certaines quantités bien déterminées en tout point M de la ligne L correspondant à l'arc s. Les fonctions I_L étant parmi les plus simples que l'on puisse considérer, nous arriverons au résultat cherché en prenant la formule (3) comme formule de définition d'une classe plus étendue de fonctions de lignes. Ce sont celles que M. Volterra a étudiées en partant d'une définition différente (¹). Nous appellerons donc *fonction de Volterra,* ou *fonction* (φ), toute fonction de ligne fermée, U_L, satisfaisant aux conditions que nous avons posées au n° 1 et telle que l'on ait

$$(4) \qquad \delta U_L = \int_L (U'_x\,\delta x + U'_y\,\delta y + U'_z\,\delta z)\,ds,$$

U'_x, U'_y, U'_z étant des quantités déterminées en chaque point M de toute ligne fermée L.

Remarquons immédiatement avec M. Volterra que les quantités U'_x, U'_y, U'_z ne sont pas quelconques. En effet, en prenant pour variation de L un glissement de la courbe sur elle-même, on aura évidemment

$$\frac{\delta x}{\alpha} = \frac{\delta y}{\beta} = \frac{\delta z}{\gamma} = \varepsilon(s) \qquad \text{et} \qquad \delta U_L = 0,$$

en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente à L. D'où l'on déduit évidemment

$$(5) \qquad \alpha U'_x + \beta U'_y + \gamma U'_z = 0.$$

En posant encore avec M. Volterra

$$(6) \qquad U'_x = C\beta - B\gamma, \qquad U'_y = A\gamma - C\alpha, \qquad U'_z = B\alpha - A\beta$$

(¹) *Cf.* VOLTERRA, *Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire* (*Acta mathematica*, 1888).

on satisfera à cette condition et l'on aura

$$(7)\qquad \delta U_L = \int_L A(dz\,\delta y - dy\,\delta z) + B(dx\,\delta z - dz\,\delta x) + C(dy\,\delta x - dx\,\delta y)$$

ou

$$(8)\qquad \delta U_L = \int_L (A\lambda + B\mu + C\nu)\,\delta S,$$

en désignant par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale à la surface S engendrée par le déplacement de L.

On voit facilement que cette formule peut encore s'écrire

$$(9)\qquad \delta U_L = \int_L U'_P\,\delta S,$$

en désignant par U'_P la projection du vecteur $U'(U'_x, U'_y, U'_z)$ sur le plan P tangent à S en M. On en déduit la propriété qui sert de définition pour M. Volterra : Si L_1 est une ligne fermée continue qui coïncide avec L, sauf sur un petit arc tendant vers le point M de L, on aura, d'après cette formule,

$$(10)\qquad \text{limite}\ \frac{U_{L_1} - U_L}{\Delta S} = U'_P.$$

Ceci nous montre en même temps que U'_x, U'_y, U'_z sont bien déterminés lorsqu'on se donne la fonction U_L. Au contraire, A, B, C ne sont déterminés qu'à l'addition près de quantités proportionnelles à α, β, γ.

Le présent paragraphe n'est qu'une autre manière d'arriver à la considération des fonctions (φ). Reprenons l'énoncé de nos résultats.

5. Il n'est pas évident jusqu'ici que la définition précédente nous donne d'autres fonctions (φ) que les intégrales I_L qui nous ont servi de point de départ et que nous appellerons *fonctions* (φ) *du premier degré*. Toutefois, il est bien facile d'en donner des exemples. Telle sera ce que nous appellerons une *fonction* (φ) *simple*, c'est-à-dire une

fonction ordinaire d'une *seule* fonction (φ) du premier degré. Plus généralement, toute fonction ordinaire de n fonctions (φ) du premier degré sera évidemment une fonction (φ). On peut même définir des fonctions (φ) à partir d'une *infinité* de fonctions simples. Telle est, par exemple, la fonction

$$U_L = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{2^n} \cos\left(\int_L e^{\frac{1}{1+n^2y^2}}\,dx\right), \tag{11}$$

qui est évidemment une fonction (φ).

Puisqu'il y a d'autres fonctions (φ) que les fonctions du premier degré, on peut se proposer de trouver les propriétés caractéristiques des différentes catégories de fonctions (φ). Nous en trouverons plusieurs, fondées sur les différentes formes des quantités U_x, U_y, U_z, A, B, C. Mais, auparavant, rappelons, pour le généraliser, un théorème de M. Volterra. Désignons avec lui par $L + L'$ un contour fermé (pouvant comprendre plusieurs courbes fermées) et constitué par les contours L et L', où l'on a supprimé les parties communes (s'il en existe) parcourues en sens contraire (car U_L dépend en général du sens de parcours de L). M. Volterra a démontré que les fonctions du premier degré sont les seules fonctions (φ) qui vérifient l'équation fonctionnelle

$$U_{L+L'} = U_L + U_{L'}. \tag{12}$$

Plus généralement, nous allons montrer que *les fonctions simples sont les seules fonctions* (φ) *qui vérifient l'équation fonctionnelle*

$$U_{L+L'} = \varphi(U_L, U_{L'}), \tag{13}$$

φ étant une fonction *ordinaire* (continue et dérivable) de U_L et $U_{L'}$.

En effet, si U_L est une fonction simple, elle vérifie bien une relation de cette espèce. Pour démontrer la réciproque, observons d'abord que la relation fonctionnelle (13) peut s'écrire

$$U_\Delta = \varphi(U_L, U_{-L+\Delta}),$$

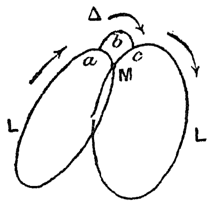
en désignant par $-$ L la courbe obtenue en renversant le sens de parcours de L et par Δ une courbe fermée très petite tendant vers un point M déterminé. Cette formule montre que U_Δ aura une limite

$$U_0 = \varphi(U_L, U_{-L}),$$

qui sera indépendante du point M et de la manière dont Δ tend vers M. De plus, U_0 étant une constante, on voit que U_{-L} est une fonction *ordinaire de* U_L.

Considérons maintenant deux courbes fermées fixes L, L′ ayant un point M commun et soit Δ un contour $MabcM$ tel que $\overset{\frown}{Ma}$ et $\overset{\frown}{cM}$ soient

Fig. 1.



respectivement de sens contraires aux sens adoptés sur L et L′ (*fig.* 1). On aura

$$\varphi(U_{L+\Delta}, U_{-L}) - \varphi(U_L, U_{-L}) = U_\Delta - U_0 = \varphi(U_{L'+\Delta}, U_{-L'}) - \varphi(U_{L'}, U_{-L'}).$$

Soit S l'aire de Δ, la relation équivalente

$$\frac{\varphi(U_{L+\Delta}, U_{-L}) - \varphi(U_L, U_{-L})}{U_{L+\Delta} - U_L} \, \frac{U_{L+\Delta} - U_L}{S} = \frac{\varphi(U_{L'+\Delta}, U_{-L'}) - \varphi(U_{L'}, U_{-L'})}{U_{L'+\Delta} - U_{L'}} \, \frac{U_{L'+\Delta} - U_{L'}}{S}$$

pourra s'écrire à la limite, lorsque Δ tend vers M,

$$(14) \quad \left[\frac{\partial}{\partial U_L}\varphi(U_L, U_{-L})\right](A\lambda + B\mu + C\nu) = \left[\frac{\partial}{\partial U_{L'}}\varphi(U_{L'}, U_{-L'})\right](A'\lambda + B'\mu + C'\nu),$$

en désignant par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale commune à L et L′ en M et ceci d'après la formule (9). D'ailleurs U_{-L} étant fonction ordinaire de U_L, l'expression

$$\frac{\partial}{\partial U_L} \varphi(U_L, U_{-L}) = F(U_L)$$

sera une fonction ordinaire de U_L. Soit maintenant V une fonction primitive de $F(U)$ et posons

$$V_L = \int F(U_L)\, dU_L. \tag{15}$$

On aura

$$\delta V_L = \int_L (m\lambda + n\mu + p\nu)\, \delta S$$

avec

$$m\lambda + n\mu + p\nu = \left[\frac{\partial}{\partial U_L} \varphi(U_L, U_{-L})\right] (A\lambda + B\mu + C\gamma),$$

et l'équation (14) deviendra

$$m\lambda + n\mu + p\nu = m'\lambda + n'\mu + p'\nu.$$

A partir de maintenant, la démonstration est identique à celle de M. Volterra pour la fonction V_L. On voit ainsi que V_L est une fonction du premier degré en montrant qu'on peut considérer m, n, p comme des fonctions des coordonnées du point M telles que l'on ait

$$\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

De la relation (15) on conclut alors que U_L est une fonction ordinaire d'une fonction du premier degré V_L, c'est-à-dire une fonction simple.

Il faut du reste remarquer que l'équation fonctionnelle donnée ne peut avoir lieu en prenant pour φ une fonction quelconque. Car, en posant

$$V_L = f(U_L),$$

la relation (13) s'écrira

$$f(U_{L+L'}) = f(U_L) + f(U_{L'}).$$

6. *Isogénéité.* — Généralisons encore une autre notion introduite par M. Volterra. Nous dirons que deux fonctions (φ), U_L et V_L, sont isogènes si le rapport

$$\frac{U'_x\,\delta x + U'_y\,\delta y + U'_z\,\delta z}{V'_x\,\delta x + V'_y\,\delta y + V'_z\,\delta z}$$

est indépendant de la variation considérée, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{U'_x}{V'_x} = \frac{U'_y}{V'_y} = \frac{U'_z}{V'_z}.$$

La valeur commune de ces rapports est une quantité déterminée en tout point M de L : $H_{L,M}$. Il est intéressant de connaître les propriétés communes à toutes les fonctions U_L isogènes d'une fonction donnée V_L. Nous savons déjà que *celles pour lesquelles* $H_{L,M}$ *est indépendant de* M *sont des fonctions ordinaires de* V_L. Mais nous ne connaissons rien sur les autres. Une première remarque évidente consiste en ce que deux fonctions (φ) isogènes restent deux fonctions (φ) isogènes après un changement de variables x, y, z, ou, si l'on veut, une transformation ponctuelle des lignes L. Nous ferons encore un pas dans cette voie au moyen du théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction (φ) *soit isogène d'une fonction* simple *est qu'on puisse la ramener par un changement de variables convenable à ne plus dépendre que d'une ligne plane* (prise dans un plan fixe). La condition est nécessaire. En effet, si une fonction U_L est isogène d'une fonction simple, elle est isogène d'une certaine fonction du premier degré

$$V_L = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Or on sait qu'on peut toujours trouver trois fonctions X, Y, Z de x, y, z telles que l'on ait

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dZ + X\,dY.$$

D'où

$$\delta V_L = \int_L dY\,\delta X - dX\,\delta Y.$$

Il existera donc une fonction $H_{L,M}$ de L et de M telle que l'on ait

$$\delta U_L = \int_L H_{L,M} (dY\,\delta X - dX\,\delta Y).$$

Si maintenant on prend comme variables X, Y, Z et si l'on appelle L′, M′ les transformées de L, M, on aura

$$\delta U_{L'} = \int_{L'} H_{L',M'} (dY\,\delta X - dX\,\delta Y).$$

Par conséquent, $\delta U_{L'}$ sera nul lorsque δX et δY seront nuls tout le long de L′, quel que soit δZ. Dès lors, $U_{L'}$ pourra être considéré comme fonction de la projection L″ de L′ sur XOY.

Réciproquement, si une fonction U_L ne dépend plus que des lignes d'un plan fixe, on peut prendre celui-ci pour plan xoy et l'on aura

$$\delta U_L = \int_L (U'_x\,\delta x + U'_y\,\delta y)\,ds.$$

Or on a

$$U'_x\,dx + U'_y\,dy = 0.$$

On peut donc poser

$$U'_x\,ds = U'_{L,M}\,dy, \qquad U'_y\,ds = -U'_{L,M}\,dx$$

et

$$V_L = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx.$$

Alors le rapport

$$\frac{U'_x\,\delta x + U'_y\,\delta y + U'_z\,\delta z}{V'_x\,\delta x + V'_y\,\delta y + V'_z\,\delta z} = U'_{L,M}$$

sera indépendant de la variation : U_L est bien isogène de la fonction simple V_L.

7. *Intégration.* — L'un des premiers problèmes qui se posent dans la théorie des fonctions (φ) est celui de l'intégration des formules (4) et (8). Mais avant de chercher à déterminer U_L par « ses *dérivées*

linéaires U'_x, U'_y, U'_z » ou par « ses *dérivées planes* A, B, C », il y a lieu d'établir des théorèmes d'existence.

Supposons d'abord que l'on donne le vecteur $E_{L,M}$: (A, B, C). Il n'y a pas toujours une fonction U_L correspondante, comme on le verra dans les deux cas extrêmes suivants :

I. *Si le vecteur* $E_{L,M}$ *ne dépend que de la ligne* L, *il n'y a pas, en général, de fonction* U_L *correspondante. Il ne peut y en avoir que si* A, B, C *sont les dérivées partielles d'une fonction ordinaire* $\varphi(S_1, S_2, S_3)$ *des aires* S_1, S_2, S_3 *des projections de* L *sur les plans de coordonnées et alors* $U_L = \varphi(S_1, S_2, S_3) + \text{const.}$ En effet, si A, B, C ne dépendent que de L, on pourra écrire

$$\partial U_L = A_L \int_L \lambda\, \partial S + B_L \int_L \mu\, \partial S + C_L \int_L \nu\, \partial S$$

ou

$$\partial U_L = A_L\, \partial S_1 + B_L\, \partial S_2 + C_L\, \partial S_3,$$

et la proposition s'obtient immédiatement en appliquant le théorème du n° 2.

II. *Si le vecteur* $E_{L,M}$ *ne dépend que du point* M : (x, y, z), *il n'y a pas, en général, de fonction* U_L *correspondante. Il ne peut y en avoir que si l'on a*

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \tag{16}$$

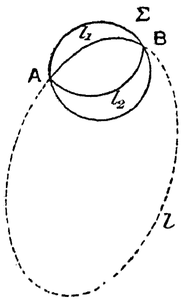
et alors U_L *est, à une constante additive près, une fonction du premier degré.*

Considérons un point M quelconque (*fig.* 2) et une sphère Σ de rayon ρ, centre M. Puis traçons une courbe fermée sans points doubles sur cette sphère; elle divisera la sphère en deux régions Σ' et Σ''; soient maintenant A, B deux points de cette courbe qui la séparent en deux arcs l_1, l_2 et l une courbe continue quelconque terminée en A et B. On pourra tracer deux courbes l', l'' terminées respectivement en A, B et situées l'une sur Σ', l'autre sur Σ'', qui déterminent avec l deux courbes fermées $l+l'$, $l+l''$. Et l'on aura

$$U_{l+l_2} - U_{l+l_1} = \int_{\Sigma'} \delta U_{l+l'},$$

$$U_{l+l_1} - U_{l+l_2} = \int_{\Sigma''} \delta U_{l+l''},$$

Fig. 2.



en faisant varier l' de l_1 à l_2 et l'' de l_2 à l_1. D'où, en ajoutant,

$$o = \int_{\Sigma} \delta U_L,$$

L étant la courbe l' sur Σ', l'' sur Σ'' et parcourant Σ dans le sens indiqué. D'où enfin

$$o = \int\int_{\Sigma} [A(x, y, z)\lambda + B(x, y, z)\mu + C(x, y, z)\nu]\, \delta S$$

ou

$$o = \int\int\int_{\Sigma_i} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dv,$$

l'intégrale simple étant prise dans le volume Σ_i de Σ. Par suite, la valeur moyenne de l'élément d'intégration est nulle dans Σ, quel que soit ρ. On voit donc, en faisant tendre ρ vers zéro, que l'on a au point M, qui est arbitraire,

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = o.$$

D'ailleurs, si cette condition est vérifiée, il y a une fonction U_L correspondante qui est fonction simple, la fonction

$$U_L = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

où P, Q, R sont des solutions des équations compatibles

$$(17) \qquad A = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad B = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \qquad C = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

8. Au lieu de nous donner A, B, C, nous pouvons nous donner U'_x, U'_y, U'_z. Mais il faut que les fonctions de L et de M choisies vérifient la condition (5), de sorte qu'il n'y a à choisir au plus que deux fonctions arbitraires de L et de M. Nous allons même montrer qu'il n'y en a qu'une à choisir, lorsqu'on pose la condition bien naturelle que U_L tende vers une limite déterminée U_0 lorsque L se réduit à l'origine. [Nous *admettons* ici cette propriété, tandis que nous avons *démontré* son existence lorsque l'équation fonctionnelle $U_{L+L'} = \varphi(U_L, U_{L'})$ avait lieu]. En effet, soit l une ligne homothétique de L dans le rapport k par rapport à l'origine. Lorsque k varie de 0 à 1, l engendre un cône de sommet O terminé à la courbe L. Et l'on aura

$$U_L - U_0 = \int_0^1 \left(\frac{\delta U_l}{\delta k}\right) \delta k.$$

Or, en appliquant la formule (4) et désignant par u'_{x_1}, u'_{y_1}, u'_{z_1} les valeurs de U'_x, U'_y, U'_z relatives à l, au point x_1, y_1, z_1 de l, on a

$$\frac{\delta U_l}{\delta k} = \int_l \left(u'_{x_1} \frac{\delta x_1}{\delta k} + u'_{y_1} \frac{\delta y_1}{\delta k} + u'_{z_1} \frac{\delta z_1}{\delta k} \right) ds_1$$

et

$$x_1 = kx, \qquad y_1 = ky, \qquad z_1 = kz.$$

Donc

$$\left(u'_{x_1} \frac{\delta x_1}{\delta k} + u'_{y_1} \frac{\delta y_1}{\delta k} + u'_{z_1} \frac{\delta z_1}{\delta k} \right) ds_1 = (x_1 u'_{x_1} + y_1 u'_{y_1} + z_1 u'_{z_1})\, ds,$$

s étant l'arc compté sur L. L'expression

$$x U'_x + y U'_y + z U'_z$$

est une certaine fonction de L et de M : $K_{L,M}$. Si l'on désigne par kL et kM les homothétiques de L et de M dans le rapport k, on aura donc

$$\frac{\partial U_l}{\partial k} = \int_L K_{kL,\, kM}\, ds.$$

D'où

$$U_L - U_0 = \int_0^1 \int_L K_{kL,\, kM}\, ds\, dk$$

ou enfin

$$U_L = U_0 + \int_L \left(\int_0^1 K_{kL,\, kM}\, dk \right) ds. \tag{18}$$

En résumé, *si l'on peut trouver la valeur de l'expression*

$$K_{L,\, M} = x\, U'_x + y\, U'_y + z\, U'_z,$$

en tout point M *d'une ligne fermée quelconque* L, *la valeur de* U_L *est parfaitement déterminée à une constante près* U_0, *et nous connaissons son expression qui est donnée par la formule* (18).

9. On tire aussitôt de cette formule une importante conséquence qui généralise le théorème II (n° 7).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction (φ) *soit du premier degré (à une constante additive près) est que* U'_x, U'_y, U'_z *ne dépendent que du point* M *et de la tangente à* L *en ce point.*

Cette condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante *lorsque la fonction* U_L *existe*, pour qu'on soit assuré qu'elle est du premier degré. En effet, si la condition est remplie, l'expression $\int_0^1 K_{kL,kM}\, dk$ est uniquement une fonction de M et de la direction de sa tangente. La fonction U_L est donc de la forme

$$U_L = U_0 + \int_L f(x, y, z, dx, dy, dz),$$

$\overline{f}$ étant une fonction homogène et du premier degré en dx, dy, dz. D'où

$$\delta U_L = \int_L (\overline{f_x} - d\overline{f_{dx}})\,\delta x + (\overline{f_y} - d\overline{f_{dy}})\,\delta y + (\overline{f_z} - d\overline{f_{dz}})\,\delta z.$$

Comme U'_x, U'_y, U'_z n'admettent qu'une seule détermination, on voit qu'on a

$$U'_x\, ds = \overline{f_x} - d\overline{f_{dx}}, \qquad U'_y\, ds = \overline{f_y} - d\overline{f_{dy}}, \qquad U'_z\, ds = \overline{f_z} - d\overline{f_{dz}}.$$

Donc les seconds membres ne doivent dépendre que de x, y, z, dx, dy, dz et non pas de d^2x, d^2y, d^2z. Ce qui ne peut arriver que si $\overline{f}$ prend la forme

$$\overline{f}(x, y, z, dx, dy, dz) \equiv P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

La proposition est ainsi démontrée.

On pourrait examiner par une méthode analogue le cas où U'_x, U'_y, U'_z ne dépendent que de M, de sa tangente et de sa courbure, etc.

FIN DU TOME VINGT ET UNIÈME.