Annales scientifiques de l'É.N.S.

Charles Riquier

Sur l'existence, dans certains systèmes différentiels, des intégrales répondant à des conditions initiales données

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 21 (1904), p. 297-373
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1904_3_21__297_0>

SUR L'EXISTENCE,

DANS CERTAINS

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS,

DES INTÉGRALES RÉPONDANT A DES CONDITIONS INITIALES DONNÉES,

PAR M. CHARLES RIQUIER,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CAEN.

INTRODUCTION.

Les résultats du présent Mémoire, communiqués à l'Académie des Sciences le 12 janvier 1903, peuvent se résumer comme il suit.

Soient

$$x, \quad y, \quad \ldots,$$
$$u, \quad v, \quad \ldots$$

des notations (en nombre limité) désignant, les premières diverses variables indépendantes, les dernières diverses fonctions inconnues de ces variables. A chacune des quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ faisons correspondre un entier, positif, nul, ou négatif, que nous nommerons la *cote* de cette quantité ; puis, considérant une dérivée d'ordre quelconque r de l'une des fonctions $u, v, \ldots$, nommons *cote* de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote de la fonction celles des r variables de différentiation. Il est clair que dans le cas où les cotes des diverses variables indépendantes sont toutes égales à 1, la cote d'une dérivée quelconque s'obtient en ajoutant à la cote de la fonction inconnue l'ordre total de la dérivée.

D'autre part, étant donné un système différentiel *résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées*, convenons de dire qu'une dérivée de ces fonctions est *principale* relativement au système, lorsqu'elle coïncide, soit avec quelqu'un des premiers membres, soit avec quelqu'une de leurs dérivées; convenons de dire, dans le cas contraire, qu'elle est *paramétrique*.

Cela posé, *considérons un système différentiel satisfaisant à la double condition ci-après :*

1° *Le système est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et, si l'on partage les équations en groupes suivant que leurs premiers membres appartiennent à telle ou telle inconnue, aucun des groupes ainsi obtenus ne contient plus d'une équation.*

2° *Les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale, et, moyennant l'attribution aux variables indépendantes de cotes respectives toutes égales à* 1, *et aux fonctions inconnues de cotes respectives déterminées, chacun d'eux ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

Un système de cette espèce étant donné, pour que les intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données existent effectivement et soient uniques, il suffit que certaines fonctions (en nombre limité) des variables indépendantes, des inconnues, et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques, présentent, pour les valeurs numériques initiales de leurs arguments, des modules satisfaisant à certaines inégalités.

Considérons, par exemple, le cas très simple de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

et supposons qu'il s'agisse de déterminer un ensemble de conditions suffisantes pour l'existence d'une intégrale (unique) répondant à des conditions initiales données. Je désignerai par A et B les dérivées partielles du second membre f par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ respectivement, par A_0 et B_0, les valeurs numériques initiales de A et B, et je rappellerai que divers géomètres ont successivement assigné comme condition suffisante à l'existence de l'intégrale :

1° La nullité identique des deux fonctions A, B; ce résultat a été formulé pour la première fois par M. Picard dans un Mémoire célèbre, paru en 1890 (¹); il se trouve également contenu, comme cas particulier, dans des recherches publiées la même année par M. Méray avec ma collaboration (²).

2° La nullité identique de l'une ou l'autre des fonctions A, B; c'est là une application particulière de mes recherches sur les systèmes *orthonomes*, dont j'ai commencé la publication en 1893 (³).

3° La nullité numérique de l'une ou l'autre des valeurs initiales A_0, B_0; ce résultat a été indiqué par M. Goursat dans une Note communiquée à l'Académie des Sciences le 2 novembre 1897.

Ceci étant rappelé, si l'on applique à l'équation (1) la méthode exposée dans le présent Mémoire, on trouve comme condition suffisante la simple inégalité numérique

$$\mathrm{mod}\,(A_0 B_0) < \frac{1}{4}.$$

(¹) *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et sur la méthode des approximations successives* (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. VI).

(²) L'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

se ramène en effet au système différentiel du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x, \quad \frac{\partial u'_y}{\partial x} = f(x, y, u, u'_x, u'_y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y, \quad \frac{\partial u'_x}{\partial y} = f(x, y, u, u'_x, u'_y),$$

lequel est *immédiat, semi-régulier* et *passif*. Voir à ce sujet le Mémoire de MM. Méray et Riquier ayant pour titre : *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles* (*Annales de l'École Normale*, janvier, février et mars 1890).

(³) Voir dans les *Annales de l'École Normale*, année 1893, les deux Mémoires intitulés : *De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque; Sur la réduction d'un système différentiel quelconque à un système linéaire et complètement intégrable du premier ordre.*

CHAPITRE I.

PROPOSITIONS SUR LES COUPURES.

---

1. Désignant par $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs particulières quelconques des variables indépendantes $x, y, \ldots$, j'ai, dans mes travaux antérieurs, nommé *fonction schématique* de $x, y, \ldots$ une série entière en $x-x_0, y-y_0, \ldots$ dont tous les coefficients sont arbitraires et soumis, dans leur ensemble, à la seule restriction de la convergence. Quand le nombre des variables se réduit à zéro, la série se réduit à une simple *constante schématique* : c'est ce que nous nommerons parfois une *fonction schématique dégénérée*.

J'ai ensuite défini le *résidu* d'une *coupure* (¹) effectuée dans une fonction schématique de $x, y, \ldots$, et j'ai montré comment on peut, à l'aide des calculs les plus élémentaires, former de ce résidu une expression simple. Sans revenir ici sur ce que j'ai longuement exposé ailleurs (²), je dois rappeler brièvement en quoi consiste, dans la théorie générale des systèmes différentiels, l'utilité de ces considérations.

Supposons que l'on ait un système différentiel *résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées*, et dont les seconds membres soient, dans un même domaine, tous développables par la série de Taylor. Des intégrales quelconques (non singulières) d'un pareil système étant supposées développées par la série de Taylor à partir de valeurs initiales quelconques des variables indépendantes, les portions de ces développements formées par l'ensemble des termes qui, aux facteurs numériques connus près, ont

---

(¹) Il va sans dire que le sens attribué ici au mot *coupure* est tout différent de celui qu'il a communément dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.

(²) *Sur le calcul inverse des dérivées* (*Annales de la Faculté des Sciences de Marseille*, t. X, fasc. I, p. 9 et suiv.). — *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta Mathematica*, t. XXIII, p. 215 et suiv.).

pour coefficients les valeurs initiales des intégrales dont il s'agit et de leurs dérivées paramétriques de tous ordres ([1]), se nommeront les *déterminations initiales* de ces intégrales.

Or, la question se pose à chaque instant, dans la théorie des systèmes différentiels, de savoir si un système, résolu par rapport à certaines dérivées des inconnues, admet ou non quelque groupe d'intégrales possédant des déterminations initiales données; et il importe, en conséquence, de formuler cette dernière donnée le plus simplement possible. Supposons, à cet effet, les inconnues développées à partir des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$ des variables indépendantes x, y, ..., et laissons dans ces développements tous les coefficients indéterminés : cela étant, il suffit, pour avoir la *forme* de la détermination initiale d'une inconnue quelconque u, de calculer le résidu d'une certaine coupure pratiquée dans le développement correspondant. On obtient ainsi une expression de la forme

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{n=g} (x-x_0)^{a_n}(y-y_0)^{b_n}\ldots \mathrm{F}_{0_n},$$

où a_n, b_n, ... désignent des entiers positifs ou nuls, 0_n un groupe de variables indépendantes extrait du groupe total x, y, ..., et F_{0_n} une fonction schématique des seules variables 0_n. La donnée de l'expression (2) équivaut d'ailleurs à la suivante, par laquelle nous conviendrons de la remplacer en toutes circonstances.

Désignant par ω_n le groupe de variables complémentaire du groupe 0_n ([2]), et faisant successivement $n = 1, 2, \ldots, g$, nous supposerons donnée la fonction des variables 0_n à laquelle se réduit $\dfrac{\partial^{a_n+b_n+\ldots} u}{\partial x^{a_n}\partial y^{b_n}\ldots}$ par l'attribution aux variables ω_n de leurs valeurs initiales.

Si l'on considère, par exemple, un système différentiel impliquant deux fonctions inconnues u, v des trois variables x, y, z, et résolu par

---

([1]) Nous avons défini, dans l'Introduction, le sens des locutions *dérivée principale*, *dérivée paramétrique*.

([2]) C'est-à-dire tel que l'ensemble des deux groupes 0_n, ω_n reproduise, une fois et une seule, chacune des variables indépendantes $x, y, \ldots$.

rapport aux quatre dérivées

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial y^3},$$

l'application de notre méthode donnera, pour les déterminations initiales de u, v, les formes respectives

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{c} F(y,z) + (x-x_0)H(x,z) + (x-x_0)(y-y_0)P(x,y), \\ Q(z) + (y-y_0)A + (y-y_0)^2 B, \end{array} \right.$$

où A, B désignent deux constantes schématiques et $F(y, z)$, $H(x, z)$, $P(x,y)$, $Q(z)$ quatre fonctions schématiques. La donnée de ces déterminations initiales se formulera d'ailleurs comme il suit :

S'il s'agit de la première, on se donnera : 1° La fonction de y et z à laquelle se réduit u pour $x - x_0 = 0$; 2° la fonction de x et z à laquelle se réduit $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $y - y_0 = 0$; 3° la fonction de x et y à laquelle se réduit $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ pour $z - z_0 = 0$. S'il s'agit de la seconde, on se donnera : 1° La fonction de z à laquelle se réduit v pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$; 2° les valeurs numériques que prennent respectivement $\frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$. Des expressions (3) on déduit donc immédiatement, pour remplacer la considération des déterminations initiales, la Tableau suivant de formules schématiques :

$$\begin{array}{lll} u = \varphi(y,z) & \text{pour} & x - x_0 = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda(x,z) & \text{pour} & y - y_0 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \mu(x,y) & \text{pour} & z - z_0 = 0; \\ v = \psi(z) & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = 0, \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \alpha \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \beta \end{array}\right\} \text{ pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0.$$

D'une manière générale, si l'on considère un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, les formules schématiques, en nombre essentiellement limité, dont la considération se trouve le plus souvent substituée à celle des déterminations initiales, ont la structure suivante : les premiers membres, tous distincts entre eux, coïncident chacun avec l'une des inconnues du système ou de leurs dérivées; dans chaque second membre figure une fonction schématique de certaines des variables; et chaque premier membre est assujetti à se réduire identiquement au second membre correspondant, lorsqu'on y remplace par leurs valeurs initiales celles d'entre les variables indépendantes dont ne dépend pas la fonction schématique du second membre.

Construire les formules schématiques dont il s'agit, c'est ce que nous appellerons désormais *fixer l'économie des conditions initiales.*

2. Il nous faut maintenant établir, au sujet des coupures, quelques propriétés d'où nous déduirons d'intéressantes conséquences relativement à la forme des conditions initiales dans un système différentiel.

Dans toute expression, telle que (2), obtenue à l'aide d'une coupure, les divers monomes

$$(x-x_0)^{a_n}(y-y_0)^{b_n}\ldots \qquad [n=1,2,\ldots,g],$$

qui multiplient respectivement les diverses fonctions schématiques F_{0_n}, s'appelleront, pour abréger, les *monomes extérieurs* de l'expression dont il s'agit : à chacune des fonctions schématiques F_{0_n} (dont quelques-unes peuvent, bien entendu, se réduire à de simples constantes schématiques) correspond ainsi un monome extérieur, et inversement. L'expression (2) contient d'ailleurs nécessairement un monome extérieur (et un seul) de degré zéro.

Étant donnée, enfin, une fonction schématique de $x, y, \ldots$, celles des différences

$$(4) \qquad x-x_0, \quad y-y_0, \quad \ldots$$

dont elle ne dépend pas lui seront dites *étrangères*.

Ces définitions posées, nous établirons la proposition suivante :

Le résidu d'une coupure effectuée dans une fonction schématique à *l'aide d'un ensemble* E *ne contenant aucun terme superflu peut toujours être mis sous une forme telle que les deux conditions suivantes se trouvent à la fois satisfaites :*

1° *Tout monome extérieur (sauf celui de degré zéro) s'obtient en multipliant quelque autre monome extérieur par quelqu'une des différences étrangères à la fonction schématique (dégénérée ou non) qui correspond à ce dernier.*

2° *Tout monome de l'ensemble* E *s'obtient en multipliant quelque monome extérieur du résidu par quelqu'une des différences étrangères à la fonction schématique (dégénérée ou non) qui correspond à ce dernier.*

I. *Notre proposition est exacte si dans l'ensemble* E *ne figure effectivement qu'une seule des différences* (4).

Car l'ensemble E, ne contenant, par hypothèse, aucun terme superflu, se compose nécessairement d'un monome unique tel que $(x-x_0)^\alpha$; le résidu de la coupure peut alors s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}&F_0(y,\ldots)+(x-x_0)F_1(y,\ldots)\\&\quad+(x-x_0)^2F_2(y,\ldots)+\ldots+(x-x_0)^{\alpha-1}F_{\alpha-1}(y,\ldots),\end{aligned}$$

où $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{\alpha-1}$ désignent α fonctions schématiques des seules variables $y, \ldots$, et où les monomes extérieurs sont

$$(x-x_0)^0,\quad (x-x_0)^1,\quad (x-x_0)^2,\quad \ldots,\quad (x-x_0)^{\alpha-1}.$$

On en déduit immédiatement le point à démontrer.

II. *Si notre proposition est exacte dans le cas où l'ensemble* E *contient effectivement moins de* $k+1$ *différences, elle l'est encore dans le cas où il en contient* $k+1$.

Supposons, pour fixer les idées, que $x-x_0$ soit une des $k+1$ différences dont il s'agit, désignons par α l'exposant maximum dont elle se trouve affectée dans l'ensemble, et partageons ce dernier en plusieurs autres,

$$E^0,\quad E^1,\quad \ldots,\quad E^{\alpha-1},\quad E^\alpha,$$

suivant que, dans les divers termes de E, la différence $x-x_0$ figure avec l'un ou l'autre des exposants

$$0, \quad 1, \quad \ldots, \quad \alpha - 1, \quad \alpha.$$

L'ensemble E ne contenant par hypothèse aucun terme superflu, les monomes

$$x - x_0, \quad (x - x_0)^2, \quad \ldots, \quad (x - x_0)^{\alpha-1}$$

sont absents des ensembles respectifs

$$(5) \qquad E^1, \quad E^2, \quad \ldots, \quad E^{\alpha-1},$$

sans quoi les termes de E^α admettraient pour diviseur quelque terme des ensembles (5); quant à l'ensemble E^α, il peut, suivant les cas, contenir ou non le terme $(x - x_0)^\alpha$. Cela étant, nous désignerons par

$$e^1, \quad e^2, \quad \ldots, \quad e^{\alpha-1}$$

les ensembles respectivement déduits de (5) en remplaçant par zéro, dans chacun de leurs termes, l'exposant de $x - x_0$, sans changer les exposants des autres différences, et, dans l'hypothèse où E^α ne contiendrait pas le terme $(x - x_0)^\alpha$, nous nommerons e^α l'ensemble déduit de E^α par la même opération. En posant, pour raison de symétrie, $e^0 = E^0$, il est clair que dans la totalité des ensembles

$$e^0, \quad e^1, \quad e^2, \quad \ldots, \quad e^{\alpha-1}, \quad e^\alpha$$

figurent seulement k différences.

Écrivons maintenant le résidu de la coupure E sous la forme

$$(6) \qquad \begin{aligned} &T_0(y, \ldots) + (x - x_0) T_1(y, \ldots) + (x - x_0)^2 T_2(y, \ldots) + \ldots \\ &+ (x - x_0)^{\alpha-1} T_{\alpha-1}(y, \ldots) + (x - x_0)^\alpha T(x, y, \ldots). \end{aligned}$$

Pour obtenir les formes respectives des expressions

$$(7) \qquad T_0(y, \ldots), \quad T_1(y, \ldots), \quad \ldots, \quad T_{\alpha-1}(y, \ldots),$$

il suffit, comme nous l'avons établi ailleurs, de pratiquer dans le développement d'une fonction schématique des seules variables $y, \ldots$ les coupures respectives

$$(8) \qquad e^0, \quad [e^0, e^1], \quad \ldots, \quad [e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}].$$

Pour

$$(9) \qquad T(x, y, \ldots),$$

deux cas sont à distinguer : si E^α contient le terme $(x-x_0)^\alpha$, auquel cas il se réduit à ce terme unique puisque l'ensemble E ne contient aucun terme superflu, $T(x, y, \ldots)$ est identiquement nul; dans le cas contraire, il suffit, pour connaître $T(x, y, \ldots)$, de pratiquer la coupure

$$[e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}, e^\alpha] \tag{10}$$

dans le développement d'une fonction schématique de *toutes* les variables $x, y, \ldots$. D'ailleurs, puisque dans chacun des ensembles (8) et (10) figurent au plus k différences, la même propriété ne peut manquer de subsister quand on les débarrasse de leurs termes superflus.

Ces résultats étant rappelés et les ensembles (8) et (10) étant débarrassés de leurs termes superflus, on peut, en vertu de ce qui est admis, écrire les résidus correspondants (7) et (9) sous une forme telle que, dans ces résidus et les ensembles qui les ont fournis, les deux propriétés formulées par l'énoncé général se trouvent satisfaites. *Les supposant désormais écrites sous cette forme*, nous établirons qu'il en est de même pour l'ensemble E et le résidu correspondant (6).

A. De la première propriété, admise pour les résidus (7) et (9), il résulte tout d'abord que, si dans chacun de ces résidus on partage les monomes extérieurs en groupes successifs d'après leurs degrés croissants, ces degrés forment une progression arithmétique de raison 1 commençant par zéro. Les diverses expressions (7), et éventuellement l'expression (9), fournissent ainsi, par la considération des degrés de leurs monomes extérieurs, les progressions arithmétiques respectives

$$\begin{array}{l}
0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad m_0,\\
0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad m_1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad m_{\alpha-1},\\
0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad m_\alpha,
\end{array}$$

et leurs produits respectifs par les quantités

$$1,\quad x-x_0,\quad (x-x_0)^2,\quad \ldots,\quad (x-x_0)^{\alpha-1},\quad (x-x_0)^\alpha$$

fourniront de même les progressions arithmétiques

$$\begin{array}{ccccc}
0, & 1, & 2, & \ldots, & m_0, \\
1, & 2, & 3, & \ldots, & m_1+1, \\
\multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
\alpha-1, & \alpha, & \alpha+1, & \ldots, & m_{\alpha-1}+\alpha-1, \\
\alpha, & \alpha+1, & \alpha+2, & \ldots, & m_\alpha+\alpha.
\end{array}$$

Si donc on désigne par M le plus grand des entiers m_0, m_1+1, ..., $m_{\alpha-1}+\alpha-1$, $m_\alpha+\alpha$, l'expression (6) fournira la progression arithmétique

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \mathrm{M}.$$

Cela étant, construisons un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux diverses expressions schématiques

$$\begin{array}{lll}
 & \mathrm{T}_0 & (y, \ldots), \\
(x-x_0) & \mathrm{T}_1 & (y, \ldots), \\
\multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
(x-x_0)^{\alpha-1} & \mathrm{T}_{\alpha-1} & (y, \ldots), \\
(x-x_0)^{\alpha} & \mathrm{T} & (x, y, \ldots),
\end{array}$$

et les colonnes aux degrés croissants 0, 1, 2, ..., M des monomes extérieurs que nous allons y inscrire : ce Tableau comprendra ainsi $\alpha+1$ lignes affectées des indices 0, 1, ..., $\alpha-1$, α et $\mathrm{M}+1$ colonnes affectées des indices 0, 1, 2, ..., M, en sorte que chaque ligne horizontale comprendra $\mathrm{M}+1$ cases. Dans les cases

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m_0$$

de la première ligne horizontale inscrivons les monomes extérieurs de l'expression $\mathrm{T}_0(y, \ldots)$, chacun à la case voulue suivant le degré qu'il présente (et une même case pouvant, bien entendu, contenir plusieurs monomes). Dans les cases

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad m_1+1$$

de la deuxième ligne horizontale inscrivons de même les monomes extérieurs de l'expression $(x-x_0)\,\mathrm{T}_1(y, \ldots)$; dans les cases

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots, \quad m_2+2$$

de la troisième, les monomes extérieurs de l'expression

$$(x - x_0)^2 T_2(y, \ldots);$$

et ainsi de suite. Il pourra arriver que la dernière ligne horizontale se compose entièrement de cases vides [au cas où l'ensemble partiel E^α se composerait du terme unique $(x - x_0)^\alpha$]; mais chacune des lignes précédentes contiendra certainement quelque case non vide.

Cela étant, considérons un monome extérieur situé dans une colonne dont l'indice i soit supérieur à zéro, et désignons par h l'indice de la ligne où il se trouve.

Si ce monome est situé dans la première case non vide de sa ligne, ce qui entraîne $h = i$, il n'est autre que $(x - x_0)^h$ [où $h > 0$]; d'ailleurs, le monome situé dans la première case non vide de la ligne précédente est $(x - x_0)^{h-1}$, et la fonction schématique qui lui correspond ne dépend certainement pas de la variable x, parce que $h - 1$ est au plus égal à $\alpha - 1$. On voit donc que le monome $(x - x_0)^h$ peut s'obtenir en multipliant l'un des monomes de la colonne précédente par l'une des différences étrangères à la fonction schématique qui correspond à ce dernier monome.

Si le monome considéré ne se trouve pas dans la première case non vide de sa ligne, supprimons le facteur $(x - x_0)^h$, commun à tous les termes de cette ligne : après cette suppression, les groupes inscrits dans les cases successives ne sont autres que les groupes de monomes extérieurs fournis par la considération de quelqu'un des résidus (7) et (9), et, si on les partage en groupes successifs d'après leurs degrés croissants, tout monome contenu dans un groupe autre que le premier est, en vertu de ce que nous admettons, le produit d'un monome du groupe précédent par l'une des différences étrangères à la fonction schématique qui correspond à ce dernier monome : la même propriété subsistera donc après le rétablissement du facteur commun $(x - x_0)^h$.

La première propriété formulée par notre énoncé général se trouve ainsi étendue au cas où dans l'ensemble donné figurent effectivement $k + 1$ différences.

B. Passons à la deuxième propriété.

Nous observerons tout d'abord que, si l'ensemble partiel E^α contient le terme $(x - x_0)^\alpha$, ce terme, nécessairement unique, s'obtient en multipliant le monome extérieur $(x - x_0)^{\alpha-1}$, qui figure dans l'un des termes de la portion de résidu

$$(x - x_0)^{\alpha-1} T_{\alpha-1}(y, \ldots),$$

par la différence $x - x_0$, nécessairement étrangère à la fonction schématique correspondante. Nous avons donc à nous occuper maintenant : 1° des termes contenus dans les ensembles partiels $E^0, E^1, \ldots, E^{\alpha-1}$; 2° des termes contenus dans l'ensemble partiel E^α, au cas éventuel où ce dernier ne contiendrait pas le monome $(x - x_0)^\alpha$.

Observons à cet effet qu'en supposant

$$h = 0, 1, \ldots, \alpha - 1, \text{ et éventuellement } \alpha,$$

un terme de l'ensemble e^h ne peut admettre comme diviseur aucun terme des ensembles $e^0, e^1, \ldots, e^h$: car autrement l'ensemble E^h admettrait comme diviseur quelque terme des ensembles $E^0, E^1, \ldots, E^h$, et l'ensemble E contiendrait, contrairement à notre hypothèse, quelque terme superflu. Si donc on considère les ensembles

$$e^0, [e^0, e^1], \ldots, [e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}],$$
$$\text{et éventuellement } [e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}, e^\alpha],$$

et qu'on supprime dans chacun d'eux les termes superflus, le premier, e^0, restera tel qu'il est, le second, $[e^0, e^1]$, contiendra certainement tous les termes de e^1, le troisième, $[e^0, e^1, e^2]$, tous les termes de e^2, et ainsi de suite.

Or, si l'on considère d'une part l'ensemble $[e^0, e^1, \ldots, e^h]$ débarrassé de ses termes superflus, d'autre part le résidu de la coupure effectuée à l'aide de cet ensemble (soit dans une fonction schématique de $y, \ldots$ si h est $< \alpha$, soit dans une fonction schématique de $x, y, \ldots$ si $h = \alpha$), il résulte de ce qui est admis que chaque terme de l'ensemble s'obtient en multipliant quelqu'un des monomes extérieurs du résidu par quelqu'une des différences étrangères à la fonction schématique correspondante : en vertu de la remarque qui précède, chaque terme de e^h jouit donc forcément de cette propriété. Cela étant, si l'on multiplie par $(x - x_0)^h$, d'une part le résidu de la coupure $[e^0, e^1, \ldots, e^h]$, ce qui redonne une portion du résidu de la coupure E, d'autre part les divers termes de e^h, ce qui redonne l'ensemble partiel E^h, il est clair que chaque terme de E^h s'obtient en multipliant quelqu'un des monomes extérieurs du résidu de la coupure E par quelqu'une des différences étrangères à la fonction schématique correspondante.

La deuxième propriété se trouve ainsi étendue au cas où dans l'ensemble donné figurent effectivement $k+1$ différences.

III. Le simple rapprochement des alinéas I et II suffit à établir l'exactitude de notre énoncé général.

3. *Dans une fonction schématique des variables x, y, ... effectuons une coupure à l'aide d'un ensemble* E *ne contenant aucun terme superflu, et supposons que les fonctions schématiques figurant dans l'expression du résidu se réduisent toutes à des constantes*. La forme, évidemment unique, d'un pareil résidu possède dès lors, en vertu du numéro précédent, les deux propriétés suivantes :

1° *Tout monome extérieur (sauf celui de degré zéro) s'obtient en multipliant quelque autre monome extérieur par quelqu'une des différences $x-x_0$, $y-y_0$, ...;*

2° *Tout monome de l'ensemble* E *s'obtient en multipliant quelque monome extérieur du résidu par quelqu'une des différences $x-x_0$, $y-y_0$, ...*

4. *Dans une fonction schématique des variables x, y, ... effectuons une coupure à l'aide d'un ensemble* E *ne contenant aucun terme superflu, et supposons que dans l'expression du résidu figure quelque fonction schématique non dégénérée. Cela étant, si l'on désigne par* N *un entier (arithmétique) convenablement choisi, et par* P *un entier supérieur ou égal à* N, *arbitraire d'ailleurs, le résidu de la coupure peut toujours être mis sous une forme telle que les trois conditions suivantes se trouvent à la fois satisfaites :*

1° *Le degré maximum des monomes extérieurs est exactement égal à* P; *à l'un au moins des monomes de degré* P *correspond, dans l'expression du résidu, une fonction schématique non dégénérée, et à tous ceux de degré inférieur à P correspondent des constantes schématiques ;*

2° *Tout monome extérieur (sauf celui de degré zéro) s'obtient en mul-*

tipliant quelque autre monome extérieur par quelqu'une des différences $x - x_0$, $y - y_0$, ...;

3° *Tout monome de l'ensemble* E *s'obtient en multipliant quelque monome extérieur du résidu par quelqu'une des différences* $x - x_0$, $y - y_0$, ..., *et cela de telle façon que, si au second de ces deux monomes correspond une fonction schématique non dégénérée, la différence par laquelle on doit le multiplier pour reproduire le premier soit étrangère à la fonction schématique dont il s'agit.*

I. *En désignant par* K *un entier positif donné, le développement d'une fonction schématique des variables* $x, y, \ldots$ *peut être mis (sans omission ni répétition de termes élémentaires) sous la forme d'une somme de termes, en nombre limité, qui s'obtiennent :*

Les uns en multipliant respectivement par des constantes schématiques les divers monomes (à coefficient 1*) de degrés* 0, 1, 2, ..., $\mathrm{K} - 1$ *par rapport à l'ensemble des différences* $x - x_0$, $y - y_0$, ...;

Les autres en multipliant respectivement les divers monomes de degré K *(à coefficient* 1*) par diverses fonctions schématiques (non dégénérées) de quelques-unes des variables.*

A. La propriété est exacte si le nombre des variables est égal à 1.

Car, en désignant par x la variable unique, par $A_0, A_1, \ldots, A_{K-1}$ des constantes schématiques, et par $H(x)$ une fonction schématique de x, la proposée peut s'écrire sous la forme

$$A_0 + (x - x_0) A_1 + \ldots + (x - x_0)^{K-1} A_{K-1} + (x - x_0)^K H(x).$$

B. Si la propriété est vraie pour n variables, elle l'est aussi pour $n + 1$.

Désignons par $x, y, \ldots$ les $n + 1$ variables dont il s'agit, et distinguons dans le développement diverses portions comprenant : la première, les termes de degré zéro en $x - x_0$; la seconde, les termes de degré 1 en $x - x_0$; etc.; l'avant-dernière, les termes de degré $\mathrm{K} - 1$ en $x - x_0$; la dernière, les termes de degré *au moins* égal à K en $x - x_0$. Nous aurons ainsi l'expression

$$\begin{aligned}(11)\qquad & F_0(y, \ldots) + (x - x_0) F_1(y, \ldots) + \ldots \\ & + (x - x_0)^{K-1} F_{K-1}(y, \ldots) + (x - x_0)^K F(x, y, \ldots),\end{aligned}$$

où F_0, F_1, ..., F_{K-1} désignent des fonctions schématiques de y, ..., et F une fonction schématique de x, y, ...

Or, en vertu de ce qui est admis :

La fonction schématique $F_0(y, \ldots)$ peut s'obtenir en multipliant les divers monomes de degré K en $y - y_0$, ... par diverses fonctions schématiques de quelques-unes des n variables y, ..., et ajoutant à cette somme de produits un polynome entier de degré $K - 1$ en $y - y_0$, ..., à coefficients indéterminés;

La fonction schématique $F_1(y, \ldots)$ peut s'obtenir de même en multipliant les divers monomes de degré $K - 1$ en $y - y_0$, ... par diverses fonctions schématiques de quelques-unes des n variables y, ..., et ajoutant à cette somme de produits un polynome entier de degré $K - 2$ en $y - y_0$, ..., à coefficients indéterminés;

Etc.;

Enfin, la fonction schématique $F_{K-1}(y, \ldots)$ peut s'obtenir en multipliant les divers monomes du premier degré $y - y_0$, ... par diverses fonctions schématiques de quelques-unes des n variables y, ..., et ajoutant à cette somme de produits une constante schématique.

Un simple coup d'œil jeté sur la formule (11) suffit alors à faire voir que la propriété, supposée vraie pour n variables, ne peut manquer de l'être pour $n + 1$.

C. Le simple rapprochement de *A* et *B* suffit à établir le point que nous avons actuellement en vue.

Nous l'énoncerons d'une manière un peu plus brève en disant que *toute fonction schématique de x, y, ... peut être considérée comme une sorte de polynome (complet) de degré* K, *entier par rapport aux différences $x - x_0$, $y - y_0$, ..., et où les termes de degré inférieur à* K *ont pour coefficients des constantes schématiques, tandis que les termes de degré* K *ont pour coefficients des fonctions schématiques non dégénérées.*

Il est clair, d'ailleurs, que si, dans l'expression schématique ainsi obtenue, on partage en groupes successifs, d'après leurs degrés croissants, les divers monomes extérieurs, le premier groupe est constitué par le monome unique de degré zéro, et que chacun des autres monomes s'obtient en multipliant quelqu'un des monomes du groupe précédent par quelqu'une des différences $x - x_0$, $y - y_0$, ...

II. Revenant à notre énoncé général, mettons le résidu de la coupure sous une forme Φ qui satisfasse à la double condition formulée dans le n° 2, et désignons par N le degré maximum des monomes extérieurs qui y figurent, par P un entier supérieur ou égal à N, arbitraire d'ailleurs. Considérant ensuite un terme quelconque de ce résidu Φ, désignons par n le degré du monome extérieur qui y figure ($n \leqq N \leqq P$), et par K_n la différence (positive ou nulle) $P - n$. Si le terme considéré ne contient qu'une fonction schématique dégénérée, nous le laisserons tel qu'il est ; dans le cas contraire, nous remplacerons, conformément à l'alinéa I, la fonction schématique (non dégénérée) par un polynome de degré K_n, entier par rapport aux différences dont elle dépend, et où les termes de degré inférieur à K_n aient pour coefficients des constantes arbitraires, tandis que les termes de degré K_n auront pour coefficients des fonctions schématiques non dégénérées. En opérant ainsi sur tous les termes de Φ, il est facile de voir que les diverses conditions requises par notre énoncé se trouveront satisfaites dans la nouvelle forme. Effectivement :

1° Puisque le résidu de la coupure contient, d'après notre hypothèse, un nombre illimité de termes *élémentaires*, à l'un au moins des monomes extérieurs de Φ correspond une fonction schématique non dégénérée, et la première condition se trouve dès lors évidemment satisfaite.

2° Tout monome extérieur figurant primitivement dans Φ se trouve remplacé, dans la nouvelle forme du résidu, par un groupe de monomes extérieurs : pour obtenir le groupe en question (abstraction faite des fonctions ou constantes schématiques qui correspondent à ses différents termes), il suffit de multiplier par le monome extérieur primitif les divers termes d'un certain polynome, entier par rapport à quelques-unes des différences $x - x_0$, $y - y_0$, ..., et ayant, avec un degré positif ou nul, tous ses coefficients égaux à 1. Cela étant, si nous considérons, dans la nouvelle forme du résidu, l'ensemble des monomes extérieurs qui figuraient primitivement dans Φ, il résulte du n° 2 que chacun d'entre eux (sauf celui de degré zéro) peut s'obtenir en multipliant quelqu'un des autres par quelqu'une des différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... Si nous considérons d'autre part le groupe par lequel se trouve actuellement remplacé l'un quelconque des monomes primitifs (groupe en tête duquel figure le monome primitif dont il s'agit), il résulte de la manière même dont on a obtenu le groupe en question que l'un quelconque de ses termes (sauf le monome primitif) s'obtient en multipliant quelqu'un des autres par quelqu'une des différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... On voit donc bien que, dans la nouvelle forme, tout monome extérieur (sauf celui de degré zéro) s'obtient en multipliant quelque autre monome extérieur par quelqu'une des différences $x - x_0$, $y - y_0$, ...

3° Il résulte du n° 2 que tout monome de l'ensemble E s'obtient en multipliant quelque monome extérieur de Φ par quelqu'une des différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... Or, ce monome extérieur figure aussi dans la nouvelle forme du résidu. D'ailleurs, pour que la fonction schématique qui lui correspond dans la nouvelle forme ne soit pas dégénérée, il est nécessaire que le monome extérieur soit de degré P, et, par suite, que la différence ci-dessus désignée par K_n se réduise pour lui à zéro : le terme de Φ où il figure est donc resté tel qu'il est dans le passage à la nouvelle forme, et dès lors, en vertu du n° 2, la différence par laquelle on doit le multiplier pour reproduire le monome considéré de E est étrangère à la fonction schématique dont il s'agit.

5. Des propositions que nous venons de démontrer relativement aux coupures on en déduit aisément deux autres relatives à la forme des conditions initiales dans un système différentiel.

La première se formule comme il suit :

Soit S *un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et tel qu'aucun des premiers membres n'y soit la dérivée de quelque autre. Si, dans un pareil système, on se propose de fixer, conformément aux indications du* n° 1, *l'économie des conditions initiales, on peut toujours effectuer l'opération de manière à ce que les deux circonstances suivantes se trouvent réalisées :*

1° *Toute dérivée figurant comme premier membre dans quelqu'une des conditions initiales peut se déduire de quelque autre des conditions initiales à l'aide de quelque dérivation première effectuée sur le premier membre de cette autre et n'intéressant aucune des variables dont dépend la fonction schématique (dégénérée ou non) qui figure au second membre de cette autre.*

2° *Tout premier membre du système* S *peut se déduire de la même manière de quelqu'une des conditions initiales.*

Si l'on désigne par u l'une quelconque des inconnues engagées dans le système S, le groupe de conditions initiales relatif à l'inconnue u s'obtient, comme il a été expliqué dans un travail antérieur, en pratiquant une certaine coupure dans une fonction schématique des variables indépendantes $x, y, \ldots$; d'ailleurs, pour avoir les divers termes de l'ensemble à l'aide duquel on doit effectuer la coupure, il suffit de prendre, parmi les premiers membres de S, ceux qui sont des dérivées de l'inconnue u, et d'en déduire respectivement, par la considération des ordres partiels de dérivation, certains monomes entiers par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$. Or, puisque, en vertu de notre hypothèse, aucun des premiers membres du système S n'est la dérivée de quelque autre, l'ensemble ainsi obtenu ne contient aucun terme superflu. Cela étant, la proposition à démontrer est une conséquence immédiate du n° 2.

6. Voici maintenant notre deuxième proposition :

Soit S *un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et tel qu'aucun des premiers membres n'y soit la dérivée de quelque autre. Aux diverses variables indépendantes attribuons des cotes respectives toutes égales à* 1, *et aux fonctions inconnues des cotes respectives quelconques* (¹). *Cela posé, les conditions initiales peuvent toujours être mises sous une forme telle que les diverses circonstances suivantes se trouvent à la fois réalisées :*

1° *Si l'on désigne par* Γ *la cote maxima des premiers membres des conditions initiales* (n° 1), *chacune des conditions dont le premier membre est de cote inférieure à* Γ *a pour second membre une constante schématique.*

2° *Toute dérivée figurant comme premier membre dans quelqu'une des conditions initiales peut se déduire de quelque autre des conditions initiales à l'aide de quelque dérivation première effectuée sur le premier membre de cette autre.*

(¹) Voir dans l'Introduction du présent Mémoire la définition des *cotes*.

3° *Tout premier membre du système* S *peut se déduire de quelqu'une des conditions initiales à l'aide de quelque dérivation première effectuée sur le premier membre de celle-ci, et cela de telle façon que, si la condition initiale dont il s'agit a pour second membre une fonction schématique non dégénérée, la dérivation première à effectuer sur le premier membre n'intéresse aucune des variables dont dépend la fonction schématique du second membre.*

Pour former le groupe de conditions initiales relatif à une inconnue quelconque u, nous procéderons comme il a été dit au n° 5, et nous serons ainsi conduit à pratiquer une coupure dans une fonction schématique de $x, y, \ldots$ à l'aide d'un ensemble ne contenant aucun terme superflu : si le résidu de cette coupure ne contient que des constantes schématiques (auquel cas sa forme est unique), nous désignerons par N_u le degré le plus élevé des monomes extérieurs qui y figurent; s'il contient quelque fonction schématique non dégénérée, nous désignerons par N_u l'entier (arithmétique) convenablement choisi dont il est question au n° 4; dans l'un et l'autre cas, nous désignerons par c_u la cote de l'inconnue u. Opérant ensuite pour chacune des autres inconnues, $v, w, \ldots$, comme nous l'avons fait pour u, nous considérerons les divers entiers (algébriques)

$$N_u + c_u, \quad N_v + c_v, \quad N_w + c_w, \quad \ldots,$$

et nous désignerons par Γ le plus grand d'entre eux : les différences

$$\Gamma - c_u, \quad \Gamma - c_v, \quad \Gamma - c_w, \quad \ldots,$$

seront, dès lors, au moins égales aux entiers arithmétiques

$$N_u, \quad N_v, \quad N_w, \quad \ldots.$$

Cela fait, considérons le résidu de la coupure relative à l'inconnue u.

Si ce résidu ne contient que des constantes schématiques, l'ordre maximum des premiers membres, dans le groupe correspondant de conditions initiales, sera N_u, et leur cote maxima $N_u + c_u \leq \Gamma$; tous les seconds membres se réduiront d'ailleurs à des constantes schématiques, et il en sera ainsi, notamment, de ceux d'entre eux qui correspondent à des premiers membres de cote inférieure à Γ; enfin, il résulte immédiatement du n° 3 que les conditions 2° et 3° de notre énoncé se trouvent satisfaites en ce qui concerne l'inconnue u.

Si le résidu de la coupure relative à cette inconnue contient quelque fonction schématique non dégénérée, nous le mettrons sous la forme spécifiée au n° 4, en prenant pour P la valeur $\Gamma - c_u$, au moins égale à N_u : dans le groupe correspondant de conditions initiales, l'ordre maximum des premiers membres sera alors $\Gamma - c_u$, et leur cote maxima $(\Gamma - c_u) + c_u = \Gamma$; à tous les premiers membres d'ordre inférieur à $\Gamma - c_u$, c'est-à-dire de cote inférieure à Γ, correspondront comme seconds membres, des constantes schématiques; enfin, les conditions 2° et 3° de notre énoncé se trouveront encore satisfaites en ce qui concerne l'inconnue u.

Ce qui vient d'être dit pour cette inconnue doit être répété pour toutes les autres.

Il nous reste, pous achever notre démonstration, à faire voir que, dans les premiers membres des conditions initiales, la cote maxima est égale à Γ. Or, il résulte de ce que nous venons de dire que, dans le groupe partiel relatif à u, la cote maxima des premiers membres est égale à $N_u + c_u$ ou à Γ, suivant que les seconds membres se réduisent tous ou non à des constantes schématiques. Considérant alors l'ensemble des groupes, on voit que, si quelqu'un de leurs seconds membres est une fonction schématique non dégénérée, la cote maxima des premiers membres est Γ, et que, si tous leurs seconds membres sans exception se réduisent à des constantes schématiques, la cote maxima des premiers membres est le plus grand des entiers

$$N_u + c_u, \quad N_v + c_v, \quad N_w + c_w, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire encore Γ.

Observons, en terminant, qu'en vertu de la dernière partie 3° de notre énoncé, la cote maxima des premiers membres de S ne peut surpasser $\Gamma + 1$: *Si donc on désigne par* γ *la cote minima des divers premiers membres de* S, *et par* c *la cote d'un premier membre quelconque de* S, *on a la double relation*

$$\gamma \leqq c \leqq \Gamma + 1.$$

CHAPITRE II.

PROPOSITIONS SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES, HOMOGÈNES, ET A COEFFICIENTS CONSTANTS.

7. Si, dans un système différentiel, chaque équation, considérée isolément, est linéaire, homogène et à coefficients constants par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées, le système sera dit *linéaire, homogène et à coefficients constants*.

Considérons actuellement *deux systèmes différentiels* S, T *impliquant les mêmes fonctions inconnues des mêmes variables indépendantes, et dont chacun soit linéaire, homogène et à coefficients constants*. Deux systèmes de cette sorte seront dits *numériquement équivalents*, si, en assimilant pour un instant les fonctions inconnues et leurs dérivées de tous ordres à autant de variables indépendantes distinctes, chacun d'eux se trouve être une conséquence de l'autre.

Cette définition posée, nous établirons successivement les points suivants :

1° *Si les systèmes considérés* S, T *sont numériquement équivalents, les deux systèmes qui s'en déduisent respectivement par toutes les différentiations possibles de l'ordre m ne peuvent manquer de l'être aussi.*

Désignons, en effet, par $S^{(m)}$ et $T^{(m)}$ les systèmes respectivement déduits de S et T par toutes les différentiations possibles de l'ordre m : il s'agit de prouver que chacun des systèmes $S^{(m)}$, $T^{(m)}$ est une conséquence numérique de l'autre, par exemple que $T^{(m)}$ est une conséquence numérique de $S^{(m)}$.

Or, toute équation de $T^{(m)}$ se déduit de quelque équation de T par une différentiation de l'ordre m; d'autre part, à cause de l'équivalence numérique de S et T, l'équation considérée de T peut se déduire d'équations convenablement choisies de S en les multipliant par des constantes convenablement choisies et ajoutant membre à membre;

si donc on effectue sur cette équation de T une différentiation de l'ordre m, il est clair que la relation résultante peut se déduire d'équations convenablement choisies de $S^{(m)}$ en les multipliant par des constantes convenablement choisies et ajoutant membre à membre; elle est donc une conséquence numérique de $S^{(m)}$.

2° *Si les systèmes considérés* S, T *sont numériquement équivalents, les deux systèmes qui s'en déduisent respectivement par un même changement linéaire et homogène des variables indépendantes ne peuvent manquer de l'être aussi.*

Désignons, en effet, par n l'ordre le plus élevé des dérivées figurant dans S et T; par Φ_n les formules qui lient les anciennes dérivées d'ordres 1, 2, ..., n des inconnues aux nouvelles; par $\left[[S]\right]$ et $\left[[T]\right]$ les systèmes respectivement déduits de S et T à l'aide de la transformation dont il s'agit. Je dis que les systèmes $\left[[S]\right]$ et $\left[[T]\right]$ sont numériquement équivalents, c'est-à-dire que chacun d'eux est une conséquence numérique de l'autre, par exemple que $\left[[T]\right]$ est une conséquence numérique de $\left[[S]\right]$.

Effectivement, si l'on assimile pour un instant les fonctions inconnues, leurs anciennes dérivées des ordres 1, 2, ..., n et leurs dérivées nouvelles des mêmes ordres à autant de variables indépendantes distinctes, il est clair que $\left[[T]\right]$ est une conséquence numérique de (T, Φ_n), par suite de (S, Φ_n), par suite de $\left(\left[[S]\right], \Phi_n\right)$. Cela étant, puisque les anciennes dérivées ne figurent ni dans $\left[[S]\right]$ ni dans $\left[[T]\right]$, et qu'elles se trouvent exprimées par Φ_n à l'aide des nouvelles, $\left[[T]\right]$ ne peut manquer d'être une conséquence numérique de $\left[[S]\right]$.

3° *Considérant les équations du système* S, *effectuons sur elles toutes les différentiations possibles de l'ordre m; puis sur les équations résultantes un changement de variables linéaire et homogène. Considérant ensuite les équations du système* T, *effectuons sur elles le changement de variables dont il s'agit, puis sur les équations résultantes toutes les différentiations possibles de l'ordre m (relativement aux nouvelles variables). Cela étant, si les systèmes* S, T *sont numériquement équivalents, les deux systèmes qui s'en déduisent respectivement par ces deux suites d'opérations ne peuvent manquer de l'être aussi.*

A. Étant donnée une relation différentielle linéaire, homogène et à coefficients constants, effectuons sur elle toutes les différentiations premières, puis sur les équations résultantes un changement de variables linéaire et homogène. Renversons maintenant l'ordre des opérations, c'est-à-dire effectuons d'abord sur l'équation proposée le changement de variables dont il s'agit, puis sur l'équation transformée toutes les différentiations premières (relativement aux nouvelles variables). Je dis que *les deux systèmes linéaires, homogènes et à coefficients constants, respectivement obtenus par ces deux suites d'opérations, sont numériquement équivalents.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait trois variables indépendantes, et que les anciennes, x, y, z, soient liées aux nouvelles, x', y', z', par les relations

$$(12)\qquad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{cases}$$

Soit, d'autre part,

$$(13)\qquad \mathrm{M}u + \ldots + \mathrm{N}\frac{\partial^{g+h+k} u}{\partial x^g\, \partial y^h\, \partial z^k} + \ldots = 0$$

la relation différentielle proposée entre les fonctions inconnues u, ... Soit, enfin,

$$(14)\qquad \frac{\partial^{g+h+k} u}{\partial x^g\, \partial y^h\, \partial z^k} = \sum \mathrm{A}_{p',q',r'} \frac{\partial^{p'+q'+r'} u}{\partial x'^{p'}\, \partial y'^{q'}\, \partial z'^{r'}}$$

la formule qui exprime la dérivée ancienne $\frac{\partial^{g+h+k} u}{\partial x^g\, \partial y^h\, \partial z^k}$ à l'aide des dérivées nouvelles du même ordre : dans le second membre de cette formule, la sommation doit être étendue à toutes les valeurs des entiers p', q', r' pour lesquelles on a

$$p' + q' + r' = g + h + k,$$

et $\mathrm{A}_{p',q',r'}$ désigne une fonction entière et homogène, de degré $g+h+k$, des coefficients de la transformation. Effectuons d'abord sur l'équation proposée (13) les différentiations premières relatives à x, y, z, puis sur les trois équations résultantes la transformation (12). Il vient, par la différentiation,

$$(15)\quad \begin{cases} M\dfrac{\partial u}{\partial x}+\ldots+N\dfrac{\partial^{(g+1)+h+k}}{\partial x^{g+1}\,\partial y^h\,\partial z^k}+\ldots=0, \\ M\dfrac{\partial u}{\partial y}+\ldots+N\dfrac{\partial^{g+(h+1)+k}u}{\partial x^{g}\,\partial y^{h+1}\,\partial z^k}+\ldots=0, \\ M\dfrac{\partial u}{\partial z}+\ldots+N\dfrac{\partial^{g+h+(k+1)}u}{\partial x^{g}\,\partial y^{h}\,\partial z^{k+1}}+\ldots=0. \end{cases}$$

D'autre part, la formule qui exprime la dérivée ancienne

$$\frac{\partial^{(g+1)+h+k}u}{\partial x^{g+1}\,\partial y^h\,\partial z^k}$$

à l'aide des dérivées nouvelles du même ordre peut, si l'on pose

$$\frac{\partial^{g+h+k}u}{\partial x^{g}\,\partial y^h\,\partial z^k}=u_{g,h,k},$$

s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial^{(g+1)+h+k}u}{\partial x^{g+1}\,\partial y^h\,\partial z^k}=\frac{\partial u_{g,h,k}}{\partial x}=\alpha_1\frac{\partial u_{g,h,k}}{\partial x'}+\alpha_2\frac{\partial u_{g,h,k}}{\partial y'}+\alpha_3\frac{\partial u_{g,h,k}}{\partial z'},$$

ou, si l'on a égard à la formule (14),

$$\frac{\partial^{(g+1)+h+k}u}{\partial x^{g+1}\,\partial y^h\,\partial z^k}=\sum A_{p',q',r'}\left[\alpha_1\frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'}u}{\partial x'^{p'+1}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'}}+\alpha_2\frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'+1}\,\partial z'^{r'}}\right.$$
$$\left.+\alpha_3\frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'+1}}\right];$$

et l'on aura, par un calcul semblable,

$$\frac{\partial^{g+(h+1)+k}u}{\partial x^{g}\,\partial y^{h+1}\,\partial z^k}=\sum A_{p',q',r'}\left[\beta_1\frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'}u}{\partial x'^{p'+1}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'}}+\beta_2\frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'+1}\,\partial z'^{r'}}\right.$$
$$\left.+\beta_3\frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'+1}}\right],$$

$$\frac{\partial^{g+h+(k+1)}u}{\partial x^{g}\,\partial y^{h}\,\partial z^{k+1}}=\sum A_{p',q',r'}\left[\gamma_1\frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'}u}{\partial x'^{p'+1}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'}}+\gamma_2\frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'+1}\,\partial z'^{r'}}\right.$$
$$\left.+\gamma_3\frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'+1}}\right],$$

les sommations des seconds membres étant étendues aux mêmes valeurs de p', q', r' que précédemment. Cela étant, la transformation (12), appliquée aux formules (15), donnera

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{M}\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x'}+\alpha_2\frac{\partial u}{\partial y'}+\alpha_3\frac{\partial u}{\partial z'}\right)+\ldots\\
&\quad+\mathrm{N}\sum \mathrm{A}_{p',q',r'}\left(\alpha_1\frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'}u}{\partial x'^{p'+1}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'}}+\alpha_2\frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'+1}\,\partial z'^{r'}}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\alpha_3\frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'+1}}\right)+\ldots=0,\\
&\mathrm{M}\left(\beta_1\frac{\partial u}{\partial x'}+\beta_2\frac{\partial u}{\partial y'}+\beta_3\frac{\partial u}{\partial z'}\right)+\ldots\\
&\quad+\mathrm{N}\sum \mathrm{A}_{p',q',r'}\left(\beta_1\frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'}u}{\partial x'^{p'+1}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'}}+\beta_2\frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'+1}\,\partial z'^{r'}}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\beta_3\frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'+1}}\right)+\ldots=0,\\
&\mathrm{M}\left(\gamma_1\frac{\partial u}{\partial x'}+\gamma_2\frac{\partial u}{\partial y'}+\gamma_3\frac{\partial u}{\partial z'}\right)+\ldots\\
&\quad+\mathrm{N}\sum \mathrm{A}_{p',q',r'}\left(\gamma_1\frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'}u}{\partial x'^{p'+1}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'}}+\gamma_2\frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'+1}\,\partial z'^{r'}}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\gamma_3\frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'+1}}\right)+\ldots=0.
\end{aligned}\right.$$

Effectuons maintenant sur l'équation proposée (13) la transformation (12), puis sur l'équation transformée les différentiations premières relatives à x', y', z'. Il vient ainsi

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{M}\frac{\partial u}{\partial x'}+\ldots+\mathrm{N}\sum \mathrm{A}_{p',q',r'}\frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'}u}{\partial x'^{p'+1}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'}}+\ldots=0,\\
&\mathrm{M}\frac{\partial u}{\partial y'}+\ldots+\mathrm{N}\sum \mathrm{A}_{p',q',r'}\frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'+1}\,\partial z'^{r'}}+\ldots=0,\\
&\mathrm{M}\frac{\partial u}{\partial z'}+\ldots+\mathrm{N}\sum \mathrm{A}_{p',q',r'}\frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'+1}}+\ldots=0.
\end{aligned}\right.$$

Il s'agit de faire voir que les systèmes (16) et (17) sont numériquement équivalents.

Multiplions à cet effet les équations (16) respectivement par $\frac{\partial x}{\partial x'}$, $\frac{\partial y}{\partial x'}$, $\frac{\partial z}{\partial x'}$, et ajoutons membre à membre; en tenant compte des relations

$$
\begin{aligned}
1 &= \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial x'} + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial x'} + \gamma_1 \frac{\partial z}{\partial x'},\\
0 &= \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial x'} + \beta_2 \frac{\partial y}{\partial x'} + \gamma_2 \frac{\partial z}{\partial x'},\\
0 &= \alpha_3 \frac{\partial x}{\partial x'} + \beta_3 \frac{\partial y}{\partial x'} + \gamma_3 \frac{\partial z}{\partial x'},
\end{aligned}
$$

obtenues par la différentiation relative à x' des formules (12), on retombe sur la première formule (17), et l'on retomberait par un calcul analogue sur les deux suivantes.

Inversement, il suffit de multiplier les équations (17) respectivement par α_1, α_2, α_3 et d'ajouter membre à membre pour retomber sur la première formule (16), et l'on retomberait semblablement sur les deux suivantes.

B. La proposition 3° *est exacte lorsque les systèmes* S, T *sont identiques entre eux, et qu'en même temps l'entier m est égal à* 1.

C'est là une conséquence immédiate de *A*.

C. La proposition 3° *est exacte toutes les fois que l'entier m est égal à* 1.

Effectivement, les systèmes S, T étant numériquement équivalents, les systèmes S', T', qui s'en déduisent respectivement par des différentiations premières sont eux-mêmes numériquement équivalents (1°); et, cela étant, les deux systèmes respectivement déduits de S' et T' par un même changement de variables linéaire et homogène jouissent de la même propriété (2°).

Je considère maintenant les trois suites d'opérations décrites ci-après :

Première suite. — Effectuer sur le système T un changement de variables linéaire et homogène, puis sur le système résultant toutes les différentiations premières possibles.

Deuxième suite. — Effectuer sur le système T toutes les différentiations premières possibles, puis sur le système résultant le changement de variables dont nous avons parlé.

Troisième suite. — Effectuer sur le système S toutes les différentiations premières possibles, puis sur le système résultant le changement de variables.

Des trois systèmes ainsi obtenus, le premier est numériquement équivalent au deuxième en vertu de *B*, et le deuxième numériquement équivalent au troisième en vertu de la remarque faite au début de *C*; donc le premier est numériquement équivalent au troisième.

D. Si la proposition 3° est vraie pour une valeur de l'entier m, elle ne peut manquer de l'être pour la valeur suivante $m+1$.

Considérons en effet les cinq suites d'opérations décrites ci-après :

Première suite. — Effectuer sur le système T un changement de variables linéaire et homogène, puis sur le système résultant toutes les différentiations de l'ordre $m+1$.

Deuxième suite. — Effectuer sur le système T le changement de variables dont il s'agit, puis sur le système transformé toutes les différentiations premières, enfin sur le système résultant toutes les différentiations de l'ordre m.

Troisième suite. — Effectuer sur le système S toutes les différentiations premières, puis sur le système résultant le changement de variables, enfin sur le système provenant de la transformation toutes les différentiations de l'ordre m.

Quatrième suite. — Effectuer sur le système S toutes les différentiations premières, puis sur le système résultant toutes les différentiations de l'ordre m, enfin sur le système obtenu en dernier lieu le changement de variables.

Cinquième suite. — Effectuer sur le système S toutes les différentiations de l'ordre $m+1$, puis sur le système résultant le changement de variables.

Il est facile de voir que les cinq systèmes respectivement obtenus par ces cinq suites d'opérations sont, de proche en proche, numériquement équivalents. Le premier l'est évidemment au deuxième; le deuxième l'est au troisième en vertu de *C* et de 1°; le troisième au quatrième en vertu de ce qui est admis pour la valeur m; enfin le quatrième l'est évidemment au cinquième. Il en résulte que le premier équivaut numériquement au cinquième, ce qu'il s'agissait de prouver.

E. Le simple rapprochement de *C* et *D* suffit à établir l'exactitude générale de la proposition 3°.

8. Soient x, y, ... diverses variables indépendantes, u, v, ... diverses fonctions inconnues de ces variables. Aux variables x, y, ... attribuons des cotes respectives toutes égales à 1, et aux inconnues u, v, ... des cotes respectives quelconques [1]; puis, considérant soit une fonction composée différentielle de u, v, ..., soit une relation différentielle entre u, v, ..., nommons *cote* de l'expression ou de la relation dont il s'agit la cote maxima des inconnues et dérivées qui y figurent *effectivement*. Cela étant, il est clair que toute différentiation première exécutée suivant l'algorithme des fonctions composées sur une expression ou sur une relation différentielle augmente de 1 la cote de cette relation ou expression; il est clair aussi que, si l'on effectue sur une relation différentielle un changement linéaire et homogène des variables indépendantes en attribuant aux variables nouvelles des cotes toutes égales à 1 et en conservant aux fonctions inconnues leurs cotes respectives, la relation transformée est de même cote que celle d'où elle provient.

Relativement aux systèmes différentiels, quels qu'ils soient, où l'*on affecte*, comme il vient d'être dit, *les variables indépendantes de cotes toutes égales à* 1 et les fonctions inconnues de cotes quelconques, nous poserons une fois pour toutes les conventions d'écriture suivantes. *Le système différentiel étant désigné par une lettre majuscule*, S :

1° *La notation* s_C (lettre minuscule affectée de l'indice C) *désignera, parmi les équations du système* S, *l'ensemble de celles qui ont la cote* C (C est alors un entier algébrique au moins égal à la cote minima des équations du système S, et au plus égal à leur cote maxima).

2° *La notation* S_C (lettre majuscule affectée de l'indice C) *désignera,*

---

(1) Voir l'Introduction.

parmi les équations appartenant au système S *ou s'en déduisant par de simples différentiations* (d'ordres quelconques), *l'ensemble de celles qui ont la cote* C (C est alors un entier algébrique au moins égal à la cote minima des équations du système S, et pouvant surpasser tout entier donné).

9. Soient S, T deux systèmes différentiels impliquant les mêmes fonctions inconnues des mêmes variables indépendantes, et *dont chacun soit linéaire, homogène, et à coefficients constants*. Supposons, en outre, qu'en attribuant aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, et aux fonctions inconnues des cotes respectives déterminées, *chaque équation de* S *ou* T *ne contienne effectivement que des quantités toutes de même cote* (cette cote pouvant varier d'une équation à l'autre). Désignons enfin par C un entier algébrique quelconque, au moins égal à la cote minima des relations de S et T. Cela étant :

1° *Si les systèmes* S, T *sont numériquement équivalents, les systèmes* S_C, T_C, *dont chacun est linéaire, homogène, et à coefficients constants par rapport aux quantités (inconnues et dérivées) de cote* C, *sont eux-mêmes numériquement équivalents.*

Désignons, en effet, par δ la cote minima des équations de nos deux systèmes, par $\delta + \lambda$ leur cote maxima ($\lambda \geqq 0$), et par

$$s_{\delta+p}^{(n)}, \quad t_{\delta+p}^{(n)} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, \lambda),$$

l'ensemble des relations respectivement déduites de $s_{\delta+p}$ et $t_{\delta+p}$ par toutes les différentiations possibles de l'ordre n; désignons, en outre, par k un entier positif quelconque, et considérons le Tableau :

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{lllllll} s_\delta, & s'_\delta, & \ldots, & s_\delta^{(\lambda)}, & s_\delta^{(\lambda+1)}, & \ldots, & s_\delta^{(\lambda+k)}, \\ & s_{\delta+1}, & \ldots, & s_{\delta+1}^{(\lambda-1)}, & s_{\delta+1}^{(\lambda)} & \ldots, & s_{\delta+1}^{(\lambda+k-1)}, \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ & & & s_{\delta+\lambda}, & s'_{\delta+\lambda}, & \ldots, & s_{\delta+\lambda}^{(k)}. \end{array} \right.$$

En extrayant de ce Tableau l'une ou l'autre des colonnes verticales successives, on obtiendra l'un ou l'autre des systèmes successifs

$$(19)\qquad S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_{\delta+\lambda},\quad S_{\delta+\lambda+1},\quad \ldots,\quad S_{\delta+\lambda+k}.$$

Les systèmes

$$(20)\qquad T_\delta,\quad T_{\delta+1},\quad \ldots,\quad T_{\delta+\lambda},\quad T_{\delta+\lambda+1},\quad \ldots,\quad T_{\delta+\lambda+k}$$

se formeront de la même manière à l'aide du Tableau

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{llllllll} t_\delta, & t'_\delta, & \ldots, & t_\delta^{(\lambda)}, & t_\delta^{(\lambda+1)}, & \ldots, & t_\delta^{(\lambda+k)}, & \\ & t_{\delta+1}, & \ldots, & t_{\delta+1}^{(\lambda-1)}, & t_{\delta+1}^{(\lambda)}, & \ldots, & t_{\delta+1}^{(\lambda+k-1)}, & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, & \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, & \\ & & & t_{\delta+\lambda}, & t'_{\delta+\lambda}, & \ldots, & t_{\delta+\lambda}^{(k)}. & \end{array}\right.$$

Cela étant, puisque chaque équation de S ou T, considérée isolément, ne contient que des quantités toutes de même cote, l'équivalence numérique de S et T entraîne de toute nécessité cette conséquence, que les systèmes

$$s_\delta,\quad s_{\delta+1},\quad \ldots,\quad s_{\delta+\lambda}$$

sont respectivement équivalents aux systèmes

$$t_\delta,\quad t_{\delta+1},\quad \ldots,\quad t_{\delta+\lambda}.$$

Si donc, on a égard à la proposition 1° du n° 7, on voit que les termes correspondants des Tableaux (18) et (21) désignent des systèmes numériquement équivalents : il en résulte que les systèmes (19) sont respectivement équivalents aux systèmes (20), ce qu'il s'agissait de prouver.

2° Les mêmes notations étant adoptées que dans 1°, effectuons sur les systèmes S_C, T un même changement linéaire et homogène des variables indépendantes, désignons par $\big[[S_C]\big]$, $\big[[T]\big]$ les systèmes résultants, et, dans ces systèmes, attribuons aux nouvelles variables des cotes respectives toutes égales à 1, en conservant aux fonctions inconnues leurs cotes primitives. Cela étant, *si les systèmes* S, T *sont numé-*

riquement équivalents, les systèmes $\big[[S_C]\big]$, $\big[[T]\big]_C$, *dont chacun est linéaire, homogène, et à coefficients constants par rapport aux inconnues et aux dérivées nouvelles de cote* C, *sont eux-mêmes numériquement équivalents.*

Dans la démonstration ci-après, nous conviendrons, toutes les fois que nous aurons à effectuer sur un groupe quelconque de relations différentielles la transformation dont parle l'énoncé, de désigner le groupe transformé par la même notation que le groupe primitif, mise deux fois entre crochets. Cela étant, pour avoir l'un ou l'autre des systèmes successifs

$$(22)\quad \big[[S_\delta]\big],\quad \big[[S_{\delta+1}]\big],\quad \ldots,\quad \big[[S_{\delta+\lambda}]\big],\quad \big[[S_{\delta+\lambda+1}]\big],\quad \ldots,\quad \big[[S_{\delta+\lambda+k}]\big],$$

il suffit de considérer le Tableau

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} \big[[s_\delta]\big], & \big[[s'_\delta]\big], & \ldots, & \big[[s_\delta^{(\lambda)}]\big], & \big[[s_\delta^{(\lambda+1)}]\big], & \ldots, & \big[[s_\delta^{\lambda+k}]\big], \\ & \big[[s_{\delta+1}]\big], & \ldots, & \big[[s_{\delta+1}^{(\lambda-1)}]\big], & \big[[s_{\delta+1}^{(\lambda)}]\big], & \ldots, & \big[[s_{\delta+1}^{(\lambda+k-1)}]\big], \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ & & & \big[[s_{\delta+\lambda}]\big], & \big[[s'_{\delta+\lambda}]\big], & \ldots, & \big[[s_{\delta+\lambda}^{(k)}]\big], \end{array}\right.$$

déduit de (18) par le changement des variables, et d'en extraire l'une ou l'autre des colonnes verticales successives. Les systèmes

$$(24)\quad \big[[T]\big]_\delta,\quad \big[[T]\big]_{\delta+1},\quad \ldots,\quad \big[[T]\big]_{\delta+\lambda},\quad \big[[T]\big]_{\delta+\lambda+1},\quad \ldots,\quad \big[[T]\big]_{\delta+\lambda+k}$$

se formeront de la même manière à l'aide du Tableau

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} \big[[t_\delta]\big], & \big[[t_\delta]\big]', & \ldots, & \big[[t_\delta]\big]^{(\lambda)}, & \big[[t_\delta]\big]^{(\lambda+1)}, & \ldots, & \big[[t_\delta]\big]^{(\lambda+k)}, \\ & \big[[t_{\delta+1}]\big], & \ldots, & \big[[t_{\delta+1}]\big]^{(\lambda-1)}, & \big[[t_{\delta+1}]\big]^{(\lambda)}, & \ldots, & \big[[t_{\delta+1}]\big]^{(\lambda+k-1)}, \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ & & & \big[[t_{\delta+\lambda}]\big], & \big[[t_{\delta+\lambda}]\big]', & \ldots, & \big[[t_{\delta+\lambda}]\big]^{(k)}, \end{array}\right.$$

où $\big[[t_{\delta+p}]\big]^{(n)}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots, \lambda)$ désigne l'ensemble des relations déduites de $\left[\left[t_{\delta+p}\right]\right]$ par toutes les différentiations possibles de l'ordre n.

Cela posé, l'équivalence numérique de S et T entraîne, comme dans 1°, cette conséquence, que les systèmes

$$s_\delta, \quad s_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad s_{\delta+\lambda}$$

équivalent respectivement aux systèmes

$$t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_{\delta+\lambda}.$$

Or, si l'on se reporte à l'énoncé 3° du n° 7, l'équivalence numérique des systèmes

$$s_{\delta+p}, \quad t_{\delta+p}$$

entraîne celle des systèmes

$$\left[\left[s_{\delta+p}^{(n)}\right]\right], \quad \left[\left[t_{\delta+p}\right]\right]^{(n)};$$

les termes correspondants des Tableaux (23) et (25) désignent donc des systèmes numériquement équivalents, et, dès lors, les systèmes (22) équivalent respectivement aux systèmes (24), ce qu'il s'agissait de prouver.

10. Considérons actuellement un système différentiel S remplissant les diverses conditions suivantes :

1° *Le système* S, *linéaire, homogène et à coefficients constants, est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et, si l'on partage les équations en groupes suivant que leurs premiers membres appartiennent à telle ou telle inconnue, aucun des groupes ainsi obtenus ne contient plus d'une équation.*

2° *Les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale, et, moyennant l'attribution aux variables indépendantes de cotes respectives toutes égales à* 1, *et aux fonctions inconnues de cotes respectives déterminées, chacun d'eux ne contient que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote soit exactement égale à celle du premier membre correspondant.*

3° *En supposant que les conditions initiales du système* S *aient été mises sous la forme spécifiée au* n° 6 (ce qui est possible, puisque, en vertu de 1°, aucun des premiers membres n'est la dérivée de quelque autre), *et en désignant par* Γ *la cote maxima des premiers membres de ces conditions initiales, par* γ *la cote minima des premiers membres de* S, *chacun des systèmes*

$$(26)\qquad S_{\gamma},\quad S_{\gamma+1},\quad \ldots,\quad S_{\Gamma+1},$$

composé d'équations en nombre précisément égal à celui des dérivées principales de cote égale à son indice (n° 8), *est résoluble par rapport aux dérivées principales dont il s'agit.*

Toutes les conditions ci-dessus énumérées (1°, 2° et 3°) étant satisfaites, nous ramènerons, comme on le verra dans un instant (n° 11, *inf.*), le système différentiel S à un système du premier ordre, Σ, possédant vis-à-vis de S certaine propriété qui nous sera plus loin fort utile: mais il nous faut, avant de procéder à cet exposé, présenter une remarque indispensable.

Considérons les groupes (26), dont chacun, comme il a été dit dans 3°, est résoluble par rapport aux dérivées principales de cote égale à son indice, et qui comprennent respectivement les divers groupes

$$(27)\qquad s_{\gamma},\quad s_{\gamma+1},\quad \ldots,\quad s_{\Gamma+1}$$

du système S (n° 6 *in fine* et n° 8); désignons, en outre, par

$$(28)\qquad \psi_{\gamma},\quad \psi_{\gamma+1},\quad \ldots,\quad \psi_{\Gamma+1}$$

les groupes respectivement déduits de (26) par les résolutions dont il s'agit : comme les groupes (27) ne contiennent déjà, par hypothèse, aucune dérivée principale dans leurs seconds membres, ils se trouvent, de toute nécessité, respectivement compris dans les groupes (28). Cela étant, si l'on désigne par

$$(29)\qquad \upsilon_{\gamma},\quad \upsilon_{\gamma+1},\quad \ldots,\quad \upsilon_{\Gamma+1}$$

des groupes respectivement extraits de (28) sous la seule condition de comprendre respectivement les groupes (27), par Υ l'ensemble des groupes (29), et par C un entier (algébrique) quelconque au moins égal à γ, *les systèmes* S_C, Υ_C *sont*, comme nous allons l'établir, *numériquement équivalents*.

Effectivement, le système S faisant partie de Υ [puisque les groupes (27) sont respectivement compris dans les groupes (29)], le système S_C fait partie de Υ_C, et, par suite, en est une conséquence numérique.

Réciproquement, désignons par Ψ et T les systèmes respectifs (28) et (26). Le système Υ faisant partie de Ψ, le système Υ_C fait partie de Ψ_C, et, par suite, en est une conséquence numérique. D'ailleurs, les systèmes Ψ et T satisfaisant à toutes les conditions requises au début du numéro précédent, 9, leur équivalence numérique entraîne celle des systèmes Ψ_C, T_C : le système Υ_C, conséquence numérique de Ψ_C, est donc aussi une conséquence numérique de T_C. Finalement, le système T_C étant manifestement identique à S_C, le système Υ_C est une conséquence numérique de S_C.

11. *Formation du système* Σ, ci-dessus annoncé (n° 10).

Étant donné un système différentiel du premier ordre, résolu par rapport à certaines dérivées (premières) des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x).

Le système Σ étant, comme nous allons le voir, du premier ordre, nous en écrirons les diverses équations dans un quadrillage rectangulaire conformément aux indications ci-après, en ne nous occupant tout d'abord que des premiers membres.

Les conditions initiales du système S ayant été mises, comme nous l'avons dit plus haut, sous la forme spécifiée au n° 6, désignons par x, y, ... les variables indépendantes, par u l'une des inconnues engagées dans S, par $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \dots}$ l'un des premiers membres qui figurent dans le groupe de conditions relatif à u, et par $F_{\alpha,\beta,\dots}$ le second membre correspondant. Cela étant, nous prendrons dans Σ, pour l'une de nos inconnues, la quantité $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \dots}$, que nous désignerons par $u_{\alpha,\beta,\dots}$; puis, en supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq variables indépendantes, x, y, z, s, t, et que la fonction schématique $F_{\alpha,\beta,\dots}$ dépende de s, t, nous écrirons dans les cases (x), (y), (z) de la colonne $(u_{\alpha,\beta,\dots})$ les premiers membres

$$\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial x} = \dots, \qquad \frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial y} = \dots, \qquad \frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial z} = \dots,$$

et nous laisserons vides les cases (s) et (t) de cette même colonne; au cas où $F_{\alpha,\beta,\dots}$ se réduirait à une simple constante schématique, les cases de la colonne considérée seraient ainsi toutes pleines. Ce que nous venons de faire pour l'une des conditions initiales appartenant au groupe relatif à u, nous le ferons pour toutes les autres du même groupe; et ce que nous aurons fait pour l'inconnue u, nous le ferons successivement pour toutes. Nous aurons ainsi un quadrillage rectangulaire contenant des cases pleines et des cases vides; d'ailleurs, quelques seconds membres que nous écrivions ultérieurement dans les cases pleines, on voit, dès maintenant, que, si l'on forme successivement, dans l'ancien système, puis dans le nouveau, un ensemble composé des inconnues et de leurs dérivées paramétriques, les deux ensembles ainsi obtenus se correspondront terme à terme, et que le second se déduira du premier par de simples changements de notations; de même, et toujours à la notation près, l'économie des conditions initiales sera identique dans les deux systèmes. Quant aux dérivées principales du nouveau système, elles coïncideront, à la notation près, les unes avec des dérivées principales, les autres avec des dérivées paramétriques de l'ancien.

Il va sans dire que nous conservons aux variables indépendantes et aux anciennes inconnues les cotes respectives qu'elles avaient dans le système S, et que nous attribuons aux inconnues adjointes des cotes respectivement égales à celles des dérivées anciennes qu'elles admettent pour homonymes. Cela étant, il convient d'observer que les fonctions inconnues du système Σ dont la cote tombe au-dessous de Γ

n'ont, dans le système Σ, aucune dérivée paramétrique, puisqu'elles se trouvent, dans les conditions initiales, égalées à de simples constantes schématiques, et que, par suite, toutes les cases de leurs colonnes sont pleines. En conséquence, toute dérivée paramétrique du système Σ possède une cote au moins égale à $\Gamma + 1$, et toute dérivée paramétrique de cote $\Gamma + 1$ ne peut appartenir qu'à une fonction inconnue de cote Γ, par suite est du premier ordre.

Occupons-nous maintenant des seconds membres du système Σ, et considérons, pour fixer les idées, l'équation qui, dans Σ, a pour premier membre $\frac{\partial u_{\alpha, \beta, \ldots}}{\partial x}\cdot$ A la notation près, ce premier membre coïncide avec une dérivée ancienne

$$(30) \qquad \frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta+\ldots} u}{\partial x^{\alpha+1} \partial y^{\beta} \ldots},$$

dont la cote ne dépasse pas $\Gamma + 1$.

Si la dérivée (30) est principale par rapport à S, il résulte des hypothèses spécifiées au début du n° 10, d'une part, qu'elle admet une certaine expression linéaire, homogène et à coefficients constants par rapport aux inconnues et aux dérivées paramétriques de même cote, d'autre part, que, dans le cas où cette dérivée principale coïncide avec un premier membre de S, l'expression dont il s'agit coïncide avec le second membre correspondant : cela étant, dans l'expression considérée de la dérivée principale (30), nous remplacerons toutes les dérivées paramétriques par leurs notations nouvelles, et nous égalerons $\frac{\partial u_{\alpha, \beta, \ldots}}{\partial x}$ à l'expression ainsi modifiée. Or, il est facile de voir que, après cette modification d'écriture, l'expression est ou d'ordre zéro ou du premier ordre, suivant que la dérivée (30) a une cote inférieure ou égale à $\Gamma + 1$. Dans le premier cas, en effet, elle ne peut contenir que les inconnues anciennes et les expressions nouvelles de leurs dérivées paramétriques de cote inférieure ou égale à Γ, ou, en d'autres termes, que les inconnues anciennes et nouvelles. Dans le second cas, elle ne peut contenir que les inconnues anciennes et les expressions nouvelles de leurs dérivées paramétriques de cote inférieure ou égale à $\Gamma + 1$, ou, en d'autres termes, que les inconnues anciennes et nouvelles avec des dérivées paramétriques premières. Dans l'un et l'autre cas, d'ailleurs, s'il arrive que (30) coïncide avec un premier membre de S, l'équation considérée du système Σ coïncide, à la notation près, avec l'équation du système S qui a pour premier membre la dérivée (30).

Supposons maintenant que la dérivée (30) soit paramétrique par rapport à S. En pareil cas, il existe, dans le système Σ, une dérivée paramétrique ou fonction inconnue (et une seule) qui, à la notation près, coïncide avec elle, et à laquelle nous devrons alors égaler $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial x}$: si la dérivée (30) est de cote inférieure ou égale à Γ, $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial x}$ sera identique, à la notation près, à une inconnue adjointe; si elle est de cote $\Gamma+1$, $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial x}$ sera identique, à la notation près, à une dérivée paramétrique première du système Σ.

12. Nous venons de constater que le système Σ est du premier ordre et qu'il se trouve résolu par rapport à quelques-unes des dérivées (premières) des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées. Il est clair, en outre, que la cote maxima des premiers membres est $\Gamma+1$, et que chaque second membre est linéaire, homogène et à coefficients constants par rapport aux inconnues et aux dérivées paramétriques qui ont même cote que le premier membre correspondant.

J'établirai maintenant la propriété suivante :

Si l'on désigne par H *l'ensemble des relations obtenues en égalant chacune des inconnues adjointes à la dérivée ancienne qu'elle admet pour homonyme, les systèmes* Σ_C *et* (H_C, S_C) *sont numériquement équivalents* (nº 8).

I. *Si l'on considère l'une quelconque des inconnues adjointes de* Σ, *il existe dans le système* Σ *une relation égalant l'inconnue dont il s'agit à une quantité homonyme, dérivée première de quelque inconnue ancienne ou adjointe.*

Effectivement, les inconnues anciennes et nouvelles de Σ ont respectivement pour homonymes les premiers membres des conditions initiales de S, et, dès lors, en vertu de la propriété 2° du nº 6, toute inconnue nouvelle de Σ a pour homonyme une dérivée première de quelque autre inconnue, ancienne ou nouvelle; comme d'ailleurs cette dernière inconnue est de cote nécessairement inférieure à celle de la première, par suite inférieure à Γ, elle n'admet dans le système Σ aucune dérivée paramétrique; on a donc été conduit, dans la formation de ce système, à égaler entre elles les deux quantités homonymes dont il s'agit.

II. *Toute équation de* S *figure dans* Σ *à la notation près.*

Effectivement, les conditions initiales de S étant mises, comme nous l'avons dit, sous la forme spécifiée au n° 6, les quantités qui y figurent comme premiers membres ont des cotes inférieures ou égales à Γ, et, d'autre part, chaque premier membre de S peut se déduire de l'une des quantités en question à l'aide d'une dérivation première, d'où résulte qu'il est de cote au plus égale à $\Gamma + 1$. Cela posé, considérons d'abord dans S un premier membre de cote inférieure à $\Gamma + 1$: la quantité dont il peut être considéré comme une dérivée première est alors de cote inférieure à Γ, et, comme les inconnues de Σ dont la cote tombe au-dessous de Γ n'ont dans Σ aucune dérivée paramétrique, on a été conduit, dans la formation de Σ, à écrire comme premier membre, à la notation près, le premier membre considéré de S. Considérons, en second lieu, dans S, un premier membre de cote $\Gamma + 1$: ce premier membre peut alors être considéré comme la dérivée première d'une quantité de cote Γ figurant dans les conditions initiales de S, et, comme cette dérivation première n'intéresse aucune des variables figurant dans la fonction schématique qui correspond à cette quantité, on a été conduit, cette fois encore, dans la formation de Σ, à écrire comme premier membre, à la notation près, le premier membre considéré de S.

Ainsi, tout premier membre de S figure, à la notation près, parmi les membres de Σ, et, par suite, en vertu d'une remarque faite au n° 11, toute équation de S figure, à la notation près, dans Σ.

III. Partageons actuellement les équations Σ en deux groupes, Σ', Σ'', suivant que leur premier membre coïncide (soit exactement, soit à la notation près) avec une dérivée *paramétrique* ou avec une dérivée *principale* du système S. A ce partage des équations Σ en deux groupes correspond, naturellement, un partage des équations Σ_C en deux groupes, Σ'_C, Σ''_C : je dis que *le système* H_C *équivaut numériquement à* Σ'_C.

En premier lieu, toute équation de Σ'_C est une conséquence numérique de H_C : car chaque équation de Σ' ayant pour premier et pour second membre deux quantités homonymes (nécessairement de même cote), une équation quelconque de Σ'_C a pour premier et pour second membre deux quantités homonymes de cote C; dès lors, ou bien le système H_C contient l'équation considérée de Σ'_C, ou bien il comprend deux équations égalant respectivement les deux quantités homonymes dont il s'agit à la dérivée ancienne qu'elles ont pour homonyme commun, auquel cas une combinaison très simple des deux équations de H_C fait retomber sur l'équation considérée de Σ'_C.

Réciproquement, toute équation de H_C est une conséquence numérique de Σ'_C. Considérons, en effet, une relation de H_C; dans cette relation, de cote C, figure une dérivée, d'ordre positif ou nul, de quelque inconnue adjointe. En vertu de l'alinéa I, il existe, dans le groupe Σ', une relation égalant l'inconnue dont il s'agit à une quantité homonyme, dérivée première de quelque autre inconnue ancienne ou nouvelle. Si cette deuxième inconnue est elle-même nouvelle, il existe encore, dans le groupe Σ', une relation l'égalant à quelque quantité homonyme, dérivée première d'une troisième inconnue. En continuant de cette manière, on finira par tomber sur une inconnue nouvelle qui, en vertu d'une relation de Σ', se trouvera égalée à quelque quantité homonyme, dérivée première d'une inconnue ancienne. Il est clair que les relations successivement considérées de Σ' ont des cotes qui décroissent progressivement d'une unité à partir de C. Cela étant, il est très facile de voir que si, dans le groupe formé par ces relations et par celles qui s'en déduisent à l'aide de différentiations, on considère celles de cote C, leur ensemble, qui fait partie de Σ'_C, régénère, moyennant une combinaison très simple, l'équation considérée de H_C.

IV. Revenant à notre énoncé général, partageons le système Σ'' en groupes successifs d'après les cotes croissantes des équations dont il se compose; en vertu du mode de formation de Σ, ces groupes,

$$\sigma''_{\gamma}, \quad \sigma''_{\gamma+1}, \quad \ldots, \quad \sigma''_{\Gamma+1},$$

seront, à la notation près, respectivement extraits des groupes (28), et, en vertu de l'alinéa II, ils comprendront respectivement, toujours à la notation près, les groupes (27). Si donc on se reporte à la remarque finale du n° 10, on voit aisément que les systèmes

$$(\mathrm{H}_{\mathrm{C}}, \Sigma''_{\mathrm{C}}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{H}_{\mathrm{C}}, \mathrm{S}_{\mathrm{C}})$$

sont numériquement équivalents; il en résulte, à cause de l'équivalence numérique de H_{C} et de Σ'_{C} (III), que les systèmes

$$(\Sigma'_{\mathrm{C}}, \Sigma''_{\mathrm{C}}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{H}_{\mathrm{C}}, \mathrm{S}_{\mathrm{C}}),$$

c'est-à-dire

$$\Sigma_{\mathrm{C}} \quad \text{et} \quad (\mathrm{H}_{\mathrm{C}}, \mathrm{S}_{\mathrm{C}}),$$

jouissent de la même propriété, ce qu'il s'agissait d'établir.

13. Étant donné un système du premier ordre résolu par rapport à certaines dérivées (premières) des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, nous dirons que ce système est *régulier*, si l'on peut adopter pour les lignes de son Tableau (n° 11), c'est-à-dire pour les variables du système, un ordre tel que les cases vides de chaque colonne se trouvent toutes situées au bas de cette colonne.

Il est facile d'apercevoir qu'un pareil système constitue un cas très particulier de ceux que j'ai nommés ailleurs *orthonomes* (¹). Si l'on attribue en effet à toutes les variables indépendantes la cote *première* 1 et à toutes les fonctions inconnues la cote *première* 0, on voit que la cote première de toute inconnue ou dérivée figurant dans un second membre du système est, suivant qu'il s'agit d'une inconnue ou d'une dérivée, inférieure ou égale à la cote première du premier membre correspondant; il suffit alors, pour établir l'orthonomie du système, de se reporter à divers passages d'un Mémoire publié ici même (²).

(¹) Pour la théorie des systèmes orthonomes, voir le Mémoire intitulé : *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta mathematica*, t. XXIII).

(²) *Sur les systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales* (*Annales de l'École Normale*, 1901, p. 421 et p. 466 à 469).

14. *Supposons actuellement que, dans un système différentiel* S, *les trois conditions* 1°, 2°, 3°, *énumérées au début du* n° 10, *se trouvent satisfaites. Supposons en outre que le système* Σ *du premier ordre, que l'on peut en pareil cas déduire du système* S (n° 11), *puisse, par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes, être transformé en un système régulier du premier ordre* (n° 13) *dont les colonnes contiennent respectivement les mêmes nombres d'équations que les colonnes correspondantes de* Σ.

Cela étant, considérons le système S_C (n° 8), *linéaire, homogène, et à coefficients constants par rapport aux inconnues et dérivées de cote* C, *et composé d'équations en nombre précisément égal à celui des dérivées principales de même cote du système* S : je dis que *le système* S_C *est nécessairement réduit.*

Désignons en effet par $\big|[\Sigma]\big|$, conformément à la convention adoptée au n° 9, le système du premier ordre déduit de Σ à l'aide du changement de variables (strictement effectué) dont parle l'énoncé, puis par Ω le système régulier déduit de $\big|[\Sigma]\big|$ à l'aide de la résolution voulue. Si l'on nomme δ la cote minima des équations de Σ, et Δ leur cote maxima (égale à $\Gamma + 1$), les groupes

$$(31)\qquad \sigma_\delta, \quad \sigma_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad \sigma_\Delta$$

du système Σ fournissent, par le changement de variables (strictement effectué), les groupes respectifs

$$\big|[\sigma_\delta]\big|, \quad \big|[\sigma_{\delta+1}]\big|, \quad \ldots, \quad \big|[\sigma_\Delta]\big|$$

du système $\big|[\Sigma]\big|$, et ceux-ci, par les résolutions voulues, les groupes respectifs

$$(32)\qquad \omega_\delta, \quad \omega_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad \omega_\Delta$$

du système Ω. Cela étant, si l'on construit les portions de Tableaux qui correspondent aux divers groupes (31) et celles qui correspondent aux divers groupes (32), on voit que les premières contiennent respectivement les mêmes nombres de colonnes que les secondes, puis les colonnes de ω_δ respectivement les mêmes nombres de cases pleines que les colonnes correspondantes de σ_δ, celles de $\omega_{\delta+1}$ respectivement les mêmes nombres de cases pleines que les colonnes correspondantes de $\sigma_{\delta+1}$, et ainsi de suite jusqu'à ω_Δ et σ_Δ. En conséquence, le nombre des dérivées principales de cote C est le même dans les deux systèmes Σ et Ω.

Cela étant, à cause de l'équivalence numérique de $\Big[[\Sigma]\Big]$ et de Ω, le système Ω_C est numériquement équivalent à $\Big[[\Sigma]\Big]_C$ (n° 9, 1°); il l'est, dès lors, à $\Big[[\Sigma_C]\Big]$ (n° 9, 2°). Or, à cause de la forme régulière, par suite orthonome, de Ω, il existe certainement, dans le groupe Ω_C, quelque groupe partiel possédant la double propriété d'être réduit et de comprendre exactement autant d'équations qu'il y a, dans Ω ou Σ, de dérivées principales de cote C : donc le système numériquement équivalent $\Big[[\Sigma_C]\Big]$ jouit de la même propriété. Enfin, si dans ce dernier on remplace les nouvelles dérivées de cote C par leurs valeurs en fonctions des anciennes, il en sera de même du système résultant Σ_C. Il est facile d'en déduire, comme nous allons le voir, que S_C est réduit.

Considérons en effet, dans le système S, l'ensemble illimité que forment les inconnues et leurs dérivées de tous ordres, extrayons-en les diverses quantités de cote égale à C, et désignons par μ_C le nombre de celles qui, parmi ces dernières, sont des dérivées principales, par λ_C le nombre des quantités restantes.

Considérons ensuite, dans le système Σ, l'ensemble que forment les inconnues anciennes et adjointes et leurs dérivées de tous ordres, et extrayons-en de même les diverses quantités de cote égale à C : il est clair qu'en désignant par ν_C le nombre des quantités qui, dans ce dernier groupe, proviennent des inconnues adjointes ou de leurs dérivées, le nombre total des quantités contenues dans le groupe considéré est $\lambda_C + \mu_C + \nu_C$. On sait d'ailleurs, d'après les relations qui existent entre les systèmes S et Σ, que dans ce groupe le nombre des quantités non principales est égal à λ_C, et il en résulte que le nombre des dérivées principales est égal à $\mu_C + \nu_C$: le système Σ_C contient donc, d'après ce qui a été dit tout à l'heure, quelque groupe réduit composé de $\mu_C + \nu_C$ équations.

Cela étant, si l'on désigne par H, comme au n° 12, l'ensemble des relations obtenues en égalant chacune des inconnues adjointes à la dérivée ancienne qu'elle a pour homonyme, le système (H_C, S_C), numériquement équivalent à Σ_C, contient forcément quelque groupe réduit de $\mu_C + \nu_C$ équations ; le groupe H_C contient d'ailleurs exactement ν_C équations, et le groupe S_C exactement μ_C : donc le système (H_C, S_C) est forcément réduit, par suite aussi le groupe S_C.

15. Nous terminerons ce Chapitre par l'importante remarque qui suit :

Étant donné un système différentiel S, *que l'on suppose remplir les deux premières des trois conditions formulées au n°* 10, *et où les coefficients des seconds membres sont d'ailleurs des constantes arbitraires, on peut, avec ces arbitraires, former certaines fonctions entières telles que, pour toutes valeurs numériques des arbitraires laissant la première fonction différente de zéro sans annuler à la fois toutes les autres :* 1° *la troisième des conditions formulées au n°* 10 *soit satisfaite comme les deux premières;* 2° *le système* S_C *soit réduit* (quel que soit C).

I. Écrivons en effet les conditions initiales sous la forme spécifiée au n° 6, et désignons par Γ la cote maxima des premiers membres de ces conditions, par γ la cote minima des premiers membres de S ; puis, considérant le système formé par l'ensemble des groupes (26), calculons-en le déterminant différentiel par rapport aux dérivées principales de cotes γ, $\gamma + 1$, ..., $\Gamma + 1$. Ce déterminant est évidemment une fonction entière des coefficients des seconds membres ; lorsque cette fonction est différente de zéro, le système (26) est résoluble par rapport aux dérivées principales de cotes γ, $\gamma + 1$, ..., $\Gamma + 1$, et la troisième des conditions formulées au n° 10 se trouve satisfaite.

Il est bon d'observer que dans le cas où le système S est orthonome, c'est-à-dire où certains des coefficients arbitraires sont nuls, le déterminant dont il s'agit se réduit à 1 ; il a donc dans tous les cas l'unité pour terme constant, et peut se mettre sous la forme $1 + F$, où F désigne une fonction entière privée de terme constant. (Il suffit alors, pour que $1 + F$ soit différent de zéro, que le module de F soit moindre que 1.)

II. Ce premier point une fois acquis, laissons dans les seconds membres de S tous les coefficients arbitraires sous la seule restriction que $1 + F$ soit différent de zéro; puis, désignons par Σ le système du premier ordre (linéaire, homogène, et à coefficients constants) déduit de S à l'aide du mécanisme décrit au n° 11, et effectuons dans Σ la transformation

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \ldots, \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où $x, y, \ldots$ désignent les anciennes variables, $x', y', \ldots$ les nouvelles, et α_1, β_1, ..., α_2, β_2, ... des coefficients indéterminés. Pour que le système Σ puisse être, à l'aide de ces formules, transformé en un système régulier du premier ordre dont les colonnes contiennent respectivement les mêmes nombres d'équations que les colonnes correspondantes de Σ, il faut qu'un certain déterminant soit différent de zéro; ce déterminant est évidemment une fonction entière tant des coefficients des seconds membres de Σ que des constantes de la transformation, et, en le supposant ordonné par rapport à celles-ci, nous aurons un polynome entier par rapport aux constantes de la transformation, et ayant pour coefficients certaines fonctions entières des coefficients des seconds membres de Σ. Observons maintenant que chaque équation de Σ est, à la notation près, ou une identité, ou l'une des équations qui proviennent de la résolution du système (26), et que, par suite, chaque coefficient des seconds membres de Σ peut être mis sous forme d'une fraction ayant pour dénominateur $1 + F$ et pour numérateur une fonction entière des coefficients des seconds membres de S. En conséquence, le déterminant dont nous parlons, entier par rapport aux constantes de la transformation, a pour coefficients certaines fractions rationnelles des coefficients des seconds membres de S, chacune de ces fractions ayant pour dénominateur une puissance de $1 + F$.

Cela étant, si nous supposons que les coefficients des seconds membres de S aient des valeurs particulières qui, sans annuler à la fois tous les numérateurs de ces diverses fractions rationnelles, laissent $1 + F$ différent de zéro, notre déterminant ne se réduira pas à une fonction identiquement nulle des constantes de la transformation, et l'on pourra trouver pour ces constantes des valeurs numériques qui laissent différents de zéro tant la fonction dont il s'agit que le déterminant de la transformation. Il résulte de là que non seulement la troisième des conditions formulées au n° 10 se trouvera alors, comme les deux premières, satisfaite pour le système S, mais qu'en outre le système du premier ordre Σ, déduit de S à l'aide du mécanisme indiqué au n° 11, pourra, par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes, être transformé en un système régulier du premier ordre dont les colonnes contiennent respectivement les mêmes nombres d'équations que les colonnes correspondantes de Σ; notre proposition du n° 14 sera alors applicable, et le système S_C nécessairement réduit.

CHAPITRE III.

THÉORÈME D'EXISTENCE.

16. Considérons actuellement un système différentiel Q, satisfaisant à la double condition ci-après :

1° *Le système est résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et, si l'on partage les équations en groupes suivant que leurs premiers membres appartiennent à telle ou telle inconnue, aucun des groupes ainsi obtenus ne contient plus d'une équation.*

2° *Les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale, et, moyennant l'attribution aux variables indépendantes de cotes respectives toutes égales à 1, et aux fonctions inconnues de cotes respectives déterminées, chacun d'eux ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote ne surpasse pas* *celle du premier membre correspondant.* Il est clair d'ailleurs que cette deuxième condition ne cesse pas d'être vérifiée, lorsque l'on augmente d'un même entier quelconque, positif ou négatif, les cotes de toutes les fonctions inconnues.

Un système de cette espèce étant donné, pour que les intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données existent effectivement et soient uniques, il suffit que certaines fonctions (en nombre limité) des variables indépendantes, des inconnues, et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques, présentent, pour les valeurs numériques initiales de leurs arguments, des modules satisfaisant à certaines inégalités.

I. Supposons les conditions initiales du système Q écrites sous la forme spécifiée au n° 6 (ce qui est possible, puisque, en vertu de 1°, aucun des premiers membres n'est la dérivée de quelque autre), et désignons par Γ la cote maxima des premiers membres de ces conditions initiales, par γ la cote minima des premiers membres de Q. La cote d'une inconnue quelconque du système Q ne peut alors surpasser Γ, et celle d'un premier membre de ce système ne peut surpasser $\Gamma + 1$. Chacun des systèmes

$$Q_\gamma,\quad Q_{\gamma+1},\quad \ldots,\quad Q_{\Gamma+1} \tag{33}$$

est d'ailleurs linéaire par rapport aux dérivées *principales* de cote égale à son indice, et les coefficients des dérivées dont il s'agit dépendent exclusivement des variables $x, y, \ldots$, des inconnues $u, v, \ldots$, et des quelques dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres de Q. Enfin, chacun des systèmes

$$Q_{\Gamma+2},\quad Q_{\Gamma+3},\quad \ldots \tag{34}$$

est linéaire par rapport aux dérivées, *tant principales que paramétriques,* de cote égale à son indice, et une remarque toute semblable à la précédente s'applique aux coefficients de ces dérivées.

Cela étant, *si une certaine fonction des variables indépendantes, des inconnues et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques prend, pour les valeurs numériques initiales de ses arguments, une valeur différente de* *zéro, et si, en outre, certaines autres fonctions des mêmes quantités ne s'annulent pas à la fois pour les valeurs initiales dont il s'agit :*

1° *L'un quelconque des systèmes* (33), *où l'on remplace par leurs valeurs initiales les variables, les inconnues, et les dérivées paramétriques de cote inférieure à* $\Gamma + 2$, *est résoluble par rapport aux dérivées principales de cote égale à son indice.*

2° *L'un quelconque des systèmes* (34), *où l'on opère la même substitution, est résoluble par rapport à quelque groupe de dérivées (principales ou paramétriques) de cote égale à son indice.*

Pour l'établir, je construirai d'abord, à l'aide du mécanisme suivant, un autre système différentiel S.

Considérant, parmi les inconnues et dérivées qui figurent dans un second membre du système Q, celles dont la cote se trouve être précisément égale à celle du premier membre correspondant, je remplace ce second membre par une fonction linéaire et homogène des inconnues et dérivées dont il s'agit, en donnant pour coefficient à chacune de ces quantités la valeur initiale de la dérivée partielle du second membre primitif par rapport à la quantité considérée. (Il va sans dire que dans le cas où le second membre primitif ne contient, avec les variables indépendantes, que des inconnues et dérivées de cote inférieure au premier membre correspondant, on remplacera ce second membre par zéro.) En répétant l'opération précédente sur chacun des seconds membres du système Q, on tombe sur un système S, remplissant évidemment les deux premières des trois conditions formulées au n° 10, et ayant les mêmes premiers membres que le système Q avec la même économie des conditions initiales. D'ailleurs, si l'on considère les systèmes Q_C, S_C, les équations se correspondent chacune à chacune dans ces deux systèmes, et l'on passe d'une équation quelconque de Q_C à l'équation correspondante de S_C exactement par le même mécanisme que l'on passe d'une équation quelconque de Q à l'équation correspondante de S.

Cela étant, on peut, en vertu du n° 15, former, avec les coefficients des seconds membres de S, certaines fonctions entières telles que, pour toutes valeurs numériques des coefficients laissant la première fonction différente de zéro sans annuler à la fois toutes les autres :

1° la troisième des conditions formulées au n° 10 se trouve satisfaite, comme les deux premières; 2° le système S_C soit réduit (quel que soit C). Ce double fait, si l'on a égard à la relation indiquée entre les systèmes Q_C, S_C, suffit à démontrer l'exactitude du double point que nous avons en vue.

Nous supposerons désormais, dans le système Q, *les conditions initiales choisies (s'il est possible) de telle sorte que la double circonstance spécifiée au début du présent alinéa* I *se trouve réalisée.*

II. Dans ce qui suit, étant donné un système différentiel quelconque, T, je nommerai *système* T *prolongé* le groupe illimité obtenu en adjoignant aux équations du système T toutes celles qui s'en déduisent par des différentiations (d'ordres quelconques).

Cela étant, considérons, au lieu du système Q, le système $Q_{\Gamma+2}$, que nous désignerons aussi par (Q). Il est clair que dans les deux systèmes Q et (Q), les dérivées principales et paramétriques des fonctions inconnues sont respectivement les mêmes, à cela près que les dérivées principales du système Q dont la cote tombait au-dessous de $\Gamma+2$ sont devenues paramétriques dans le système (Q); et si, dans les deux systèmes

$$\text{Q prolongé,}\quad \text{(Q) prolongé,}$$

on partage les relations en groupes successifs d'après leur cote croissante, cette suite illimitée de groupes est la même de part et d'autre, à cela près que, dans le système (Q) prolongé, un certain nombre de groupes [les groupes (33)] ont disparu en tête de la liste. Au lieu donc d'imposer aux intégrales de Q les conditions initiales choisies, il revient au même d'imposer à celles de (Q) des conditions initiales identiques, en ayant soin seulement de prendre, pour les anciennes dérivées principales devenues paramétriques, les valeurs initiales calculées à l'aide des groupes disparus.

On peut maintenant, moyennant un simple changement de fonctions, remplacer le système (Q) par un autre où les déterminations initiales des inconnues soient toutes identiquement nulles. Effectivement, soient I_u, I_v, ..., les déterminations initiales respectives des inconnues u, v, ... dans le système (Q). Nous observerons tout d'abord que, parmi les dérivées de I_u, I_v, ..., celles qui sont respectivement semblables aux dérivées principales de u, v, ... ont toutes zéro pour valeur initiale, et qu'elles sont, par suite, identiquement nulles, puisque leurs propres dérivées, nécessairement semblables à des dérivées principales de u, v, ..., ont toutes aussi pour valeur initiale zéro; quant aux valeurs initiales de I_u, I_v, ... et de leurs dérivées restantes, elles sont précisément égales aux valeurs initiales de u, v, ... et de leurs dérivées (paramétriques) semblables. Cela posé, effectuons dans le système (Q) la transformation

$$\left\{\begin{array}{l} u = I_u + \mathfrak{u}, \\ v = I_v + \mathfrak{v}, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ... désignent de nouvelles fonctions inconnues, et soit ($\mathfrak{Q}$) le système ainsi obtenu : de la remarque faite ci-dessus il résulte évidemment que le système ($\mathfrak{Q}$) prolongé peut se déduire de (Q) prolongé en remplaçant les dérivées principales de u, v, ... par les dérivées semblables de $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ..., puis les fonctions u, v, ... et leurs dérivées paramétriques par les sommes $I_u + \mathfrak{u}$, $I_v + \mathfrak{v}$, ... et les dérivées semblables de ces sommes. Les deux systèmes (Q) et ($\mathfrak{Q}$) ont donc, sauf le changement de u, v, ... en $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ..., les mêmes premiers membres, et les dérivées des fonctions inconnues s'y répartissent de la même manière en principales et paramétriques : dès lors, si, sans changer les valeurs initiales des variables indépendantes, on impose aux intégrales hypothétiques de ($\mathfrak{Q}$) des déterminations initiales identiquement nulles, tout groupe d'intégrales de ($\mathfrak{Q}$) satisfaisant à ces conditions initiales fournira, par l'intermédiaire des formules de transformation, un groupes d'intégrales de (Q) satisfaisant aux conditions initiales indiquées plus haut, par suite un groupe d'intégrales de Q satisfaisant aux conditions initiales primitivement imposées.

Cela étant, et *les conditions initiales primitivement imposées au système* Q *étant choisies sous les restrictions que nous avons indiquées dans l'alinéa* I, *nous établirons que, sous des restrictions nouvelles apportées à leur choix, le système* ($\mathfrak{Q}$) *admet un groupe d'intégrales à déterminations initiales identiquement nulles; il en résultera pour* Q *un groupe d'inté-*

grales répondant aux conditions initiales primitivement imposées, et nous ferons voir alors que ce dernier groupe est unique.

III. Conservons aux variables indépendantes $x, y, \ldots$, dans le système $(\mathfrak{Q})$, les cotes respectives, toutes égales à 1, qu'elles avaient dans les systèmes Q et (Q), et attribuons aux nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ les mêmes cotes respectives qu'aux anciennes correspondantes $u, v, \ldots$. Considérons d'autre part, dans les systèmes (Q) prolongé et $(\mathfrak{Q})$ prolongé, deux relations correspondantes, et désignons par C leur cote commune (supérieure ou égale à $\Gamma + 2$) : de diverses remarques déjà faites il résulte que toutes deux sont linéaires par rapport aux dérivées de cote C, que dans la première les coefficients de ces dérivées dépendent exclusivement des variables $x, y, \ldots$, des inconnues $u, v, \ldots$, et des quelques dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres du système primitif Q, et que, dans la seconde, les coefficients dont il s'agit sont respectivement identiques aux précédents, sauf, bien entendu, le remplacement de $u, v, \ldots$ et de leurs dérivées paramétriques par les sommes $I_u + \mathfrak{u}$, $I_v + \mathfrak{v}, \ldots$, et les dérivées semblables de ces sommes; *les coefficients considérés ont donc de part et d'autre les mêmes valeurs initiales*. En conséquence, *l'un quelconque des systèmes*

$$(\mathfrak{Q})_{\Gamma+2}, \quad (\mathfrak{Q})_{\Gamma+3}, \quad \ldots,$$

où l'on remplace par leurs valeurs initiales les variables, les inconnues et les dérivées paramétriques de cote inférieure à $\Gamma + 2$, est résoluble par rapport à quelque groupe de dérivées (principales ou paramétriques) de cote égale à son indice, puisque (I) chacun des systèmes

$$Q_{\Gamma+2}, \quad Q_{\Gamma+3}, \quad \ldots$$

possède déjà cette propriété.

IV. Dans le système $(\mathfrak{Q})$ partageons les fonctions inconnues en catégories suivant la valeur de leur cote, et supposons, pour fixer les idées, que le nombre des catégories ainsi obtenues soit égal à 3. Les dérivées de tous ordres des inconnues se partagent naturellement alors en trois catégories, suivant qu'elles appartiennent à telle ou telle inconnue.

Cela étant, désignons par γ', γ'', γ''' les cotes attribuées aux inconnues des trois catégories respectives, et posons

$$\Gamma + 2 - \gamma' = K', \qquad \Gamma + 2 - \gamma'' = K'', \qquad \Gamma + 2 - \gamma''' = K''';$$

les trois entiers K', K'', K''' sont nécessairement au moins égaux à 2, puisque les cotes des inconnues sont au plus égales à Γ et que, par suite, les différences $\Gamma - \gamma'$, $\Gamma - \gamma''$, $\Gamma - \gamma'''$ sont positives ou nulles. Il est clair, d'ailleurs, qu'une dérivée d'inconnue aura une cote inférieure, égale ou supérieure à $\Gamma + 2$, suivant qu'elle sera :

D'ordre inférieur, égal ou supérieur à K', s'il s'agit d'une dérivée de première catégorie;

D'ordre inférieur, égal ou supérieur à K'', s'il s'agit d'une dérivée de deuxième catégorie;

D'ordre inférieur, égal ou supérieur à K''', s'il s'agit d'une dérivée de troisième catégorie.

Considérant, en particulier, les dérivées de cote inférieure ou égale à $\Gamma + 2$, qui seules figurent dans ($\mathfrak{Q}$), nous qualifierons, pour abréger, de *secondaires* celles dont la cote est inférieure à $\Gamma + 2$, et de *dominantes* celles dont la cote est égale à $\Gamma + 2$. Chaque équation du système ($\mathfrak{Q}$), linéaire par rapport à l'ensemble des dérivées dominantes, a pour premier membre une de celles-ci.

Nous nommerons, en outre, dans ce qui suit :

Coefficients du système ($\mathfrak{Q}$) les diverses fonctions (des variables, des inconnues et des dérivées secondaires) qui figurent dans les seconds membres, soit comme multiplicateurs des dérivées dominantes, soit comme termes indépendants de ces dérivées;

$x_0, y_0, \ldots$ les valeurs initiales de $x, y, \ldots$;

$\mathfrak{f}$. ... les diverses quantités du groupe formé par les inconnues $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ... et leurs dérivées secondaires (toutes ces quantités ont des valeurs initiales nulles, puisque les déterminations initiales sont identiquement nulles);

$\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, ... les inconnues de première catégorie, g' leur nombre, g'_1, g'_2, ..., $g'_{K'-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres 1, 2, ..., $K' - 1$;

$\mathfrak{u}''$, $\mathfrak{v}''$, ... les inconnues de deuxième catégorie, g'' leur nombre,

$g''_1, g''_2, \ldots, g''_{K''-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres 1, 2, ..., $K''-1$;

$\mathfrak{u}'''$, $\mathfrak{v}'''$, ... les inconnues de troisième catégorie, g''' leur nombre, $g'''_1, g'''_2, \ldots, g'''_{K'''-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres 1, 2, ..., $K'''-1$.

D'ailleurs, les seconds membres du système primitif Q étant, par la définition même des intégrales ordinaires, développables dans un certain domaine autour des valeurs initiales choisies pour les diverses quantités qui y figurent, on voit sans peine que les coefficients du système ($\mathfrak{Q}$), fonctions des diverses quantités

$$x, \quad y, \quad \ldots, \quad \mathfrak{t}, \quad \ldots,$$

sont développables dans un certain domaine autour des valeurs initiales

$$x_0, \quad y_0, \quad \ldots, \quad 0, \quad \ldots.$$

V. Soient :

ε une constante positive moindre que $\frac{1}{3}$ (c'est-à-dire moindre que le quotient de 1 par le nombre des catégories d'inconnues du système donné);

μ une constante positive quelconque;

$$\begin{matrix} K', & g', & g'_1, & g'_2, & \ldots, & g'_{K'-1}, \\ K'', & g'', & g''_1, & g''_2, & \ldots, & g''_{K''-1}, \\ K''', & g''', & g'''_1, & g'''_2, & \ldots, & g'''_{K'''-1}, \end{matrix}$$

les entiers définis dans ce qui précède (IV);

w', w'', w''' trois fonctions inconnues de la variable indépendante t.

Si l'on pose

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} z = t + g' w' + g'_1 \frac{\partial w'}{\partial t} + \ldots + g'_{K'-1} \frac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}} \\ + g'' w'' + g''_1 \frac{\partial w''}{\partial t} + \ldots + g''_{K''-1} \frac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}} \\ + g''' w''' + g'''_1 \frac{\partial w'''}{\partial t} + \ldots + g'''_{K'''-1} \frac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}}, \end{aligned} \right.$$

et $\Theta(z) = \frac{1}{1-z}$, *le système différentiel*

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^{K'} w'}{\partial t^{K'}} &= \frac{\mu.\Theta(z)}{1-3\varepsilon\Theta(z)},\\ \frac{\partial^{K''} w''}{\partial t^{K''}} &= \frac{\mu.\Theta(z)}{1-3\varepsilon\Theta(z)},\\ \frac{\partial^{K'''} w'''}{\partial t^{K'''}} &= \frac{\mu.\Theta(z)}{1-3\varepsilon\Theta(z)} \end{aligned}\right.$$

admet un groupe d'intégrales satisfaisant aux conditions initiales

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} w' &= \frac{\partial w'}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}} = 0\\ w'' &= \frac{\partial w''}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}} = 0\\ w''' &= \frac{\partial w'''}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}} = 0 \end{aligned}\right\}\quad \text{pour } t = 0.$$

Les dérivées restantes de ces intégrales ont, d'ailleurs, pour $t = 0$, *des valeurs initiales essentiellement positives.*

D'abord, l'existence d'un groupe d'intégrales répondant aux conditions initiales (37) résulte immédiatement de propositions connues (¹).

D'un autre côté, si l'on développe $\Theta(z)$ par la formule

$$1 + z + z^2 + \ldots,$$

et que, après avoir remplacé z par le second membre de (35), on ordonne le résultat par rapport aux puissances de

$$\begin{array}{lllll} t, & w', & \dfrac{\partial w'}{\partial t}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{K'-1} w'}{\partial t^{K'-1}},\\ & w'', & \dfrac{\partial w''}{\partial t}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{K''-1} w''}{\partial t^{K''-1}},\\ & w''', & \dfrac{\partial w'''}{\partial t}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{K'''-1} w'''}{\partial t^{K'''-1}}, \end{array}$$

(¹) *Voir*, par exemple, *Acta mathematica*, t. XXIII, p. 265 et 266.

on voit immédiatement que les valeurs initiales de la fonction ainsi obtenue et de ses dérivées partielles de tous ordres sont essentiellement positives. Il en est de même de la fonction $\frac{1}{1-3\varepsilon\Theta(z)}$, que l'on peut, à cause de $\varepsilon < \frac{1}{3}$, développer suivant la formule

$$1 + 3\varepsilon\Theta + 3^2\varepsilon^2\Theta^2 + \ldots,$$

par suite, enfin, du produit

$$\mu\Theta(z)\frac{1}{1-3\varepsilon\Theta(z)},$$

second membre commun aux équations du système (36). Les valeurs initiales des dérivées principales de nos intégrales jouissent donc, elles aussi, de la propriété énoncée : car l'attribution aux quantités

$$t, \quad w', \quad w'', \quad w'''$$

des cotes respectives

$$1, \quad -K', \quad -K'', \quad -K'''$$

met tout d'abord en évidence la nature orthonome du système (36), et, cela étant, on aperçoit sans peine que le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, effectué de proche en proche pour les classes successives à l'aide des relations du système (36) prolongé, conduit nécessairement à des résultats tous positifs.

Nous désignerons par $W'(t)$, $W''(t)$, $W'''(t)$ les intégrales considérées du système (36).

Nous ferons, en outre, observer ce qui suit :

Si l'on nomme $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \ldots, \varepsilon'''_1, \varepsilon'''_2, \ldots$ des quantités positives (en nombre limité) vérifiant les relations

$$\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \ldots = \varepsilon,$$
$$\varepsilon''_1 + \varepsilon''_2 + \ldots = \varepsilon,$$
$$\varepsilon'''_1 + \varepsilon'''_2 + \ldots = \varepsilon,$$

le système (36) entraîne évidemment comme conséquence

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^{K'} \mathfrak{v}'}{\partial t^{K'}} &= \mu\Theta(z) + \varepsilon'_1\Theta(z)\frac{\partial^{K'} \mathfrak{v}'}{\partial t^{K'}} + \varepsilon'_2\Theta(z)\frac{\partial^{K'} \mathfrak{v}'}{\partial t^{K'}} + \ldots \\ &\quad + \varepsilon''_1\Theta(z)\frac{\partial^{K''} \mathfrak{v}''}{\partial t^{K''}} + \varepsilon''_2\Theta(z)\frac{\partial^{K''} \mathfrak{v}''}{\partial t^{K''}} + \ldots \\ &\quad + \varepsilon'''_1\Theta(z)\frac{\partial^{K'''} \mathfrak{v}'''}{\partial t^{K'''}} + \varepsilon'''_2\Theta(z)\frac{\partial^{K'''} \mathfrak{v}'''}{\partial t^{K'''}} + \ldots, \\ \frac{\partial^{K''} \mathfrak{v}''}{\partial t^{K''}} &= \text{idem}, \\ \frac{\partial^{K'''} \mathfrak{v}'''}{\partial t^{K'''}} &= \text{idem}. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, le système (36) entraînant aussi comme conséquence les relations

$$\frac{\mu\varepsilon\Theta^2(z)}{1-3\varepsilon\Theta(z)} = \varepsilon\,\Theta(z)\frac{\partial^{K'} \mathfrak{v}'}{\partial t^{K'}} = \varepsilon\,\Theta(z)\frac{\partial^{K''} \mathfrak{v}''}{\partial t^{K''}} = \varepsilon\,\Theta(z)\frac{\partial^{K'''} \mathfrak{v}'''}{\partial t^{K'''}},$$

si, dans l'une quelconque des équations (38), on remplace telle ou telle des sommes

$$\begin{gathered} \varepsilon'_1\Theta(z)\frac{\partial^{K'} \mathfrak{v}'}{\partial t^{K'}} + \varepsilon'_2\Theta(z)\frac{\partial^{K'} \mathfrak{v}'}{\partial t^{K'}} + \ldots, \\ \varepsilon''_1\Theta(z)\frac{\partial^{K''} \mathfrak{v}''}{\partial t^{K''}} + \varepsilon''_2\Theta(z)\frac{\partial^{K''} \mathfrak{v}''}{\partial t^{K''}} + \ldots, \\ \varepsilon'''_1\Theta(z)\frac{\partial^{K'''} \mathfrak{v}'''}{\partial t^{K'''}} + \varepsilon'''_2\Theta(z)\frac{\partial^{K'''} \mathfrak{v}'''}{\partial t^{K'''}} + \ldots \end{gathered}$$

par la quantité $\frac{\mu\varepsilon\Theta^2(z)}{1-3\varepsilon\Theta(z)}$, on tombe encore sur une conséquence de (36).

VI. Aux variables indépendantes et aux fonctions inconnues

$$x,\quad y,\quad \ldots,\quad \mathfrak{u}',\quad \mathfrak{v}',\quad \ldots,\quad \mathfrak{u}'',\quad \mathfrak{v}'',\quad \ldots,\quad \mathfrak{u}''',\quad \mathfrak{v}''',\quad \ldots,$$

du système ($\mathfrak{Q}$), faisons correspondre autant de quantités positives

$$\xi,\quad \eta,\quad \ldots,\quad \upsilon'-\gamma',\quad \psi'-\gamma',\quad \ldots,\quad \upsilon''-\gamma'',\quad \psi''-\gamma'',\quad \ldots,\quad \upsilon'''-\gamma''',\quad \psi'''-\gamma''',\quad \ldots,$$

que nous nommerons, pour abréger, leurs *poids* respectifs; considérant ensuite une dérivée d'ordre k d'une inconnue, appelons *poids* de cette dérivée le quotient obtenu en divisant le poids de la fonction à laquelle elle appartient par ceux des k variables de différentiation; désignons enfin d'une manière générale par φ, ... les poids respectifs des quantités $\mathfrak{f}$, ...

Cela posé, considérons une équation, conséquence de (36), subsistant entre z, $\frac{\partial^{K'}\mathfrak{w}'}{\partial t^{K'}}$, $\frac{\partial^{K''}\mathfrak{w}''}{\partial t^{K''}}$, $\frac{\partial^{K'''}\mathfrak{w}'''}{\partial t^{K'''}}$, et remplaçons-y la somme z par la somme

$$s = \xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots+\varphi\mathfrak{f}+\ldots;$$

substituons, d'autre part, à la dérivée $\frac{\partial^{K'}\mathfrak{w}'}{\partial t^{K'}}$, qui peut figurer dans divers termes de l'équation considérée, divers produits obtenus chacun en multipliant l'une quelconque des dérivées dominantes de $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, ... par son poids; effectuons, enfin, des substitutions analogues pour chacune des dérivées $\frac{\partial^{K''}\mathfrak{w}''}{\partial t^{K''}}$ et pour chacune des dérivées $\frac{\partial^{K'''}\mathfrak{w}'''}{\partial t^{K'''}}$: la relation résultante sera, comme il est bien facile de s'en rendre compte, identiquement vérifiée pour

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{u}' = \upsilon'\Upsilon'\,W'[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots],\\
\mathfrak{v}' = \psi'\Upsilon'\,W'[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{u}'' = \upsilon''\Upsilon''\,W''[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots],\\
\mathfrak{v}'' = \psi''\Upsilon''\,W''[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathfrak{u}''' = \upsilon'''\Upsilon'''\,W'''[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots],\\
\mathfrak{v}'' = \psi'''\Upsilon'''\,W'''[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Prenons maintenant, dans le système ($\mathfrak{Q}$), une équation quelconque ($\mathfrak{q}$), et désignons par p', p'', p''' les nombres respectifs ($\geqq 0$) des dérivées dominantes de première, deuxième, troisième catégorie, qui figurent dans son second membre; par

$$\begin{array}{llll}
\Delta'_1, & \Delta'_2, & \ldots, & \Delta'_{p'},\\
\Delta''_1, & \Delta''_2, & \ldots, & \Delta''_{p''},\\
\Delta'''_1, & \Delta'''_2, & \ldots, & \Delta'''_{p'''}
\end{array}$$

ces dérivées respectives, par

$$\begin{array}{llll} \varpi'_1, & \varpi'_2, & \ldots, & \varpi'_{p'}, \\ \varpi''_1, & \varpi''_2, & \ldots, & \varpi''_{p''}, \\ \varpi'''_1, & \varpi'''_2, & \ldots, & \varpi'''_{p'''} \end{array}$$

leurs poids respectifs, par Δ le premier membre de $(\mathfrak{q})$, et par ϖ le poids de Δ. Si l'entier p' n'est pas nul, on remplacera l'ensemble des termes en $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_{p'}$ qui figurent dans le second membre de $(\mathfrak{q})$ par

$$\frac{\varepsilon}{p'}\varpi'_1\Theta(s)\Delta'_1 + \frac{\varepsilon}{p'}\varpi'_2\Theta(s)\Delta'_2 + \ldots + \frac{\varepsilon}{p'}\varpi'_{p'}\Theta(s)\Delta'_{p'};$$

si p' est nul, on remplacera cet ensemble absent par $\frac{\mu\varepsilon\Theta^2(s)}{1-3\varepsilon\Theta(s)}\cdot$ On effectuera des substitutions analogues pour les termes en $\Delta''_1, \Delta''_2, \ldots, \Delta''_{p''}$, et pour les termes en $\Delta'''_1, \Delta'''_2, \ldots, \Delta'''_{p'''}$ qui figurent dans le second membre de $(\mathfrak{q})$. Quant au terme indépendant des dérivées dominantes, on le remplacera par $\mu\Theta(s)$. On remplacera enfin le premier membre Δ par $\varpi\Delta$, et l'on multipliera les deux membres par $\frac{1}{\varpi}\cdot$ L'équation finalement obtenue, $((\mathfrak{q}))$, ne différera alors de $(\mathfrak{q})$ que par les coefficients, fonctions de $x, y, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots$, qui figurent dans le second membre. A chaque équation du système $(\mathfrak{Q})$ on fera correspondre de même une équation telle que $((\mathfrak{q}))$; *on obtiendra finalement un système* $((\mathfrak{Q}))$, *ne différant de* $(\mathfrak{Q})$ *que par les coefficients des seconds membres, et identiquement vérifié par la substitution aux inconnues* des seconds membres de (39), c'est-à-dire *de fonctions qui, elles et toutes leurs dérivées secondaires, prennent en* $x_0, y_0, \ldots$, *des valeurs initiales nulles, tandis que leurs dérivées restantes y prennent toutes des valeurs initiales positives* (V). Chacun des nouveaux coefficients s'obtient d'ailleurs en faisant le produit de $\Theta(s)$ par quelque constante positive, et y ajoutant parfois le produit de $\frac{\Theta^2(s)}{1-3\varepsilon\Theta(s)}$ par quelque autre constante positive. La première de ces deux constantes, qui seule est importante à considérer, et que nous nommerons, pour abréger, *caractéristique* du coefficient, dépend de ε ou de μ suivant que le coefficient où elle figure multiplie ou non quelque dérivée dominante. Son produit par $\Theta(s)$ est identique au coefficient de $((\mathfrak{Q}))$ dont il s'agit, ou l'admet pour majorante relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots, 0, \ldots$ de $x, y, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots$.

Il importe de remarquer que, dans les seconds membres du système $(\mathfrak{Q})$ que nous venons de former, *les caractéristiques dépendant de ε sont de degré zéro par rapport à l'ensemble des quantités*

$$(40) \qquad \xi, \quad \eta, \quad \ldots, \quad \upsilon', \quad \psi', \quad \ldots, \quad \upsilon'', \quad \psi'', \quad \ldots, \quad \upsilon''', \quad \psi''', \quad \ldots.$$

Effectivement, le poids d'une dérivée quelconque est, d'après notre définition, un produit de puissances, positives ou négatives, de ces quantités, et le degré de ce produit visiblement égal et de signe contraire à la cote de la dérivée considérée; dès lors, les dérivées dominantes qui figurent dans une équation quelconque de $((\mathfrak{Q}))$ ont pour poids respectifs des produits qui sont tous de degré $-(\Gamma+2)$, en sorte que, après réduction à l'unité du coefficient du premier membre, les caractéristiques dépendant de ε sont de degré zéro par rapport à l'ensemble des quantités (40).

Il est bon de remarquer aussi qu'en augmentant, s'il le faut, d'un même entier négatif convenablement choisi les cotes $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ des fonctions inconnues (augmentation permise, comme nous l'avons fait remarquer au début du présent numéro), *les poids $\varphi, \ldots$ des diverses quantités $\mathfrak{f}, \ldots$ seront tous de degré supérieur à zéro par rapport à l'ensemble des quantités* (40). Effectivement, parmi les cotes des diverses quantités $\mathfrak{f}, \ldots$, la plus grande algébriquement est $\Gamma+1$, d'où résulte que, parmi ces cotes changées de signe, la plus petite algébriquement est $-(\Gamma+1)$; il suffit donc que l'on ait $-(\Gamma+1)>0$, ou $\Gamma<-1$. C'est ce que nous supposerons désormais.

VII. *Si, dans les seconds membres de $(\mathfrak{Q})$, les modules initiaux des coefficients des dérivées dominantes satisfont à certaines inégalités, on peut attribuer, d'une part à la constante ε (moindre que $\frac{1}{3}$), d'autre part aux quantités (40), des valeurs telles que, dans le système $((\mathfrak{Q}))$, les caractéristiques dépendant de ε soient respectivement supérieures aux modules initiaux dont il s'agit.*

Il est tout d'abord évident que, si ces modules initiaux sont suffisamment petits, on pourra faire en sorte que les caractéristiques dépendant de ε leur soient respectivement supérieures : il suffit, en effet, pour que cette circonstance se réalise, d'attribuer à ε une valeur quelconque moindre que $\frac{1}{3}$, aux quantités (40) des valeurs positives quelconques, et d'assujettir ensuite les modules initiaux dont nous parlons à être respectivement inférieurs aux valeurs ainsi obtenues pour les caractéristiques dépendant de ε.

Plus généralement, écrivons que les caractéristiques dépendant de ε sont respectivement supérieures aux modules initiaux, et que ε est inférieur à $\frac{1}{3}$, et formons un ensemble de conditions suffisantes pour que ces inégalités puissent être vérifiées par un choix convenable des quantités (40) et de ε : nous tomberons ainsi sur certaines inégalités subsistant entre les modules initiaux.

VIII. *Si, par un choix convenable de la constante* ε (*moindre que* $\frac{1}{3}$) *et des constantes* (40), *on peut faire en sorte que, dans les seconds membres de* $((\mathfrak{Q}))$, *les caractéristiques dépendant de* ε *soient respectivement supérieures aux modules des valeurs numériques initiales que prennent, dans les seconds membres de* $(\mathfrak{Q})$, *les coefficients des dérivées dominantes, on peut, en laissant à* ε *sa valeur, multipliant les quantités* (40) *par un même nombre convenablement choisi, et prenant pour* μ *une valeur convenablement choisie, faire en sorte que les coefficients des seconds membres de* $((\mathfrak{Q}))$ [nous voulons dire les coefficients des dérivées dominantes et les termes indépendants de ces dérivées] *soient respectivement majorants pour les coefficients correspondants des seconds membres de* $(\mathfrak{Q})$.

Effectivement, supposons que, par un choix convenable de ε et des constantes (40), les caractéristiques dépendant de ε dans les seconds membres de $((\mathfrak{Q}))$ soient respectivement supérieures aux modules des valeurs numériques initiales que prennent, dans les seconds membres de $(\mathfrak{Q})$, les coefficients des dérivées dominantes, et désignons par M, ... les caractéristiques dont il s'agit. D'autre part, soit r une constante positive satisfaisant à la double condition : 1° d'être inférieure à des rayons de convergence simultanés des coefficients des seconds membres de $(\mathfrak{Q})$, quand on suppose ces coefficients développés à partir des valeurs initiales des quantités dont ils dépendent; 2° d'être assez petite pour que, en remplaçant dans les développements des coefficients des dérivées dominantes les coefficients numériques par leurs modules et les accroissements par r, les sommes ainsi obtenues soient respectivement inférieures aux caractéristiques M, ... (la chose est évidemment possible, puisque, dans ces développements, les termes constants ont des modules respectivement inférieurs aux constantes M, ...). La constante r étant ainsi fixée, multiplions les nombres (40) par une constante positive telle que les nouvelles valeurs de ξ, η, ..., φ, ... soient toutes supérieures à $\frac{1}{r}$ [ce qui est possible, puisque ξ, η, ..., φ, ... ont des degrés positifs par rapport à l'ensemble des quantités (40)], et *remplaçons désormais les constantes* (40) *par les produits ainsi obtenus* : une pareille multiplication ne change pas les valeurs des caractéristiques dépendant de ε, parce que chacune de ces caractéristiques est de degré zéro par rapport à l'ensemble des quantités (40), et, en conséquence, la double condition à laquelle nous avons assujetti r ne cesse pas d'être vérifiée. Soient alors ω le poids maximum des premiers membres du système $((\mathfrak{A}))$, et N une constante positive supérieure à toutes celles qu'on obtient lorsque, après avoir développé à partir des valeurs initiales des quantités qui y figurent les termes indépendants des dérivées dominantes dans les seconds membres de $(\mathfrak{A})$, on remplace dans ces développements les coefficients numériques par leurs modules et les accroissements par r. Cela étant, si l'on prend $\mu > \mathrm{N}\omega$, toute caractéristique dépendant de μ, étant au moins égale à $\frac{\mu}{\omega}$, sera, par suite, supérieure à N.

Dans ces conditions, on voit sans peine que les coefficients du système $(\mathfrak{A})$ admettent comme majorantes, par rapport aux valeurs x_0, y_0, ..., o, ... des quantités x, y, ..., $\mathfrak{f}$, ..., les coefficients correspondants du système $((\mathfrak{A}))$.

IX. Considérons un système de q équations du premier degré à q inconnues, par exemple de trois équations du premier degré à trois inconnues, ayant la forme suivante :

$$(41)\qquad \begin{cases} x = ay + bz + c, \\ y = ex + fz + k, \\ z = mx + ny + p. \end{cases}$$

Désignons en outre par A, B, ... des constantes positives ou nulles, supérieures ou égales aux modules des coefficients numériques a, b, ..., et supposons que le système

$$(42)\qquad \begin{cases} x = Ay + Bz + C, \\ y = Ex + Fz + K, \\ z = Mx + Ny + P \end{cases}$$

admette une solution (X, Y, Z), composée de nombres positifs ou nuls. *Cela étant, le système* (41) *admet certainement quelque solution* (x', y', z'), *satisfaisant aux relations*

$$\operatorname{mod} x' \leqq X, \qquad \operatorname{mod} y' \leqq Y, \qquad \operatorname{mod} z' \leqq Z.$$

Considérons, en effet, les équations (42), et calculons pour x, y, z des systèmes de valeurs successifs,

$$(X_0, Y_0, Z_0), \quad (X_1, Y_1, Z_1), \quad (X_2, Y_2, Z_2), \quad \ldots,$$

de la façon suivante :

$$(43)\qquad \begin{cases} X_0 = C, \\ Y_0 = K, \\ Z_0 = P; \\ X_1 = AY_0 + BZ_0 + C, \\ Y_1 = EX_0 + FZ_0 + K, \\ Z_1 = MX_0 + NY_0 + P; \\ X_2 = AY_1 + BZ_1 + C, \\ Y_2 = EX_1 + FZ_1 + K, \\ Z_2 = MX_1 + NY_1 + P; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ X_{r+1} = AY_r + BZ_r + C, \\ Y_{r+1} = EX_r + FZ_r + K, \\ Z_{r+1} = MX_r + NY_r + P; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Je dis d'abord que les valeurs positives variables X_r, Y_r, Z_r tendent, *sans jamais décroître,* vers des limites, X', Y', Z', satisfaisant aux relations

(44) $$X' \leqq X, \qquad Y' \leqq Y, \qquad Z' \leqq Z.$$

Observons, en effet, que si l'on a, entre des valeurs positives, les relations
$$X'' \leqq X''', \qquad Y'' \leqq Y''', \qquad Z'' \leqq Z''',$$

on a forcément aussi, puisque les coefficients A, B, ... sont tous positifs,
$$\begin{aligned} AY'' + BZ'' + C &\leqq AY''' + BZ''' + C, \\ EX'' + FZ'' + K &\leqq EX''' + FZ''' + K, \\ MX'' + NY'' + P &\leqq MX''' + NY''' + P. \end{aligned}$$

Or, on a évidemment (puisque $X_0 = C$, $Y_0 = K$, $Z_0 = P$)

$$o \leqq X_0, \qquad o \leqq Y_0, \qquad o \leqq Z_0,$$

et, d'autre part, à cause des relations

$$\begin{aligned} X &= AY + BZ + C, \\ Y &= EX + FZ + K, \\ Z &= MX + NY + P \end{aligned}$$

et de la nature positive de toutes les quantités qui y figurent,

$$X \geqq C = X_0, \qquad Y \geqq K = Y_0, \qquad Z \geqq P = Z_0,$$
d'où
$$o \leqq X_0 \leqq X, \qquad o \leqq Y_0 \leqq Y, \qquad o \leqq Z_0 \leqq Z;$$

il en résulte, à cause de notre remarque,

$$C \leqq AY_0 + BZ_0 + C \leqq AY + BZ + C,$$

c'est-à-dire
$$X_0 \leqq X_1 \leqq X,$$
et de même
$$\begin{aligned} Y_0 &\leqq Y_1 \leqq Y, \\ Z_0 &\leqq Z_1 \leqq Z. \end{aligned}$$

Une nouvelle application de la remarque donnera

$$AY_0 + BZ_0 + C \leqq AY_1 + BZ_1 + C \leqq AY + BZ + C,$$

c'est-à-dire
$$X_1 \leqq X_2 \leqq X,$$

et de même

$$
\begin{gathered}
Y_1 \leqq Y_2 \leqq Y, \\
Z_1 \leqq Z_2 \geqq Z.
\end{gathered}
$$

Ce raisonnement peut être continué indéfiniment, et l'on a dès lors, quel que soit r,

$$
\begin{gathered}
X_r \leqq X_{r+1} \leqq X, \\
Y_r \leqq Y_{r+1} \leqq Y, \\
Z_r \leqq Z_{r+1} \leqq Z.
\end{gathered}
$$

Donc X_r, Y_r, Z_r tendent bien, sans jamais décroître, vers des limites positives, X', Y', Z', satisfaisant aux relations (44).

D'après cela, la série formée avec les différences successives

$$
(X_0 - o) + (X_1 - X_0) + (X_2 - X_1) + \ldots + (X_{r+1} - X_r) + \ldots
$$

a ses termes tous positifs et une somme égale à X'; de même, les deux séries

$$
\begin{gathered}
(Y_0 - o) + (Y_1 - Y_0) + (Y_2 - Y_1) + \ldots + (Y_{r+1} - Y_r) + \ldots, \\
(Z_0 - o) + (Z_1 - Z_0) + (Z_2 - Z_1) + \ldots + (Z_{r+1} - Z_r) + \ldots
\end{gathered}
$$

ont leurs termes tous positifs et des sommes respectivement égales à Y', Z'. Observons enfin qu'en vertu de (43) ces différences satisfont aux relations suivantes :

$$
(45) \qquad \left\{
\begin{array}{lll}
X_0 & - o & = C, \\
Y_0 & - o & = K, \\
Z_0 & - o & = P; \\
X_1 & - X_0 & = A(Y_0 - o) \quad + B(Z_0 - o), \\
Y_1 & - Y_0 & = E(X_0 - o) \quad + F(Z_0 - o), \\
Z_1 & - Z_0 & = M(X_0 - o) \quad + N(Y_0 - o); \\
X_2 & - X_1 & = A(Y_1 - Y_0) \quad + B(Z_1 - Z_0), \\
Y_2 & - Y_1 & = E(X_1 - X_0) \quad + F(Z_1 - Z_0), \\
Z_2 & - Z_1 & = M(X_1 - X_0) \quad + N(Y_1 - Y_0); \\
\multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;} \\
X_{r+1} & - X_r & = A(Y_r - Y_{r-1}) + B(Z_r - Z_{r-1}), \\
Y_{r+1} & - Y_r & = E(X_r - X_{r-1}) + F(Z_r - Z_{r-1}), \\
Z_{r+1} & - Z_r & = M(X_r - X_{r-1}) + N(Y_r - Y_{r-1});
\end{array}
\right.
$$

Considérons maintenant le système (41), et calculons pour x, y, z des systèmes de valeurs successifs,

$$(x_0, y_0, z_0), \quad (x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad \ldots,$$

de la façon suivante :

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_0 = & c, \\ y_0 = & k, \\ z_0 = & p; \\ x_1 = ay_0 + bz_0 + c, \\ y_1 = ex_0 + fz_0 + k, \\ z_1 = mx_0 + ny_0 + p; \\ x_2 = ay_1 + bz_1 + c, \\ y_2 = ex_1 + fz_1 + k, \\ z_2 = mx_1 + ny_1 + p; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ x_{r+1} = ay_r + bz_r + c, \\ y_{r+1} = ex_r + fz_r + k, \\ z_{r+1} = mx_r + ny_r + p; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Aux équations (46) on peut évidemment substituer les suivantes

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 - 0 = c, \\ y_0 - 0 = k, \\ z_0 - 0 = p; \\ x_1 - x_0 = a(y_0 - 0) + b(z_0 - 0), \\ y_1 - y_0 = e(x_0 - 0) + f(z_0 - 0), \\ z_1 - z_0 = m(x_0 - 0) + n(y_0 - 0); \\ x_2 - x_1 = a(y_1 - y_0) + b(z_1 - z_0), \\ y_2 - y_1 = e(x_1 - x_0) + f(z_1 - z_0), \\ z_2 - z_1 = m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ x_{r+1} - x_r = a(y_r - y_{r-1}) + b(z_r - z_{r-1}), \\ y_{r+1} - y_r = e(x_r - x_{r-1}) + f(z_r - z_{r-1}), \\ z_{r+1} - z_r = m(x_r - x_{r-1}) + n(y_r - y_{r-1}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Si l'on compare, groupe par groupe, les relations (47) aux relations (45), on en tire successivement, puisque les modules de a, b, ... sont respectivement inférieurs ou égaux à A, B, ...,

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(x_0 - 0) &\leqq X_0 - 0,\\ \operatorname{mod}(y_0 - 0) &\leqq Y_0 - 0,\\ \operatorname{mod}(z_0 - 0) &\leqq Z_0 - 0,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(x_1 - x_0) &\leqq X_1 - X_0,\\ \operatorname{mod}(y_1 - y_0) &\leqq Y_1 - Y_0,\\ \operatorname{mod}(z_1 - z_0) &\leqq Z_1 - Z_0,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(x_2 - x_1) &\leqq X_2 - X_1,\\ \operatorname{mod}(y_2 - y_1) &\leqq Y_2 - Y_1,\\ \operatorname{mod}(z_2 - z_1) &\leqq Z_2 - Z_1,\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots,\end{aligned}$$

et, d'une manière générale,

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(x_{r+1} - x_r) &\leqq X_{r+1} - X_r,\\ \operatorname{mod}(y_{r+1} - y_r) &\leqq Y_{r+1} - Y_r,\\ \operatorname{mod}(z_{r+1} - z_r) &\leqq Z_{r+1} - Z_r.\end{aligned}$$

Il en résulte que les trois séries ayant pour termes les différences

$$\begin{aligned}&(x_0 - 0) + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{r+1} - x_r) + \ldots,\\ &(y_0 - 0) + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_{r+1} - y_r) + \ldots,\\ &(z_0 - 0) + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_{r+1} - z_r) + \ldots\end{aligned}$$

sont absolument convergentes, et que leurs sommes x', y', z' vérifient les relations

$$\operatorname{mod} x' \leqq X', \qquad \operatorname{mod} y' \leqq Y', \qquad \operatorname{mod} z' \leqq Z',$$

à plus forte raison les relations

$$\operatorname{mod} x' \leqq X, \qquad \operatorname{mod} y' \leqq Y, \qquad \operatorname{mod} z' \leqq Z; \tag{48}$$

en d'autres termes, les variantes x_r, y_r, z_r sont convergentes, et leurs limites x', y', z' vérifient les relations (48).

Je dis enfin que les valeurs x', y', z' vérifient les relations (41). Si l'on considère, en effet, parmi les groupes (46), le groupe général

$$\begin{aligned} x_{r+1} &= ay_r + bz_r + c, \\ y_{r+1} &= ex_r + fz_r + k, \\ z_{r+1} &= mx_r + ny_r + p, \end{aligned}$$

le passage à la limite pour r infini donne

$$\begin{aligned} x' &= ay' + bz' + c, \\ y' &= ex' + fz' + k, \\ z' &= mx' + ny' + p, \end{aligned}$$

ce qui achève notre démonstration.

X. Revenons aux systèmes $(\mathfrak{Q})$ et $((\mathfrak{Q}))$, et supposons que la constante ε (moindre que $\frac{1}{3}$), les constantes (40) et la constante μ aient pu être déterminées de telle façon que les coefficients des seconds membres de $((\mathfrak{Q}))$ soient respectivement majorants pour les coefficients des seconds membres de $(\mathfrak{Q})$. *Cela étant*, je dis que *le système $(\mathfrak{Q})$ admet un groupe d'intégrales à déterminations initiales identiquement nulles.*

Observons tout d'abord que les valeurs initiales imposées dans le système $(\mathfrak{Q})$ aux inconnues et à leurs dérivées paramétriques de tous ordres sont nulles, tandis que les valeurs initiales prises par les intégrales effectives dont nous avons constaté l'existence dans le système $((\mathfrak{Q}))$ et par leurs dérivées paramétriques sont positives ou nulles. Il suffit donc, pour établir le point que nous avons en vue, de prouver que si, dans les relations de $(\mathfrak{Q})$ prolongé, on attribue d'une part à $x, y, \ldots$ leurs valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$, d'autre part aux inconnues et à leurs dérivées paramétriques de tous ordres leurs valeurs initiales toutes nulles, le système illimité résultant de cette substitution admet, par rapport aux dérivées principales, une solution numérique composée de valeurs dont les modules sont inférieurs (ou égaux) aux valeurs initiales positives prises par les dérivées principales des intégrales effectives de $((\mathfrak{Q}))$.

Or, si l'on prend dans les systèmes

$$(\mathfrak{Q})\ \text{prolongé}, \quad ((\mathfrak{Q}))\ \text{prolongé}$$

deux relations correspondantes (c'est-à-dire ayant même premier membre), le second membre de la première est une somme de produits pouvant contenir comme facteurs quatre sortes de quantités, savoir : certains entiers positifs; certains coefficients des seconds membres de $(\mathfrak{Q})$; certaines dérivées partielles de ces coefficients; enfin, certaines dérivées, principales ou paramétriques, des fonctions inconnues. Et le second membre de la deuxième est composé exactement de la même façon avec les entiers positifs dont il s'agit, les majorantes des coefficients de $(\mathfrak{Q})$, les dérivées partielles de ces majorantes, et les dérivées principales ou paramétriques des fonctions inconnues. D'un autre côté, comme nous l'avons déjà dit, les valeurs initiales des dérivées paramétriques non secondaires des intégrales effectives de $((\mathfrak{Q}))$ sont positives et supérieures aux modules de celles que possèdent les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{Q})$, et les dérivées secondaires ont de part et d'autre des valeurs initiales nulles.

Cela étant, considérons, dans les systèmes

$$(\mathfrak{Q})\ \text{prolongé}), \quad ((\mathfrak{Q}))\ \text{prolongé},$$

les deux groupes respectifs de cote $\Gamma + 2$, et, dans ces derniers, remplaçons par les valeurs initiales qui leur conviennent respectivement de part et d'autre les variables, les inconnues et leurs dérivées paramétriques : chacun des groupes résultants, composé d'équations en nombre précisément égal à celui des dérivées principales de cote $\Gamma + 2$, aura pour premiers membres les dérivées principales dont il s'agit, et pour seconds membres des fonctions linéaires de ces dérivées (aucun des premiers membres ne figurant dans le second membre correspondant); si l'on compare d'ailleurs les coefficients de ces fonctions linéaires dans les deux groupes, on voit que, dans le second groupe, ces coefficients sont positifs et supérieurs aux modules des coefficients du premier groupe; enfin, il est clair que le second groupe admet une solution en nombres positifs [à savoir les valeurs initiales des dérivées principales de cote $\Gamma + 2$ des intégrales effectives de $((\mathfrak{Q}))$]. Si donc on applique le lemme de l'alinéa IX, on voit que le premier groupe admet, pour les dérivées principales de cote $\Gamma + 2$ du système $(\mathfrak{Q})$, une solution numérique constituée par des valeurs dont les modules sont respectivement inférieurs aux valeurs initiales (positives) prises par les dérivées semblables des intégrales effectives de $((\mathfrak{Q}))$.

Considérons maintenant, dans les systèmes $(\mathfrak{Q})$ prolongé et $((\mathfrak{Q}))$ prolongé, les deux groupes de cote $\Gamma + 3$, et, dans ces groupes respectifs, remplaçons par les valeurs initiales voulues les variables, les inconnues, les dérivées paramétriques de toutes cotes, et les dérivées principales de cote $\Gamma + 2$. Chacun des groupes résultants, composé d'équations en nombre précisément égal à celui des dérivées principales de cote $\Gamma + 3$, aura pour premiers membres les dérivées principales dont il s'agit, et pour seconds membres des fonctions linéaires de ces dérivées principales (aucun des premiers membres ne figurant dans le second membre correspondant); si l'on compare d'ailleurs les coefficients de ces fonctions linéaires dans les deux groupes, on voit, par tout ce qui précède, que, dans le second groupe, ces coefficients sont positifs et supérieurs aux modules des coefficients du premier groupe; enfin, il est clair que le second groupe admet une solution en nombres positifs [à savoir les valeurs initiales des dérivées principales de cote $\Gamma + 3$ des intégrales effectives de $((\mathfrak{Q}))$]. Si donc on applique le lemme de l'alinéa IX, on voit que le premier groupe admet, pour les dérivées principales de cote $\Gamma + 3$, une solution numérique constituée par des valeurs dont les modules sont respectivement inférieurs aux valeurs initiales (positives) prises par les dérivées semblables des intégrales effectives de $((\mathfrak{Q}))$.

Et ainsi de suite indéfiniment.

En rapprochant la conclusion du présent alinéa X de celle que nous avons formulée à l'alinéa VIII, on tombe sur la suivante :

Si, aux intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{Q})$, on impose des déterminations initiales identiquement nulles, et si, par un choix convenable de la constante ε (moindre que $\frac{1}{3}$) et des constantes (40), on peut faire en sorte que, dans les seconds membres de $((\mathfrak{Q}))$, les caractéristiques dépendant de ε soient respectivement supérieures aux modules des valeurs numériques *initiales que prennent, dans le système ($\mathfrak{Q}$), les coefficients des dérivées dominantes, il existe certainement, dans le système ($\mathfrak{Q}$), quelque groupe d'intégrales effectives répondant aux conditions initiales imposées.*

XI. Revenons maintenant au système Q. De tout ce qui précède (voir I, II, III, VII, X) résulte la conséquence suivante :

Pour qu'il existe dans le système Q quelque groupe d'intégrales répondant à des conditions initiales données, il suffit que certaines fonctions des variables indépendantes, des inconnues et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques présentent, pour les valeurs numériques initiales de leurs arguments, des modules satisfaisant à certaines inégalités.

Notre démonstration même indique comment ces inégalités doivent être formées.

On commence par fixer, dans le système Q, l'économie des conditions initiales, en ayant soin de les mettre sous la forme spécifiée au n° 6; puis, désignant par Γ la cote maxima des premiers membres de ces conditions initiales et par γ la cote minima des premiers membres de Q, on construit un autre système différentiel S suivant le mécanisme décrit à l'alinéa I du présent n° 16, et l'on forme, comme il a été dit à cette occasion, un système d'inégalités suffisantes : 1° pour que les groupes

$$S_\gamma,\quad S_{\gamma+1},\quad \ldots,\quad S_{\Gamma+1}$$

soient résolubles par rapport aux dérivées principales de cotes

$$\gamma,\quad \gamma+1,\quad \ldots,\quad \Gamma+1;$$

2° pour que le système du premier ordre Σ, déduit de S à l'aide du mécanisme décrit au n° 11, puisse, par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes, être transformé en un système régulier du premier ordre dont les colonnes contiennent respectivement les mêmes nombres d'équations que les colonnes correspondantes de Σ.

Cela fait, on considère les deux systèmes ci-dessus désignés par ($\mathfrak{Q}$) et (($\mathfrak{Q}$)); dans l'un et l'autre de ces deux systèmes, on ne conserve que la partie linéaire et homogène par rapport aux dérivées dominantes, et l'on suppose dans ($\mathfrak{Q}$) les coefficients de ces dérivées remplacés par leurs valeurs initiales, qui sont respectivement les mêmes que dans (Q) [III]. Désignant ensuite par h le nombre des catégories en lesquelles se partagent les inconnues suivant la valeur de leur cote, et augmentant, s'il le faut, d'un même entier négatif les cotes de toutes les inconnues, afin que les poids de ces inconnues et de leurs dérivées secondaires, définis à l'alinéa VI, soient tous de degré supérieur à zéro par rapport à l'ensemble des quantités (40), on écrit, d'une part, que la constante ε est moindre que $\frac{1}{h}$, d'autre part, que, dans les seconds membres de ($\mathfrak{Q}$), les coefficients des dérivées dominantes ont des modules initiaux respectivement inférieurs aux caractéristiques des coefficients correspondants du système (($\mathfrak{Q}$)); on forme enfin un ensemble de conditions suffisantes pour que les relations ainsi écrites puissent être vérifiées par un choix convenable de ε et des quantités (40). Si les inégalités résultantes, jointes à celles qu'on avait primitivement obtenues, sont satisfaites par les valeurs numériques initiales des quantités qui y figurent, il existe certainement quelque groupe d'intégrales effectives répondant aux conditions initiales imposées.

XII. *Les intégrales dont nous avons, sous le bénéfice de certaines inégalités, constaté l'existence dans le système* Q (XI), *sont nécessairement uniques,* ce qui achève notre démonstration.

Nous formulerons tout d'abord le lemme suivant, suffisamment élémentaire pour que nous nous dispensions d'en donner la démonstration :

Étant donné le système des n équations linéaires

$$\begin{gathered}
a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1} x_{n+1} + \ldots + a = 0, \\
b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n + b_{n+1} x_{n+1} + \ldots + b = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots + l_n x_n + l_{n+1} x_{n+1} + \ldots + l = 0,
\end{gathered}$$

que l'on suppose réduit, si, pour toutes valeurs numériques attribuées *à x_{n+1}, ..., ce système admet quelque solution en x_1, x_2, ..., x_n, le déterminant d'ordre n formé avec les coefficients de ces dernières inconnues est nécessairement différent de zéro, en sorte qu'à tout système de valeurs de x_{n+1}, ... correspond, pour x_1, x_2, ..., x_n, une solution unique.*

Observons maintenant que les conditions suffisantes indiquées à l'alinéa XI pour l'existence de quelque groupe d'intégrales remplissant les conditions initiales imposées se rapportent uniquement aux valeurs initiales choisies pour les variables indépendantes, les fonctions inconnues, et leurs dérivées paramétriques de cote inférieure à $\Gamma + 2$. Ce choix ayant été opéré de manière que les conditions dont il s'agit se trouvent satisfaites, si, désignant par k un entier positif déterminé (mais quelconque), on choisit pour les dérivées paramétriques de cotes

$$\Gamma + 2, \quad \Gamma + 3, \quad \ldots, \quad \Gamma + 1 + k$$

des valeurs initiales arbitraires, et pour les dérivées paramétriques de cote supérieure à $\Gamma + 1 + k$ des valeurs initiales toutes nulles, il existera certainement quelque groupe d'intégrales répondant à de pareilles conditions initiales. Cela posé, tout revient évidemment à prouver que, si l'on cherche à déterminer au moyen des systèmes successifs

$$Q_\gamma, \quad Q_{\gamma+1}, \quad \ldots, \quad Q_{\Gamma+1}, \quad Q_{\Gamma+2}, \quad Q_{\Gamma+3}, \quad \ldots, \quad Q_{\Gamma+1+k},$$

dont nous avons décrit la structure à l'alinéa I, des valeurs initiales correspondantes pour les dérivées principales de cotes

$$\gamma, \quad \gamma+1, \quad \ldots, \quad \Gamma+1, \quad \Gamma+2, \quad \Gamma+3, \quad \ldots, \quad \Gamma+1+k,$$

ces systèmes sont successivement résolubles (suivant l'algorithme de Cramer) par rapport aux dérivées principales dont il s'agit.

Or, le fait a déjà été constaté à l'alinéa I pour les systèmes

$$Q_\gamma, \quad Q_{\gamma+1}, \quad \ldots, \quad Q_{\Gamma+1}.$$

Quant aux suivants,

$$Q_{\Gamma+2}, \quad Q_{\Gamma+3}, \quad \ldots, \quad Q_{\Gamma+1+k},$$

chacun d'eux, comme nous l'avons encore constaté à l'alinéa I, est résoluble par rapport à quelque groupe de dérivées (principales ou paramétriques) de cote égale à son indice; chacun d'eux admet d'ailleurs, en vertu de l'alinéa XI, quelque solution où les dérivées paramétriques de même cote ont des valeurs initiales arbitraires : donc chacun d'eux, en vertu du lemme élémentaire formulé au début du présent alinéa, est résoluble par rapport aux dérivées principales de cote égale à son indice.

17 Appliquons ces résultats à l'équation très simple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{49}$$

qui remplit la double condition énoncée au début du n° 16, ainsi qu'on le voit en attribuant à x, y, u les cotes respectives 1, 1, c, où c désigne un entier positif ou négatif choisi comme on voudra. En écrivant la détermination initiale des intégrales hypothétiques sous la forme

$$\beta + (y - y_0)\varphi(y) + (x - x_0)\psi(x),$$

et par suite les conditions initiales sous la forme correspondante

$$\left\{\begin{array}{lll} u = \alpha & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \lambda(y) & \text{pour} & x - x_0 = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \mu(x) & \text{pour} & y - y_0 = 0, \end{array}\right.$$

ces dernières ont bien la forme spécifiée au n° 6; Γ a alors la valeur $1 + c$, et γ la valeur $2 + c$. Cela étant, si l'on désigne par A et B les dérivées partielles du second membre de (49) par rapport à $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ respectivement, puis par A_0 et B_0 les valeurs numériques initiales de A et B, le système S se réduit ici à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{50}$$

la suite des groupes

$$S_\gamma,\quad S_{\gamma+1},\quad \ldots,\quad S_{\Gamma+1}$$

à un groupe unique composé de cette même équation (50), et le système du premier ordre Σ à

$$(51)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = u'_x, & \dfrac{\partial u'_y}{\partial x} = A_0 \dfrac{\partial u'_x}{\partial x} + B_0 \dfrac{\partial u'_y}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = u'_y, & \dfrac{\partial u'_x}{\partial y} = A_0 \dfrac{\partial u'_x}{\partial x} + B_0 \dfrac{\partial u'_y}{\partial y}. \end{array}\right.$$

L'équation (50) se trouve d'elle-même résolue par rapport à la dérivée principale $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, la seule ayant pour cote $\Gamma + 1$. Sur le système du premier ordre (51), impliquant les inconnues u, u'_y, u'_x, effectuons la transformation linéaire et homogène

$$x' = \alpha x + \beta y,$$
$$y' = \delta x + \theta y,$$

où les constantes α, β, δ, θ sont provisoirement indéterminées. Si le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \theta \end{vmatrix}$ est différent de zéro, les deux équations $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u'_x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = u'_y$ du système (51), ne contenant dans leurs seconds membres aucune dérivée, formeront, après la transformation, un système résoluble par rapport à $\dfrac{\partial u}{\partial x'}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y'}$, et ce dernier, après la résolution, ne contiendra non plus aucune dérivée dans ses seconds membres. Examinons alors le système formé par les deux équations restantes du système (51), opérons-y le changement de variables, et calculons le déterminant différentiel du système résultant par rapport aux deux dérivées $\dfrac{\partial u'_y}{\partial x'}$, $\dfrac{\partial u'_x}{\partial x'}$; ce déterminant a pour valeur

$$\begin{vmatrix} \alpha - B_0\beta & -A_0\alpha \\ -B_0\beta & \beta - A_0\alpha \end{vmatrix} = \alpha\beta - A_0\alpha^2 - B_0\beta^2,$$

polynome entier en α, β dont les coefficients ne sont pas tous nuls, puisque l'un d'eux est égal à 1; on peut donc choisir pour α, β, δ, θ des valeurs qui laissent différents de zéro, et le polynome dont il s'agit, et le déterminant de la transformation.

Prenons maintenant, dans le système (49) prolongé, les équations de cote $\Gamma + 2$, c'est-à-dire de cote $3 + c$, c'est-à-dire enfin d'ordre 3, et du système (Q) ainsi obtenu déduisons le système ($\mathfrak{Q}$), en nous bornant dans ce dernier aux termes qui contiennent des dérivées d'ordre 3, et en remplaçant les coefficients de ces dérivées par leurs valeurs initiales, qui sont respectivement les mêmes que dans (Q); il vient ainsi :

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = A_0 \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + B_0 \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \ldots, \\[2ex] \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = A_0 \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + B_0 \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \ldots. \end{cases}$$

Le nombre h des catégories d'inconnues est ici égal à 1; on peut d'ailleurs supposer la cote c de l'inconnue u choisie de telle façon qu'en désignant par ξ, η, υ^{-c}, comme il a été vu à l'alinéa VI du n° 16, les poids respectifs de x, y, u, les poids

$$\upsilon^{-c}, \quad \frac{\upsilon^{-c}}{\xi}, \quad \frac{\upsilon^{-c}}{\eta}, \quad \frac{\upsilon^{-c}}{\xi^2}, \quad \frac{\upsilon^{-c}}{\xi\eta}, \quad \frac{\upsilon^{-c}}{\eta^2}$$

de l'inconnue u et de ses dérivées secondaires $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ soient de degré supérieur à zéro par rapport à l'ensemble des trois quantités ξ, η, υ (il suffit pour cela de supposer $c = -3$). Cela étant, désignons par s la somme des produits obtenus en multipliant $x - x_0$ par ξ, $y - y_0$ par η, et l'inconnue u avec ses dérivées secondaires par leurs poids respectifs; posons en outre $\Theta(s) = \frac{1}{1-s}$, et formons le système

$$\begin{aligned} \frac{\upsilon^{-c}}{\xi^2\eta} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{\upsilon^{-c}}{\xi^3} \Theta(s) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\upsilon^{-c}}{\xi\eta^2} \Theta(s) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \ldots, \\ \frac{\upsilon^{-c}}{\xi\eta^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{\upsilon^{-c}}{\xi^2\eta} \Theta(s) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\upsilon^{-c}}{\eta^3} \Theta(s) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \ldots. \end{aligned}$$

Ce dernier devient, après réduction à l'unité des coefficients des premiers membres,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\eta}{\xi}\Theta(s)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\xi}{\eta}\Theta(s)\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \ldots,$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\eta}{\xi}\Theta(s)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\xi}{\eta}\Theta(s)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \quad + \ldots,$$

et en comparant le système $((\mathfrak{A}))$ ainsi formé au système $(\mathfrak{A})$ ou (52), nous avons à écrire les inégalités

$$\varepsilon < 1, \qquad \frac{\varepsilon}{2}\frac{\eta}{\xi} > \operatorname{mod} A_0, \qquad \frac{\varepsilon}{2}\frac{\xi}{\eta} > \operatorname{mod} B_0,$$

dont l'ensemble équivaut à

$$(53) \qquad \varepsilon < 1, \qquad \frac{2 \operatorname{mod} A_0}{\varepsilon} < \frac{\eta}{\xi} < \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{mod} B_0}.$$

Pour que les deux dernières des inégalités (53) soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$(54) \qquad \operatorname{mod} A_0 \operatorname{mod} B_0 < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

ce qui entraîne, à cause de $\varepsilon < 1$, la condition nécessaire

$$(55) \qquad \operatorname{mod} A_0 \operatorname{mod} B_0 < \frac{1}{4};$$

réciproquement d'ailleurs, si l'inégalité (55) est satisfaite, on pourra trouver pour ε une valeur positive et plus petite que 1, vérifiant (54), puis pour $\frac{\eta}{\xi}$ une valeur positive vérifiant la double inégalité qui figure dans (53). La condition nécessaire et suffisante pour que les relations (53) soient compatibles est donc

$$\operatorname{mod}(A_0 B_0) < \tfrac{1}{4}.$$

En conséquence, pour que l'équation aux dérivées partielles (49) admette une intégrale, et une seule, répondant à des conditions initiales données, il suffit, en désignant par A et B les dérivées partielles du second membre f par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ respectivement, que le module initial du produit AB soit inférieur à $\frac{1}{4}$.