ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

Sur les périodes des intégrales doubles et leurs rapports avec la théorie des intégrales doubles de seconde espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 20 (1903), p. 531-584

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__531_0>

SUR LES

PÉRIODES DES INTÉGRALES DOUBLES

ET LEURS RAPPORTS AVEC LA THÉORIE DES

INTÉGRALES DOUBLES DE SECONDE ESPÈCE,

PAR M. ÉMILE PICARD.

Je me propose d'indiquer les résultats généraux auxquels je suis parvenu dans la théorie des intégrales doubles *de seconde espèce*. J'ai introduit, dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables, deux nombres ρ_0 et ρ, et mon but essentiel est d'indiquer une relation entre ces deux nombres. La signification de ces nombres a été rappelée dans l'article précédent, où se trouvent énoncés certains faits de calcul qui vont nous être très utiles. Dans cette étude, les périodes de certaines intégrales jouent un rôle important. L'*Analysis situs* n'a cependant été pour moi qu'une auxiliaire presque verbale et, en fait, j'aurais pu me dispenser de parler de *cycles*, considérant seulement certaines expressions analytiques remarquables sous le nom de *périodes*. Les personnes qu'effraient les considérations d'*Analysis situs* dans l'espace à quatre dimensions n'auront à ce sujet aucun effort à faire, en laissant seulement de côté quelques paragraphes dont la lecture n'est pas indispensable. On trouvera un résumé de ce Mémoire dans les *Comptes rendus* (19 octobre 1903).

I.

Sur les périodes des intégrales doubles de première espèce.

1. Je me suis déjà occupé [1] des périodes des intégrales doubles de première espèce et je reprendrai d'abord, rapidement, en les complétant, les résultats auxquels j'étais parvenu. Prenons l'intégrale double de *première espèce*

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

et envisageons la courbe entre x et z de genre p, pour y arbitraire

$$f(x, \bar{y}, z) = 0. \tag{1}$$

Les $2p$ périodes de l'intégrale (ici de première espèce)

$$\int \frac{Q(x, \bar{y}, z)\,dx}{f'_z} \tag{2}$$

sont des fonctions de y, satisfaisant à l'équation différentielle linéaire que nous appelons E, et dont les points critiques b correspondent aux points simples de la surface où le plan tangent est parallèle au plan des zx. Considérons un cycle Γ de la courbe (1), se déformant avec y et revenant à sa position initiale quand y, ayant décrit un certain chemin fermé C, revient lui-même à son point de départ. On obtient évidemment de cette manière un cycle à deux dimensions, qui donnera naissance à une période de l'intégrale double. Le cycle Γ sera caractérisé par ce fait que la période correspondante

$$\omega(y)$$

de l'intégrale (2) revient à sa valeur initiale, quand y décrit la courbe C. Ces considérations généralisent celles que nous avons

---

[1] E. PICARD, *Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Comptes rendus*, 18 novembre et 23 décembre 1901, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 1902).

employées pour obtenir les *résidus* des intégrales doubles; dans ce cas, le cycle Γ se réduisait à un contour infiniment petit autour d'un pôle.

2. Nous allons étudier la forme analytique de l'intégrale

$$\int \omega(y)\, dy$$

prise le long du contour C. Cette étude nous fera connaître certaines expressions analytiques remarquables, qui nous conduiront d'elles-mêmes à généraliser le mode de génération des périodes de notre intégrale double.

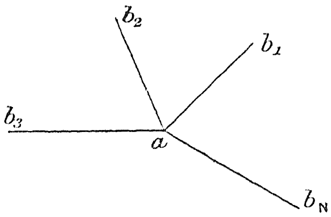
Désignons par

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_N$$

les points critiques de l'équation différentielle E (N désigne ici la *classe* de la surface).

Nous joignons ces points à un point a du plan de la variable y, et nous considérons les différents lacets $ab_1, ab_2, \ldots, ab_N$ formés, comme d'habitude, d'un cercle infiniment petit autour d'un point b et d'un chemin allant de a à ce cercle (*fig.* 1).

Fig. 1.



Pour chaque point critique $y = b$, l'équation fondamentale déterminante de E a une racine double. Cette racine double correspond (voir *loc. cit.*) à une intégrale holomorphe $\Omega(y)$, et une intégrale non holomorphe $\Omega'(y)$ contenant un terme logarithmique $\log \Omega(y - b)$, de telle sorte que l'on ait

$$\Omega'(y) = f(y) + \frac{1}{2\pi i}\Omega(y)\log(y - b),$$

$f(y)$ étant, comme $\Omega(y)$, holomorphe autour de $y = b$. Les $2p - 2$ autres intégrales, formant avec Ω et Ω' un système fondamental, sont holomorphes autour de $y = b$.

Ceci rappelé, tout chemin C partant de a et y revenant se ramène à une somme de lacets parcourus dans un ordre quelconque. Désignons d'une manière générale par

$$\Omega_i(y)$$

la période de l'intégrale (2), holomorphe autour du point $y = b_i$, et qui correspond à la racine double : elle est parfaitement définie de b_i en a sur le lacet.

Une période quelconque $\omega(y)$ de l'intégrale (2), quand y tourne autour du point b_i, se reproduit à un terme additif près de la forme

$$m_i \Omega_i(y) \qquad (m_i \text{ étant un entier}),$$

comme il résulte immédiatement de la forme de la période appelée tout à l'heure d'une manière générale $\Omega'(y)$, toutes les autres périodes étant holomorphes autour de b_i.

Donc, quand y décrivant un chemin fermé C revient au point de départ, l'intégrale considérée $\omega(y)$ de l'équation linéaire E s'augmente d'une expression de la forme

$$\sum m_i \Omega_i(y),$$

la sommation s'étendant à un certain nombre de points b_i. Si l'intégrale ω revient à sa valeur initiale, on devra avoir

$$\sum m_i \Omega_i(y) = 0.$$

Quant à la valeur de l'intégrale

$$\int_C \omega(y)\, dy \tag{3}$$

le long du contour C, elle est facile à calculer; sur le lacet ab_i, il reste, après suppression de termes se détruisant à l'aller et au retour,

$$m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy,$$

et, par suite, *la valeur de l'intégrale* (3) *est*

$$\sum m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy. \tag{4}$$

Dans cette expression $\Omega_i(y)$ est définie sans aucune ambiguïté le long du chemin $b_i a$. D'ailleurs l'expression (4) ne dépend pas du point choisi a, comme il résulte immédiatement de l'identité

$$\sum m_i \Omega_i(y) = 0. \tag{5}$$

3. Les considérations précédentes appellent donc notre attention sur les expressions de la forme (4), correspondant à une identité de la forme (5). Une question se pose d'elle-même :

Une expression (4), *l'identité* (5) *étant supposée satisfaite, peut-elle être envisagée comme une période de l'intégrale double*

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}\,?$$

Nous entendons par *période de l'intégrale double*, de la manière la plus générale, l'intégrale prise le long d'*un cycle à deux dimensions*, c'est-à-dire d'un *continuum* fermé à deux dimensions à chaque point duquel ne correspond qu'une seule valeur de (x, y, z).

La réponse à la question posée est affirmative, comme nous allons l'établir. Soit donc l'identité

$$m_1\Omega_1(y) + \ldots + m_s\Omega_s(y) = 0 \qquad (\text{les } m \text{ étant entiers}), \tag{6}$$

entre un certain nombre de fonctions Ω, on va montrer *qu'il existe un certain cycle à deux dimensions, tel que la valeur de l'intégrale double*

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

prise le long de ce cycle est égale à

$$m_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\, dy + \ldots + m_s \int_{b_s}^{a} \Omega_s(y)\, dy. \tag{7}$$

Cette valeur est d'ailleurs manifestement indépendante de la constante a.

Considérons l'intégrale

$$m_1 \Omega'_1(y)$$

de l'équation E, en désignant par Ω'_1 l'intégrale relative au point b_1 déjà envisagée au n° 1. Quand y partant de a décrit le lacet b_1, l'intégrale $m_1 \Omega'_1$ s'augmente de

$$m_1 \Omega_1(y).$$

Il faut interpréter ce fait analytique *au point de vue de la géométrie de situation*. Soient, d'une manière générale, sur la surface de Riemann entre x et z donnée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

pour la valeur y, Γ_1 le contour correspondant à $\Omega_1(y)$ et Γ'_1 le contour correspondant à Ω'_1. Partons du contour

$$m_1 \Gamma'^a_1$$

pour $y = a$; le cheminement de y se produisant, ce contour se déplace en se déformant, et, quand y revient en a, on a le contour

$$m_1 \Gamma'^a_1 + m_1 \Gamma^a_1.$$

Il est clair que, pendant la déformation, *on engendre ainsi une surface ouverte*, mais *avec le seul bord*

$$m_1 \Gamma^a_1$$

et la valeur de l'intégrale double correspondant à cette surface ouverte est

$$m_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\, dy.$$

De la même façon, *les différents autres termes de la somme* (7) *correspondront à des surfaces ouvertes* avec les bords

$$m_2 \Gamma^a_2, \quad \ldots, \quad m_s \Gamma^a_s,$$

Γ^a_i ayant la signification analogue à Γ^a_1 quand b_i remplace b_1.

Nous avons donc s surfaces ouvertes avec les s bords indiqués. D'autre part, pour y arbitraire, les s contours

$$m_1 \Gamma_1, \quad m_2 \Gamma_2, \quad \ldots, \quad m_s \Gamma_s$$

limitent, sur la surface de Riemann,

$$f(x, y, z) = 0,$$

une certaine portion P de la surface, comme il résulte de l'identité (6) qui exprime que les s intégrales

$$\Omega_1(y), \quad \ldots, \quad \Omega_s(y)$$

ne sont pas distinctes.

Considérons, en particulier, la portion P^a, sur les surfaces correspondant à $y = a$. *Cette portion* P^a, *avec les s surfaces ouvertes envisagées ci-dessus, forme une surface fermée, qui est un cycle à deux dimensions;* la valeur de l'intégrale double sur cette surface est précisément l'expression (7) donnée par les s surfaces ouvertes, puisque sur la portion P^a, correspondant à $y = a$, l'intégrale est nulle. *Le théorème énoncé est donc établi.*

Il est important de remarquer que nous n'avons pas à nous préoccuper de savoir si la portion P^a contient ou non des points à l'infini, puisque l'intégrale double dont nous sommes parti est de première espèce. Il en serait autrement pour une intégrale double qui deviendrait infinie à l'infini puisque l'intégrale suivante P_a pourrait n'avoir aucun sens. Nous rencontrerons ce cas dans la section suivante.

4. On doit nécessairement se demander si toutes les périodes de l'intégrale double peuvent être engendrées au moyen des cycles à deux dimensions que nous venons de considérer. Nous allons établir que tout cycle à deux dimensions, situé tout entier à distance finie, est susceptible de la génération précédente. Nous emploierons, à cet effet, quoique dans des circonstances plus compliquées, le même genre de raisonnements qu'à la page 58 du Tome I de notre *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* quand nous avons étudié les périodes d'une intégrale double de fonction rationnelle pour un continuum fermé à distance finie.

Concevons donc relativement à la fonction algébrique z de x et y définie par

$$f(x, y, z) = 0$$

un *cycle à deux dimensions* situé à distance finie.

Posons

$$x = x_1 + ix_2, \qquad y = y_1 + iy_2;$$

toute surface à deux dimensions sera représentée par deux relations entre x_1, x_2, y_1, y_2. De même le continuum critique C sera représenté dans l'espace à quatre dimensions réelles

$$(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

par deux relations entre les quatre lettres x_1, x_2, y_1 et y_2. Pour une valeur donnée à y_2, nous avons sur ce continuum un ensemble à une dimension de valeurs de x_1, x_2 et y_1, que l'on peut regarder comme représentant un certain nombre de courbes gauches α dans l'espace à trois dimensions (x_1, x_2, y_1); il faut d'ailleurs à chaque valeur de x_1, x_2, y_1, y_2 associer la valeur correspondante de z, de sorte que nous entendons par courbe α le lieu des points (x_1, x_2, y_1); pour une valeur de y_2 avec association des valeurs correspondantes de z.

Chaque plan

$$y_1 = \text{const.}$$

rencontre les courbes α en un certain nombre de points toujours en même nombre, à savoir : le nombre des points de rencontre de C avec un plan arbitraire parallèle au plan des zx.

Sauf pour certaines valeurs de y_2 en nombre fini, l'ensemble des courbes α ne présente pas de points multiples; les valeurs de y_2, pour lesquelles cet ensemble a un point multiple, correspondent aux coefficients de i dans les valeurs de y pour lesquelles le plan correspondant parallèle au plan des zx est tangent à la courbe C (et en même temps à la surface). Ces valeurs de y sont celles que nous avons constamment désignées par b, et qui ont joué dans toutes nos recherches un rôle capital. Pour les valeurs de y_2 correspondant au coefficient de i dans un des b, deux courbes α auront *un* point commun, formant un point *double* pour l'ensemble des courbes α. Soit pour la valeur b considérée

$$b = b_1 + ib_2;$$

pour y_2 voisin de b_2 et un peu inférieur, les courbes α dans l'espace (x_1, x_2, y_1) n'ont pas de point double, mais deux branches passent très près l'une de l'autre. Pour $y_2 = b_2$, ces deux branches se rencontrent, et pour y_2 supérieur à b_2, elles ne se rencontrent pas, de sorte que, au moment du passage de y_2 par b_2, les deux branches se sont traversées; ce fait est à retenir pour ce qui va suivre.

Revenons à notre cycle S à deux dimensions. Cette surface étant tout entière à distance finie, il n'y aura de points de la surface que pour des valeurs de y_2, comprises entre deux limites a_1 et a_2 ($a_1 < a_2$). Quand y_2 en croissant devient égale à a_1, une courbe fermée correspondante de S commence à paraître, et l'on peut la représenter dans l'espace (x_1, x_2, y_1).

Deux cas peuvent se présenter : ou bien cette courbe se réduit à un point, ou elle est la limite de deux courbes qui sont venues se confondre; dans toute autre hypothèse, la surface S ne serait pas fermée. On peut faire abstraction de la première hypothèse, car, si pour $y_2 = a_1$ la courbe se réduisait à un point, il arriverait que, pour y_2 arbitraire, la courbe correspondante, extension de ce point, ne tournerait pas autour des courbes α, et l'on pourrait, par une déformation continue, réduire à zéro, sans rencontrer aucune singularité, une portion fermée de la surface qui pourrait être supprimée. Nous avons donc, pour $y_2 = a_1$, une certaine courbe enveloppant quelques-unes des lignes α; quand y_2 croît, cette courbe se dédouble, et l'on a ainsi, pour y_2 arbitraire, des couples de courbes qui, pendant la variation continue de y_2, ne peuvent disparaître que deux à deux en venant à coïncider. Nous désignerons par C une de ces courbes, correspondant à une valeur d'ailleurs quelconque de y_2. Faisons croître y_2 depuis a_1; on aura ainsi une suite continue de courbes C, et la surface S pourra être ainsi décrite tout entière en faisant varier d'une manière continue y_2 (non pas nécessairement toujours dans le même sens) et en revenant en a_1 avec la position initiale de C.

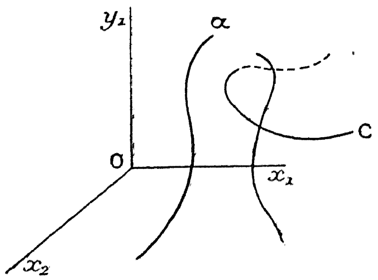
5. Nous allons maintenant déformer S, en déformant chacune des courbes C. Figurons (*fig.* 2), pour une valeur de y_2, la courbe C et les lignes α dans l'espace (x_1, x_2, y_1).

Tant que y_2 ne rencontre pas une valeur singulière désignée plus haut d'une manière générale par b_2, on peut faire glisser en quelque sorte la courbe C, sans rencontrer les lignes correspondantes α, de manière à lui faire prendre une position Γ dans le plan

$$y_1 = \mathrm{K} \qquad (\mathrm{K} \text{ étant une constante fixe}),$$

cette opération se faisant elle-même d'une manière continue quand y_2 varie. Mais pour $y_2 = b_2$, on a deux lignes α se rencontrant, et il peut

Fig. 2.



arriver que l'on ne puisse plus déformer C en l'amenant dans le plan $y_1 = \mathrm{K}$, sans traverser α. C'est ce qui arrivera dans les figures 3 et 4, en supposant, dans la figure 3, que le plan $y_1 = \mathrm{K}$ soit au-dessous

Fig. 3.

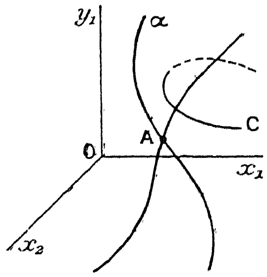
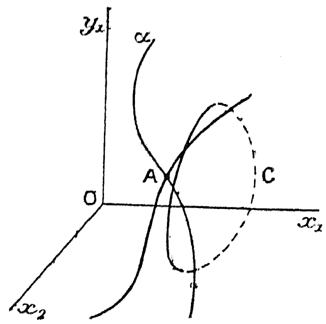


Fig. 4.



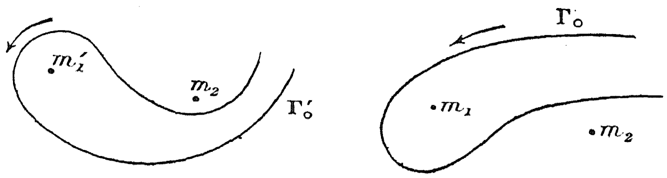
du point double A de α. Les deux figures précédentes représentent d'ailleurs les deux circonstances essentiellement différentes pouvant se présenter; les autres cas étant des combinaisous de ces deux cas.

Pour y_2 voisin de b_2, on pourra bien faire glisser C de manière à l'amener dans le plan $y_1 = K$, mais voici la circonstance qui va se présenter. L'opération qui amène C dans ce plan ne se fera pas d'une manière continue à l'instant du passage de y_2 par la valeur b_2. En d'autres termes, pour $y_2 = b_2 - \varepsilon$ et pour $y_2 = b_2 + \varepsilon'$ (ε et ε' très petits), la courbe C_0 et la courbe infiniment voisine C'_0 correspondant à ces deux valeurs de y_2 n'auront pas été ramenées dans le plan $y_1 = K$ à deux courbes infiniment rapprochées.

La raison en est que deux branches de la ligne α se sont traversées quand y_2 est passée par b_2. Il est facile de voir dans quelle dépendance sont les deux transformées Γ_0 et Γ'_0, de C_0 et C'_0 après les glissements les amenant dans le plan $y_1 = K$.

Prenons d'abord la figure (3). Les dessins suivants (*fig.* 5) sont

Fig. 5.



faits dans le plan $y_1 = K$; on désigne par m_1 et m_2 les points de rencontre avec ce plan des lignes α qui correspondent à $y_2 = b_2 - \varepsilon$ et par m'_1 et m'_2 les points de rencontre avec le même plan des lignes α correspondant à $y_2 = b_2 + \varepsilon'$. L'un des dessins correspond à $y_2 = b_2 - \varepsilon$ et l'autre à $y_2 = b_2 + \varepsilon'$.

On voit de suite que le cycle Γ'_0 est équivalent au cycle Γ_0 plus le cycle correspondant à une courbe tournant autour de m_1 et m_2.

Les circonstances sont différentes avec la figure 4. On a alors les

Fig. 6.

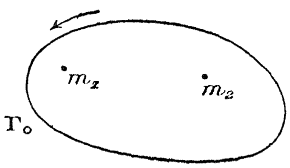
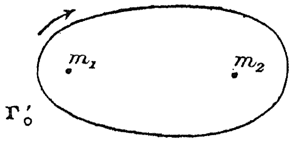


Fig. 7.



dessins suivants (*fig.* 6 et 7) : les contours Γ_0 et Γ'_0 sont les mêmes, mais le sens de la flèche est changé.

6. Ceci posé, suivons la déformation de la surface S obtenue en ramenant chaque courbe C dans le plan $y_1 = K$. Cette déformation se fait d'une manière continue, sauf quand y_2 passe par une valeur désignée par b_2 et que l'un ou l'autre des cas du paragraphe précédent se présente. Supposons que nous soyons dans le cas de la figure 3, et gardons les notations du paragraphe précédent. Dans la surface déformée les lignes Γ_0 et Γ'_0 qui correspondent à deux valeurs très voisines de y_2 ne sont pas très voisines l'une de l'autre ; on passe d'une manière continue de l'une à l'autre en déformant Γ_0 de Γ_0 en C_0 dans l'espace $(x_1, x_2, y_1, b_2 - \varepsilon)$, puis en allant de C_0 en C'_0 sur notre surface initiale S, et enfin amenant C'_0 en Γ'_0 dans l'espace $(x_1, x_2, y_1, b_2 + \varepsilon')$. Or, on peut réaliser autrement et d'une manière équivalente ce passage de Γ_0 en Γ'_0. Considérons, à cet effet, le cycle Γ_0 qui est dans le continuum

$$(\mathrm{P}) \qquad y = K + i(b_2 - \varepsilon)$$

et qui est sur la surface de Riemann entre x et z

$$f(x, y, z) = 0.$$

Faisons partir y de la valeur ci-dessus, et faisons décrire à cette variable dans son plan un contour fermé autour du point b, dans un sens convenable, et en supposant que sur ce contour la valeur de y_2 s'éloigne peu de b_2. Le cycle Γ_0 se transformera, d'après ce que nous avons vu dans bien des circonstances, par cette circulation en un cycle ayant la forme de Γ'_0, et qui sera, si l'on veut, Γ'_0 dans l'espace $(x_1, x_2, y_1, b_2 - \varepsilon)$; la surface engendrée pendant ce déplacement, augmentée de celle qui correspond au transport de la courbe Γ'_0 de l'espace $(x_1, x_2, y_1, b_2 - \varepsilon)$ à la courbe Γ'_0 de l'espace $(x_1, x_2 y_1, b_2 + \varepsilon')$. Ce second mode pour passer de Γ_0 à Γ'_0 est équivalent au premier, c'est-à-dire donne la même valeur pour l'intégrale double sur les surfaces correspondantes. Nous avons donc *fait disparaître la discontinuité dans la déformation de la surface obtenue* en déformant la courbe C en cycles dans le plan de la variable x pour

$$y = K + iy_2,$$

et, par suite, nous pouvons substituer à la surface S une surface connexe formée de lignes Γ, à la condition d'ajouter la portion dont il vient d'être parlé et qui est elle-même formée de cycles correspondant à $y = \text{const}$. De là résulte que nous n'avons à envisager, pour le calcul de la période, qu'une intégrale de la forme

$$\int \omega(y)\,dy$$

prise pour un chemin convenable de la variable y. Si donc, en décrivant notre surface cyclique S avec la courbe C, nous ne rencontrons, pour les valeurs singulières de y_2, que le cas de la figure 3, la période sera obtenue par l'intégrale précédente, où $\omega(y)$ est une période de

$$\int \frac{Q(x, y, z)\,dx}{f'_z},$$

prise le long d'un chemin fermé convenable, ce qui démontre bien le résultat énoncé et nous conduit aux formes étudiées au n° 3.

Les choses se présentent sous une forme un peu différente dans le cas de la figure 4. Il n'est pas possible, en effet, de trouver un chemin dans le plan de la variable y menant de Γ_0 à Γ'_0. Nous allons calculer directement la valeur de l'intégrale double prise le long de la surface engendrée par le déplacement de la courbe Γ_0 de l'espace $(x_1, x_2, y_1, b_2 - \varepsilon)$ à la courbe Γ'_0 du même espace, après avoir passé par les courbes C_0 et C'_0. Nous ne changerons pas la valeur de l'intégrale double si nous substituons à C_0 et C'_0 deux courbes de même forme mais très voisines de A, et les supposant respectivement dans les espaces

$$(x_1, x_2, y_1, b_2 - \varepsilon) \quad \text{et} \quad (x_1, x_2, y_1, b_2 + \varepsilon').$$

La surface en question pourra alors être engendrée en laissant d'abord y_2 égal à $b_2 - \varepsilon$ et faisant varier y_1 et déformant en maintenant Γ_0, de manière que, y_1 étant très voisin de b_1 (en posant comme plus haut $b = b_1 + ib_2$, et b_1 étant l'y_1 du point double A), la transformée Γ_1 de Γ_0 soit de dimensions très petites et très voisines de A, puis enfin avec $y_2 = b_2 + \varepsilon'$, on aura une surface résultant de la déformation de Γ'_0 et se terminant à une courbe Γ'_1, avec y_1 très voisin de b_1, qui est de dimensions très petites et très voisine de A;

outre ces deux surfaces, il y aura des surfaces de dimensions très petites reliant Γ_1 à C_1, puis C_1 à C'_1 et enfin C'_1 à Γ'_1.

L'intégrale prise le long des trois dernières surfaces est négligeable, c'est-à-dire qu'elle donne zéro quand les dimensions de C_1, C'_1, Γ_1 et Γ'_1 tendent vers zéro, et il reste comme valeur de notre intégrale sur la surface limite

$$2\int_\lambda^b \Omega(y)\,dy,$$

$\Omega(y)$ correspondant au cycle Γ (c'est la notation déjà employée), et en posant

$$\lambda = K + ib_2.$$

Les deux portions de l'intégrale ne se détruisent pas, il y a au contraire multiplication par *deux*, parce que le sens sur le contour a changé, comme l'indique la figure 4. En définitive, le passage de y_2 par b_2 amène le changement de signe de Ω, en même temps qu'il faut ajouter l'intégrale ci-dessus; il revient au même de dire que l'on intègre

$$\int \omega(y)\,dy$$

le long d'un chemin qui passe par le point singulier $y = b$, $\omega(y)$ arrivant au voisinage de ce point avec la détermination $\Omega(y)$, mais, après le passage de y par b, on doit changer le signe de $\omega(y)$.

On pourrait donner une forme analogue au résultat trouvé plus haut relatif à la figure 2, en disant que l'on prend l'intégrale

$$\int \omega(y)\,dy$$

le long d'un chemin passant par le point critique b; en ce point $\omega(y)$ devient alors infinie (comme un logarithme), et, après le passage de y par b, on doit augmenter $\omega(y)$ de $\Omega(y)$.

En combinant les résultats précédents, nous voyons que l'intégrale double prise le long du cycle S peut s'obtenir de la manière suivante : soit $\omega(y)$ une période convenable de l'intégrale

$$\int \frac{Q(x, y, z)\,dx}{f'_z},$$

on formera l'intégrale

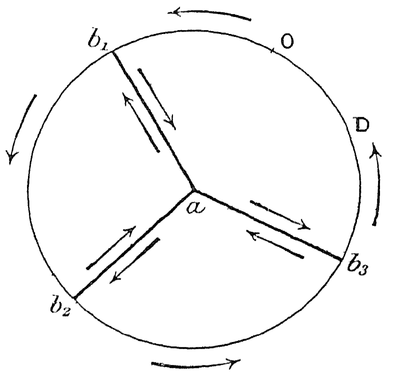
$$\int \omega(y)\,dy$$

dans le plan de la variable complexe y le long d'un chemin D pouvant passer par les points singuliers désignés d'une manière générale par b. Quand D traverse le point singulier b_i, on doit augmenter $\omega(y)$ de

$$\mu_i\,\Omega_i(y),$$

μ_i étant un entier positif ou négatif, et $\Omega_i(y)$ ayant la signification du n° 2. De plus, en revenant au point de départ O sur le chemin D, on doit retrouver la détermination initiale de $\omega(y)$, puisqu'on revient à la même courbe C sur la surface S. La valeur de l'intégrale est alors facile à calculer. Figurons le chemin D avec les trois points, b_1,

Fig. 8.



b_2, b_3 (*fig.* 8), pour fixer les idées et le point de départ O. Soit, en outre, a un point quelconque dans le plan; traçons

$$ab_1,\quad ab_2,\quad ab_3,$$

que l'on va regarder comme les lignes doubles. Au lieu de prendre l'intégrale

$$\int \omega(y)\,dy$$

sur le contour D, on peut la prendre sur le contour

$$O\,b_1\,ab_1\,b_2\,ab_2\,b_3\,ab_3\,O,$$

en supposant que, aux points correspondants de ab_i et de $b_i a$, la différence des valeurs de $\omega(y)$ est $\mu_i \Omega_i(y)$, le saut brusque ayant alors lieu en a. D'ailleurs, comme on doit retrouver la même valeur en o, il faut manifestement que l'on ait l'identité

$$\sum \Sigma \mu_i \Omega_i(a) = 0.$$

Enfin, la valeur de l'intégrale sera

$$\sum \mu_i \int_a^{b_i} \Omega_i(y)\, dy.$$

Par suite, *toutes les périodes de notre intégrale double peuvent être obtenues au moyen des combinaisons envisagées au n° 3*. Le résultat énoncé au commencement du n° 4 est donc établi.

7. Dans la forme analytique que nous avons donnée aux périodes de l'intégrale double figurent les fonctions $\Omega(y)$ relatives à chaque point singulier.

On pourrait, sans parler de ces périodes particulières de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{Q(x, y, z)\, dx}{f'_z}, \tag{8}$$

donner encore la forme suivante aux périodes de l'intégrale double. Soit toujours a un point arbitrairement choisi; considérons une intégrale $\omega_i(y)$ de l'équation différentielle linéaire E relative aux périodes de (8), et supposons que y partant de a y revienne après avoir décrit un chemin C_i autour de b_i et avec la détermination $\omega'_i(y)$; on fait ainsi pour un certain nombre de points singuliers b. Supposons enfin que l'on ait l'identité

$$\sum \omega_i(y) = \sum \omega'_i(y). \tag{9}$$

Alors l'expression

$$\sum \int_{C_i} \omega_i(y)\, dy \tag{10}$$

est une période de l'intégrale double. Il est clair, d'après l'identité (9), que l'expression (10) ne dépend pas de a.

Dans tous les numéros précédents, nous avons supposé, comme il était permis, que la surface algébrique f avait une position quelconque par rapport aux axes de coordonnées; dans ces conditions, les points singuliers b de l'équation différentielle linéaire E, qui a joué un rôle capital dans toutes nos recherches, possèdent des propriétés d'une remarquable simplicité qui nous ont été très utiles. Énonçons seulement pour le moment une remarque importante pour le cas, peu intéressant au point de vue théorique général, mais qui peut se rencontrer dans des applications particulières, où les axes de coordonnées auraient une position particulière par rapport à la surface. Les points singuliers de l'équation (E) peuvent être alors de nature plus compliquée, mais les expressions (10), sous la condition (9), sont encore évidemment des périodes de l'intégrale double. Toutefois, et c'est là le point que nous venons signaler, *tous les cycles à deux dimensions de la surface algébrique ne pourront pas toujours être engendrés de cette manière,* en ramenant à un seul plan $y = a$, contrairement au théorème que nous venons de démontrer plus haut, dans la démonstration duquel la nature simple des points singuliers b a joué un rôle. Nous le montrerons sur un exemple dans la section suivante.

8. Revenons aux périodes précédemment trouvées

$$\sum m_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy$$

avec la condition

$$\sum m_i \Omega_i(y) = 0.$$

Elles se ramènent immédiatement à un nombre limité d'entre elles. Tout d'abord, parmi les $\Omega_i(y)$, il y en aura, en général, $2p$ qui sont linéairement indépendants. Ceci arrivera en particulier si l'équation E est irréductible (ce qui est le cas général). Supposons, en effet, que, parmi les $\Omega_i(y)$, il y en ait moins de $2p$ linéairement indépendants, soient

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_s \qquad (s < 2p)$$

et supposons tracées toujours dans le plan de la variable y les coupures allant de a aux points singuliers b (comme au n° 2). Considérons l'intégrale $\Omega_i(y)$, elle n'aura en a que s déterminations linéairement indépendantes, puisque la circulation autour d'un lacet correspondant à b_i augmente simplement, d'une manière générale, $\omega(y)$ d'un multiple de $\Omega_i(y)$, et que, parmi ceux-ci, il n'y en a que s linéairement indépendantes. L'équation E aurait donc une intégrale qui n'aurait dans tout le plan que s déterminations linéairement indépendantes; elle serait donc réductible, contre l'hypothèse faite. Dans les généralités qui vont suivre, *il sera supposé qu'il y a $2p$ fonctions Ω linéairement indépendantes*.

Soient alors, pour fixer les idées,

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

les Ω correspondant respectivement aux points critiques

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{2p}$$

linéairement indépendants. Si h est supérieur à $2p$, on a nécessairement une identité

$$m_1^h \Omega_1 + \ldots + m_{2p}^h \Omega_{2p} + m_h \Omega_h = 0 \qquad (m_h \neq 0).$$

Envisageons alors les expressions

$$A_h = m_1^h \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\,dy + \ldots + m_{2p}^h \int_{b_{2p}}^{a} \Omega_{2p}(y)\,dy + m_h \int_{b_h}^{a} \Omega_h(y)\,dy$$
$$(h = 2p+1, \ldots, \mathrm{N}),$$

qui sont des périodes. Or, si P est une période de l'intégrale double, on a

$$\mathrm{P} = \sum \mu_i \int_{b_j}^{a} \Omega_i(y)\,dy \qquad \left[\text{avec} \sum \mu_i \Omega_i(y) = 0\right];$$

on pourra manifestement trouver une relation entre les P et les A, par l'élimination des quantités

$$\int_{b_h}^{a} \Omega_h(y)\,dy \qquad (h = 2p+1, \ldots, \mathrm{N}),$$

ce qui conduit à une relation de la forme

$$\lambda \mathrm{P} + \sum_{h=2p+1}^{h=\mathrm{N}} \lambda_h \mathrm{A}_h + \sum_{\nu=1}^{\nu=2p} \delta_\nu \int_{b_\nu}^{a} \Omega_\nu(y)\,dy = 0,$$

λ, les λ_h et les δ_ν étant des entiers, et λ étant différent de zéro. Puisque P et les A ne dépendent pas de a, il en sera de même de

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=2p} \delta_\nu \int_{b_\nu}^{a} \Omega_\nu(y)\,dy,$$

ce qui entraîne la relation

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=2p} \delta_\nu \Omega_\nu(y) = 0.$$

Mais les $\Omega_\nu(y)$ (pour $\nu = 1, 2, \ldots, 2p$) sont linéairement indépendants par hypothèse; par suite, on aura

$$\delta_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Il résulte de là que, entre P et les A, il y a une relation homogène et linéaire à coefficients entiers. Donc nous sommes déjà assuré que *le nombre des périodes est au plus égal au nombre des quantités* A, *c'est-à-dire* $N - 2p$.

9. Nous pouvons aller plus loin. Il existe des relation homogènes et linéaires à coefficients entiers entre les A, d'où résulte une diminution du nombre des périodes. Puisque l'intégrale double dont nous sommes parti est de première espèce, toutes les solutions de l'équation E, désignées d'une manière générale par $\omega(y)$, ont leurs résidus nuls pour le point à l'infini. Soit alors $\omega(y)$ une solution arbitraire de l'équation E; en prenant

$$\int \omega(y)\,dy$$

le long de l'ensemble des lacets $b_1, b_2, \ldots, b_N$, on obtiendra le même résultat que pour un contour autour du point à l'infini, c'est-à-dire zéro. La valeur de l'intégrale précédente est manifestement de la forme

$$\mu_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\,dy + \ldots + \mu_N \int_{b_N}^{a} \Omega_N(y)\,dy.$$

En l'égalant à zéro, on obtient une relation homogène et linéaire à coefficients entiers entre les A. En prenant pour $\omega(y)$ successivement $2p$ solutions indépendantes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ de E, on obtient $2p$ relations de cette nature.

La valeur de l'intégrale

$$\int \omega_h(y)\,dy$$

autour du point ∞, exprimée en fonction des A, prend la forme

$$\nu_{2p+1}^h \mathrm{A}_{2p+1} + \ldots + \nu_{\mathrm{N}}^h \mathrm{A}_{\mathrm{N}},$$

les ν étant des nombres rationnels. On obtiendra donc les $2p$ relations

$$(\Sigma) \qquad \nu_{2p+1}^h \mathrm{A}_{2p+1} + \ldots + \nu_{\mathrm{N}}^h \mathrm{A}_{\mathrm{N}} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Une question importante se pose immédiatement : *ces $2p$ relations Σ sont-elles distinctes*, c'est-à-dire peut-on en tirer $2p$ des A en fonction des $\mathrm{N} - 4p$ autres ? Nous allons démontrer que *la réponse est affirmative*, en nous servant du résultat obtenu à la fin du Mémoire précédent.

Considérons, à cet effet, une intégrale arbitraire de seconde espèce

$$\int \frac{\mathrm{P}(x, y, z)\,dx}{f'_z} \quad (\mathrm{P} \text{ polynome en } x, y \text{ et } z, \text{ s'annulant sur la courbe double}),$$

de la courbe entre x et z représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Les périodes de cette intégrale sont des fonctions de y, satisfaisant à une équation linéaire du type E.

Comme nous l'avons vu (p. 527 de ce Volume), on pourra, sous des conditions très générales, déterminer un polynome de degré k

$$\varphi(y) = a_1 y^{k-1} + a_2 y^{k-2} + \ldots + a_k$$

tel que les $2p$ résidus de l'intégrale double

$$(11) \qquad \iint \frac{\varphi(y)\,\mathrm{P}(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

aient des valeurs arbitrairement choisies.

Ses $2p$ résidus par rapport à la courbe à l'infini de la surface algébrique seront donc linéairement indépendants au point de vue arithmétique.

Désignons alors par

$$\iint \frac{Q^1(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} \tag{12}$$

(Q^1 polynome en x, y, z, s'annulant sur la courbe double), une intégrale double jouissant de la propriété ci-dessus. Elle va nous servir à démontrer que les $2p$ relations Σ sont distinctes.

10. Les équations différentielles linéaires E et E^1 relatives aux périodes de l'intégrale abélienne (8)

$$\int \frac{Q(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

et de l'intégrale

$$\int \frac{Q^1(x, y, z)\,dx}{f'_z}$$

ont même groupe.

Désignons par

$$A^1_{2p+1}, \quad \ldots, \quad A^1_N$$

les expressions formées avec l'intégrale (12) de la même manière que les A des nos 7 et 8 avec l'intégrale (2). Les $2p$ résidus de (12) relatifs à la même courbe à l'infini seront égaux à

$$\nu^h_{2p+1} A^1_{2p+1} + \ldots + \nu^h_N A^1_N \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2p) \tag{13}$$

les nombres rationnels ν étant les mêmes qu'au n° 9, puisque les groupes des équations différentielles linéaires E et E^1 sont les mêmes; désignons par π^h l'expression (13).

Nous allons voir de suite que les $2p$ relations Σ du n° 9 sont distinctes. Si, en effet, celles-ci ne pouvaient être résolues par rapport à $2p$ des A, on pourrait trouver des entiers k_h (non tous nuls) tels que l'on ait

$$\sum_{h=1}^{h=2p} k_h(\nu^h_{2p+1} A_{2p+1} + \ldots + \nu^h_N A_N) = 0$$

identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les lettres A. Il en résulte que l'on aurait

$$\sum k_h \pi^h = 0,$$

ce qui est contre l'hypothèse que les π^h ne sont liés par aucune relation homogène et linéaire à coefficients entiers.

La réponse à la question posée au numéro précédent est donc bien affirmative. Par suite, *le nombre des périodes de notre intégrale double de première espèce est au plus*

$$N - 4p,$$

puisque, entre les $N - 2p$ périodes A, il existe $2p$ relations *distinctes* homogènes et linéaires à coefficients entiers.

La question qui se poserait maintenant serait la recherche du nombre des périodes *distinctes* de l'intégrale double *la plus générale* de première espèce d'une surface donnée. Mais c'est une question que nous n'aborderons pas ici et c'est dans une autre direction que nous allons nous engager.

Nous allons voir dans les sections suivantes que c'est la combinaison

$$N - 4p - (m - 1)$$

qui est véritablement intéressante; nous trouverons une relation remarquable entre les deux nombres ρ_0 et ρ et la combinaison précédente.

II.

Généralisation des résultats précédents; sur certains cycles à deux dimensions de la surface situés à distance finie.

11. Nous sommes, dans la section précédente, parti d'une intégrale double de première espèce. Que deviennent les considérations, dont nous avons fait usage, quand, au lieu d'une intégrale de première espèce, on considère une intégrale double quelconque de la forme

$$\int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

$P(x, y, z)$ étant un polynome quelconque s'annulant sur la courbe double? Les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{P(x, y, z)\, dx}{f'_z}$$

relative à la courbe $f(x, y, z) = 0$ entre x et z, sont alors des fonctions de y. Ces périodes sont au nombre de

$$2p + m - 1$$

et satisfont à une équation linéaire E'. Parmi ces périodes, $m - 1$ correspondent aux points à l'infini et sont des polynomes en y (*voir* *Annales de l'École Normale*, 1902). Ainsi, l'équation E' d'ordre $2p + m - 1$ admet comme solutions $m - 1$ polynomes $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_m$, qui n'existaient pas tout à l'heure pour l'équation E.

En chacun des points singuliers existe toujours une intégrale Ω avec les mêmes propriétés, et si entre $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_s$ il existe une relation

$$m_1 \Omega_1 + \ldots + m_s \Omega_s = 0 \qquad (\text{les } m \text{ entiers}),$$

l'expression

$$m_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1\, dy + m_2 \int_{b_2}^{a} \Omega_2\, dy + \ldots + m_s \int_{b_s}^{a} \Omega_s\, dy$$

ne dépendra pas de a. Il pourrait arriver que la portion P^a de la surface de Riemann correspondant à $f(x, a, z) = 0$ (*voir* n° 3), limitée par les bords

$$m_1 \Gamma_1^a, \quad \ldots, \quad m_s \Gamma_s^a,$$

contînt un ou plusieurs points à l'infini; dans ce cas, l'intégrale double n'aurait pas de sens à cause des points à l'infini, mais l'expression précédente n'en aurait pas moins un sens.

Faisons maintenant l'hypothèse, correspondant au cas général (¹), *que pour une intégrale arbitraire de la forme indiquée il y ait* $2p + m - 1$ *fonctions* $\Omega(y)$ *linéairement indépendantes*, soient

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1}$$

correspondant respectivement aux points singuliers b de même indice; elles formeront un système fondamental de l'équation différentielle

(¹) Dans tout ce qui va suivre cette condition sera supposée satisfaite. Nous la discuterons dans la section IV de ce Mémoire.

linéaire E'. Envisageons une autre lettre Ω, soit Ω_s, où s est supérieur à $2p+m-1$. On aura la relation identique

$$(14) \qquad m_1\Omega_1 + \ldots + m_{2p+m-1}\Omega_{2p+m-1} + m_s\Omega_s = 0,$$

et l'expression correspondante, indépendante de a,

$$(15) \qquad m_1\int_{b_1}^{a}\Omega_1(y)\,dy + \ldots + m_s\int_{b_s}^{a}\Omega_s(y)\,dy.$$

Il est facile de voir que les contours

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_{2p+m-1}, \quad \Gamma_s$$

limitent, sur la surface de Riemann $f(x, y, z) = 0$, une portion de surface ne comprenant pas de points à l'infini, et, par suite, l'expression (15) est une période correspondant à un cycle à distance finie. Pour le démontrer, rappelons que, sur une surface de Riemann à m feuillets, on peut tracer $2p+m-1$ contours à regarder comme distincts, si dans la déformation ces contours doivent nécessairement rester à distance finie, et que tout autre contour peut se ramener à une somme de ceux-là, les déformations se faisant toujours sans passer par l'infini. Les contours

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots, \quad \Gamma_{2p+m-1}$$

répondent bien à ces conditions puisque les $2p+m-1$ fonctions

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1}$$

sont linéairement indépendantes. Ensuite, tout autre contour Γ_s (ou un de ses multiples) peut se ramener à une combinaison des Γ précédents, sans passer par l'infini. Donc nous aurons sur la surface de Riemann une portion P n'ayant pas de points à l'infini et limitée par

$$m_1\Gamma_1, \quad m_2\Gamma_2, \quad \ldots, \quad m_{2p+m-1}\Gamma_{2p+m-1}, \quad m_s\Gamma_s;$$

cette portion P adjointe aux $2p+m$ surfaces *ouvertes*, que nous avons fait correspondre aux contours précédents, nous donnera le cycle fermé à deux dimensions, *tout entier à distance finie*, qui donne la période (15), comme nous voulions l'établir. Nous obtenons donc de cette manière

$$N - 2p - (m-1)$$

périodes pour notre intégrale double.

La théorie développée plus haut (n° 8) a ici son analogue. Toute période P de l'intégrale double correspondant à un cycle, situé à distance finie, est encore de la forme

$$\sum \mu_k \int_{b_k}^{a} \Omega_k(y)\,dy$$

avec l'identité

$$\sum \mu_k \Omega_k(y) = 0.$$

A chaque valeur s plus grande que $2p + m - 1$ correspond, d'après ce qui précède, une période P_s, et il y a entre P et les P_s une relation homogène et linéaire à coefficients entiers.

12. Nous avons considéré l'intégrale double

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z} \tag{16}$$

où P est un polynome quelconque s'annulant sur la courbe double. Nous nous rapprocherons des résultats obtenus dans la section précédente, si nous supposons que l'intégrale abélienne

$$\int \frac{P(x, y, z)}{f'_z}, \tag{17}$$

relative à la courbe $f(x, y, z) = 0$ entre x et z, *est de seconde espèce.* L'équation E' est alors seulement d'ordre $2p$, et nous avons de nouveau

$$N - 2p,$$

expression correspondant à $2p + 1$ fonctions Ω. A la vérité, elles ne peuvent être toutes considérées comme *des périodes*, à cause des points à l'infini du cycle correspondant, à moins que l'on ne veuille élargir le sens du mot *période*.

Il résulte de ce que nous avons dit au numéro précédent que, pour $m - 1$ des $N - 2p$ expressions trouvées, le cycle correspondant s'étend à l'infini, de telle sorte que l'on ne peut pas dire en général que l'intégrale double prise sur ce cycle ait un sens.

Un cas particulier n'est pas sans intérêt.

Supposons que l'intégrale abélienne (17) soit de *première* espèce.

Alors il n'y a plus aucune difficulté relative aux points à l'infini, et les $N - 2p$ cycles à deux dimensions conduisent à une intégrale double ayant un sens déterminé. Parmi les $N - 2p$ valeurs de ces intégrales, il y en a $2p$ qui sont les résidus de l'intégrale double par rapport à la courbe à l'infini de la surface. Nous avons rappelé à ce sujet (n° 9) que ces résidus sont les valeurs de l'intégrale

$$\int \omega(y)\, dy$$

autour du point ∞.

13. Revenons au cas général du n° 11. *Les* $N - 2p - (m-1)$ *périodes, que nous avons trouvées, sont-elles distinctes ?*

Nous allons démontrer que ces périodes sont distinctes, c'est-à-dire ne sont liées par aucune relation homogène et linéaire à coefficients entiers, si l'*intégrale double*

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{f'_z}\, dx\, dy \tag{18}$$

est arbitraire (P étant toujours un polynome s'annulant sur la courbe double). Tout d'abord, dans une telle intégrale double, on peut, comme nous l'avons rappelé dans la Note préliminaire, supposer le degré du polynome P limité, puisque par la soustraction d'une intégrale de la forme

$$\iint \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right] dx\, dy, \tag{19}$$

U et V étant des polynomes en x, z à coefficients rationnels en y (s'annulant sur la courbe double), on peut limiter le degré de P, et que dans la nouvelle intégrale les périodes seront les mêmes (pour ce point, *voir* la section suivante de ce Mémoire). Soit alors l'intégrale double (18), ainsi réduite, renfermant s paramètres essentiellement distincts $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, c'est-à-dire telle que, quand les α ne sont pas tous nuls, elle ne se réduit pas à la forme (19).

Admettons maintenant que les périodes trouvées de (18) soient liées par une relation homogène et linéaire à coefficients entiers. Il est presque évident que ces coefficients entiers ne varieront pas avec les paramètres α qui sont susceptibles de variation continue. Pour le voir bien nettement désignons par

$$P_1^1, \quad P_1^2, \quad \ldots, \quad P_1^\mu \qquad [\mu = N - 2p - (m-1)]$$

les périodes de (18) quand on fait $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$, et d'une manière générale par

$$P_i^1, \quad P_i^2, \quad \ldots, \quad P_i^\mu$$

les périodes quand $\alpha_i = 1$, les autres α étant nuls.

Les $P_i^1, P_i^2, \ldots, P_i^\mu$, pour une valeur fixe de i, ne seront pas nulles à la fois, car alors l'intégrale correspondante à $\alpha_i = 1$, les autres α étant nuls, n'aurait pas de périodes et serait par suite réductible à la forme (19), comme il sera démontré dans la section suivante.

Si les périodes de (18) ne sont pas distinctes, on aura, par hypothèse, quelles que soient les constantes arbitraires α,

$$M_1(\alpha_1 P_1^1 + \alpha_2 P_2^1 + \ldots + \alpha_s P_s^1) + \ldots + M_\mu(\alpha_1 P_1^\mu + \alpha_2 P_2^\mu + \ldots + \alpha_s P_s^\mu) = 0,$$

les M étant des entiers convenables qui ne sont pas tous nuls. Les P sont des nombres fixes; les entiers M pourraient-ils dépendre des variables continues α? Donnons à α des valeurs déterminées, mais arbitrairement choisies. On a l'égalité ci-dessus. Il faudra nécessairement que tous les coefficients des α soient nuls, c'est-à-dire que

$$M_1 P_i^1 + M_2 P_i^2 + \ldots + M_\mu P_i^\mu = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

En effet, dans le cas contraire, on pourrait exprimer un des α à l'aide des autres et des quantités P; or, ceci est impossible, car on peut certainement trouver s nombres irrationnels α, tels qu'aucun d'eux ne soit susceptible de s'exprimer rationnellement à l'aide des autres et de nombres *déterminés* P (en nombre fini). De là résulte que la relation supposée entre les périodes de (18) est toujours la même, quelle que soit cette intégrale double.

Envisageons alors une intégrale déterminée, d'ailleurs prise arbitrairement, du type (18). En conservant aux Ω la même signification que dans tous les numéros précédents, une relation entre ces périodes se traduirait par une égalité de la forme

$$m_1\int_{b_1}^{a}\Omega_1(y)\,dy+\ldots+m_N\int_{b_N}^{a}\Omega_N(y)\,dy=0, \tag{20}$$

les m étant des entiers qui ne sont pas tous nuls ([1]).

Supposons alors qu'au lieu de l'intégrale (18), nous partions de l'intégrale

$$\iint\frac{\varphi(y)\,P(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z}, \tag{21}$$

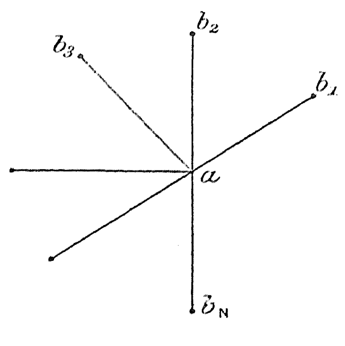
$\varphi(y)$ étant un polynome en y. D'après ce qui précède, nous aurons, quel que soit ce polynome, la relation

$$m_1\int_{b_1}^{a}\varphi(y)\Omega_1(y)\,dy+\ldots+m_N\int_{b_N}^{a}\varphi(y)\Omega_N(y)\,dy=0$$

avec les mêmes entiers m que dans la relation (20).

Ainsi, en changeant seulement un peu les notations, on aurait des fonctions déterminées $B_1(y)$, ..., $B_N(y)$ (*fig.* 9), holomorphes res-

Fig. 9.



pectivement de a en b_1, de a en b_2, ..., de a en b_N (dont la somme est d'ailleurs identiquement nulle et qui ne sont pas toutes nulles), avec

([1]) Il est essentiel de remarquer qu'aucun des $\Omega_i(y)$ n'est identiquement nul, comme on le reconnaît en calculant $\Omega_i(b)$ qui est différent certainement de zéro, si, comme on peut le supposer, le polynome $P(x,y,z)$ ne s'annule pas aux points de la surface f où le plan tangent est parallèle au plan des zx.

la relation

$$\int_{b_1}^{a} \varphi(y) B_1(y)\,dy + \ldots + \int_{b_N}^{a} \varphi(y) B_N(y)\,dy = 0,$$

qui aurait lieu *quel que soit le polynome* $\varphi(y)$. Il est aisé de voir que cela est impossible. Ceci entraînerait en effet les relations en nombre infini

$$(\mathrm{R}) \qquad \int_{b_1}^{a} y^m B_1(y)\,dy + \ldots + \int_{b_N}^{a} y^m B_N(y)\,dy = 0$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Or, envisageons la somme

$$(22) \qquad \int_{b_1}^{a} \frac{B_1(y)}{y-x}\,dy + \ldots + \int_{b_N}^{a} \frac{B_N(y)}{y-x}\,dy,$$

où x est une variable arbitraire, correspondant à un point non situé sur les courbes d'intégration $ab_1, \ldots, ab_N$. Il est certain que la somme précédente représente une fonction de x, *qui n'est pas identiquement nulle*. En effet, d'après une théorie élémentaire, la fonction de x

$$\int_{b_h}^{a} \frac{B_h(y)}{y-x}\,dy$$

éprouve l'accroissement

$$2\pi i B_h(x)$$

quand le point x va d'un bord à l'autre de la coupure $b_h a$.

Ceci posé, pour x très grand, on peut développer l'expression (22) suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, et les coefficients des différentes puissances de $\frac{1}{x}$ sont précisément les premiers membres des relations (R). L'expression (22) serait donc identiquement nulle, ce qui est contradictoire. *Le théorème est donc démontré.*

14. Parmi les $N - 2p - (m-1)$ périodes distinctes que nous venons de trouver, il y en a $2p$ qui sont les résidus de l'intégrale double relatifs à la ligne à l'infini de la surface; ces résidus correspondent à l'intégrale

$$\int \omega(y)\,dy$$

prise autour du point ∞ en prenant pour $\omega(y)$, $2p$ intégrales de l'équation E' formant un système fondamental avec les $m-1$ polynomes désignés par π au n° 11. Si l'intégrale double est arbitraire, ces $2p$ résidus sont certainement distincts, comme nous l'avons déjà fait remarquer.

Nous concluons de là qu'*en ne comptant pas les périodes correspondant aux résidus relatifs à la courbe à l'infini de la surface, nous avons*

$$N - 4p - (m-1)$$

périodes distinctes correspondant à des cycles à distance finie.

En particulier, envisageons une intégrale double générale *de seconde espèce*, du type des intégrales précédentes,

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z};$$

comme cette intégrale, étant de seconde espèce, n'a pas de résidus, *le nombre de ses périodes correspondant à des cycles à distance finie est égal à*

$$N - 4p - (m-1).$$

15. Dans tout ce qui précède, il a été essentiellement supposé que la surface occupait une position arbitraire par rapport aux axes; d'une manière plus précise, les plans tangents à la surface, parallèles au plan des zx, correspondent à des valeurs $y = b$ qui sont des points singuliers de l'équation différentielle E' jouissant des propriétés très simples sur lesquelles nous nous sommes appuyé. Nous avons déjà énoncé au n° 7 la remarque, que les choses seraient moins simples si la surface avait une position particulière par rapport aux axes.

Vérifions-le sur la surface

$$(\Sigma) \qquad x^3 + y^3 + z^3 = 1,$$

qui nous donnera d'ailleurs l'occasion d'exemples d'une autre nature particulièrement instructifs [1]. Envisageons la courbe entre x et z représentée par l'équation précédente. Nous avons, pour cette courbe,

---

[1] E. Picard, *Sur les périodes d'une intégrale double de fraction rationnelle* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1903).

deux cycles Γ_1 et Γ_2; en faisant décrire à y dans son plan un chemin fermé convenable, nous ramenons Γ_1 et Γ_2 à leurs positions initiales, et ainsi se trouvent engendrés *deux* cycles à deux dimensions pour Σ situés à distance finie.

Les points critiques relatifs à y sont ici les trois racines de

$$y^3 = 1,$$

mais ces points singuliers ne sont pas de la nature de ceux que nous avons rencontrés dans le cas général. On ne trouve ici que *deux* cycles à deux dimensions. D'ailleurs ces cycles existent bien effectivement, je veux dire ne se ramènent pas à zéro. Envisageons en effet l'intégrale double

$$\int\int \frac{x\,dx\,dy}{z},$$

qu'on vérifie aisément être de seconde espèce, ce que nous allons retrouver d'ailleurs plus bas. Calculons sa valeur le long du cycle précédent. Posons à cet effet

$$x = \sqrt[3]{1 - y^3}\cdot t,$$

d'où se déduit

$$z = \sqrt[3]{1 - y^3}\cdot\sqrt[3]{1 - t^3}.$$

L'intégrale double devient alors

$$\int\int \sqrt[3]{1 - y^3}\cdot\frac{t}{\sqrt[3]{1 - t^3}}\,dy\,dt.$$

Sous cette forme, les périodes sont calculées de suite. En effet, désignons par ω et $\omega\varepsilon$ des périodes de l'intégrale simple

$$\int \sqrt[3]{1 - y^3}\cdot dy,$$

et par Ω et $\Omega\varepsilon$ les périodes de l'intégrale simple

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt[3]{1 - t^3}}.$$

Nous aurons pour périodes de l'intégrale double correspondant aux deux cycles à deux dimensions indiqués plus haut

$$\omega\Omega \quad \text{et} \quad \omega\Omega\varepsilon$$

($\varepsilon =$ racine cubique imaginaire de l'unité); ces expressions étant différentes de zéro, les deux cycles existent effectivement.

En permutant x et y on a deux autres cycles à deux dimensions, et l'on peut montrer qu'ils ne se ramènent pas aux deux premiers. En effet, l'intégrale double

$$\int\int \frac{y\,dx\,dy}{z}$$

prise le long de l'un ou l'autre des deux premiers cycles est nulle, puisque l'intégrale double exprimée à l'aide de y et t devient ici :

$$\int\int y\,dy \frac{dt}{\sqrt[3]{1-t^3}},$$

qui est nulle le long des cycles à deux dimensions de la première catégorie. Au contraire, en considérant l'intégrale double

$$\int\int \frac{y\,dx\,dy}{z},$$

le long des cycles de la seconde catégorie, on aura des valeurs différentes de zéro. Par suite, tous les cycles à deux dimensions ne peuvent être formés en faisant la réduction avec un plan $y = a$, comme nous voulions le montrer. Mais ceci n'est pas en opposition avec le théorème général démontré au n° 6, car les plans $y =$ const. occupent une position *spéciale* par rapport à la surface.

16. Il sera intéressant de faire sur la surface

$$(\Sigma) \qquad x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

une vérification du théorème général du n° 14 sur le nombre des périodes d'une intégrale double générale *de seconde espèce* correspondant à des cycles à distance finie.

Pour une surface générale du troisième degré, on a

$$m = 3, \qquad N = 12, \qquad p = 1;$$

l'expression

$$N - 4p - (m-1)$$

sera ici égale à 6. Nous devons donc pouvoir trouver *six* périodes distinctes pour une intégrale double arbitraire de seconde espèce de la surface (Σ). Or, envisageons l'intégrale double

$$\int\int \frac{Axy + Byz + Czx}{z^2}\, dx\, dy, \tag{23}$$

A, B, C étant trois constantes arbitraires.

Nous montrerons d'abord que cette intégrale est de seconde espèce. Prenons par exemple,

$$\int\int \frac{y}{z}\, dx\, dy \qquad \text{(qui correspond à } A = C = 0\text{)}.$$

L'identité

$$\int\int \frac{y\, dx\, dy}{z} = \frac{1}{2}\int\int \left\{ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{xy^4}{(1-y^3)z}\right] \right\} dx\, dy$$

rend manifeste que l'intégrale est de seconde espèce. Les deux autres intégrales se déduisant de celle que nous venons d'examiner par des permutations de lettres, il n'est pas douteux que l'intégrale (23) est de seconde espèce. La possibilité de cette permutation est évidente pour

$$\int\int \frac{x}{z}\, dx\, dy \qquad (A = B = 0).$$

Pour la troisième intégrale

$$\int\int \frac{xy}{z^2}\, dx\, dy,$$

il suffit de remarquer que l'élément

$$\frac{dx\, dy}{z^2}$$

peut se remplacer par

$$\frac{dy\, dz}{x^2},$$

et nous avons par suite l'intégrale

$$\int\int \frac{y}{x}\, dy\, dz,$$

qui est de même type que les précédentes

Calculons maintenant les périodes de (23). La première catégorie de cycles à deux dimensions, dont nous avons parlé au n° 15, donne les périodes

$$C\omega\Omega, \quad C\omega\Omega\varepsilon, \tag{24}$$

les intégrales doubles ayant pour coefficients A et B donnant des périodes correspondantes égales à zéro.

Les cycles de la seconde catégorie (pour lesquels la réduction est faite avec un plan $x = a$) donneront, dans les mêmes conditions, les périodes

$$B\omega\Omega, \quad B\omega\Omega\varepsilon. \tag{25}$$

Enfin, on pourra encore former deux autres cycles, en faisant la réduction avec un plan $z = a$, et cela toujours de la même manière. Ils donneront les périodes

$$A\omega\Omega, \quad A\omega\Omega\varepsilon. \tag{26}$$

Par suite, nous avons formé, pour l'intégrale double de seconde espèce (23), *six périodes distinctes correspondant à des cycles à deux dimensions situés à distance finie, représentées par les expressions* (24), (25), (26).

III.

Comparaison entre le nombre des périodes des intégrales doubles de seconde espèce et le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce; relation fondamentale entre ces deux nombres.

17. Nous allons revenir maintenant au problème dont nous nous sommes occupé dans le petit Mémoire qui précède : *reconnaître, étant donnée une expression*

$$\frac{Q(x, y, z)}{f'_z} \qquad (\text{Q } \textit{s'annulant sur la courbe double}),$$

si elle est susceptible de se mettre sous la forme

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}.$$

Comme nous l'avons signalé, le nombre ρ joue un rôle important dans ce problème.

Le cas le plus simple est celui de $\rho = 1$, dont nous nous occuperons tout d'abord, en nous reportant particulièrement pour les notations au n° 3 du Mémoire rappelé. Nous avons, si le problème est possible, l'identité

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y}, \tag{27}$$

où B_1 est de la forme

$$B_1 = a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_2 J_2 + \ldots + c_m J_m,$$

les a et c étant rationnels en y. Les I et les J sont déterminés, comme il a été vu. On a

$$I_h = \frac{Q_h}{f'_z}, \qquad J_k = \frac{q_k}{f'_z},$$

les Q et q étant des polynomes en x et z à coefficients rationnels en y. Quant à A_1, c'est une fonction rationnelle x, y, z, dont il est inutile de donner la forme

Posons, pour abréger,

$$B_1 = \frac{Q'}{f'_z},$$

Q' étant un polynome en x et z à coefficients rationnels en y.

18. Pour une valeur fixe, arbitraire d'ailleurs de y, intégrons les deux membres de l'identité (27) le long d'un cycle relatif à la courbe $f(x, y, z) = 0$ entre x et z. Nous aurons d'une manière générale

$$\omega(y) = \frac{d\omega'(y)}{dy}, \tag{28}$$

ω et ω' étant les périodes correspondantes des deux intégrales abéliennes

$$\int \frac{Q\,dx}{f'_z} \quad \text{et} \quad \int \frac{Q'\,dx}{f'_z}.$$

La variable y partant de a, tournant autour d'un point b_i et revenant à son point de départ, nous déduisons de suite par intégration de l'identité (28)

$$\int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\,dy = \Omega'_i(a), \tag{29}$$

en prenant pour $\omega(y)$ une période augmentant de $\Omega_i(y)$ par une rotation de y autour de b_i (nous nous servons des notations du commencement de ce Mémoire). Quant à $\Omega'_i(y)$ il a la même signification par rapport à l'intégrale

$$\int \frac{Q'\,dx}{f'_z}, \tag{30}$$

que $\Omega_i(y)$ par rapport à l'intégrale

$$\int \frac{Q\,dx}{f'_z}. \tag{31}$$

Les égalités (29) relatives aux divers points singuliers b vont nous permettre de faire une remarque importante. D'après la première section de ce Chapitre, les périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

sont de la forme

$$\sum \mu_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\,dy \qquad \left[\text{avec l'identité} \sum \mu_i \Omega_i(y) = 0\right].$$

Les équations différentielles linéaires relatives aux deux intégrales (30) et (31) ont le même groupe. Si, entre certains Ω'_i, on a l'identité

$$\sum \mu_i \Omega_i(y) = 0,$$

on aura nécessairement l'identité

$$\sum \mu_i \Omega'_i(y) = 0.$$

Or on a

$$\sum \mu_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\,dy = \sum \mu_i \Omega'_i(a) = 0.$$

Par conséquent, *toutes les périodes* [1] *de l'intégrale double sont nulles*. Ainsi, l'identité (27) entraîne la conséquence que toutes les périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{Q(x,y,z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

sont nulles. Il s'agit, d'ailleurs, on ne doit pas l'oublier, de surface pour laquelle $\rho = 1$.

19. Nous démontrerons maintenant la réciproque du théorème précédent :

Si toutes les périodes sont nulles pour l'intégrale double qui précède, on peut mettre $\frac{Q}{f'_z}$ *sous la forme*

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y}.$$

Nous allons d'abord chercher si, les périodes étant supposées nulles, on peut déterminer les a et les c rationnellement en y, de telle sorte que

$$\int_{b_i}^{y} \Omega_i(y)\,dy = \Omega'_i(y),$$

$\Omega'_i(y)$ correspondant à l'intégrale

$$\int \frac{Q'\,dx}{f'_z},$$

où

$$\frac{Q'}{f'_z} = a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p} + c_2 J_2 + \ldots + c_m J_m,$$

avec les notations rappelées au n° 17. Désignons d'une manière générale par

$$\Omega_i^h \quad \text{et} \quad \Upsilon_i^k$$

[1] Quand nous parlons de périodes, nous parlons toujours des périodes étudiées plus haut, relatives à des cycles tout entiers à distance finie, et qui sont en nombre

$$N - 2p - (m-1).$$

les valeurs analogues à Ω_i, se rapportant aux intégrales

$$\int \frac{Q_h}{f'_z}\,dx \quad \text{et} \quad \int \frac{q_k\,dx}{f'_z};$$

écrivons les N relations

$$\text{(R)} \qquad \int_{b_i}^{y} \Omega_i(y)\,dy = a_1\Omega_i^1 + \ldots + a_{2p}\Omega_i^{2p} + c_2\Upsilon_i^2 + \ldots + c_m\Upsilon_i^m,$$

qui vont déterminer les $2p+m-1$ fonctions de y

$$a_1, \quad \ldots, \quad a_{2p}, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_m.$$

Les N relations (R) se réduiront à $2p+m-1$ d'entre elles, puisque toutes les périodes sont supposées nulles; car, en ajoutant plus de $2p+m-1$ des relations précédentes multipliées par des entiers μ tels que $\Sigma\mu_i\Omega_i(y)=0$, on obtiendra zéro identiquement. Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait des relations distinctes en faisant i successivement égal à

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad 2p+m-1.$$

Le déterminant des coefficients des $2p+m-1$ inconnues a et c dans ces relations ne sera pas identiquement nul, car alors il y aurait une combinaison linéaire des intégrales

$$\int \frac{Q_h\,dx}{f'_z} \quad \text{et} \quad \int \frac{q_k\,dx}{f'_z},$$

qui, n'ayant pas de période, serait algébrique, ce qui est incompatible avec la façon dont ont été formées ces intégrales.

Les relations (R) permettent donc de déterminer les a et les c, mais *les valeurs ainsi obtenues sont-elles fonctions rationnelles de y?* Il est aisé de voir qu'il en est bien ainsi; il suffit de montrer que ces fonctions sont uniformes, car aucune singularité essentielle ne se trouve dans les expressions figurant dans les calculs qui précèdent. Or, quand on fait décrire à y un chemin fermé entourant le point singulier b_s, les

$$\Omega_i^h, \quad \Upsilon_i^k$$

et l'intégrale

$$\int_{b_i}^{y} \Omega_i(y)\,dy$$

se reproduisent respectivement aux termes additifs près

$$\nu_s \Omega_s^h, \quad \nu_s \Upsilon_s^k \quad \text{et} \quad \nu_s \int_{b_1}^{y} \Omega_s(y)\, dy \qquad (\nu_s \text{ entier}).$$

L'ensemble des relations (R) n'a donc pas changé, quand on substitue aux coefficients des a et des c leurs nouvelles valeurs après que y, partant d'un point, y revient après avoir décrit un contour quelconque. Ceci suffit évidemment à établir que les a et les c sont des fonctions uniformes, et, par suite, rationnelles de y.

Nous avons donc déterminé une fonction rationnelle B_1 de x, y et z, en posant

$$B_1 = \frac{Q'}{f'_z}.$$

Montrons maintenant que l'on peut déterminer une fonction rationnelle A_1 de x, y, z, telle que

$$\frac{Q}{f'_z} = \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial A_1}{\partial x}.$$

Il suffit de faire voir que l'intégrale abélienne

$$\int \left(\frac{Q}{f'_z} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right) dx,$$

regardée comme appartenant à la courbe x et z,

$$f(x, y, z) = 0,$$

n'a pas de période. Or c'est précisément ce fait qu'expriment les relations (R), qui nous ont servi à déterminer les a et c figurant dans B_1, ou du moins ce fait résulte de leur dérivation par rapport à y. Il est donc certain que nous pourrons déterminer rationnellement B_1 en x, y et z satisfaisant à la relation précédente, comme nous voulions l'établir.

Il est important de remarquer que, dans la démonstration de la réciproque, nous ne nous sommes pas servi de ce que $\rho = 1$. Quand les périodes sont toutes nulles pour l'intégrale double

$$(\alpha) \qquad \iint \frac{Q}{f'_z}\, dx\, dy,$$

on peut mettre $\frac{Q}{f'_z}$ sous la forme indiquée. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Pour que l'expression $\frac{Q}{f'_z}$ puisse se mettre sous la forme

$$\frac{\partial A}{dx} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

il suffit que toutes les périodes de l'intégrale (α) *soient nulles. Cette condition suffisante sera, de plus, nécessaire s'il s'agit d'une surface pour laquelle le nombre* ρ *égale l'unité.*

20. Le théorème précédent va nous conduire à une proposition très importante relative aux surfaces *pour lesquelles* $\rho = 1$.

En écrivant que toutes les périodes de l'intégrale (α) sont nulles, nous avons

$$N - (2p + m - 1)$$

égalités à écrire. Ces égalités sont-elles bien distinctes? C'est une question qu'il nous faut examiner tout d'abord. Nous avons rappelé (n° 13) que toutes les intégrales de la forme (α), où Q est un polynome en x, y et z s'annulant sur la courbe double, se ramènent par la soustraction d'une intégrale

$$\int\int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right] dx\, dy$$

(U et V étant des polynomes en x et z à coefficients rationnels en y)

à une expression de la même forme, mais où le degré du polynome Q est limité. Soit donc

$$(\beta) \qquad \int\int \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

P étant un polynome s'annulant toujours sur la courbe double, dont le degré soit ainsi limité. Le polynome P ainsi réduit renferme un certain nombre de paramètres essentiellement distincts, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ (*voir* n° 13). La question est la suivante. Les $N - 2p - (m - 1)$ périodes de l'intégrale (β) sont des polynomes linéaires et homogènes en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$; ces polynomes sont-ils algébriquement distincts, c'est-à-dire aucune combinaison linéaire à coefficients constants de ces polynomes n'est-elle identiquement nulle par rapport aux paramètres α. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi. Plaçons-nous, en effet, dans l'hypothèse où les polynomes en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ne seraient pas distincts. Pour une intégrale double *arbitraire* de la forme (α), les périodes se ramènent aux périodes d'une intégrale (β), puisque l'intégrale soustraite pour faire la réduction n'a pas de périodes; les périodes de l'intégrale (β) étant, dans notre hypothèse, liées par une certaine relation linéaire dont les coefficients sont indépendants de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, il en sera de même pour les périodes de (α). Nous arrivons donc à la conclusion que les périodes

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_{N-2p-(m-1)}$$

de l'intégrale (α), où Q est un polynome uniquement assujetti à passer par la courbe double, sont liées par une relation

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_{N-2p-(m-1)} P_{N-2p-(m-1)} = 0, \tag{32}$$

les λ n'étant pas tous nuls et étant indépendants de Q. Or, il est aisé de voir que cela est impossible. Nous emploierons un raisonnement tout à fait semblable à celui qui nous a réussi au n° 13 pour un but analogue. Q ayant d'abord une valeur déterminée, nous envisageons une intégrale double où Q est remplacé par

$$\varphi(y)Q,$$

en désignant par $\varphi(y)$ un polynome arbitraire. Alors, en raisonnant comme au n° 13, la relation précédente entre les périodes nous conduit à une relation devant être vérifiée, quel que soit le polynome $\varphi(y)$,

$$m_1 \int_{b_1}^{a} \varphi(y)\Omega_1(y)\,dy + \ldots + m_N \int_{b_N}^{a} \varphi(y)\Omega_N(y)\,dy = 0, \tag{33}$$

les m étant des constantes (et non pas des entiers, comme au n° 13) qui ne sont pas toutes nulles. Les Ω sont des fonctions déterminées, qui correspondent à l'intégrale (α) dont on est parti. Il est essentiel de remarquer que tous les termes du premier membre ne peuvent disparaître, par suite de ce que les m seraient nuls. Soient en effet, pour l'intégrale (α) dont on est parti, les périodes P formées de la façon suivante, en supposant

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1}$$

linéairement indépendants. On pose

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_h = \mu_1 \int_{b_1}^{a} \Omega_1(y)\,dy + \ldots + \mu_{2p+m-1} \int_{b_{2p+m-1}}^{a} \Omega_{2p+m-1}(y)\,dy \\ + \mu_{2p+m-1+h} \int_{b_{2p+m-1+h}}^{a} \Omega_{2p+m-1+h}(y)\,dy\end{aligned}$$

$$[h = 1, 2, \ldots, \mathrm{N} - 2p - (m-1)],$$

l'entier $\mu_{2p+m-1+h}$ n'étant certainement pas nul. Si donc, dans la relation (32), λ_h n'est pas nul, on trouvera certainement dans (33) un terme en

$$\int_{b_{2p+m-1+h}}^{a} \Omega_{2p+m-1+h}(y)\,dy$$

et, par suite, la constante $m_{2p+m-1+h}$ n'est pas nulle. D'ailleurs, aucun des Ω n'est identiquement nul.

La relation (33) devrait être vérifiée, quel que soit le polynome $\varphi(y)$; il n'y a qu'à raisonner comme au n° 13, pour voir que cela est impossible. Par suite, il est bien établi que, en écrivant que les $\mathrm{N} - 2p - (m-1)$ périodes de l'intégrale

$$\iint \frac{\mathrm{P}(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

sont nulles, *on obtient* $\mathrm{N} - 2p - (m-1)$ *relations distinctes*.

Il résulte de là que l'on a

$$s = \mathrm{N} - 2p - (m-1).$$

Si en effet s était inférieur à $\mathrm{N} - 2p - (m-1)$, on n'aurait pas $\mathrm{N} - 2p - (m-1)$ relations distinctes en écrivant que les périodes de l'intégrale (α) sont nulles. D'autre part, si s était supérieur à $\mathrm{N} - 2p - (m-1)$, il y aurait au moins une intégrale de la forme (β), où tous les paramètres α ne seraient pas nuls, et qui se réduirait à une intégrale du type

$$\iint \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right] dx\,dy,$$

ce qui est en contradiction avec la définition du nombre s.

21. Proposons-nous de calculer le nombre ρ_0 des intégrales doubles *distinctes* de seconde espèce. Ces intégrales rentrent dans les intégrales du type (β) dépendant des s paramètres α. Il faut écrire d'abord que les intégrales de ce type sont de *seconde espèce;* ceci donnera exactement $2p$ relations, car nous avons vu que les $2p$ résidus d'une intégrable double de la forme en question par rapport à la courbe à l'infini de la surface ne peuvent être liés par aucune relation. Nous avons donc le nombre

$$s - 2p$$

d'intégrales du type (β) qui sont de seconde espèce. Par suite $s - 2p$ représente le nombre des intégrales doubles *distinctes* de seconde espèce.

D'où le théorème suivant qui est fondamental dans la théorie :

Soit une surface f pour laquelle $\rho = 1$. Le nombre ρ_0 des intégrales doubles distinctes de seconde espèce est donné par l'égalité

$$\rho_0 = N - 4p - (m - 1);$$

ou encore :

Le nombre ρ_0 est égal au nombre des périodes correspondant à des cycles à deux dimensions situés à distance finie de l'intégrale double générale de seconde espèce de la forme toujours considérée dans notre analyse

$$\iint \frac{P(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}.$$

Il est remarquable que cet énoncé ait la même forme que dans la théorie des courbes algébriques, où le nombre des intégrales abéliennes distinctes de seconde espèce est précisément égal au nombre des périodes d'une intégrale de seconde espèce. Mais cette généralisation, d'ailleurs purement formelle, n'est exacte que quand $\rho = 1$. Il nous reste à examiner le cas où ρ est différent de l'unité.

22. Reportons-nous au n° 5 du mémoire qui précède. On y a vu que, à un ensemble de lignes

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_{\rho-1}$$

correspondant au théorème fondamental sur les intégrales de troisième espèce, on peut faire correspondre des expressions

$$\frac{Q_1}{f'_z}, \quad \frac{Q_2}{f'_z}, \quad \ldots, \quad \frac{Q_{\rho-1}}{f'_z}$$

(Q_i polynome en x, y, z s'annulant sur la courbe double), réductibles à une somme de deux dérivées partielles de la forme tant de fois écrite (les fonctions sous ces signes de dérivation devenant infinies pour une ligne C). De plus, toute autre expression

$$\frac{Q}{f'_z}$$

(Q polynome en x, y, z s'annulant sur la courbe double), réductible à une somme de deux dérivées partielles, sera de la forme

$$\frac{\mu_1 Q_1 + \ldots + \mu_{\rho-1} Q_{\rho-1}}{f'_z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right),$$

les μ étant des constantes, U et V des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y, s'annulant sur la courbe double.

Ceci rappelé, nous pouvons reprendre avec les modifications nécessaires l'analyse du numéro précédent. Nous avons toujours le nombre

$$s - 2p$$

des intégrales de seconde espèce du type (β), dont aucune combinaison linéaire n'est réductible à une intégrale du type envisagé plus haut

$$\int\int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right)\right] dx\, dy.$$

Mais, parmi ces $s - 2p$ intégrales, figurent des intégrales de la forme

$$\int\int H\, dx\, dy$$

où l'on a

$$H = \frac{\mu_1 Q_1 + \ldots + \mu_{\rho+1} Q_{\rho-1}}{f'_z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V}{f'_z}\right).$$

Il faut donc retrancher le nombre $\rho - 1$ de $s - 2p$, pour avoir le nombre des intégrales doubles *distinctes* de seconde espèce, *ce qui nous conduit de suite à la formule*

$$\rho_0 = N - 4p - (m - 1) - (\rho - 1).$$

On voit que le nombre ρ intervient dans l'expression de ρ_0. Nous pouvons alors énoncer le théorème fondamental suivant qui comprend comme cas particulier le théorème du numéro précédent :

Le nombre ρ_0 est égal au nombre des périodes correspondant à des cycles à deux dimensions situés à distance finie de l'intégrale double générale de seconde espèce de la forme

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

(Q polynome en x, y, z s'annulant sur la courbe double), *diminué de* $\rho - 1$.

Dans la formule qui exprime le théorème précédent, le nombre ρ_0 est un invariant *absolu*, c'est-à-dire un invariant pour toute transformation birationnelle. Nous avons déjà dit qu'il n'en était pas de même de ρ.

23. Nous avons vu (n° 19) que, si toutes les périodes d'une intégrale double

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

sont nulles, on a une identité de la forme

$$(34)\qquad \frac{Q(x, y, z)}{f'_z} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y};$$

mais cette condition, suffisante pour l'identité précédente, n'est nécessaire que si $\rho = 1$.

Quand ρ est supérieur à *un*, une intégrale

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)}{f'_z} dx\, dy,$$

où $\frac{Q_i}{f'_z}$ a la forme (34), peut avoir des périodes différentes de zéro. Il est intéressant de voir à quel fait analytique est due cette circonstance.

On a vu, au n° 5 du Mémoire précédent, qu'à chaque courbe C du théorème fondamental qui conduit à la définition du nombre ρ correspond une fonction

$$\frac{Q_i}{f'_z} \qquad (Q_i \text{ polynome en } x, y \text{ et } z),$$

telle que

$$\frac{Q_i}{f'_z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M_i}{g_i f'_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{N_i}{g_i f'_z}\right), \tag{35}$$

M_i et N_i étant des polynomes en x et z, à coefficients rationnels en y. Quant à g_i c'est un polynome en x et y, et la courbe $g_i = 0$ donne la projection de C_i sur le plan des xy. Les deux quotients

$$\frac{M_i}{g_i} \quad \text{et} \quad \frac{N_i}{g_i}$$

deviennent seulement infinis à distance finie sur la courbe C_i (en dehors de lignes $y = \text{const.}$).

De plus, il résulte de l'identité (35) la conséquence suivante : pour une valeur donnée de y, l'intégrale

$$\int \frac{N_i}{g_i f'_z} dx, \tag{36}$$

relative à la courbe entre x et z, $f(x, y, z) = 0$, a, comme points singuliers logarithmiques à distance finie, les points de la courbe C_i correspondant à la valeur envisagée de y ; pour tous ces points *la période logarithmique a la même valeur qui est une constante* Γ *indépendante de* y. Pour l'établir, il suffit d'intégrer les deux membres de l'identité (35), multipliés par dx dans le plan de la variable complexe (y ayant la valeur envisagée d'ailleurs arbitraire) le long d'un petit contour entourant un point M. Le premier membre donne zéro et le second nous apprend que la dérivée, par rapport à y, de la période logarithmique en question est nulle, ce qui justifie bien la remarque énoncée.

Ceci posé, à l'intégrale (36) correspondent des fonctions que nous allons appeler Ω', jouant par rapport à (36) le même rôle que les Ω par rapport à l'intégrale

$$\int \frac{Q_i}{f'_z}\, dx;$$

mais, tandis que pour cette dernière il y avait entre plus de $2p+m-1$ fonctions Ω une relation linéaire et homogène à coefficients entiers, soit

$$\sum \mu_i \Omega_i(y) = 0,$$

la relation correspondante pour l'intégrale (36) sera

$$\sum \mu_i \Omega'_i(y) + k\Gamma = 0 \qquad (k \text{ entier});$$

car la constante Γ est une période de l'intégrale (36), qui n'avait pas son correspondant dans l'intégrale ci-dessus.

Il est alors facile de se rendre compte que certaines périodes de l'intégrale double

$$\iint \frac{Q_i}{f'_z}\, dx\, dy \tag{37}$$

puissent être différentes de zéro, en reprenant l'analyse du n° 18. Nous avons, comme dans ce numéro,

$$\sum \mu_i \int_{b_i}^{a} \Omega_i(y)\, dy = \sum \mu_i \Omega'_i(a) \qquad \left[\sum \mu_i \Omega_i(y) = 0\right];$$

mais, ici, le second membre n'est plus nul nécessairement; il est égal à $-k\Gamma$ qui peut être différent de zéro. On se rend donc bien compte que *toutes les périodes puissent n'être pas nulles* dans le cas actuel correspondant à $\rho > 1$; de plus, on voit que l'intégrale (37) a une seule période, qui est multiple de la quantité Γ relative à l'intégrale (36).

24. On pourrait vérifier les conclusions précédentes sur l'intégrale double de seconde espèce

$$\int\int \frac{x\,dx\,dy}{z},$$

relative à la surface

$$x^3 + y^2 + z^3 = 1,$$

déjà considérée au nº 14. On a ici l'identité

$$\frac{x}{z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y x^4}{(1-x^3) z}\right].$$

L'intégrale double considérée a deux périodes *différentes de zéro*, quoique le coefficient de $dx\,dy$ sous le signe d'intégration soit la somme de deux dérivées partielles.

Il en est de même pour la surface

$$z^2 = P(x)\,P(y),$$

$P(x)$ étant un polynome en x, et cet exemple a appelé le premier autrefois mon attention sur la circonstance qui nous occupe (*Comptes rendus*, 10 octobre 1899); on peut former une intégrale double

$$\int\int \frac{U(x, y)}{z}\,dx\,dy,$$

où U représente un certain polynome en x et y, et qui a des périodes *différentes de zéro*. La relation jadis employée par Weierstrass pour un tout autre objet

$$\frac{U(x, y)}{z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{P(x)}{(y-x) z}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{P(y)}{(x-y) z}\right]$$

définit le polynome U. Il nous suffira de signaler ces exemples, où l'on vérifiera sans peine les remarques générales que nous venons de faire.

IV.

Discussion des hypothèses générales faites précédemment.

25. Il a été admis dans tout ce qui précède (*voir* § 11) que pour l'équation linéaire E' correspondant à une intégrale arbitraire

$$\int \frac{P(x, y, z)\,dx}{f'_z} \qquad \text{(le polynome P s'annulant sur la courbe double)}$$

on pouvait trouver $2p+m-1$ fonctions Ω, qui ne soient pas liées par une relation homogène et linéaire à coefficients entiers. Cette condition, avons-nous dit, est en général vérifiée.

Pour préciser, nous allons montrer qu'elle est certainement vérifiée, si la surface algébrique n'a pas d'intégrales de différentielles totales de seconde espèce (transcendantes), c'est-à-dire si sa connexion linéaire se réduit à l'unité.

26. Commençons par prendre une intégrale abélienne

$$\int \frac{Q(x,y,z)\,dx}{f'_z} \qquad \text{(le polynome Q s'annulant sur la courbe double)}$$

qui soit une intégrale arbitraire de seconde espèce pour la courbe entre x et z, $f(x,y,z)=0$; nous avons alors pour ses périodes une équation différentielle linéaire E d'ordre $2p$, considérée déjà bien des fois; soit toujours Ω_i la fonction Ω correspondant au point singulier b_i. Supposons que parmi les Ω_i il y en ait moins de $2p$, soient

$$\Omega_1,\quad \Omega_2,\quad \ldots,\quad \Omega_h \qquad (h<2p)$$

entre lesquelles il n'existe pas de relation homogène et linéaire à coefficients entiers, mais telles que les autres Ω sont liées à celles-ci par une telle relation. Aux h cycles correspondant à $\Omega_1, \ldots, \Omega_h$ on peut associer $2p-h$ autres cycles, de manière à avoir pour la surface de Riemann entre x et z, $f(x,y,z)=0$, $2p$ cycles distincts; désignons ces $2p-h$ cycles, ou plutôt les intégrales correspondantes, par

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \ldots,\quad \omega_{2p-h}.$$

Pour les $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce

$$\int I_1\,dx,\quad \ldots,\quad \int I_{2p}\,dx, \tag{38}$$

formons le tableau des périodes correspondant à ces cycles,

$$\begin{array}{llll}
\Omega_1^1, & \Omega_1^2, & \ldots, & \Omega_1^{2p}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\Omega_h^1, & \Omega_h^2, & \ldots, & \Omega_h^{2p}, \\
\omega_1^1, & \omega_1^2, & \ldots, & \omega_1^{2p}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\omega_{2p-h}^1, & \omega_{2p-h}^2, & \ldots, & \omega_{2p-h}^{2p}.
\end{array}$$

Le déterminant de ce tableau n'est pas identiquement nul, car autrement on pourrait trouver une combinaison linéaire des intégrales (38) qui serait sans périodes, ce qui est impossible. Ceci posé, formons les équations

$$\begin{array}{llll}
a_1 \Omega_1^1 & + a_2 \Omega_1^2 & + \ldots + a_{2p} \Omega_1^{2p} & = 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots\ldots & \ldots, \\
a_1 \Omega_h^1 & + a_2 \Omega_h^2 & + \ldots + a_{2p} \Omega_h^{2p} & = 0, \\
a_1 \omega_1^1 & + a_2 \omega_1^2 & + \ldots + a_{2p} \omega_1^{2p} & = C_1, \\
\ldots & \ldots & \ldots \quad \ldots\ldots & \ldots, \\
a_1 \omega_{2p-h}^1 & + a_2 \omega_{2p-h}^2 & + \ldots + a_{2p} \omega_{2p-h}^{2p} & = C_{2p-h},
\end{array}$$

les $2p - h$ lettres C représentant des constantes arbitraires. Ces équations définissent les a comme fonctions de y. Je dis que ce sont des fonctions rationnelles. En effet, les Ω et les ω se reproduisent, par une circulation quelconque de y, à une somme près de multiples des Ω; ainsi, par exemple, ω_1^k se change en

$$\omega_1^k + \mu_1 \Omega_1^k + \mu_2 \Omega_2^k + \ldots + \mu_h \Omega_h^k,$$

les μ étant des entiers indépendants de k. Il en résulte que le système des équations en a reste invariable pour une circulation quelconque de y; donc les a sont uniformes en y, et par suite rationnels (aucune singularité essentielle ne figurant dans les fonctions envisagées).

Nous concluons de là que les $2p$ périodes de l'intégrale abélienne

$$\int (a_1 I_1 + \ldots + a_{2p} I_{2p})\, dx,$$

relative à la courbe entre x et z, $f(x, y, z) = 0$, ne dépendent pas de y, et, en raisonnant comme nous l'avons fait plusieurs fois, on voit que la surface aura des intégrales de différentielles totales de seconde espèce (transcendantes). Nous pouvons donc dire que, si la surface a une connexion linéaire égale à l'unité (ce qui arrive en général), *il y aura certainement $2p$ fonctions Ω qui ne seront pas liées par une relation homogène et linéaire à coefficients entiers.*

27. Plaçons-nous dans le cas qui précède. Nous allons démontrer que, *pour une intégrale arbitraire du type toujours considéré*

$$\int \frac{P(x, y, z)\, dx}{f_z}, \tag{39}$$

il y a $2p+m-1$ fonctions Ω qui ne sont pas liées par une relation homogène et linéaire à coefficients entiers.

Tout d'abord il y en aura au moins $2p$, puisque, d'après ce qui précède, il en est ainsi quand l'intégrale abélienne (39) est de seconde espèce.

Supposons d'abord qu'il y en ait seulement $2p$; nous allons être conduit rapidement à une contradiction. Reprenons à cet effet les intégrales des paragraphes précédents

$$\int \mathrm{I}_1\,dx, \quad \ldots, \quad \int \mathrm{I}_{2p}\,dx, \quad \int \mathrm{J}_2\,dx, \quad \ldots, \quad \int \mathrm{J}_m\,dx$$

avec les Ω_i^h et Υ_i^k correspondants ($i=1, 2, \ldots, 2p$). Écrivons les équations

$$(40) \qquad a_1\Omega_i^1+\ldots+a_{2p}\Omega_i^{2p}+c_2\Upsilon_i^2+\ldots+c_m\Upsilon_i^m=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, 2p).$$

En y considérant les c comme des constantes arbitraires, ces équations déterminent

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p},$$

le déterminant de ces équations du premier degré en a étant certainement différent de zéro. D'ailleurs, d'après un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, les a ainsi déterminés sont rationnels en y, puisque le système d'équations ne change pas pour une circulation quelconque de y.

Les relations (40), où les c sont des constantes, expriment que les $2p+m-1$ périodes de l'intégrale abélienne

$$(41) \qquad \int (a_1\mathrm{I}_1+\ldots+a_{2p}\mathrm{I}_{2p}+c_2\mathrm{J}_2+\ldots+c_m\mathrm{J}_m)\,dx$$

sont indépendantes de y. Il y en a $2p$ qui sont nulles, et les $m-1$ périodes logarithmiques sont les constantes arbitraires $c_2, \ldots, c_m$. On pourra par suite former une intégrale de différentielle totale de la surface de nature transcendante, n'ayant aucune ligne logarithmique à distance finie. Or, ceci est impossible, et par suite l'hypothèse faite qu'il y ait seulement $2p$ fonctions Ω distinctes pour une intégrale arbitraire (39) est inadmissible.

28. Supposons alors qu'il y ait seulement, pour l'intégrale (39),

$$2p+m-1-r \qquad (0<r<m-1)$$

fonctions, désignées d'une manière générale par Ω, qui ne soient pas liées par une relation linéaire et homogène à coefficients entiers (les égalités étant exclues des inégalités ci-dessus).

Considérons $2p$ des Ω correspondant à $2p$ cycles distincts de la surface de Riemann entre x et z, $f(x, y, z)=0$, puis $m-1-r$ des autres Ω linéairement indépendants entre eux et avec les premiers. On aura donc, pour une intégrale (39) arbitraire,

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}, \qquad \text{puis} \qquad \Omega_{2p+1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1-r}.$$

Envisageons, d'autre part, les polynomes $\pi_2, \ldots, \pi_m$ correspondant aux points logarithmiques à l'infini. Les

$$\Omega_{2p+1}, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p+m-1-r}$$

peuvent manifestement s'exprimer à l'aide de $\Omega_1, \ldots, \Omega_{2p}$ et des π. Soit ainsi

$$\Omega_h = \lambda_1^h \Omega_1 + \ldots + \lambda_{2p}^h \Omega_{2p} + \mu_2^h \pi_2 + \ldots + \mu_m^h \pi_m$$
$$(h = 2p+1, \ldots, 2p+m-1-r),$$

les λ et μ étant rationnels. D'ailleurs tous les déterminants d'ordre $m-1-r$ formés avec les μ ne sont pas tous nuls; car, s'il en était ainsi, on aurait une relation linéaire entre

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p} \qquad \text{et les} \qquad \Omega_h,$$

ce qui est contre l'hypothèse. On pourra donc, par exemple, des $m-1-r$ équations du premier degré en $c_2, \ldots, c_m$

$$\mu_2^h c_2 + \ldots + \mu_m^h c_m = 0 \qquad (h = 2p+1, \ldots, 2p+m-1-r),$$

tirer $c_2, \ldots, c_{m-r}$ en fonction de $c_{m-r+1}, \ldots, c_m$.

Ceci posé, reprenons les intégrales

$$\int I_1\,dx, \quad \ldots, \quad \int I_{2p}\,dx, \quad \int J_2\,dx, \quad \ldots, \quad \int J_m\,dx$$

avec les

$$\Omega_i^h \quad \text{et} \quad \Upsilon_i^h \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p + m - 1 - r).$$

Écrivons les $2p + m - 1$ équations du premier degré entre les a et les c

$$\begin{gathered} a_1 \Omega_i^1 + \ldots + a_{2p} \Omega_i^{2p} + c_2 \Upsilon_i^2 + \ldots + c_m \Upsilon_i^m = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p + m - 1 - r), \\ c_{m-r+1} = k_{m-r+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_m = k_m, \end{gathered}$$

les k étant des constantes prises arbitrairement. Si les a et les c satisfont à ces équations, les $2p + m - 1$ périodes de l'intégrale abélienne

$$\int (a_1 \mathrm{I}_1 + \ldots + a_{2p} \mathrm{I}_{2p} + c_2 \mathrm{J}_2 + \ldots + c_m \mathrm{J}_m)\, dx \tag{42}$$

sont indépendantes de y et r d'entre elles ne sont pas nulles. Le système des équations précédentes peut se remplacer par le système équivalent

$$\begin{gathered} a_1 \Omega_i^1 + \ldots + a_{2p} \Omega_i^{2p} + c_2 \Upsilon_i^2 + \ldots + c_m \Upsilon_i^m = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p), \\ \mu_2^h c_2 + \ldots + \mu_m^h c_m = 0 \qquad (h = 2p + 1, \ldots, 2p + m - 1 - r), \\ c_{m-r+1} = k_{m-r+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_m = k_m. \end{gathered}$$

Sous cette dernière forme, on voit immédiatement, à cause des remarques faites plus haut sur certains déterminants différents de zéro, que les équations peuvent être résolues. On a d'abord les c qui sont des constantes, puis les a. Or, la première forme du système d'équations montre que ce système reste inaltéré pour une circulation quelconque de y. Les a seront par suite des fonctions rationnelles de y.

De là nous concluons, sous l'hypothèse que r n'est pas nul, qu'on peut former une intégrale abélienne (42), dont les périodes ne dépendent pas de y, et r d'entre elles sont arbitraires. On pourrait alors former une intégrale de différentielle totale de la surface (de nature transcendante) n'ayant aucune ligne logarithmique à distance finie, et nous avons la même contradiction qu'à la fin du n° 27.

Nous ne nous occuperons pas ici des cas particuliers où la surface aurait une connexion linéaire supérieure à l'unité et où certaines hypothèses d'un caractère général faites dans les deux Mémoires qui précèdent ne seraient pas vérifiées.

FIN DU TOME XX DE LA TROISIEME SÉRIE.