ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

EDMOND MAILLET

Sur les séries divergentes et les équations différentielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 20 (1903), p. 487-518

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__487_0>

SUR LES

SÉRIES DIVERGENTES

ET LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES[1],

PAR M. EDMOND MAILLET.

I.

M. Le Roy, généralisant certaines méthodes de M. Borel pour la sommation des séries divergentes, a montré [2] que, dans des cas très étendus, une série divergente de la forme

$$\text{(A)} \qquad \sum_0^\infty \alpha_n z^n$$

avec

$$\alpha_n = \Gamma(pn+1)\, a_n$$

(p nombre positif, a_n coefficient général d'une série $\sum a_n z^n$ à rayon de convergence *fini*) était sommable *au sens de M. Borel*, c'est-à-dire que la somme $f(z)$ que l'on pouvait lui assigner par ses procédés satisfaisait aux équations algébriques ou différentielles $\Psi = 0$,

---

(1) Un résumé de ce Mémoire a été communiqué à l'Académie des Sciences, le 28 avril 1902.
(2) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1900, p. 416.

entières par rapport à la variable y et ses dérivées, dont $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ était une solution formelle.

Ces résultats s'appliquent à des séries divergentes pour lesquelles α_n croît moins vite que $\Gamma(p'n+1)$, p' étant un nombre positif fini quelconque. Ils peuvent donc donner de l'intérêt au théorème suivant que nous établissons ci-dessous :

THÉORÈME. — *Soit* $\sum_0^\infty \theta_n(x-x_0)^n$ $(\theta_0 \neq 0)$ *une solution formelle à rayon de convergence nul d'une équation différentielle rationnelle*

$$\sum A y^{i_0} y'^{i_1} \ldots y^{(k) i_k} = 0 \tag{1}$$

dont les coefficients A *sont des polynomes entiers en* x : *on a toujours, dès que* n *est assez grand,*

$$|\theta_n| \leqq \mu_1 n^{(P''+N''+1)n},$$

μ_1 *étant fini,* P'' *et* N'' *étant les plus grandes valeurs des quantités* $i_0 + i_1 + \ldots + i_k$ *et* $i_1 + 2i_2 + \ldots + ki_k$ *respectivement dans* (1).

Par conséquent, $\sum_0^\infty \theta_n(x-x_0)^n$ rentre dans la catégorie des séries auxquelles peuvent s'appliquer les procédés précités.

Plus généralement, M. Le Roy indique que l'on pourra essayer de prendre comme somme de $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ l'intégrale

$$f_p(z) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} F(zx)\,dx$$

avec

$$F(z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha_n z^n}{\Gamma(pn+1)},$$

F(z) étant une série convergente quelconque, pourvu que cette intégrale et l'intégrale

$$\frac{1}{p}\int_0^\infty \left| e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{F}(zx)\right| dx$$

existent.

Comme cas intéressant d'application de ces idées, nous signalerons celui où F(z) est une fonction entière d'ordre réel inférieur à l'ordre apparent d (évidemment entier)

$$\text{(B)} \qquad \mathrm{F}(z) = e^{a_0 z^d}\Phi(z),$$

$\Phi(z)$ étant une fonction entière d'ordre $< d$. On obtient alors les résultats suivants :

Il faut $dp \geqq 1$. L'intégrale $f_p(z)$ existe dans tout le plan, sauf pour $p = \frac{1}{d}$. Son seul point critique à distance finie est l'origine : elle possède probablement, en général, une infinité de valeurs, à moins que p ne soit rationnel.

Pour $dp = 1$, si $a_0 = \rho_0 e^{i\alpha_0}$, $f_p(z)$ existe dans tout le plan, sauf sur la partie des droites issues de l'origine, et faisant avec Ox l'angle $2lp\pi - \alpha_0 p$, comprise entre les points $e^{2lp\pi i}\left(\frac{1}{a_0}\right)^p$ et l'infini.

Les chemins d'intégration doivent être convenablement choisis (on peut prendre des droites issues de l'origine).

Les séries divergentes correspondantes et celles qu'on en déduit par addition, soustraction et multiplication des intégrales $f(z)$, sont sommables au sens de M. Borel.

La théorie des fonctions entières permet de former toutes les séries divergentes auxquelles ceci s'applique. En particulier, nous sommes conduit à attribuer une valeur à des séries divergentes *dont tous les termes sont positifs,* par exemple à la série $\sum_0^\infty z^n \frac{(2n)!}{n!}$, quand z est réel et positif.

Nous obtenons encore cette propriété des fonctions entières : soient $\sum_0^\infty \frac{\alpha_n z^n}{\Gamma(pn+1)}$, $\sum_0^\infty \frac{\beta_n z^n}{\Gamma(pn+1)}$, deux fonctions entières de la forme (B), et $\sum_0^\infty \gamma_n z^n = \sum_0^\infty \alpha_n z_n \sum_0^\infty \beta_n z_n$ formellement : *la fonction* *entière* $\sum_0^\infty \frac{\gamma_n z^n}{\Gamma(pn+1)}$ *est d'ordre apparent* d, *et, si son ordre réel n'est pas* $< d$, *il y a un secteur du plan des* z *où cette fonction a pour limite supérieure de son module* $e^{|z|^{\frac{1}{p}}}$ (1).

II.

Considérons l'équation différentielle générale

$$\sum A y^{i_0} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)^{i_k} = 0, \tag{1}$$

entière en $x, y, y', \ldots, y^{(k)}$, les A étant des polynomes entiers en x. Supposons que cette équation soit satisfaite formellement par une expression

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty \frac{\theta_n}{x^n} \quad (2), \tag{2}$$

dont le second membre est une série divergente où il y a une infinité de coefficients θ_n dont le module croît indéfiniment avec n. Je dis que l'on peut assigner une limite supérieure à la rapidité de croissance de θ_n avec n.

Nous supposerons $\theta_0 \neq 0$: si l'on avait $\theta_0 = 0$, il suffirait de faire dans (1) la transformation $y = z + \zeta$, où ζ est une constante différente de 0, pour que la solution (2) fût remplacée par la solution formelle $\varphi(x) - \zeta$ qui se réduit à $-\zeta$ pour $\frac{1}{x} = 0$.

(1) La lecture de notre Mémoire exige seulement la connaissance de passages des livres ou travaux suivants : Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, 1900, et *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, 1901; Éd. Le Roy, *Sur les séries divergentes*, etc. (*Ann. de la Fac. des Sc. de Toul.*, 1900).

(2) Un changement de variables facile ramène ce cas à celui où

$$\varphi(x) = \sum^\infty \theta_n (x - x_0).$$

On a

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} = \displaystyle\sum_0^\infty \dfrac{-n\theta_n}{x^{n+1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d^k\varphi}{dx^k} = \displaystyle\sum_0^\infty (-1)^k \dfrac{\theta_n n(n+1)\ldots(n+k-1)}{x^{n+k}}, \end{cases}$$

et identiquement

$$(4)\quad 0 = \sum \mathrm{A}\left(\sum \frac{\theta_n}{x^n}\right)^{i_0} \cdots \left(\sum (-1)^k \frac{\theta_n n \ldots (n+k-1)}{x^{n+k}}\right)^{i_k},$$

où

$$\mathrm{A} = a_0 x^q + \ldots + a_q.$$

Nous poserons

$$n(n+1)\ldots(n+l-1) = \varpi_n^{(l)} \qquad (l \leqq k):$$

c'est un polynome de degré l en n.

Le terme général en $\frac{1}{x}$ du produit II qui multiplie A a pour exposant

$$(5)\quad \begin{cases} m_1^0 \alpha + \ldots + m_{j_0}^0 \delta + m_1^1(1+\alpha_1) + \ldots + m_{j_1}^1(1+\delta_1) + \ldots \\ \qquad + m_1^k(k+\alpha_k) + \ldots + m_{j_k}^k(k+\delta_k) = e, \end{cases}$$

avec

$$(6)\quad \begin{cases} m_1^0 + \ldots + m_{j_0}^0 = i_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1^k + \ldots + m_{j_k}^k = i_k, \end{cases}$$

et pour coefficient

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{B} = \displaystyle\sum \frac{i_0!}{m_1^0!\ldots m_{j_0}^0!} \cdots \frac{i_k!}{m_1^k!\ldots m_{j_k}^k!} (-1)^{\mathrm{N}} \theta_\alpha^{m_1^0} \ldots \theta_{\delta_k}^{m_{j_k}^k} \\ \qquad \alpha_1^{m_1^1} \ldots \delta_1^{m_{j_1}^1} \ldots \varpi_{\alpha_k}^{(k)m_1^k} \ldots \varpi_{\delta_k}^{(k)m_{j_k}^k}, \\ \qquad \mathrm{N} = i_1 + 2i_2 + \ldots + k i_k. \end{cases}$$

Le coefficient de $\frac{1}{x^e}$ dans le second membre de (4) sera nul, mais ne le sera pas identiquement, quels que soient e et les θ_n : on peut même affirmer qu'il y aura une infinité de valeurs de e pour lesquelles il en sera différemment, sans quoi il y aurait une infinité dénombrable des coefficients θ_n qui pourrait être choisie arbitrairement. On aura donc effectivement pour ces valeurs de e une relation au moins de la forme

$$(8) \qquad \Sigma \theta_{\alpha}^{m_1^0} \cdots \theta_{\delta_k}^{m_{j_k}^k} \Pi = 0$$

où Π est un polynome de degré total au plus égal à N'' en $\alpha_1, \ldots, \delta_k$, N'' étant le maximum de N pour (1), et où $m_1^0 \alpha + \ldots + m_{j_k}^k \delta_k = e + \varepsilon$, ε étant fini. On peut toujours supposer que dans (8) on ait groupé les termes de façon que deux termes de (8) diffèrent toujours au moins par une des quantités $\theta_\alpha, \ldots, \theta_{\delta_k}$, ou, s'ils correspondent aux mêmes quantités $\theta_\alpha, \ldots, \theta_{\delta_k}$, par un des exposants de $\theta_\alpha, \ldots, \theta_{\delta_k}$. Le premier membre de (8) est alors un polynome en $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{e+\varepsilon}$, dont les coefficients sont les quantités Π.

Cette relation (8) n'aura pas lieu en général quels que soient les θ_i, puisque parmi ceux-ci il ne doit y en avoir qu'un nombre limité d'arbitraires. Donc tous les polynomes Π ne seront pas nuls. Ne conservons dans (8) que les termes pour lesquels $\Pi \neq 0$.

Isolons alors les termes de (8) pour lesquels un au moins des indices $\alpha, \ldots, \delta_k$ est maximum parmi les indices des θ qui entrent dans (8) : soit ρ cet indice maximum $\leqq e + \varepsilon$. Prenons encore, parmi ces derniers termes, ceux pour lesquels l'exposant de θ_ρ dans le produit $\theta_{\alpha}^{m_1^0} \cdots \theta_{\delta_k}^{m_{j_k}^k}$ est maximum et $= m$. Nous aurons

$$(9) \qquad \theta_\rho^m \Sigma \theta_{\rho_1}^{m_1} \cdots \theta_{\rho_\sigma}^{m_\sigma} \Pi_\rho = \Sigma \theta_{\alpha}^{m_1^0} \cdots \theta_{\delta_k}^{m_{j_k}^k} \Pi',$$

le second membre pouvant être considéré comme un polynome en θ_ρ de degré $m - 1$.

Π_ρ est un polynome entier en $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_\sigma$. Considérons celui $\Pi_\rho^{(1)}$ des polynomes Π_ρ qui correspond à un système de valeurs de $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_\sigma$, $m, m_1, \ldots, m_\sigma$ et qui n'est pas identiquement nul. C'est en particulier un polynome entier en ρ qui n'est pas identiquement nul : on peut toujours, $\rho_1, \ldots, \rho_\sigma, m_1, \ldots, m_\sigma$ étant donnés, assigner une limite inférieure finie R de ρ à partir de laquelle $\Pi_\rho^{(1)}$ ne sera jamais nul. Le terme correspondant T existera toujours dans les équations (9) correspondant à des valeurs de e aussi grandes qu'on veut, et l'on aura pour lui, m étant fini, $m\rho = e - \varepsilon_1$ (ε_1 fini) (1).

Pour toutes les équations (9) qui correspondent à des valeurs de e dépassant une limite finie, T sera un des termes pour lesquels un indice est maximum, avec l'exposant correspondant le plus fort.

En effet, sinon, pour une valeur de e suffisamment grande, on a une équation analogue à (9)

$$\theta_{\rho'}^{m'} \Sigma \theta_{\rho'_1}^{m'_1} \ldots \theta_{\rho'_\sigma}^{m'_\sigma} \mathrm{H}'_{\rho'} = \mathrm{D}, \tag{9 bis}$$

où $\rho' > \rho$ et (2) $m'\rho' = e - \varepsilon_2$ (ε_2 fini).

On en conclut

$$m'\rho' - m\rho = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

On n'a pas $m' > m$, à moins que $\rho' < \rho$. Si $m' = m$, $\rho' - \rho$ doit être fini et > 0 : on pourra raisonner sur (9 *bis*) comme on l'a fait sur (9); on obtiendra des valeurs successives $\rho, \rho', \rho'', \ldots$, en nombre fini, puisque les sommes analogues à $m\rho + m_1\rho_1 + \ldots + m_\sigma\rho_\sigma$ sont $= e + \varepsilon$. Si e est supérieur à une certaine limite finie dans (9), on peut donc supposer ou bien $m' = m$, $\rho' = \rho$, ou bien $m' < m$, $\rho' > \rho$.

Dans ce dernier cas, on répétera sur (9 *bis*) le raisonnement fait sur (9); m' étant fini, on finira par trouver pour les valeurs de e supérieures à une limite finie, une relation de la forme (9) pour laquelle la relation (9 *bis*) correspondante est telle que $\rho' = \rho$, $m' = m$.

Considérons alors l'ensemble de celles des relations (9) où ceci a lieu.

Deux cas peuvent se présenter :

1° Le coefficient de θ_ρ^m est nul. Nous opérerons de la même manière sur celui de θ_ρ^{m-1}, s'il est nul sur celui de θ_ρ^{m-2}, etc.; au besoin sur ceux de $\theta_{\rho-1}^{\mu_1}, \ldots$ (3).

2° Si tous ces coefficients sont nuls pour la généralité des équations (9), on pourra raisonner sur eux comme on l'a fait sur (9).

---

(1) Pour chaque valeur de ρ, il y a ici une équation analogue à (8), le premier terme de (9) y jouissant ou n'y jouissant pas des propriétés supposées à (8); pour ces équations, $\mathrm{H}_\rho^{(1)}$ conserve la même forme d'après (5), car (5) devient ici $m\rho - e = -\varepsilon_1$.

(2) On ne pourrait avoir $\rho' = \rho$ avec $m' > m$, puisque $(m+1)\rho = e - \varepsilon_1 + \rho > e + \text{const.}$, dès que ρ dépasse une certaine limite.

(3) Il suffit qu'un seul de ces coefficients ne soit pas nul pour que le raisonnement soit applicable.

En continuant de la sorte, on finira par trouver des expressions analogues à (9) où le coefficient analogue à celui de θ_ρ^m dans (9) est $\neq 0$, chaque terme contenant au moins un des coefficients θ_i; sans quoi il y aurait dans φ une infinité de coefficients arbitraires.

Dans chacune des relations ainsi obtenues, les polynomes Π_σ sont de degré total $\leqq N''$ et la somme $m\rho + \ldots + m_\sigma\rho_\sigma = \eta$, les diverses valeurs de η ne pouvant différer de e que d'une quantité finie. On a alors

$$(9\ ter) \qquad |\Pi_\rho| \leqq \lambda(\eta + \zeta_1)^{N''}, \qquad (\zeta_1 \text{ fini}),$$

et le nombre des termes de la relation (9) correspondante est

$$\leqq (\eta + \zeta_1)^{P''}\lambda'.$$

(9) est de la forme

$$(10) \qquad \theta_\rho^m \Sigma_m + \theta_\rho^{m-1}\Sigma_{m-1} + \ldots + \theta_\rho \Sigma_1 + \Sigma_0 = 0.$$

Le coefficient de θ_ρ^m est un polynome p en ρ qui, d'après ce qui précède, n'est pas nul identiquement : si p dépend de ρ, son module croît indéfiniment avec ρ; si p est indépendant de ρ, c'est une constante; dans les deux cas

$$(11) \qquad |\theta_\rho^m| \leqq \lambda_1 \{ |\theta_\rho^{m-1}\Sigma'_{m-1}| + \ldots + |\Sigma'_0| \} (\eta + \zeta_1)^{N''},$$

λ_1 étant une constante limitée $\neq 0$ en général, et $|\Sigma'_{m-\mu}|$ désignant ce que devient $|\Sigma_{m-\mu}|$ quand on remplace $|\Pi_\rho|$ par sa limite supérieure (9 *ter*) et qu'on néglige le facteur $\lambda(\eta + \zeta_1)^{N''}$.

On a pour chaque terme du second membre

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{c} (m-\mu)\rho + m_1\rho_1 + \ldots = \eta + \varepsilon', \\ \text{et de même} \\ m\rho = \eta + \varepsilon, \end{array} \right.$$

ε et ε' étant finis quel que soit η.

Ceci posé, je dis que l'on pourra prendre

$$(13) \qquad |\theta_n| \leqq \mu_1 n^{\mu_2 n},$$

μ_1 et μ_2 étant finis.

D'abord ceci est vrai pour $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i$ tant que i est inférieur à une limite finie arbitraire, car la valeur de μ_1 n'est pas spécifiée et l'on doit supposer que ceux des coefficients $\theta_1, \theta_2, \ldots$, dont la valeur pourrait rester arbitraire, sont finis. Admettons que (13) soit vrai pour $n < \rho$: je dis que si μ_2 est suffisamment grand tout en restant fini et indépendant de ρ, (13) a encore lieu pour $n = \rho$.

En effet, cherchons une limite supérieure de la valeur du module des termes de $\Sigma'_{m-\mu}$.

Le module du terme général est

$$|\theta_{\rho_1}^{m_1} \ldots \theta_{\rho_{\sigma_1}}^{m_{\sigma_1}}| \leqq (\theta\mu_1)^{m_1+\ldots+m_{\sigma_1}} (\rho_1^{m_1\rho_1} \ldots \rho_{\sigma_1}^{m_{\sigma_1}\rho_{\sigma_1}})^{\mu_2}, \qquad (\theta \text{ fini}).$$

D'autre part, considérons

$$\rho_1^{m_1\rho_1} \ldots \rho_{\sigma_1}^{m_{\sigma_1}\rho_{\sigma_1}}.$$

Ce terme est égal à

$$\rho_1'^{\rho_1'} \ldots \rho_\sigma'^{\rho_\sigma'},$$

où les m_1 premiers termes sont égaux à $\rho_1^{\rho_1}$, etc.

Enfin

$$(\theta\mu_1)^{m_1+\ldots+m_{\sigma_1}} \leqq (\theta\mu_1)^{\mathrm{P}''}.$$

Donc

$$|\theta_{\rho_1}^{m_1} \ldots \theta_{\rho_{\sigma_1}}^{m_{\sigma_1}}| \leqq (\theta\mu_1)^{\mathrm{P}''} (\rho_1'^{\rho_1'} \ldots \rho_\sigma'^{\rho_\sigma'})^{\mu_2},$$

avec

$$\rho_1' + \ldots + \rho_\sigma' = \mu\rho + \varepsilon'' \qquad (\varepsilon'' \text{ fini}, \sigma \leqq \mathrm{P}''),$$

d'après (12).

Soient $\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_\sigma' \geqq 1$: on a $\mu \geqq 1$. Si toutes les quantités ρ_1', $\rho_2', \ldots, \rho_\sigma'$ ne sont pas égales à $\rho - 1$, soient $\rho_{\sigma-1}', \rho_\sigma'$ deux d'entre elles plus petites que $\rho - 1$. La fonction

$$\rho_{\sigma-1}' \log \rho_{\sigma-1}' + \rho_\sigma' \log \rho_\sigma'$$

a pour différentielle

$$\partial = (\log \rho_{\sigma-1}' + 1)\, d\rho_{\sigma-1}' + (\log \rho_\sigma' + 1)\, d\rho_\sigma';$$

si on laisse constants $\rho_1', \ldots, \rho_{\sigma-2}'$ sans changer la somme $\rho_1' + \ldots + \rho_\sigma'$, on aura

$$d\rho_{\sigma-1}' + d\rho_\sigma' = 0,$$

et δ devient

$$\delta = \log\left(\frac{\rho'_{\sigma-1}}{\rho'_\sigma}\right) d\rho'_{\sigma-1}.$$

δ est positif quand $\rho'_{\sigma-1} \geqq \rho'_\sigma$. Donc, si l'on fait croître $\rho'_{\sigma-1}$ et décroître ρ'_σ de façon que $\rho'_{\sigma-1} + \rho'_\sigma$ reste constant, la fonction $\rho'_1{}^{\rho'_1} \dots \rho'_\sigma{}^{\rho'_\sigma}$ augmente de valeur dès que $\rho'_{\sigma-1} \geqq \rho'_\sigma$.

On en conclut que l'on obtiendra pour $\rho'_1{}^{\rho'_1} \dots \rho'_\sigma{}^{\rho'_\sigma}$ la valeur la plus élevée possible en attribuant au plus grand nombre possible de ces quantités la valeur $\rho - 1$.

D'ailleurs, si ρ est grand, μ étant limité et $\leqq P''$, il y aura au plus μ des quantités $\rho'_1, \dots, \rho'_\sigma$ égales à $\rho - 1$, les autres ayant une valeur limitée. Donc

$$\rho'_1{}^{\rho'_1} \dots \rho'_\sigma{}^{\rho'_\sigma} \leqq (\rho - 1)^{(\rho-1)\mu} \varepsilon''',$$

ε''' étant limité. Donc enfin

$$|\theta_{\rho_1}^{m_1} \dots \theta_{\rho_{\sigma_1}}^{m_{\sigma_1}}| \leqq |\theta\mu_1|^{P''} (\rho - 1)^{(\rho-1)\mu\mu_2} \varepsilon^{(IV)}$$

($\varepsilon^{(IV)}$ fini).

Considérons maintenant

$$\theta_\rho^{m-\mu} \Sigma'_{m-\mu}.$$

Le nombre des termes de (9) étant $\leqq \lambda(\eta + \zeta_1)^{P''}$, on a

$$\lambda'(\eta + \zeta_1)^{N''} |\theta_\rho^{m-\mu} \Sigma'_{m-\mu}| \leqq (\eta + \zeta_1)^{P''+N''} |\theta_\rho|^{m-\mu} |\theta_0 \mu_1|^{P''} (\rho - 1)^{(\rho-1)\mu\mu_2} \varepsilon^{(V)}$$

($\varepsilon^{(V)}$ fini).

Or, d'après (12), le second membre est égal à

$$|\theta_\rho|^{m-\mu} |\theta\mu_1|^{P''} (\rho - 1)^{(\rho-1)\mu\mu_2} \varepsilon^{(V)} (m\rho - \varepsilon + \zeta_1)^{P''+N''},$$

et

$$\varepsilon^{(V)} (m\rho - \varepsilon + \zeta_1)^{N''+P''} (\rho - 1)^{(\rho-1)\mu\mu_2} < (m + 1)^{N''+P''} \rho^{P''+N''-\mu\mu_2+\rho\mu\mu_2} \leqq \frac{\lambda_2}{\rho^\nu} \rho^{\rho\mu\mu_2},$$

dès que $\mu_2 \geqq P'' + N'' + \nu$, puisque $\mu \geqq 1$, λ_2 et ν étant des constantes, ν aussi petit qu'on veut. Donc

$$\lambda'(\eta + \zeta_1)^{N''} |\theta_\rho^{m-\mu} \Sigma'_{m-\mu}| \leqq |\theta\mu_1|^{P''} |\theta_\rho|^{m-\mu} \frac{\lambda_2}{\rho^\nu} \cdot \rho^{\rho\mu\mu_2},$$

et, d'après (11),

$$|\theta_\rho^m| \leqq \frac{\lambda_3}{\rho^\nu} |\theta\mu_1|^{P''} \sum_\mu |\theta_\rho^{m-\mu}| \rho^{\rho\mu\mu_2},$$

$$|\theta_\rho^m| \leqq \frac{\lambda_3}{\rho^\nu} |\theta\mu_1|^{P''} \{ |\theta_\rho^{m-1}| \rho^{\rho\mu_2} + |\theta_\rho^{m-2}| \rho^{2\rho\mu_2} + \ldots + \rho^{m\rho\mu_2} \}.$$

$|\theta_\rho|$ devra alors être au plus égal à la plus grande racine positive de l'équation algébrique

$$X^m - \frac{\lambda_3}{\rho^\nu} |\theta\mu_1|^{P''} \{ X^{m-1} \rho^{\rho\mu_2} + \ldots + \rho^{m\rho\mu_2} \} = 0.$$

On sait que cette équation a pour limite supérieure de ses racines

$$1 + \sqrt[m]{\frac{\lambda_3}{\rho^\nu} |\theta\mu_1|^{P''} \rho^{m\rho\mu_2}} \leqq 1 + |\theta\mu_1|^{\frac{P''}{m}} \left(\frac{\lambda_3}{\rho^\nu}\right)^{\frac{1}{m}} \rho^{\rho\mu_2}.$$

Donc

$$|\theta_\rho| \leqq 1 + |\theta\mu_1|^{\frac{P''}{m}} \frac{\lambda_3^{\frac{1}{m}}}{\rho^{\frac{\nu}{m}}} \rho^{\rho\mu_2} < \mu_1 \rho^{\rho\mu_2},$$

dès que ρ est assez grand, ce qui démontre la formule (13). Nous en concluons ce théorème :

THÉORÈME. — *Soit* $\sum_0^\infty{}_n \frac{\theta_n}{x^n}$ $(\theta_0 \neq 0)$ *une solution formelle divergente d'une équation différentielle*

$$(1) \qquad \Sigma A y^{i_0} y'^{i_1} \ldots y^{(k)i_k} = 0$$

(A *polynome entier*).

On a toujours, dès que n *est assez grand,*

$$\theta_n \leqq \mu_1 n^{(P''+N''+\nu)n},$$

μ_1 *et* ν *étant finis,* ν *aussi petit qu'on veut, et* P″ *et* N″ *étant les plus grandes valeurs des quantités* $i_0 + i_1 + \ldots + i_k$ *et* $i_1 + 2i_2 + \ldots + ki_k$ *dans* (1).

III.

Qu'en résulte-t-il pour les séries $\sum_0^\infty \frac{\theta_n}{x^n}$, ou encore pour les séries $\sum_0^\infty \theta_n(x-x_0)$ divergentes aux environs du point $x = x_0$, au point de vue de la sommabilité? Nous supposerons, pour simplifier, $x_0 = 0$; un changement de variables ramène toujours le cas général à celui-là, que nous considérerons seul par la suite.

M. Le Roy (¹) a considéré comme valeur de la série $\sum_0^\infty \theta_n x^n$, pour une valeur de x, l'intégrale

$$(14) \qquad f_p(x) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{F}_p(zx)\,dz,$$

où

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F}_p(zx) &= \sum_0^\infty a_n (zx)^n, \\ \theta_n &= \Gamma(pn+1)\,a_n, \end{aligned} \right.$$

p entier ou non, mais positif, et a_n coefficient général de la série $\mathrm{F}_p(z)$ dont le rayon de convergence est supposé *fini*. Il en résulte, si toutes ces conditions peuvent être remplies, et si $f_p(x)$ a une valeur bien déterminée, que la série $\sum_0^\infty \theta_n x^n$ est sommable, au sens de M. Borel, pour cette valeur de x.

Mais : 1° M. Le Roy ne prouve pas que les conditions (15) entraînent toujours l'existence de l'intégrale (14); 2° on peut bien toujours faire en sorte que a_n soit le coefficient d'une série entière, mais rien ne prouve qu'alors l'intégrale (14) ait une valeur.

M. Borel, avant M. Le Roy, avait considéré le cas où $p = 1$; mais il

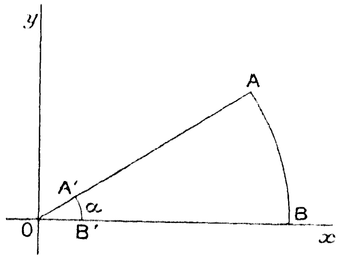
(¹) *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 1900, p. 416.

avait encore admis *a priori* l'existence de l'intégrale (14), au moins le long d'un chemin convenablement choisi.

Nous allons, dans ce qui suit, indiquer un cas étendu où les intégrales (14) définissent des fonctions auxquelles correspondent *toujours* des séries divergentes aux environs de $x = 0$ et sommables au sens de M. Borel, le sens de a_n dans les conditions (15) étant changé. Considérons d'abord l'intégrale

$$(16) \qquad \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{\frac{1}{p}-1+n}\,dz,$$

prise le long d'un chemin formé par une droite OA allant de l'origine à l'infini dans [1] le plan des z. Soit également le contour A′ABB′



formé d'un arc de cercle de rayon infiniment petit A′B′ décrit de l'origine comme centre, de la partie A′A du chemin OA, de l'arc de cercle AB de rayon R aussi grand qu'on veut et de la partie B′B de l'axe Ox. A l'intérieur de ce contour, la fonction qui figure dans l'intégrale (16) n'a aucun point critique. On a

$$(17) \qquad \int_{B'B} + \int_{BA} + \int_{AA'} + \int_{A'B'} = 0.$$

Nous supposons que l'on attribue à $z^{\frac{1}{p}}$ en B′ celle de ses valeurs qui est réelle et positive :

$$\frac{1}{p}\int_{B'B} = \Gamma(pn+1).$$

---

(1) On pourrait remplacer cette droite par des courbes convenables : nous n'insistons pas.

Considérons $\int_{BA}$; soit $z=\rho e^{i\varphi}$;

$$P = e^{-\rho^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\varphi}{p}+i\sin\frac{\varphi}{p}\right)}\rho^{\frac{1}{p}+n}$$

est toujours nul pour ρ infini tant que $\frac{\varphi}{p}$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si l'on fait varier φ de $-\pi$ à π tant que $p>2$.

Quand $p\leqq 2$, P est nul pour ρ infini quand φ est compris entre $-\frac{\pi}{2}p$ et $+\frac{\pi}{2}p$. Alors

$$\lim_{\rho=\infty}\int_{BA} = 0.$$

Considérons maintenant $\int_{A'B'}$: P est nul pour $\rho=0$, quel que soit φ.

$$\lim_{\rho=0}\int_{A'B'} = 0.$$

Nous en concluons que

$$\frac{1}{p}\int_{A'A} = \frac{1}{p}\int_{B'B} = \Gamma(pn+1) \tag{17}$$

sous les conditions ci-dessus pour φ.

On pourra alors prendre comme valeur de (14) celle de l'intégrale du second membre effectuée le long d'un des chemins OA que nous venons de définir suivant que p est $\leqq 2$ ou >2. Mais rien n'empêchera que nous y prenions pour $F_p(z)$ une fonction entière; la condition de prendre pour p dans (15) la plus petite valeur p' qui soit telle que $F(z)$ soit une série convergente ou une fonction entière n'est pas indispensable; on pourra encore prendre pour p successivement des valeurs différentes, mais rien ne prouve *a priori* que les diverses valeurs $f_p(x)$ obtenues ainsi soient identiques. Rien ne prouve même que les intégrales (14) soient susceptibles d'une existence quelconque en général, même le long d'un chemin convenablement choisi.

C'est de ce dernier point que nous allons nous occuper en supposant que $F_p(z)$ soit toujours une fonction entière.

IV.

Considérons alors l'intégrale

$$f_p(x) = \frac{1}{p}\int_0^\infty Q_p(z)\,dz \tag{14}$$

avec

$$Q_p(z) = e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{\frac{1}{p}-1} F_p(zx).$$

Supposons que la fonction entière $F_p(zx)$ ait son ordre réel inférieur à l'ordre apparent, c'est-à-dire que

$$F_p(zx) = e^{R_p(zx)}\Phi_p(zx), \tag{14 bis}$$

$R_p(z)$ étant un polynome entier de degré d en z, et $\Phi(z)$ un produit de facteurs primaires d'ordre $< d$. Si

$$R_p(z) = a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + \ldots + x_d,$$

et

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= \rho_0(\cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0),\\ z &= \rho\ (\cos\varphi + i\sin\varphi),\\ x &= r\ (\cos f + i\sin f),\end{aligned}\right. \tag{18}$$

on a

$$\left\{\begin{aligned} R_p(zx) &= \rho_0(\rho r)^d e^{i[\alpha_0 + d(\varphi+f)]} + \ldots,\\ e^{-z^{\frac{1}{p}}} &= e^{-\rho^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\varphi}{p} + i\sin\frac{\varphi}{p}\right)}.\end{aligned}\right. \tag{19}$$

D'abord on n'a jamais $\frac{1}{p} > d$ quand l'intégrale $f_p(x)$ existe et que la série correspondante $\sum_0^\infty {}_n\theta_n x^n$ est une série divergente. En effet, le terme général de $F_p(zx)$ est

$$\frac{\alpha_n}{\Gamma(pn+1)}(zx)^n,$$

et son ordre est ρ_1. Donc

$$\frac{\alpha_n}{\Gamma(pn+1)} < \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{\rho_1}-\varepsilon}},$$

ε étant aussi petit qu'on veut, mais fini, et ρ étant le plus petit nombre satisfaisant à cette inégalité pour n assez grand, quel que soit ε. De même, pour une infinité de valeurs de n

$$\frac{|\alpha_n|}{\Gamma(pn+1)} > \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{\rho_1}+\varepsilon}}.$$

L'ordre de $F_p(zx)$ ne pourrait être $d = \rho_1 < \frac{1}{p}$ que si

$$\frac{|\alpha_n|}{\Gamma(pn+1)} < \frac{1}{(n!)^{p+\varepsilon'}}$$

avec $p + \varepsilon' = \frac{1}{\rho_1} - \varepsilon$, $\varepsilon' = \frac{1}{\rho_1} - p - \varepsilon$, c'est-à-dire que ε' pourrait être pris positif et limité inférieurement. Dès lors on aurait

$$|\alpha_n| < 2\,\frac{\left(\frac{pn}{e}\right)^{pn+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi e}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)(p+\varepsilon')}\sqrt{2\pi e}}$$

$$< 2\,\frac{p^{pn+\frac{1}{2}}\,n^{pn+\frac{1}{2}}\,e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)p-pn-\frac{1}{2}}}{n^{np+\frac{p}{2}}}\left(\frac{n}{e}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\varepsilon'}$$

ou

$$|\alpha_n| < \lambda\, n^{\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}\, p^{pn+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\varepsilon'}, \qquad (\lambda \text{ const.}).$$

ε' est limité inférieurement. On peut toujours prendre pour n assez grand

$$\left(\frac{n}{e}\right)^{n\varepsilon'} > k^n,$$

quel que soit k, si k est fini, car il suffit de prendre

$$\left(\frac{n}{e}\right)^{\varepsilon'} > k.$$

Dès lors $|\alpha_n|$ tendrait vers 0 plus vite que $\frac{1}{k_1^n}$ ($k_1 > 1$), et la série $\sum^{\infty} \alpha_n x^n$

aurait un rayon de convergence fini. Donc, on doit supposer

$$d = \rho \geqq \frac{1}{p}.$$

d étant entier, on n'aura que deux cas à étudier :

1° $dp > 1$;

2° $dp = 1$.

Premier cas : $dp > 1$. — Il suffit pour l'existence de l'intégrale (14) le long d'une droite faisant l'angle φ avec Ox

$$(20) \qquad \begin{cases} \cos\dfrac{\varphi}{p} > 0, \\ \cos[\alpha_0 + d(\varphi + f)] < 0, \end{cases}$$

simultanément le long du chemin d'intégration, d'après (18) et (19).

Les angles tels que $\cos\frac{\varphi}{p} > 0$ sont ceux pour lesquels

$$\frac{\varphi}{p} = 2k\pi + \eta, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Les angles pour lesquels

$$\cos(\alpha_0 + d\varphi + df) < 0$$

sont ceux pour lesquels

$$\alpha_0 + df + d\varphi = 2l\pi + \eta_1, \qquad \frac{\pi}{2} \leqq \eta_1 \leqq \frac{3\pi}{2}.$$

Il y a toujours une région où l'intégration est possible, car prenons

$$(21) \qquad \begin{cases} \alpha_0 + df = \varepsilon, \\ d\varphi = 2l\pi + \eta_1 - \varepsilon, \\ \varphi = 2k\pi p + p\eta, \\ 2l\pi + \eta_1 = 2k\pi dp + dp\eta + \varepsilon. \end{cases}$$

Pour $l = k = 0$,

$$\eta_1 - \varepsilon = dp\eta,$$
$$\varepsilon = \eta_1 - dp\eta.$$

η_1 variant entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ et η entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ε varie entre $\frac{3\pi}{2} + dp\,\frac{\pi}{2}$

et $\frac{\pi}{2} - dp\frac{\pi}{2}\cdot$ Or $dp > 1$. Il y a donc un angle de sommabilité qui diffère d'aussi peu qu'on veut de

$$\frac{\pi + dp\pi}{d} = \pi\left(\frac{1}{d} + p\right)$$

avec

$$2\pi p > \pi\left(\frac{1}{d} + p\right) > \frac{2\pi}{d},$$

angle qui est $\geqq 2\pi$ quand $p \geqq 2$.

Quand $1 \leqq p < 2$, cet angle est $\geqq \pi$, et même $> 2\pi$ si $d = 1$, $p > 1$. D'ailleurs, on n'a pas ici $d = 1$, $p \leqq 1$ d'après $dp > 1$.

Soit alors $p < 2$, $d > 1$: l'angle de sommabilité est égal à $\pi p + \frac{\pi}{d}\cdot$ Pourra-t-il y avoir une autre région de sommabilité? Si on laisse encore $k = 0$, (21) donne

$$\eta_1 - \varepsilon = dp\eta - 2l\pi,$$
$$\varepsilon = \eta_1 + 2l\pi - dp\eta.$$

ε varie ici entre $\frac{3\pi}{2} + dp\frac{\pi}{2} + 2l\pi$ et $\frac{\pi}{2} - dp\frac{\pi}{2} + 2l\pi$. L'angle de sommabilité a la même valeur, mais ses extrémités sont, d'après (21),

$$-\frac{\alpha_0}{d} + \frac{3\pi}{2d} + \frac{p\pi}{2} + \frac{2l\pi}{d},$$
$$-\frac{\alpha_0}{d} + \frac{\pi}{2d} - \frac{p\pi}{2} + \frac{2l\pi}{d}.$$

Chaque fois qu'on augmente l de 1, d étant > 1, on augmente les angles des droites extrêmes du secteur (22) avec Ox de $\frac{2\pi}{d}\cdot$ L'angle de sommabilité étant $> \frac{2\pi}{d}$, les divers secteurs correspondant aux diverses valeurs de l se recouvrent; l'angle total de sommabilité est $> 2\pi$, et l'intégrale existe quel que soit f, φ étant convenablement choisi.

Par conséquent :

Théorème. — *Quand* $dp > 1$ *les intégrales* (14) *que nous considérons existent dans tout le plan.*

Le point $x=0$ seul est un point singulier. Les diverses valeurs de l'intégrale correspondent aux diverses valeurs initiales que l'on peut prendre pour $z^{\frac{1}{p}}$ quand z part de o pour varier le long de la ligne d'intégration.

Il resterait toutefois à préciser, quand $\sum_0^\infty {}^n\alpha_n x^n$ diverge, si la valeur de l'intégrale pour une même valeur de x ne dépend pas de φ dans les limites où l'intégrale existe.

Deuxième cas : $\frac{1}{d}=p<1$.

Il faudra encore pour l'existence de l'intégrale que

$$-\rho^{\frac{1}{p}}\cos\frac{\varphi}{p}+\rho_0(\rho r)^d\cos[\alpha_0+d(\varphi+f)]<0,$$

avec

$$\cos\frac{\varphi}{p}=\cos d\varphi>0,$$

d'après (19).

Il suffira, dès lors, qu'on ait à la fois

$$\cos[\alpha_0+d(\varphi+f)]<0, \qquad \cos d\varphi>0.$$

Il faut qu'en ajoutant à $\alpha_0+df+2k\pi$ un angle $d\varphi$ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, on obtienne un angle compris entre $\frac{\pi}{2}+2k_1\pi$ et $\frac{3\pi}{2}+2k_1\pi$.

Si $\alpha_0+df\neq 2l\pi$, il y a une solution évidente. Sinon

$$\alpha_0+df=2l\pi, \qquad f=-\frac{\alpha_0}{d}+\frac{2l\pi}{d},$$

$$\rho^{\frac{1}{p}}\left(-\cos\frac{\varphi}{p}+\rho_0 r^d\cos\frac{\varphi}{p}\right)<0,$$

et puisque

$$\cos\frac{\varphi}{p}>0,$$

$$\rho_0 r^d<1, \qquad r<\rho_0^{-p}.$$

Théorème. — *Quand $dp=1$, les intégrales (14) existent dans tout le plan, sauf dans la partie des droites issues de l'origine faisant avec Ox l'angle $p(-\alpha_0+2l\pi)$, et comprise entre le point $e^{i2l\pi p}\left(\frac{1}{\alpha_0}\right)^p$ et l'∞.*

Remarque I. — Nous obtenons ci-dessus des exemples intéressants de séries divergentes fonctions de x et à rayon de convergence nul, qui sont sommables.

Pour étendre ceci au cas où $F(z)$ est une fonction entière d'ordre apparent égal à l'ordre réel, il faudrait examiner si l'on ne peut, dans ce cas, déterminer dans le plan des z une ligne qui servirait de chemin d'intégration, et le long de laquelle $|F(z)|$ serait d'ordre $< e^{r^{\frac{1}{p'}}}$ ($r = |z|$). La chose est parfaitement possible : il suffit de citer comme exemple la fonction $\sin \pi z$ ou même (¹) les produits de facteurs primaires d'ordre < 2, dont toutes les racines sont réelles et de même signe.

Remarque II. — Considérons, par exemple, l'intégrale

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-z^{\frac{1}{2}}} z^{-\frac{1}{2}} e^{zx}\,dz.$$

Il faut ici $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$, $\cos(\varphi + f) < 0$, d'après (20).

On pourra alors prendre $\frac{\varphi}{2}$ compris $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, $\varphi + f$ entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$; f peut varier entre $\frac{\pi}{2} - \pi + \varepsilon$ et $\frac{3\pi}{2} + \pi - \varepsilon = \frac{5\pi}{2} - \varepsilon$.

Donc, quel que soit f on trouve toujours une valeur pour $f(x)$.

Si, en particulier, $f = 0$, on peut prendre $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $\frac{\varphi}{2} = \frac{3\pi}{8}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-z^{\frac{1}{2}}} z^{-\frac{1}{2}} e^{zx}\,dz,$$

l'intégrale étant prise le long de la droite $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ est la somme de la

(¹) Nous y reviendrons. Certains résultats publiés par M. Mittag-Leffler depuis que ces lignes ont été écrites le montrent également (*Comptes rendus*, 2 mars et 12 octobre 1903). Il y a là une voie possible pour l'extension des deux théorèmes ci-dessus. On peut même se poser la question inverse : *Y a-t-il des fonctions entières d'ordre fini* $\rho_1 \neq 0$, *pour lesquelles la chose est impossible quel que soit* p, *avec* $p\rho_1 > 1$?

série

$$\sum_0^\infty \alpha_n x^n = \sum_0^\infty \frac{(2n)!}{n!} x^n.$$

On est ainsi conduit, ce que M. Borel avait pressenti comme n'étant pas absurde *a priori* [1], *à attribuer un sens et une valeur à une série divergente dont tous les termes sont positifs*.

Il faut toutefois remarquer que, pour une valeur de f, φ n'est pas arbitraire, car il est compris entre $\frac{\pi}{2} - f$ et $\frac{3\pi}{2} - f$. L'intégrale correspondante a un sens pour tous les chemins d'intégration compris dans ces limites; pour une autre valeur de f les limites sont différentes.

Comme nous l'avons déjà indiqué, on pourrait se demander dès lors jusqu'à quel point on peut considérer les diverses fonctions obtenues pour chaque valeur de f comme appartenant à une même fonction. Nous n'insisterons pas à ce sujet.

Pour montrer l'intérêt des théorèmes précédents, il nous reste à étendre les démonstrations connues de MM. Borel [2] et Le Roy pour montrer que $f(x)$ est bien *sommable au sens de M. Borel*, c'est-à-dire est bien solution des équations algébriques ou différentielles auxquelles $\sum_0^\infty \alpha_n x^n$ satisfait formellement.

D'abord, la plupart des mêmes démonstrations s'appliquent pour les valeurs de x, telles que le chemin d'intégration coïncide avec la partie négative de $O\bar{x}$, en particulier celles pour lesquelles x est réel et φ et f à la fois nuls : alors $\cos\varphi = 1 > 0$, $\cos[\alpha_0 + d(\varphi + f)] < 0$, si $\alpha_0 = -\pi$.

La dérivée d'une fonction $f_p(x)$ d'indice p est d'ailleurs de même nature, car

$$f_p(x) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{-1+\frac{1}{p}} e^{R_p(zx)} \Phi_p(zx)\,dz,$$

$$f'_p(x) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{-1+\frac{1}{p}} \left(\frac{dR_p(zx)}{dx} e^{R_p(zx)} \Phi_p(zx) + e^{R_p(zx)} \frac{d\Phi_p(zx)}{dx}\right) dz,$$

---

(1) BOREL, *Journal de Mathématiques*, 1896, p. 121.

(2) *Leçons sur les séries divergentes*. Paris, 1901, p. 100 et suiv..

et la fonction

$$\Phi_p(zx)\frac{dR_p(zx)}{dx}+\frac{d\Phi_p(zx)}{dx},$$

ou, si $zx=u$, la fonction

$$\Phi_p(u)\frac{dR_p(u)}{du}z+\frac{d\Phi_p(u)}{du}z$$

est de même ordre apparent que la fonction $\Phi_p(u)$. Il en résulte que la dérivée de l'intégrale (14) existe en même temps que l'intégrale [1].

Enfin, les chemins d'intégration, c'est-à-dire la valeur de φ correspondant à une valeur de x, peuvent toujours être pris les mêmes pour une même valeur de x pour toutes les intégrales (14) où p, d degré de $R_p(zx)$ et a_0 coefficient de z^d dans $R_p(z)$ ont les mêmes valeurs. Nous dirons que les séries $\Sigma\alpha_n x^n$ correspondant à ces fonctions (14) [pour lesquelles (14 *bis*) a lieu] sont *des séries* (p, d, a_0). L'ensemble des séries $\Sigma\alpha_n x^n$ auxquelles correspondent des intégrales (14) [sans que (14 *bis*) ait lieu nécessairement] existant pour une même valeur de p et φ aux environs d'une même valeur x sera dit un *ensemble* ou *groupe associable* (p, φ, x). Les intégrales correspondantes sont des intégrales (p, φ, x).

Pour justifier cette dernière dénomination, nous allons montrer : 1° que la somme algébrique ou le produit de deux de ces séries est de même nature, c'est-à-dire appartient au même ensemble ou groupe, et que l'intégrale correspondant à cette somme ou produit est la somme ou le produit des deux intégrales correspondant aux deux séries; 2° enfin que, dans un cas étendu, les dérivées formelles d'une quelconque des séries formelles correspondantes, multipliées par une certaine puissance de x, y appartiennent également, l'intégrale correspondante étant la dérivée multipliée par la même puissance de x de l'intégrale correspondant à la série primitive. Il en résultera que toutes les équations algébriques ou différentielles, où n'entrent en

---

(1) Il est bien évident, d'après les mêmes raisonnements, que $\int_0^{\infty}|Q_p(z)|dz$ et $\int_0^{\infty}\left|\frac{d}{dx}Q_p(z)\right|dz$ existent en même temps que $\int_0^{\infty}Q_p(z)dz$ le long des mêmes chemins d'intégration.

dehors des inconnues et de leurs dérivées que des séries convergentes aux environs de x, ne peuvent être satisfaites formellement par des séries du groupe que si les équations, obtenues en remplaçant les séries du groupe par les intégrales correspondantes, le sont par ces intégrales.

On peut d'ailleurs comprendre dans l'ensemble considéré tous les polynomes et toutes les séries convergentes au point $x = 0$, car soit

$$f(x) = \sum_0^\infty \alpha_n x^n$$

l'une d'elles : on aura

$$f(x) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{-1+\frac{1}{p}} \mathrm{F}(zx)\,dz,$$

dont la valeur existe évidemment le long du chemin d'intégration φ et est la même quel que soit φ et p pourvu que $\cos\frac{\varphi}{p} > 0$, ce qu'on suppose. D'ailleurs

$$\mathrm{F}(zx) = \sum \frac{\alpha_n (zx)^n}{\Gamma(pn+1)}$$

est évidemment une fonction entière d'ordre $\leq \frac{1}{p}$, puisqu'ici $\lim\limits_{\alpha=\infty} \alpha_n x^n = 0$.

La somme algébrique de deux séries (p, φ, x) *est une série* (p, φ, x).

C'est évident, car

$$\begin{aligned} &a\int_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{-1+\frac{1}{p}} \mathrm{F}_p(zx)\,dz + b\int_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{-1+\frac{1}{p}} \mathrm{F}_p^{(1)}(zx)\,dz \\ &= \int_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{p}}} [a\mathrm{F}_p(zx) + b\mathrm{F}_p^{(1)}(zx)]\,dz, \end{aligned}$$

et si les deux intégrales du premier membre existent, il en est de même de l'intégrale du second, la série divergente correspondante étant la somme formelle des séries divergentes correspondant aux deux intégrales du premier membre.

Il est bien évident, d'ailleurs, que si ces deux dernières existent absolument, il en est de même de la première ([1]). Nous ne considé-

---

([1]) Nous dirons que $\int_0^\infty \mathrm{Q}_p(z)\,dz$ existe absolument si $\int_0^\infty |\mathrm{Q}_p(z)|\,dz$ existe.

rerons dans la suite que des intégrales (p, φ, x) ayant une existence absolue, ainsi que toutes leurs dérivées en x, multipliées par une certaine puissance de x : c'est le cas des intégrales (p, d, a_0).

C. Q. F. D.

On peut encore établir la propriété suivante :

Si une intégrale (p, φ, x) existe absolument ainsi que toutes ses dérivées pour une valeur donnée x_1 de x, il en est de même pour les valeurs de x de même argument et de module plus petit.

En effet, soit

$$f_p(x) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{F}(zx)\,dz;$$

posons $zx = u$, $x\,dz = du$,

$$f_p(x) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{F}(u)\,\frac{u}{x}\,\frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{1}{p}} \mathrm{F}(u)\,\frac{du}{u}.$$

Les arguments de z et x restant constants par hypothèse, soit

$$\frac{u}{x} = \alpha e^{i\varphi} \qquad (\varphi \text{ constant}, \ \alpha = |x|),$$

$$\mathrm{A} = \left| e^{-\left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{1}{p}} \right| = e^{-\alpha^{\frac{1}{p}}\cos\frac{\varphi}{p}}\,\alpha^{\frac{1}{p}},$$

$$\log \mathrm{A} = -\alpha^{\frac{1}{p}} \cos\frac{\varphi}{p} + \frac{1}{p}\log\alpha,$$

$$\frac{\mathrm{A}'_\alpha}{\mathrm{A}} = -\frac{1}{p}\,\alpha^{\frac{1}{p}-1}\cos\frac{\varphi}{p} + \frac{1}{p\alpha}.$$

On a $\cos\frac{\varphi}{p} > 0$ le long du chemin d'intégration. A'_α est toujours négatif dès que α dépasse une certaine limite λ, fonction de p et φ. Donc, quand α dépasse une certaine limite λ, A est une fonction décroissante de α : prenons $\left|\frac{u}{x_1}\right| \geqq \lambda$, $|u| \geqq \lambda |x_1|$; A est, pour $|u| \geqq \lambda |x_1|$, fonction croissante de $|x|$. Par conséquent, $\int_{\lambda x_1 e^{i\varphi}}^\infty$ a, pour toute valeur de $|x| < |x_1|$, ses éléments inférieurs en module aux éléments correspondants de l'intégrale où l'on fait $x = x_1$, c'est-à-dire que $\int_{\lambda x_1}^{\infty}$ existe absolument pour $|x| < |x_1|$, puisqu'elle existe pour $x = x_1$.

L'existence de l'intégrale $\int_0^{\lambda x_1 e^{i\varphi}}$ est d'ailleurs évidente, puisque celle-ci est égale à

$$\frac{1}{p}\int_0^{\lambda \frac{x_1}{x} e^{i\varphi}} e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{F}(zx)\,dz$$

qui est toujours finie et existe absolument.

Le même raisonnement est applicable aux dérivées.

C. Q. F. D.

Ceci conduit à la propriété suivante :

Toute équation linéaire formelle entre des séries divergentes de même groupe (p, φ, x) est satisfaite identiquement par les intégrales (p, φ, x) correspondant à ces séries, et réciproquement.

En effet, la valeur de la dérivée $n^{\text{ième}}$ pour $x = 0$ d'une intégrale (p, φ, x) est égale à $\alpha_n n!$, c'est-à-dire ne peut être nulle que si $\alpha_n = 0$, et réciproquement. Par conséquent, si la somme algébrique de deux séries du groupe est identiquement nulle, l'intégrale correspondant à cette somme est identiquement nulle, ainsi que toutes ses dérivées, et inversement. C. Q. F. D.

Le produit de deux séries (p, φ, x) est une série (p, φ, x). L'intégrale (p, φ, x) correspondant à cette dernière est le produit des intégrales (p, φ, x) correspondant aux deux premières.

La marche à suivre est, à très peu près, celle qu'a indiquée M. Borel *pour les chemins d'intégration réels* quand $p = 1$.

Soit

$$u = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{F}(zx)\,dx,$$

$$v = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-y^{\frac{1}{p}}} y^{\frac{1}{p}-1} \mathrm{F}_1(zy)\,dy,$$

avec

$$\mathrm{F}(x) = \sum \frac{\alpha_n x^n}{\Gamma(pn+1)}, \qquad \mathrm{F}_1(y) = \sum \frac{\beta_\nu y^\nu}{\Gamma(p\nu+1)}.$$

On forme le produit uv; l'on pose $x = \rho e^{i\varphi}$, $y = \rho_1 e^{i\varphi}$:

$$uv = \frac{1}{p^2}\int_0^\infty \int_0^\infty (P + Qi)\, d\rho\, d\rho_1.$$

Le changement de variables

$$\rho^{\frac{1}{p}} + \rho_1^{\frac{1}{p}} = a,$$
$$\rho^{\frac{1}{p}} - \rho_1^{\frac{1}{p}} = b$$

donne

$$uv = \frac{1}{p^2}\int\int (P + Qi)\,|J|\, da\, db \qquad \text{(J jacobien)},$$

$$uv = e^{\frac{2i\varphi}{p}} \int_0^\infty e^{-ae^{\frac{i\varphi}{p}}}\, w(a)\, da,$$

si

$$w(a) = \int_{-a}^{+a} FF_1 \frac{db}{2},$$

$$F = \sum_0^\infty{}_n \left[z\left(\frac{a+b}{2}\right)^p e^{i\varphi}\right]^n \frac{\alpha_n}{\Gamma(pn+1)},$$

$$F_1 = \sum_0^\infty{}_\nu \left[z\left(\frac{a-b}{2}\right)^p e^{i\varphi}\right]^\nu \frac{\beta_\nu}{\Gamma(p\nu+1)}.$$

L'utilisation de la formule

$$\int_{-1}^{+1} (1-\zeta)^{\varpi-1}(1+\zeta)^{\chi-1} \frac{d\zeta}{2^{\varpi+\chi-1}} = B(\varpi, \chi) = \frac{\Gamma(\varpi)\Gamma(\chi)}{\Gamma(\varpi+\chi)}$$

donne alors, pour le terme général de $w(a)$, la valeur

$$\frac{\alpha_n \beta_\nu z^{n+\nu} e^{i\varphi(n+\nu)} a^{pn+p\nu+1}}{\Gamma(pn+p\nu+2)}.$$

Considérant la somme des termes pour lesquels $n + \nu = n_1$, on obtient dans $w(a)$ le terme général

$$\gamma_{n_1} \frac{z^{n_1} e^{i\varphi n_1} a^{pn_1+1}}{\Gamma(pn_1+2)},$$

en posant $\gamma_{n_1} = \Sigma \alpha_n \beta_\nu$.

Donc

$$uv = e^{\frac{2i\varphi}{p}} \int_0^\infty e^{-ae^{\frac{i\varphi}{p}}} \sum_0^\infty \frac{z^{n_1} e^{i\varphi n_1} a^{pn_1+1}}{\Gamma(pn_1+2)} \gamma_{n_1}\, da.$$

Il résulte d'ailleurs des mêmes raisonnements que l'intégrale du second membre existe absolument en même temps que u et v.

Considérons alors

$$w = e^{\frac{2i\varphi}{p}} \int_0^{\infty} e^{-ae^{\frac{i\varphi}{p}}} w(a)\, da.$$

On a

$$\left[e^{-ae^{\frac{i\varphi}{p}}} w(a) \right]' = - e^{\frac{i\varphi}{p}} e^{-ae^{\frac{i\varphi}{p}}} w(a) + e^{-ae^{\frac{i\varphi}{p}}} w'(a),$$

et, en intégrant,

$$\left[e^{-ae^{\frac{i\varphi}{p}}} w(a) \right]_0^{\infty} = - w(0) = 0,$$

car $w(a)$ contient a en facteur et $\cos\frac{\varphi}{p}$ est > 0, par suite

$$w = e^{\frac{i\varphi}{p}} \int_0^{\infty} e^{-ae^{\frac{i\varphi}{p}}} w'(a)\, da.$$

Cette intégrale existe *a fortiori* absolument si u et v existent absolument.

Posant enfin

$$a = \sigma^{\frac{1}{p}}, \qquad da = \frac{1}{p}\, \sigma^{\frac{1}{p}-1}\, d\sigma,$$

on a

$$w = \frac{e^{\frac{i\varphi}{p}}}{p} \int_0^{\infty} e^{-(\sigma e^{i\varphi})^{\frac{1}{p}}} \sigma^{\frac{1}{p}-1}\, d\sigma \sum_0^{\infty} \frac{(z\sigma)^{n_1} e^{i\varphi n_1}}{\Gamma(pn_1+1)} \gamma_{n_1},$$

ou, enfin, si

$$\sigma e^{i\varphi} = X,$$

$$w = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-X^{\frac{1}{p}}} X^{\frac{1}{p}-1}\, dX \sum_0^{\infty} \frac{\gamma_{n_1}(zX)^{n_1}}{\Gamma(pn_1+1)},$$

l'intégrale étant prise le long du chemin φ.

Ainsi le produit uv est égal à une intégrale qui existe et qui, d'après sa forme, est une intégrale (p, φ, x); de plus, la série divergente *correspondante est le produit des deux séries correspondant à u et v; si u et v existent absolument, w existe absolument* [1].

Nous pouvons déjà conclure :

La somme, la différence et le produit de deux séries (p, φ, x) sont des séries (p, φ, x). Toute équation, algébrique par rapport aux inconnues, à laquelle satisfont formellement une ou plusieurs de ces séries, et dont

---

(1) Il convient de vérifier directement que la série $\sum \frac{\gamma_{n_1} z^{n_1}}{\Gamma(pn_1+1)}$ est convergente, bien que cela résulte de nos raisonnements. Or,

$$\gamma_{n_1} = \alpha_{n_1}\beta_0 + \alpha_{n_1-1}\beta_1 + \ldots.$$

Supposons que $\sum \frac{\alpha_n z^n}{\Gamma(pn+1)}$, $\sum \frac{\beta_\nu z^\nu}{\Gamma(p\nu+1)}$ soient d'ordre apparent $\leqq \rho$: On a

$$\frac{|\alpha_n|}{\Gamma(pn+1)} < \frac{k}{(n!)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}}, \qquad \frac{|\beta_\nu|}{\Gamma(p\nu+1)} < \frac{l}{(\nu!)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}},$$

k et l étant des entiers fixes suffisamment grands, et l'on peut toujours supposer $p\rho \geqq 1$. Dès lors,

$$\frac{\gamma_{n_1}}{\Gamma(pn_1+1)} < \sum \frac{\Gamma(pn+1)\,\Gamma(p\nu+1)}{\Gamma(pn_1+1)\,(n!)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}(\nu!)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}}\,kl.$$

Il s'agit de prouver que le second membre est

$$< \frac{n_1^{\lambda}}{(n_1!)^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon}} \qquad (\lambda \text{ fini}),$$

quand n_1 est assez grand, ou, puisque le second membre comprend au plus n_1+1 termes, que l'un quelconque d'entre eux est $<$ la $(n_1+1)^{\text{ième}}$ partie de cette dernière expression, c'est-à-dire que

$$\lambda_2\left(\frac{n_1}{e}\right)^{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)}\left(\frac{pn}{e}\right)^{pn+\frac{1}{2}}\left(\frac{p\nu}{e}\right)^{p\nu+\frac{1}{2}}$$
$$< \left(\frac{pn_1}{e}\right)^{pn_1+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)} n_1^{\lambda_1}$$

(λ_2 constante finie).

Or, 'exposant de $\frac{1}{e}$ est, si l'on fait tout passer dans le premier membre,

$$\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)+pn+\frac{1}{2}+p\nu+\frac{1}{2}-\left(pn_1+\frac{1}{2}\right)$$
$$-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right) = \text{const.}$$

les coefficients sont des séries convergentes aux environs du point $x = 0$, est vérifiée par les intégrales (p, φ, x) qui leur correspondent.

Enfin [1] :

Soit $x^k \dfrac{d}{dx^k}(\Sigma \alpha_n x^n)$ la dérivée formelle k^{ieme} de la série $\Sigma \alpha_n x^n$ appar-

---

Il suffit donc

$$n_1^{\lambda_3}(n+\nu)^{\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)}(pn)^{pn+\frac{1}{2}}(p\nu)^{p\nu+\frac{1}{2}}$$

$$< [p(n+\nu)]^{pn+p\nu+\frac{1}{2}}\left(n^{n+\frac{1}{2}}\nu^{\nu+\frac{1}{2}}\right)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)}$$

(λ_3 constante convenable),

enfin

$$n_1^{\lambda_4} n^{pn+\frac{1}{2}-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)}\nu^{p\nu+\frac{1}{2}-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)}$$

$$< (n+\nu)^{pn+p\nu+\frac{1}{2}-\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)}.$$

D'après

$$n^{pn-n\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)}\nu^{p\nu-\nu\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)} < (n+\nu)^{pn+p\nu-(n+\nu)\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)},$$

on peut toujours, quand $p\rho \geq 1$, trouver une valeur de λ_4 finie et telle que l'inégalite précédente ait lieu. Donc $\sum \dfrac{\gamma_{n_1} z^{n_1}}{\Gamma(pn_1+1)}$ est une fonction entière d'ordre $\leqq \rho$.

Nous n'établissons pas ici que $\sum \dfrac{\gamma_{n_1} z^{n_1}}{\Gamma(pn_1+1)}$ soit une fonction entière d'ordre apparent supérieur à l'ordre réel. Ce serait là une question bien intéressante à élucider, car il pourrait en résulter en tout cas une propriété très curieuse de ces fonctions. Si cette fonction avait son ordre apparent égal à son ordre réel, on en conclurait dans tout un secteur du plan des z comme limite supérieure de son module $e^{|z|^{\frac{1}{p}}}$.

Réciproquement, si une fonction entière F a $e^{|z|^{\frac{1}{p}-\varepsilon}}$ (ε fini positif) comme limite supérieure de son module dans un secteur convenable du plan des z, l'intégrale (14) correspondante a une valeur. On est conduit ainsi à envisager le problème suivant :

Connaissant la loi de croissance des coefficients d'une fonction entière de genre fini, reconnaître si l'ordre apparent est inférieur à l'ordre réel dans un secteur du plan des z.

Nous savons, d'après ce qui a été dit antérieurement, qu'il y a effectivement des fonctions entières de cette nature ($\sin \pi z$, par exemple) auxquelles correspondent des séries divergentes appartenant à l'ensemble (p, φ, x). *Comp.* note (1), p. 506.

(1) Il résulte encore de ce qui précède que le produit de deux séries (p, d, a_0) est une série (p, φ, x); on pourra dire que les séries (p, d, a_0) engendrent par addition, soustraction ou multiplication, un groupe que nous appellerons le groupe (p, d, a_0). Il en sera de même des intégrales correspondantes, ce qui constitue une propriété remarquable de ces intégrales.

tenant au groupe (p, d, a_0); *si l'intégrale* (p, φ, x) *correspondant à cette dernière existe absolument, à* $x^k \dfrac{d}{dx^k}(\Sigma\alpha_n x^n)$ *correspond une intégrale* (p, φ, x) *qui existe absolument et est le produit par* x^k *de la dérivée* $k^{\text{ième}}$ *de la première intégrale.*

Soit d'abord

$$f(x) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{\frac{1}{p}-1}\,\mathrm{F}(zx)\,dz,$$

F (z) étant d'ordre apparent d supérieur à l'ordre réel; on a

$$\delta f(x) = xf'(x) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{\frac{1}{p}-1}(zx)\,\mathrm{F}'(zx)\,dz \text{ (1)},$$

$$z\mathrm{F}'(z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha_n n}{\Gamma(pn+1)} z^n,$$

et $xf'(x)$ est l'intégrale correspondant à $z\mathrm{F}'(z)$.

$\Bigg($Ceci, toutefois, n'établit pas que $f'(x)$ soit la valeur de l'intégrale correspondant à $\dfrac{d}{dx}\sum\limits_0^\infty \alpha_n x^n.\Bigg)$

Passons aux dérivées secondes; on aura

$$x[xf'(x)]' = \delta[xf'(x)] = x^2 f''(x) + xf'(x);$$

l'intégrale correspondante existe absolument ainsi que $xf'(x)$, par suite aussi $x^2 f''(x) = \delta^2 f$; de même pour $\delta^{(k)} f = x^k f^{(k)}(x)$.

Soit alors

$$w = u u_1 u_2 \ldots$$

le produit de θ intégrales (p, d, a_0); d'après

$$xw' = (xu')\,u_1 u_2 \ldots + (xu'_1)\,u u_2 \ldots + \ldots,$$

la même propriété s'étend à xw'; puis à $x^2 w''$; et ainsi de suite (2).

C. Q. F. D.

---

(1) Cette intégrale existe ici absolument d'après ce que nous avons vu pour $f'(x)$.

(2) On peut évidemment l'étendre à tous nos ensembles (p, φ, x), pourvu que l'on suppose *a priori* que les dérivées $k^{\text{ièmes}}$ des intégrales correspondantes multipliées par x^k appartiennent à cet ensemble.

Étant donnée alors une équation différentielle dont les coefficients sont des séries convergentes aux environs de x, on pourra toujours y remplacer y' par $\frac{\partial y}{x}$, y'' par $\frac{\partial^2 y}{x^2}$, etc. (de même s'il y entre d'autres fonctions Y, etc.), chasser les dénominateurs et obtenir une équation analogue dont les coefficients sont encore des séries convergentes aux environs de x : il résulte de ce qui précède que, si $\Sigma \alpha_n x^n$ est une solution formelle de cette équation, l'intégrale correspondante en est aussi une solution, et réciproquement. Nous concluons :

Théorème. — *Soit l'intégrale*

$$f(x) = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-z^{\frac{1}{p}}} z^{\frac{1}{p}-1} F(zx)\,dz$$

prise le long d'une droite faisant avec l'axe OX, *dans le plan des* z, *un angle* φ *convenable (qui peut dépendre de* x*),* F (z) *étant une fonction entière d'ordre réel inférieur à son ordre apparent* d *qui est forcément entier.*

Soient encore

$$F(z) = \sum_0^{\infty}{}_n \frac{\alpha_n z^n}{\Gamma(pn+1)} = e^{R_p(z)}\Phi_p(z)$$

| $\Phi_p(z)$ *fonction entière d'ordre fini inférieur à* d, $R_p(z) = a_0 z^d + \ldots$ *polynome de degré* d *| et la série* $\sum_0^{\infty} \alpha_n x^n$, *divergente quand* $pd > 1$ (¹).

L'ensemble des intégrales $f(x)$ *correspondant à une même valeur de* p, d, a_0 *engendre par addition, soustraction ou multiplication, un groupe* (p, d, a_0) *d'intégrales* (p, φ, x) *de la même forme que* $f(x)$, *où* F(x) *est encore une fonction entière, mais a peut-être ses ordres apparents et réels égaux. A chacune des intégrales* (p, φ, x) *correspond une série* $\sum_0^{\infty} \alpha_n z^n$.

(¹) Le cas où $pd = 1$ donne lieu à un énoncé analogue, mais avec des réserves en ce qui concerne x.

Si une série de cette nature est solution formelle d'une équation différentielle dont les coefficients en x sont des séries convergentes [1] *aux environs du point $x = x_0$, l'intégrale (p, φ, x) correspondante est solution de l'équation différentielle; et réciproquement.*

(1) Il ne s'agit ici que de séries de Maclaurin.

(11 avril 1902.)