ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. LEBESGUE

Sur les séries trigonométriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 20 (1903), p. 453-485

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__453_0>

SUR LES

SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES,

Par M. H. LEBESGUE.

En m'occupant des séries trigonométriques, j'ai eu surtout pour but de montrer l'utilité que pouvait avoir, dans l'étude des fonctions discontinues de variable réelle, la notion d'intégrale que j'ai introduite dans ma Thèse. Je rappelle d'abord les principales définitions et propriétés relatives à cette intégrale (¹).

Un ensemble linéaire de points e étant donné, on peut enfermer ses points dans un nombre fini ou dans une infinité dénombrable d'intervalles; à chaque système d'intervalles choisi correspond un nombre, la somme des longueurs de ces intervalles; la limite inférieure de ces nombres est la mesure extérieure $m_e(e)$ de e. Si e est compris dans AB et si e_1 est le complémentaire de e par rapport à AB, la mesure intérieure de e est, par définition,

$$m_i(e) = \text{long.}(\text{AB}) - m_e(e_1).$$

Les ensembles pour lesquels $m_i(e) = m_e(e)$ sont dits *mesurables* et de mesure $m(e) = m_i(e) = m_e(e)$. La mesure ainsi définie jouit de beaucoup des propriétés des longueurs; en particulier, quand on ajoute des ensembles sans point commun, les mesures s'ajoutent également.

(¹) Pour les démonstrations on pourra se reporter à ma Thèse parue dans les *Annali di Matematica*, 1902 : Intégrale, longueur, aire.

Une fonction f est dite *sommable* si, quels que soient a et b, l'ensemble des valeurs de x, pour lesquelles on a $a \leqq f < b$, est mesurable. Toutes les limites de fonctions continues sont sommables.

Si f est une fonction sommable et bornée qui varie entre l et L, on peut lui attacher une intégrale de la manière suivante. Prenons

$$l_0 = l < l_1 < l_2 < \ldots < l_{p-1} < l_p = \mathrm{L},$$

et soit $e_i (i = 0, 1, 2, \ldots, p)$ l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a

$$l_i \leqq f < l_{i+1}.$$

La somme

$$\sum_0^p l_i m(e_i)$$

tend vers une limite déterminée quand p augmente indéfiniment et que $l_{i+1} - l_i$ tend uniformément vers zéro. Ce nombre est l'intégrale de f dans l'intervalle positif (a, b), $(a < b)$; on la note

$$\int_a^b f\,dx.$$

Pour compléter la définition, on pose

$$\int_a^b + \int_b^a = 0.$$

L'intégrale ainsi définie jouit de beaucoup des propriétés de l'intégrale au sens de Riemann; on a, en particulier,

$$\int f + \varphi = \int f + \int \varphi,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{K} \int_{\frac{a}{\mathrm{K}}}^{\frac{b}{\mathrm{K}}} f(\mathrm{K}x)\,dx.$$

Relativement au calcul des intégrales on peut énoncer cette propriété : Si l'on a, quel que soit x,

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x),$$

et si, quels que soient n et x,

$$|f_n(x)| < \mathrm{M},$$

où M est un nombre fini déterminé, on a aussi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

A certaines fonctions non bornées, mais sommables, il est possible d'attacher une intégrale par un procédé analogue. Les nombres l_i qu'il faut choisir sont échelonnés de $-\infty$ à $+\infty$ en nombre infini et tels que $l_{i+1} - l_i$ soit borné. Si alors la série $\sum l_i m(e_i)$ est convergente, elle tend vers une limite déterminée quand les $l_{i+1} - l_i$ tendent vers zéro; c'est l'intégrale. Il faut remarquer que si f a une intégrale, $|f|$ en a une aussi.

Supposons que f n'ait pas d'intégrale, mais que, dans chaque intervalle, en existe un autre où f ait une intégrale, alors il se peut qu'il existe une fonction F et une seule à une constante additive près, telle que l'on ait

$$\int_a^b f\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a),$$

pour tous les intervalles (a, b) où le premier membre a un sens. S'il en est ainsi, on dit que f admet F pour intégrale indéfinie. On voit facilement que, pour qu'il existe une intégrale indéfinie, il faut qu'il existe une fonction F vérifiant l'égalité précédente, et que les valeurs de x, qui ne peuvent être comprises dans un intervalle (a, b) sans que, dans cet intervalle, $f(x)$ n'ait pas d'intégrale, forment un ensemble réductible.

Lorsqu'il existe une intégrale indéfinie, nous appellerons *intégrale définie dans* (a, b) *calculée à l'aide des intégrales indéfinies,* la quantité

$$\mathrm{I}_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Aux fonctions de plusieurs variables on peut attacher des intégrales par des procédés analogues à ceux qui servent pour les fonctions d'une variable. Le calcul de ces intégrales multiples se ramène à des calculs d'intégrales simples dans des cas étendus et, en particulier, quand il s'agit de fonctions bornées limites de fonctions continues.

Dans ma Thèse j'ai fait deux applications de la notion d'intégrale. J'ai montré que, pour toutes les fonctions bornées, l'intégration permettait la recherche des fonctions primitives; j'ai montré qu'il était possible de représenter par une intégrale la longueur de toute courbe rectifiable ayant des tangentes. Je vais appliquer ici la notion d'intégrale à l'étude du développement trigonométrique des fonctions non intégrables au sens de Riemann.

Parmi les méthodes qui ont été employées pour l'étude des séries trigonométriques, la seule qui puisse s'appliquer à ces fonctions est celle de Riemann. Mais cette méthode n'a conduit jusqu'ici qu'à deux ou trois propriétés générales et en particulier au théorème de Cantor sur l'impossibilité de deux développements pour la même fonction. Toutes les fois qu'il s'est agi d'obtenir des conditions suffisantes précises pour la possibilité du développement trigonométrique d'une fonction, Riemann, ainsi que tous les auteurs qui se sont occupés de la question, se restreint à l'étude des séries de Fourier. C'est déjà un champ d'étude très vaste, car il résulte des travaux de Dini, d'Ascoli, qu'une fonction continue ne peut être représentée trigonométriquement qu'à l'aide d'une série de Fourier. P. du Bois-Reymond, à l'aide de considérations qui ne sont peut-être pas à l'abri de toute critique, a étendu le même théorème aux fonctions intégrables au sens de Riemann. La recherche de conditions suffisantes pour la possibilité du développement trigonométrique des fonctions non intégrables, au sens de Riemann, n'a pas encore été abordée à cause de l'ignorance où l'on se trouvait de la forme des coefficients du développement de ces fonctions.

La première proposition que je démontre est la suivante : *Pour toute fonction bornée, le développement ne peut être que celui de Fourier*, où les intégrales ont le sens indiqué plus haut. Maintenant que l'on connaît la forme des coefficients, on peut espérer étudier la convergence du développement par les méthodes ordinaires. Et, en effet, il m'a suffi de modifier très peu des raisonnements précédemment employés pour trouver des cas de convergence assez étendus. Cela m'a permis de donner un exemple de fonction, non intégrable au sens de

Riemann, et cependant représentable par une série trigonométrique toujours convergente.

Les cas de convergence que j'ai obtenus pourraient être déduits des théorèmes généraux de Riemann, mais il est plus simple de faire la remarque suivante. En étudiant les développements relatifs à des fonctions non bornées, Riemann observe incidemment que l'étude de la convergence vers $f(\varphi)$ de la somme des n premiers termes du développement de Fourier

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\pi-\frac{\varphi}{2}} f(\varphi+2t)\frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,dt$$

revient à l'étude de la convergence vers zéro de

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{+\frac{\varphi}{2}} \frac{f(\varphi+2t)-f(\varphi)}{\sin t}\sin(2m+1)t\,dt,$$

c'est-à-dire à l'étude de la convergence vers zéro des coefficients de la série de Fourier relative à $\frac{f(\varphi+2t)-f(\varphi)}{\sin t}$. Or Riemann a donné le moyen d'étudier cette convergence, de là on déduit des cas étendus où le développement trigonométrique est possible. Cette méthode, qui n'est au fond pas très différente de celle qu'emploie M. Dini dans son Ouvrage sur les séries de Fourier, a été employée récemment par M. P. Stackel ([1]).

La même méthode s'applique avantageusement à l'étude des conditions de convergence de Dirichlet, de Jordan, de Lipschitz-Dini ([2]); je ne m'en occuperai pas ici.

Les caractères de convergence que j'ai obtenus se trouvent tous dans l'Ouvrage de M. Dini, mais la généralisation de la notion d'intégrale permet de donner un sens plus étendu à leurs énoncés.

([1]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, février 1902.

([2]) $\lim_{\delta=0}[f(x+\delta)-f(x)]\mathrm{L}|\delta| = 0.$

I.

Considérons un développement trigonométrique convergent pour toutes les valeurs de la variable

$$f(\varphi) = a_0 + \sum (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \tag{1}$$

M. G. Cantor a démontré que a_n et b_n tendaient vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On peut alors définir une fonction continue par l'égalité

$$F(\varphi) = \frac{a_0}{2}\varphi^2 - \sum \frac{1}{n^2}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Riemann a démontré que f et F étaient liées par la relation

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(\varphi+\alpha) + F(\varphi-\alpha) - 2F(\varphi)}{\alpha^2} = f(\varphi).$$

On peut aussi attacher à $f(\varphi)$ la fonction harmonique

$$f(\varphi, r) = a_0 + \sum r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Nous allons d'abord démontrer deux propositions concernant $F(\varphi)$ et $f(\varphi, r)$.

Relativement à $F(\varphi)$ on peut trouver une propriété analogue au théorème des accroissements finis : *La quantité*

$$\frac{F(\varphi_0+\alpha_0) + F(\varphi_0-\alpha_0) - 2F(\varphi_0)}{\alpha_0^2} = \frac{\Delta^2 F(\varphi_0)}{\alpha_0^2}$$

est comprise entre les limites inférieure et supérieure de $f(\varphi)$ dans l'intervalle $(\varphi_0 - \alpha_0, \varphi_0 + \alpha_0)$.

Formons la différence

$$\begin{aligned} A(\varphi) = F(\varphi) &- \frac{1}{2}\frac{\Delta^2 F(\varphi_0)}{\alpha_0^2}(\varphi - \varphi_0)^2 \\ &- \frac{F(\varphi_0+\alpha_0) - F(\varphi_0-\alpha_0)}{2\alpha_0}(\varphi-\varphi_0) - F(\varphi_0) = F(\varphi) - B(\varphi). \end{aligned}$$

$A(\varphi)$ s'annule pour $\varphi_0 - \alpha_0$, φ_0, $\varphi_0 + \alpha_0$; c'est une fonction continue, donc $A(\varphi)$ atteint son maximum pour une valeur φ_1 *intérieure* à l'intervalle $(\varphi_0 - \alpha_0, \varphi_0 + \alpha_0)$, on peut d'ailleurs avoir $\varphi_1 = \varphi_0$.

$$\frac{\Delta^2 A(\varphi_1)}{\alpha^2} = \frac{[A(\varphi_1 + \alpha) - A(\varphi_1)] + [A(\varphi_1 - \alpha) - A(\varphi_1)]}{\alpha^2},$$

$\dfrac{\Delta^2 A(\varphi_1)}{\alpha^2}$ est donc une quantité positive ou nulle dès que α est assez petit pour que $\varphi_1 - \alpha$ et $\varphi_1 + \alpha$ soient entre $\varphi_0 - \alpha_0$ et $\varphi_0 + \alpha_0$. Et, comme l'on a

$$\frac{\Delta^2 A(\varphi)}{\alpha^2} = \frac{\Delta^2 F(\varphi)}{\alpha^2} - \frac{\Delta^2 B(\varphi)}{\alpha^2} = \frac{\Delta^2 F(\varphi)}{\alpha^2} - \frac{\Delta^2 F(\varphi_0)}{\alpha_0^2},$$

on en déduit

$$\frac{\Delta^2 F(\varphi_1)}{\alpha^2} = \frac{\Delta^2 F(\varphi_0)}{\alpha_0^2} + \frac{\Delta^2 A(\varphi_1)}{\alpha^2} \geqq \frac{\Delta^2 F(\varphi_0)}{\alpha_0^2},$$

pour α assez petit; par suite

$$f(\varphi_1) = \lim_{\alpha=0} \frac{\Delta^2 F(\varphi_1)}{\alpha^2} \geqq \frac{\Delta^2 F(\varphi_0)}{\alpha_0^2}.$$

$\dfrac{\Delta^2 F(\varphi_0)}{\alpha_0^2}$ est donc au plus égale à la limite supérieure de $f(\varphi)$ dans $(\varphi_0 - \alpha_0, \varphi_0 + \alpha_0)$; on démontrerait de même la seconde partie de la proposition.

La deuxième propriété que nous avons à démontrer est la suivante : *les limites inférieure et supérieure de $f(\varphi)$, m et M, sont aussi celles, pour $r \leqq 1$, de $f(\varphi, r)$.* Cette propriété est bien connue dans le cas où $f(\varphi)$ est continue; pour la démontrer dans le cas général, considérons la fonction harmonique

$$D(\varphi, r) = -\sum \frac{r^n}{n^2}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

et formons $\dfrac{\Delta^2 D(\varphi, r)}{\alpha^2}$. Pour α constant, c'est une fonction harmonique qui se réduit à $\dfrac{\Delta^2 D(\varphi, 1)}{\alpha^2}$ pour $r = 1$; donc, quand α, φ, r varient, les limites inférieure et supérieure de $\dfrac{\Delta^2 D(\varphi, r)}{\alpha^2}$ sont celles de $\dfrac{\Delta^2 D(\varphi, 1)}{\alpha^2}$.

Or

$$\frac{\Delta^2 D(\varphi, 1)}{\alpha^2} = \frac{\Delta^2\left[F(\varphi) - \frac{a_0}{2}\varphi^2\right]}{\alpha^2} = \frac{\Delta^2 F(\varphi)}{\alpha^2} - a_0,$$

donc les limites inférieure et supérieure de $\frac{\Delta^2 D(\varphi, r)}{\alpha^2}$ sont $m - a_0$ et $M - a_0$. Le théorème de Riemann donne

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\Delta^2 D(\varphi, r)}{\alpha^2} = f(\varphi, r) - a_0,$$

et $f(\varphi, r)$ reste comprise entre m et M.

Ce résultat peut s'énoncer ainsi : *Si la partie réelle d'une série de Taylor est convergente sur le cercle de convergence et a une somme inférieure à* M (*ou supérieure à* m), *elle a aussi une somme inférieure à* M (*ou supérieure à* m) *à l'intérieur du cercle de convergence.*

Ces propositions démontrées, il est facile d'obtenir les coefficients du développement (1) dans le cas où $f(\varphi)$ est bornée.

Remarquons d'abord que $f(\varphi)$ étant la limite d'une suite de fonctions continues est sommable, donc, puisque $f(\varphi)$ est bornée, $f(\varphi)$ a une intégrale au sens généralisé du mot.

Donnons maintenant à r des valeurs $r_1, r_2, \ldots$ qui tendent vers 1; pour chaque valeur de φ, $f(\varphi)$ est la limite pour i infini de $f(\varphi, r_i)$ et les différences $f(\varphi) - f(\varphi, r_i)$ sont, en valeur absolue, quels que soient φ et i, inférieures à un nombre fixe. Nous sommes donc dans les conditions où l'on peut appliquer le théorème sur l'intégration qui a été énoncé précédemment; en remarquant que la série qui donne $f(\varphi, r_i)$ est uniformément convergente et par suite peut être intégrée terme à terme, on obtient

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = \lim_{i=\infty} \int_0^{2\pi} f(\varphi, r_i)\, d\varphi = 2\pi a_0,$$

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi = \lim_{i=\infty} \int_0^{2\pi} f(\varphi, r_i) \cos n\varphi\, d\varphi = \lim_{i=\infty} \pi a_n r_i^n = \pi a_n,$$

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi\, d\varphi = \lim_{i=\infty} \int_0^{2\pi} f(\varphi, r_i) \sin n\varphi\, d\varphi = \lim_{i=\infty} \pi b_n r_i^n = \pi b_n.$$

Si une fonction bornée admet un développement trigonométrique va-

lable pour toutes les valeurs de la variable, c'est celui dont les coefficients s'obtiennent par les formules d'Euler et Fourier; les intégrales qui figurent dans ces formules étant des intégrales au sens généralisé du mot et non nécessairement des intégrales au sens de Riemann.

On peut arriver au résultat précédent par une autre méthode plus voisine de celles de Dini, Ascoli et P. du Bois-Reymond. C'est la méthode employée par Riemann et qui consiste à déterminer les coefficients du développement de $f(\varphi)$ en fonction de $F(\varphi)$. Reprenons l'égalité

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\Delta^2 F(\varphi)}{\alpha^2} = \lim_{\alpha=0} \frac{F(\varphi+\alpha)+F(\varphi-\alpha)-2F(\varphi)}{\alpha^2} = f(\varphi),$$

et remarquons que, si $f(\varphi)$ est bornée, les deux membres sont bornés, quels que soient φ et α, de sorte qu'on peut intégrer membre à membre l'égalité précédente. En l'intégrant deux fois de suite et en appelant F_1 et F_2 deux fonctions primitives successives de F, on a

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F_1(\varphi+\alpha)+F_1(\varphi-\alpha)-2F_1(\varphi)-F_1(\alpha)-F_1(-\alpha)+2F_1(o)}{\alpha^2}$$
$$= \lim_{\alpha=0} \frac{\Delta^2[F_1(\varphi)-F_1(o)]}{\alpha^2} = \int_0^\varphi f(\theta)\,d\theta,$$
$$\lim_{\alpha=0}\left[\frac{\Delta^2 F_2(\varphi)}{\alpha^2} - \frac{\Delta^2 F_2(o)}{\alpha^2} - \frac{\Delta^2 F_1(o)}{\alpha^2}\varphi\right] = \int_0^\varphi \int_0^\theta f(t)\,dt\,d\theta.$$

D'ailleurs, puisque F_2 admet F pour dérivée seconde, ceci s'écrit

$$F(\varphi)-F(o)-\varphi \lim_{\alpha=0} \frac{\Delta^2 F_1(o)}{\alpha^2} = \int_0^\varphi \int_0^\theta f(t)\,dt\,d\theta,$$

et, par suite,

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \int_0^\theta f(t)\,dt\,d\theta + A\varphi + B,$$

A et B étant deux constantes.

Appliquons maintenant le procédé de Fourier à la détermination des coefficients du développement de $F(\varphi) - \frac{a_0}{2}\varphi^2$; on trouve ainsi

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\varphi}\int_{t=0}^{t=\theta} f(t)\,dt\,d\theta\,d\varphi - \frac{4a_0\pi^3}{3} + 2A\pi^2 + 2B\pi,\\
-\frac{a_n}{n^2} &= \frac{1}{\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\varphi}\int_{t=0}^{t=\theta} f(t)\cos n\varphi\,dt\,d\theta\,d\varphi - \frac{2a_0}{n^2},\\
-\frac{b_n}{n^2} &= \frac{1}{\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\varphi}\int_{t=0}^{t=\theta} f(t)\sin n\varphi\,dt\,d\theta\,d\varphi + \frac{2\pi a_0}{n} - \frac{2A}{n}.
\end{aligned}$$

Pour transformer ces égalités il suffit de se servir de la notion d'intégrale triple. La fonction $f(t)$ étant limite de fonctions continues, on peut appliquer aux intégrales précédentes les procédés de transformation qu'on emploie ordinairement pour les fonctions continues. On voit ainsi que les trois intégrales précédentes sont respectivement égales aux intégrales des fonctions

$$f(t), \quad f(t)\cos n\varphi, \quad f(t)\sin n\varphi,$$

ces intégrales étant étendues à l'ensemble des points du tétraèdre défini par les inégalités

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \varphi, \qquad 0 \leqq t \leqq \theta.$$

Or ces intégrales triples peuvent se remplacer par les intégrales simples suivantes :

$$\begin{aligned}
&\int_{t=0}^{t=2\pi}\int_{\theta=t}^{\theta=2\pi}\int_{\varphi=\theta}^{\varphi=2\pi} f(t)\,d\varphi\,d\theta\,dt,\\
&\int_{t=0}^{t=2\pi}\int_{\theta=t}^{\theta=2\pi}\int_{\varphi=\theta}^{\varphi=2\pi} f(t)\cos n\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dt,\\
&\int_{t=0}^{t=2\pi}\int_{\theta=t}^{\theta=2\pi}\int_{\varphi=\theta}^{\varphi=2\pi} f(t)\sin n\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dt.
\end{aligned}$$

Dans ces trois expressions, les intégrations, par rapport à φ et θ, s'effectuent immédiatement, ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} f(t)\left(2\pi^2 - 2\pi t + \frac{t^2}{2}\right)dt,\\
&\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} f(t)\,(1-\cos nt)\,dt,\\
-&\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(t)\left(2\pi - t + \frac{\sin nt}{n}\right)dt.
\end{aligned}$$

Transportons ces expressions dans les formules précédentes, on obtient

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt + 2\left[a_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\right],$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt - n\left[2\pi a_0 - 2\mathrm{A} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t)\,dt\right],$$

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t)\left(2\pi^2 - 2\pi t + \frac{t^2}{2}\right)dt - \frac{4}{3}a_0\pi^3 + 2\mathrm{A}\pi^2 + 2\mathrm{B}\pi.$$

Cela peut s'écrire

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \mathrm{K}_1\right],$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt + \mathrm{K}_1\right],$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt + n\mathrm{K}_2\right],$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes. Soient a'_n, b'_n, K'_1, K'_2 les éléments, correspondant à a_n, b_n K_1, K_2, relatifs à la fonction $f(t'+\alpha)$. On a

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_\alpha^{2\pi+\alpha} f(t)\cos nt'\,dt + \mathrm{K}'_1\right]$$

et aussi

$$a'_n \cos nt' + b'_n \sin nt' = a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Cette relation, avec $t = t' + \alpha$, donne

$$a'_n = a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha.$$

En remplaçant a_n, b_n par leur valeur, on a

$$\begin{aligned}
a'_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_\alpha^{2\pi+\alpha} f(t)\cos nt'\,dt + \mathrm{K}'_1\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(t)(\cos nt\cos n\alpha + \sin nt\sin n\alpha)\,dt + \mathrm{K}_1\cos n\alpha + n\mathrm{K}_2\sin n\alpha\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt'\,dt + \mathrm{K}_1\cos n\alpha + n\mathrm{K}_2\sin n\alpha\right],
\end{aligned}$$

$f(t)$ étant périodique, les intégrales qui figurent dans les deux membres de ces égalités ont les mêmes valeurs, et l'on a

$$K'_1 = K_1 \cos n\alpha + n K_2 \sin n\alpha,$$

d'où

$$K_1 = 0, \qquad K_2 = 0,$$

puisque K'_1 est constant avec α.

Cela démontre la proposition.

Mais nous avons de plus les valeurs de A et B

$$-2A = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t)\,dt - 2\pi a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\pi - t)\,dt,$$

$$B = \frac{2a_0\pi^2}{3} - \pi A - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(t)(2\pi - t)^2}{2}\,dt = -\frac{1}{12\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(2\pi^2 - 6\pi t + 3t^2)\,dt.$$

d'où celle de $F(\varphi)$ qu'on peut écrire sous les deux formes

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi}\int_0^{\theta} f(t)\,dt\,d\theta - \frac{\varphi}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\pi - t)\,dt - \frac{1}{12\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(2\pi^2 - 6\pi t + 3t^2)\,dt,$$

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} f(t)(\varphi - t)\,dt - \frac{\varphi}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\pi - t)\,dt - \frac{1}{12\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(2\pi^2 - 6\pi t + 3t^2)\,dt.$$

Ces valeurs de $F(\varphi)$ pourraient servir à transformer les intégrales que Riemann considère pour énoncer des conditions nécessaires pour la possibilité de la représentation (§§ VIII et IX du Mémoire de Riemann); mais il vaut mieux remarquer que $F(\varphi)$ admet une dérivée continue

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_0^{\varphi} f(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\pi - t)\,dt$$

et transformer les intégrales que considère Riemann à l'aide de l'intégration par partie. Quant au théorème sur la fonction $F(\varphi)$ (théorème I, § VIII), il peut être remplacé par le suivant :

Si une fonction $f(\varphi)$ bornée est développable en série trigonométrique, il existe une fonction continue $\mathcal{F}(\varphi)$ telle que l'expression

$$\frac{\mathcal{F}(\varphi + \alpha) - \mathcal{F}(\varphi - \alpha)}{2\alpha}$$

tende vers $f(\varphi)$, quand α tend vers zéro en prenant certaines valeurs qui peuvent varier avec φ.

On peut encore dire que :

A chaque valeur de φ il est possible d'attacher une suite de nombres α_i tendant vers zéro et tels que l'on ait :

$$f(\varphi) = \lim_{i=\infty} \frac{1}{2\alpha_i} \int_{\varphi-\alpha_i}^{\varphi+\alpha_i} f(t)\, dt.$$

Il reste maintenant à considérer le cas où le développement de $f(\varphi)$ n'est pas convergent pour toutes les valeurs de φ. Soit E l'ensemble des valeurs de φ pour lesquelles on ne peut affirmer la convergence de la série trigonométrique; nous supposons E réductible, c'est-à-dire que nous supposons que l'un des ensembles dérivés E', E'', E^3, E^4, ..., E^ω, $E^{\omega+1}$, ... ne contient aucun point; soit E^λ cet ensemble.

Définissons une fonction $f_1(\varphi)$ par la condition d'être nulle pour les points de E et égale à $f(\varphi)$ pour les autres points. Dans tout intervalle à l'intérieur duquel n'existe pas de points de E, les raisonnements précédents montrent que l'on a

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \int_0^\theta f_1(t)\, dt\, d\theta + A\varphi + B. \tag{2}$$

Soit φ_0 un point isolé de E, c'est-à-dire n'appartenant pas à E'; φ_0 est l'extrémité commune de deux intervalles dans lesquels on a respectivement :

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \int_0^\theta f_1(t)\, dt\, d\theta + A_1\varphi + B_1$$

et

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \int_0^\theta f_1(t)\, dt\, d\theta + A_2\varphi + B_2$$

avec

$$A_1\varphi_0 + B_1 = A_2\varphi_0 + B_2. \tag{3}$$

Riemann a démontré que l'on a

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\Delta^2 F(\varphi)}{\alpha} = 0.$$

Cela donne

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\Delta^2 \int_0^{\varphi_0} \int_0^{0} f_1(t)\,dt}{\alpha}$$

$$+ \lim_{\alpha=0} \frac{A_2(\varphi_0+\alpha)+B_2+A_1(\varphi_0-\alpha)+B_1-2(A_2\varphi_0+B_0)}{\alpha} = 0.$$

La deuxième partie a pour limite $A_2 - A_1$; quant à la première elle se calcule facilement, car

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\Delta^2 \int_0^{\varphi_0} \int_0^{0} f_1(t)\,dt}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha'=0} \left[\int_0^{\varphi_0+\alpha'} f_1(t)\,dt - \int_0^{\varphi_0-\alpha'} f_1(t)\,dt \right] = \lim_{\alpha'=0} \int_{\varphi_0-\alpha'}^{\varphi_0+\alpha'} f_1(t)\,dt,$$

et si M est le maximum de la valeur absolue de $f(t)$, l'intégrale précédente est inférieure à $2M\alpha'$, donc tend vers zéro. Il faut donc que l'on ait $A_2 = A_1$ et de la relation (3) on tire $B_2 = B_1$, donc $F(\varphi)$ a la forme (2) dans tout intervalle qui ne contient pas de points de E'. Il en sera encore de même pour tout intervalle ne contenant pas de points de E'' ou de E''', de E^4, ..., de E^{ω}, de $E^{\omega+1}$, ..., de E^{λ}. Donc, puisque E^{λ} est nul, $F(\varphi)$ a la forme (2) dans tout intervalle.

Ce point établi, le raisonnement se poursuit comme précédemment.

Lorsqu'une fonction bornée admet un développement trigonométrique convergent pour toutes les valeurs de la variable, sauf peut-être pour certaines valeurs formant un ensemble réductible, c'est la série de Fourier (1).

---

(1) Dans une Note des *Comptes rendus* (10 mars 1902) j'ai énoncé ce théorème pour le cas où l'ensemble E est fermé et de mesure nulle, mais la démonstration que j'avais cru pouvoir appliquer à ce cas était incomplète.

Il faut remarquer que les intégrales qui figurent dans les formules de Fourier doivent être relatives à $f_1(\varphi)$ et non à $f(\varphi)$; si l'on veut prendre les intégrales relatives à $f(\varphi)$, il faut les étendre seulement à l'ensemble des points de l'intervalle $(0, 2\pi)$ qui ne font pas partie de E, puisque $f(\varphi)$ n'est peut-être pas donnée dans E.

Un cas particulier de la proposition précédente est le théorème de Cantor :

Une série trigonométrique dont la somme est nulle pour toutes les valeurs de la variable, sauf peut-être pour celles d'un ensemble réductible E, *pour lesquelles la série pourra être convergente ou divergente, a ses coefficients nuls.*

Cette proposition peut encore s'énoncer ainsi :

Une fonction, bornée ou non, ne peut admettre deux développements trigonométriques différents, valables pour toutes les valeurs de la variable, sauf peut-être pour celles d'un ensemble réductible.

Nous obtiendrons plus loin des conditions suffisantes pour la convergence des séries de Fourier. Ces conditions sont applicables à des fonctions non bornées; grâce au théorème de M. Cantor nous pourrons donc pour ces fonctions, comme pour les fonctions bornées, affirmer qu'elles n'ont pas d'autre développement trigonométrique que la série de Fourier. Mais on peut appliquer immédiatement les raisonnements précédents à quelques cas simples. Nous allons démontrer que :

Si une fonction $f(\varphi)$, ayant une intégrale, au sens généralisé du mot, n'est infinie que dans le voisinage des points d'un ensemble réductible E, *et s'il existe une série trigonométrique représentant $f(\varphi)$, sauf pour les valeurs de φ appartenant à un ensemble réductible* E_1, *cette série est la série de Fourier.*

On voit d'abord que $F(\varphi)$ a la forme (2) dans tout intervalle où il n'existe pas de points de E.

Soit φ_0 un point de E qui n'appartient pas à E'; en désignant comme précédemment par

$$\int_0^\varphi \int_0^\theta f(t)\,dt\,d\theta + A_1\varphi + B_1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^\varphi \int_0^\theta f(t)\,dt\,d\theta + A_2\varphi + B_2$$

les valeurs de $F(\varphi)$ avant et après φ_0, on trouve

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\Delta^2 F(\varphi_0)}{\alpha} = \lim_{\alpha=0} \int_{\varphi_0-\alpha'}^{\varphi_0+\alpha'} f(t)\,dt + A_2 - A_1 = A_2 - A_1,$$

l'intégrale de $\varphi_0 - \alpha$ à $\varphi_0 + \alpha$ tendant vers zéro, car elle est l'accroissement de la fonction continue intégrale indéfinie de $f(t)$.

Donc $F(\varphi)$ a la forme (2) dans tout intervalle.

De là on déduit des égalités telles que

$$-\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\varphi}\int_{t=0}^{t=\theta} f(t)\cos n\varphi\,dt\,d\theta\,d\varphi - \frac{2a_0}{n^2}.$$

La transformation de ces égalités, telle qu'elle a été effectuée plus haut, n'est plus immédiatement possible.

Considérons une fonction $A(t, \theta, \varphi)$ qui ne devient infinie que dans le voisinage des points de E; supposons de plus que A soit la limite d'une suite de fonctions continues, de sorte que, dans tout intervalle où A est borné, l'on aura

$$(4) \qquad \int_{\varphi=a}^{\varphi=b}\int_{\theta=a}^{\theta=\varphi}\int_{t=a}^{t=\theta} A\,dt\,d\theta\,d\varphi = \int_{t=a}^{t=b}\int_{\theta=t}^{\theta=b}\int_{\varphi=\theta}^{\varphi=b} A\,d\varphi\,d\theta\,dt.$$

En faisant tendre a ou b vers un point de E on voit que la formule est vraie, pourvu qu'à l'*intérieur* de (a, b) ne se trouve aucun point de E. Cette formule est encore vraie si, dans (a, b), se trouve un seul point c de E, car l'on a

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\int_a^\varphi\int_a^\theta A\,dt\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_a^c\int_a^\varphi\int_a^\theta A\,dt\,d\theta\,d\varphi + \int_c^b\int_c^\varphi\int_c^\theta A\,dt\,d\theta\,d\varphi + \int_c^b\int_c^\varphi\int_a^c A\,dt\,d\theta\,d\varphi + \int_c^b\int_a^c\int_a^\theta A\,dt\,d\theta\,d\varphi \\
&= \int_a^c\int_t^c\int_\theta^c A\,d\varphi\,d\theta\,dt + \int_c^b\int_t^b\int_\theta^b A\,d\varphi\,d\theta\,dt + \int_a^c\int_c^b\int_\theta^b A\,d\varphi\,d\theta\,dt + \int_a^c\int_t^c\int_c^b A\,d\varphi\,d\theta\,dt \\
&= \int_a^b\int_t^b\int_\theta^b A\,d\varphi\,d\theta\,dt.
\end{aligned}$$

On peut donc intervertir l'ordre des trois intégrations tant que, dans (a, b), ne se trouve aucun point de E'; on démontrerait de même qu'il suffit qu'il n'existe dans (a, b) aucun point de E'' ou de E''', ... et l'on voit ainsi que la formule (4) est vraie dans tout intervalle. En l'appliquant pour $a = 0$, $b = 2\pi$ au cas où A est égal à $f(t)\cos n\varphi$ ou à $f(t)\sin n\varphi$, on a des formules telles que

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt + 2\left[a_0 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\right],$$

et l'on conclut comme précédemment.

Ce théorème contient comme cas particuliers tous ceux que nous avions déjà obtenus; il resterait à étudier les fonctions non bornées les plus générales, mais il ne semble pas que le théorème sur l'intégration, qui nous a fait connaître la forme de $F(\varphi)$, permette cette étude. Si l'on renonce à l'existence de l'intégrale de $f(\varphi)$, on peut aller plus loin.

Supposons que la fonction $f(\varphi)$ ne soit infinie que dans le voisinage des points d'un ensemble réductible E *et ait une intégrale indéfinie*; nous allons démontrer qu'*elle ne peut admettre d'autre développement trigonométrique que la série dont les coefficients sont donnés par les formules d'Euler et Fourier, dans lesquelles les intégrales sont calculées à l'aide des intégrales indéfinies*.

Si la fonction $f(\varphi)$ admet un développement trigonométrique, dans tout intervalle (a, b) où $f(\varphi)$ est bornée, on a

$$F(\varphi) = \int_a^\varphi \int_a^\theta f(t)\,dt\,d\theta + A\varphi + B,$$

ce qui peut s'écrire

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \mathbf{I}_0^\theta f(t)\,dt\,d\theta + A\varphi + B.$$

En raisonnant comme précédemment, on voit que cette formule est générale, qu'elle s'applique à tout intervalle.

On a alors des relations telles que

$$-\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\varphi \mathbf{I}_0^\theta f(t)\cos n\varphi\,dt\,d\theta\,d\varphi - \frac{2a_0}{n^2}.$$

La transformation de ces expressions suppose que l'on sache intervertir l'ordre des intégrations dans des expressions telles que

$$\int_a^b \int_a^\varphi \mathbf{I}_a^\theta \mathrm{A}\, dt\, d\theta\, d\varphi,$$

où A satisfait aux mêmes conditions que plus haut.

On a évidemment

$$\int_a^b \int_a^\varphi \mathbf{I}_a^\theta \mathrm{A}\, dt\, d\theta\, d\varphi = \mathbf{I}_a^b \int_t^b \int_\theta^b \mathrm{A}\, d\varphi\, d\theta\, dt,$$

dans tout intervalle (a, b) où A est fini, puisque ce n'est qu'une autre manière d'écrire la formule (4). En examinant le cas où, dans (a, b), ne se trouve qu'un point de E, puis de E', ..., on voit que cette formule est générale. Il n'y a d'ailleurs pas lieu de se demander s'il existe bien une intégrale indéfinie pour la fonction de t

$$\mathrm{B} = \int_t^b \int_\theta^b \mathrm{A}\, d\varphi\, d\theta,$$

puisque, cette fonction ne devenant infinie que dans le voisinage des points de E, il suffit de savoir qu'il existe une fonction $\mathcal{B}(t)$ telle que l'on ait

$$\mathcal{B}(\beta) - \mathcal{B}(\alpha) = \int_\alpha^\beta \mathrm{B}\, dt,$$

toutes les fois que le second membre a un sens, pour qu'on puisse affirmer l'existence de l'intégrale indéfinie; et la démonstration précédente nous donne l'une des fonctions $\mathcal{B}(t)$.

En intervertissant l'ordre des intégrations, l'on a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \mathbf{I}_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt + 2\left[a_0 - \frac{1}{2\pi} \mathbf{I}_0^{2\pi} f(t)\, dt\right],$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \mathbf{I}_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt - n\left[2\pi a_0 - 2\mathrm{A} - \frac{1}{\pi} \mathbf{I}_0^{2\pi} f(t)(2\pi - t)\, dt\right],$$

ou

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \mathrm{K}_1\right],$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt + \mathrm{K}_1\right],$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt + n\mathrm{K}_2\right].$$

On démontre, comme plus haut, que K_1 et K_2 sont nuls.

II.

Nous avons été conduits à deux espèces différentes de séries trigonométriques. Dans les premières, les coefficients sont donnés par les formules d'Euler-Fourier, les intégrales qui figurent dans ces formules étant des intégrales au sens généralisé du mot. Dans les secondes, les coefficients sont encore donnés par les mêmes formules, mais les intégrales doivent être calculées à l'aide des intégrales indéfinies. C'est aux premières que nous réserverons le nom de *séries de Fourier;* on pourrait appeler les secondes des *séries de Fourier généralisées* (¹).

Les coefficients d'une série de Fourier tendent toujours vers zéro.

Riemann a démontré ce théorème pour le cas où $f(\varphi)$ est intégrable, au sens que Riemann attachait à ce mot. Voici sa démonstration (§ X du Mémoire de Riemann) :

Partageons l'intervalle $(0, 2\pi)$ en intervalles égaux à $\frac{2\pi}{n}$. Soient $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots; m_1, m_2, \ldots$ les limites supérieure et inférieure de $f(\varphi)$ dans ces différents intervalles. Dans la première moitié du $s^{\text{ième}}$ intervalle, l'intégrale de $f(\varphi)\sin n\varphi$ est inférieure à celle de $\mathrm{M}_s \sin n\varphi$

(¹) En faisant cette distinction je veux simplement préciser ce que j'entends par série de Fourier. Je ne sais pas s'il existe des fonctions représentables par des séries de Fourier généralisées; toutes les fonctions non bornées que j'ai vu citer comme représentables par une série de Fourier avaient une valeur absolue ayant une intégrale.

parce que $\sin n\varphi$ est positif, donc est inférieure à $\frac{\pi}{n}M_s$, de même elle est supérieure à $\frac{\pi}{n}m_s$; dans la seconde moitié de l'intervalle, $\sin n\varphi$ étant négatif, l'intégrale de $f(\varphi)\sin n\varphi$ est comprise entre celles de de $m_s \sin n\varphi$ et de $M_s \sin n\varphi$, c'est-à-dire entre $-\frac{\pi}{n}m_s$ et $-\frac{\pi}{n}M_s$. On a donc

$$\left|\int_{2(s-1)\frac{n}{\pi}}^{2s\frac{\pi}{n}} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi\right| < \frac{2\pi}{n}(M_s - m_s),$$

et, par suite,

$$\left|\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi\right| < \frac{2\pi}{n}\sum(M_s - m_s).$$

Or la quantité $\frac{2\pi}{n}\sum(M_s - m_s)$ est la somme des longueurs des intervalles partiels multipliées respectivement par les limites supérieures de l'oscillation de $f(\varphi)$ dans ces intervalles; puisque $f(\varphi)$ est intégrable, au sens de Riemann, cette somme tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et le second membre de l'inégalité précédente tend vers zéro.

On raisonnerait de même pour $\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi$; le théorème de Riemann est donc démontré.

Remarquons que la démonstration précédente subsiste si les intégrales de $f(\varphi)\cos n\varphi$ et $f(\varphi)\sin n\varphi$ sont étendues à un intervalle (a, b) quelconque.

Supposons maintenant $f(\varphi)$ bornée et sommable. De la définition des fonctions sommables il résulte que l'intervalle $(0, 2\pi)$ peut être partagé en un nombre fini d'ensembles sommables dans chacun desquels l'oscillation de $f(\varphi)$ est inférieure à ε. Définissons une fonction $f_1(\varphi)$ par la condition d'être constante dans chacun des ensembles ainsi définis et égale à l'une des valeurs de $f(\varphi)$ dans cet ensemble. La différence $f_1(\varphi) - f(\varphi)$ est au plus égale à ε, donc les intégrales $\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi$ et $\int_0^{2\pi} f_1(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi$ diffèrent de moins de $2\pi\varepsilon$; il suffit donc, puisque ε est quelconque, de démontrer que les intégrales de Fourier relatives à $f_1(\varphi)$ tendent vers zéro pour qu'on en conclue qu'il en est de même pour $f(\varphi)$. Si $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont les ensembles partiels et $M_1, M_2, \ldots, M_p$ les valeurs de $f_1(\varphi)$ dans ces ensembles, on a

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi = \sum_1^p M_i \int_{E_i} \sin n\varphi \, d\varphi.$$

Étudions l'intégrale $\int_{E_i} \sin n\varphi \, d\varphi$. L'ensemble E_i est contenu dans un ensemble E, de même mesure que E_i à moins de ε près, et qui est composé d'un nombre fini ou infini d'intervalles. Si E contient un nombre infini d'intervalles, nous n'en conserverons qu'un nombre fini, assez grand pour que l'ensemble e ainsi obtenu ait même mesure que E à moins de ε près. Les deux intégrales

$$\int_{E_i} \sin n\varphi \, d\varphi, \qquad \int_{E} \sin n\varphi \, d\varphi,$$

d'une part, et les deux intégrales

$$\int_{E} \sin n\varphi \, d\varphi, \qquad \int_{e} \sin n\varphi \, d\varphi,$$

d'autre part, diffèrent de moins de ε. La dernière de ces intégrales tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, puisque e est composé d'un nombre fini d'intervalles, et puisque ε est quelconque, il en est de même de $\int_{E_i} \sin n\varphi \, d\varphi$. Les p termes du second membre de l'égalité (5) tendent vers zéro, il en est de même du premier membre.

Les intégrales de Fourier relatives à une fonction sommable bornée tendent vers zéro quand leur indice augmente indéfiniment.

Il est utile d'examiner le cas où la fonction est non bornée.

Remarquons d'abord que la démonstration précédente s'applique quand les intégrales de Fourier sont étendues à un intervalle quelconque, ou même à un ensemble mesurable quelconque.

Supposons maintenant que $f(\varphi)$ ait une intégrale, au sens généralisé du mot; on sait qu'il en est alors de même de $|f(\varphi)|$. On peut donc choisir M assez grand pour que, dans l'ensemble E où $|f(\varphi)|$ est supérieur à M, l'intégrale de $|f(\varphi)|$ soit inférieure à ε. Soit E_1 le complémentaire de E par rapport à l'intervalle ou à l'ensemble mesurable e dans lequel on considère $f(\varphi)$. On a alors

$$\int_e f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi = \int_E f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi + \int_{E_1} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

La première intégrale du second membre est, quel que soit n, inférieure en valeur absolue à ε; la seconde intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ puisque $f(\varphi)$ est bornée dans E_1, donc le premier membre tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Les intégrales de Fourier, relatives à une fonction ayant une intégrale au sens généralisé du mot, tendent vers zéro quand leur indice augmente indéfiniment.

La propriété précédente ne s'étend pas aux séries de Fourier généralisées. Riemann a fait voir en effet (§ XIII) que, pour de telles séries, certains des coefficients pouvaient augmenter indéfiniment.

L'exemple que donne Riemann est celui de la fonction

$$f(\varphi) = \frac{d\left(\varphi^\nu \cos\frac{1}{\varphi}\right)}{d\varphi},$$

pour $0 < \nu < \frac{1}{2}$.

Cela justifie la distinction que nous avons faite entre les deux espèces de séries de Fourier.

La condition nécessaire de convergence des séries trigonométriques, que leurs coefficients tendent vers zéro, est donc toujours remplie pour les séries de Fourier, mais elle ne l'est pas toujours pour les séries de Fourier généralisées.

III.

Étudions maintenant la convergence des séries de Fourier. Nous savons d'abord que la série de Fourier correspondant à $f(\varphi)$ ne peut être toujours convergente que si à $f(\varphi)$ est attachée $F(\varphi)$ telle que

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\Delta^2 F(\varphi)}{\alpha^2} = f(\varphi),$$

et alors, si $f(\varphi)$ est bornée, la série de Fourier a toujours pour somme $f(\varphi)$ quand elle converge, à cause de la forme trouvée précédemment pour $F(\varphi)$. Cela n'est plus démontré si $f(\varphi)$ n'est pas bornée.

Nous allons rechercher seulement quelques cas où la série de Fourier converge vers $f(\varphi)$; nous ne supposerons pas $f(\varphi)$ bornée. La somme des n premiers termes étant

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\pi-\frac{\varphi}{2}} f(\varphi+2t)\frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,dt,$$

puisque l'on a

$$f(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\pi-\frac{\varphi}{2}} f(\varphi)\frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,dt,$$

il suffit de rechercher des cas où la quantité

$$\mathrm{A}(m) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\pi-\frac{\varphi}{2}} \frac{f(\varphi+2t)-f(\varphi)}{\sin t}\sin(2m+1)t\,dt$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

$f(\varphi)$, ayant une série de Fourier, a une intégrale, au sens généralisé du mot; donc il en est de même de la fonction $\frac{f(\varphi+2t)-f(\varphi)}{\sin t} = g(t)$ dans tout intervalle (a, b) qui ne contient pas la valeur $t = 0$.

Dans (a, b) l'intégrale

$$\int_a^b g(t)\sin(2m+1)t\,dt$$

tend donc vers zéro, et $A(m)$ a même limite que

$$B(m) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a} g(t)\sin(2m+1)t\,dt,$$

où a est un nombre positif quelconque inférieur à π.

De là résulte cette proposition célèbre (Riemann, § IX, théorème III) : *la convergence de la série de Fourier relative à une fonction $f(\varphi)$, pour la valeur φ_0 de la variable, dépend seulement de la manière dont se comporte la fonction $f(\varphi)$ autour de φ_0*, puisque l'on peut, sans que rien ne soit changé à la convergence ou à la divergence de la série, modifier $f(\varphi)$ à l'extérieur de $(\varphi_0 - 2a, \varphi_0 + 2a)$.

Cela montre que les conditions de convergence des séries de Fourier pour $\varphi = \varphi_0$ sont des conditions relatives au point φ_0 et non des conditions qui doivent être remplies dans tout un intervalle. En ce sens les conditions de convergence de Dirichlet sont moins bonnes que celles que nous obtiendrons plus loin.

D'après ce que nous avons vu, $B(m)$ tend vers zéro toutes les fois que $g(t)$ admet une intégrale. Or, si l'on pose

$$h(2t) = \frac{f(\varphi+2t) - f(\varphi)}{2t} = g(t)\frac{2t}{\sin t},$$

les deux fonctions $h(t)$ et $g(t)$, qui ne sont pas définies pour $t = 0$, admettent, en même temps, une intégrale ou non.

Donc *la série de Fourier, relative à la fonction $f(\varphi)$, converge vers $f(\varphi)$ lorsque la fonction de t*

$$h(t) = \frac{f(\varphi+t) - f(\varphi)}{t}$$

admet une intégrale.

Il faut bien remarquer que, dans cet énoncé, il ne s'agit pas d'une intégrale calculable à l'aide des intégrales indéfinies; en d'autres termes, $|h(t)|$ doit avoir aussi une intégrale.

La fonction $h(t)$ admet une intégrale dans tout intervalle, sauf peut-être dans $(-a, +a)$; il suffit de s'occuper de la manière dont se comporte $h(t)$ au voisinage de $t = 0$.

$h(t)$ a évidemment une intégrale si, quand t tend vers zéro, $h(t)$

tend vers une limite finie; dans ce cas, f a une dérivée pour la valeur φ considérée. D'où cette proposition :

La série de Fourier relative à une fonction $f(\varphi)$ est convergente pour toutes les valeurs de φ pour lesquelles f admet une dérivée (1).

Si $h(t)$ est bornée, $h(t)$ admet une intégrale, donc : *la série de Fourier relative à une fonction $f(\varphi)$ est convergente pour toutes les valeurs de φ telles que le rapport*

$$\frac{f(\varphi+t)-f(\varphi)}{t}$$

soit borné dès que t est assez petit. Pour de telles valeurs $f(\varphi)$ est continue, et l'on peut dire que *la série de Fourier relative à une fonction $f(\varphi)$ est convergente pour toutes les valeurs de φ pour lesquelles $f(\varphi)$ est continue et a des nombres dérivés* (2) *bornés*.

Appliquons maintenant des critères de convergence à l'intégrale $\int_{\varepsilon^2}^{\pi} |h(t)|\,dt$ dans laquelle on fait tendre ε vers zéro. On trouve que l'intégrale a une limite pourvu qu'on puisse trouver les nombres M et k ($\mathrm{M}>0$, $k<1$) tels que

$$|h(t)| \leqq \frac{\mathrm{M}}{t^k};$$

en remplaçant $h(t)$ par sa valeur on a

$$|f(\varphi+t)-f(\varphi)| \leqq \mathrm{M}\,t^{1-k}.$$

Or $1-k$ est un nombre positif quelconque, donc *la série de Fourier relative à une fonction $f(\varphi)$ est convergente pour toutes les valeurs de φ telles que l'on ait, pour t assez petit,*

$$|f(\varphi+t)-f(\varphi)| \leqq \mathrm{M}\,t^{\alpha},$$

où M *et α sont des nombres positifs quelconques*. C'est la condition de

(1) C'est ce théorème, qui se trouve déjà dans le Mémoire de M. Dini, que donne M. Staeckel dans la Note citée.

(2) Au sens que M. Dini attribue à ce mot.

M. Lipschitz (*Journal de Crelle*, t. 63); en tous les points où cette condition est vérifiée, $f(\varphi)$ est continue, mais notre démonstration montre qu'il n'est pas nécessaire que $f(\varphi)$ soit continue dans un intervalle comprenant la valeur φ considérée, si petit que soit cet intervalle.

On peut appliquer d'autres critères de convergence à l'intégrale $\int_{\varepsilon^2}^{\pi} |h(t)|\,dt$. On sait que, si l'on pose

$$\mathfrak{L}_1 x = \mathfrak{L} x, \qquad \mathfrak{L}_n x = \mathfrak{L}(\mathfrak{L}_{n-1} x),$$

l'intégrale précédente a une limite pourvu qu'on puisse retrouver M, p, α ($M > 0$, $\alpha > 0$, p entier) tels que l'on ait

$$|h(t)| \leqq \frac{M}{t\,\mathfrak{L}_1\left(\frac{1}{t}\right)\mathfrak{L}_2\left(\frac{1}{t}\right)\cdots\mathfrak{L}_{p-1}\left(\frac{1}{t}\right)\left[\mathfrak{L}_p\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{1+\alpha}}.$$

Pour la convergence de la série de Fourier il suffit donc que l'on ait

$$|f(\varphi+t) - f(\varphi)| \leqq \frac{M}{\mathfrak{L}_1\left(\frac{1}{t}\right)\mathfrak{L}_2\left(\frac{1}{t}\right)\cdots\mathfrak{L}_{p-1}\left(\frac{1}{t}\right)\left[\mathfrak{L}_p\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{1+\alpha}}.$$

On peut étendre notablement le champ d'application des théorèmes précédents en écrivant B_m sous la forme

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^a [g(t) - g(-t)] \sin(2m+1)t\,dt,$$

c'est-à-dire en remplaçant $g(t)$ par

$$g_1(t) = \frac{f(\varphi+2t) + f(\varphi-2t) - 2f(\varphi)}{\sin t},$$

et, par suite, $h(t)$ par

$$h_1(t) = \frac{f(\varphi+t) + f(\varphi-t) - 2f(\varphi)}{t}.$$

Il suffit que $h_1(t)$ ait une intégrale pour que la série de Fourier soit convergente : ce qui revient à dire qu'il suffit que les conditions précédentes soient réalisées, non pour

$$f(\varphi + t),$$

mais pour

$$f(\varphi + t) + f(\varphi - t) = f_1(\varphi + t).$$

Remarquons que cette transformation n'est jamais nuisible, c'est-à-dire que, si les théorèmes précédents appliqués à $f(\varphi + t)$ permettent d'affirmer la convergence de la série de Fourier, ils pourront aussi être appliqués à $f_1(\varphi + t)$.

La transformation précédente est, en particulier, souvent utile pour les points où $f(\varphi)$ admet des discontinuités de première espèce, c'est-à-dire pour les points où $f(\varphi + 0)$ et $f(\varphi - 0)$ existent. Les théorèmes précédents ne s'appliquent que si l'on a

$$f(\varphi + 0) + f(\varphi - 0) - 2f(\varphi) = 0;$$

il est d'ailleurs facile de voir que *cette relation est vérifiée en tout point de discontinuité de première espèce par les fonctions développables en séries trigonométriques*. En effet, puisque $f(\varphi - 0)$ et $f(\varphi + 0)$ existent, on peut trouver un intervalle $(\varphi - a, \varphi + a)$ dans lequel $f(\varphi)$ est bornée. Dans cet intervalle, $F(t)$ a une dérivée continue

$$\mathfrak{F}(t) = \int_{-a}^{t} f(t)\, dt + \mathrm{M},$$

M étant une constante. Pour $t = \varphi$, $\mathfrak{F}(t)$ admet une dérivée à droite $f(\varphi + 0)$ et une dérivée à gauche $f(\varphi - 0)$, de sorte que l'expression

$$\frac{\mathfrak{F}(\varphi + \alpha') - \mathfrak{F}(\varphi - \alpha')}{2\alpha'}$$

tend vers $\frac{1}{2}[f(\varphi + 0) + f(\varphi - 0)]$ quand α' tend vers zéro d'une manière quelconque. On sait d'ailleurs que cette limite est $f(\varphi)$; la proposition est ainsi démontrée.

Nous pouvons maintenant donner des exemples des fonctions représentables par des séries de Fourier et présentant des discontinuités des deux espèces.

Définissons une fonction $f(\varphi)$ ayant la période 2π par l'égalité

$$f(\varphi) + f(-\varphi) = 0,$$

d'où

$$f(0) = f(\pi) = 0$$

et les conditions suivantes :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2^3}\right) = \ldots = 0,$$

$$f(\varphi) = \quad 1 \quad \text{pour} \quad \pi > \varphi > \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2^2} > \varphi > \frac{\pi}{2^3}, \quad \ldots,$$

$$f(\varphi) = -1 \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} > \varphi > \frac{\pi}{2^2}, \quad \frac{\pi}{2^3} > \varphi > \frac{\pi}{2^4}, \quad \ldots,$$

Quel que soit φ, la fonction

$$f_1(\varphi + t) = f(\varphi + t) + f(\varphi - t)$$

est constante dans un certain intervalle comprenant φ; donc la série de Fourier relative à $f(\varphi)$ est partout convergente.

Pour cette fonction, $\varphi = 0$ est point de discontinuité de seconde espèce; π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2^2}$, $\cdots$ sont des points de discontinuité de première espèce.

Considérons la fonction telle que

$$f(\varphi) + f(-\varphi) = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2^3}\right) = \ldots = 0,$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{+\sqrt{\varphi}} \quad \text{pour} \quad \pi > \varphi > \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2^2} > \varphi > \frac{\pi}{2^3}, \quad \ldots,$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{-\sqrt{\varphi}} \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} > \varphi > \frac{\pi}{2^2}, \quad \frac{\pi}{2^3} > \varphi > \frac{\pi}{2^4}, \quad \ldots.$$

Cette fonction présente les mêmes singularités que la précédente, et, de plus, dans le voisinage de l'origine, elle est non bornée. Cette fonction est bien représentable par une série de Fourier, puisque $f_1(\varphi + t)$ a une dérivée pour $t = 0$, quel que soit φ, et que $f(\varphi)$ a une intégrale.

Dans les deux exemples précédents, la considération de $f_1(\varphi + t)$ n'était pas utile pour démontrer la convergence pour $\varphi = 0$, parce que les séries ne contenaient que des termes en sinus, mais cette considération deviendrait utile si, aux fonctions $f(\varphi)$ qui viennent d'être définies, on ajoutait une fonction de période 2π ayant une dérivée, la fonction $\cos\cos\varphi$, par exemple.

Pour faire une application du théorème général, *nous allons construire une fonction non intégrable au sens de Riemann et représentable par une série trigonométrique pour toutes les valeurs de la variable*.

Nous allons d'abord construire, avec M. Volterra ([1]), une fonction dérivée non intégrable. Pour cela, choisissons une fonction $\pi(t)$ bornée, ayant une dérivée pour toutes les valeurs de la variable et telle que $\pi'(t)$ ne tende vers aucune limite quand t augmente indéfiniment. Alors $\pi'(t)$ change nécessairement une infinité de fois de signe quand t augmente indéfiniment.

Soit maintenant un ensemble fermé E, non dense dans tout intervalle, qui ne change pas si l'on augmente les abscisses de ses points de 2π, et dont la partie comprise entre 0 et 2π est de mesure non nulle. Une fonction qui a les points de E pour points de discontinuité n'est pas intégrable.

Considérons une fonction $f(\varphi)$ nulle pour les points de E et définie dans tout intervalle (a, b) contigu à E, c'est-à-dire dont les extrémités sont points de E et qui ne contient pas de points de E, de la manière suivante : La quantité $\frac{d}{d\varphi}\left[(\varphi-a)^2\pi\left(\frac{1}{\varphi-a}\right)\right]$ s'annule une infinité de fois entre a et b; soit $a+c$ la plus grande valeur de φ au plus égale à $\frac{a+b}{2}$ pour laquelle elle s'annule. Nous posons

$$
\begin{aligned}
f(\varphi) &= \frac{d}{d\varphi}\left[(\varphi-a)^2\pi\left(\frac{1}{\varphi-a}\right)\right] && \text{pour} \quad a<\varphi<a+c,\\
f(\varphi) &= 0, && \text{pour} \quad a+c \leqq \varphi \leqq b-c,\\
f(\varphi) &= \frac{d}{d\varphi}\left[(b-\varphi)^2\pi\left(\frac{1}{b-\varphi}\right)\right] && \text{pour} \quad b-c<\varphi<b.
\end{aligned}
$$

La fonction $f(\varphi)$ ainsi définie admet les points de E pour points de discontinuité et l'on vérifie facilement que c'est une fonction dérivée ; $f(\varphi)$ est bornée ou non suivant que π' l'est, car, pour $\varphi \gtrless 0$, on a

$$
\frac{d}{d\varphi}\left[(\varphi-a)^2\pi\left(\frac{1}{\varphi-a}\right)\right] = 2(\varphi-a)\pi\left(\frac{1}{\varphi-a}\right) - \pi'\left(\frac{1}{\varphi-a}\right).
$$

([1]) *Sui principii del Calcolo integrale* (*Giornale de Battaglini*, 1881). M. Volterra considère le cas où $\pi(t) = \sin t$.

Précisons maintenant la nature de $\pi(t)$. Si l'on suppose tous les intervalles (a, b) de longueurs inférieures à 1, c'est-à-dire c toujours inférieur à $\frac{1}{2}$, il suffit que $\pi(t)$ soit définie de 2 à ∞.

Nous supposons que $\pi''(t)$ existe et que $\pi'(t)$ ne s'annule que pour les valeurs entières de t, pour lesquelles on aura

$$\pi(t) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^t}{t-1}.$$

Ceci posé, montrons que $f(\varphi)$ a une intégrale, donc une série de Fourier. Ceci est évident si $\pi'(t)$ est bornée, parce qu'alors il en est de même de $f(t)$.

Supposons maintenant $\pi'(t)$ quelconque. L'intégrale de $|f(\varphi)|$ dans $(0, 2\pi)$ est la somme des intégrales de $|f(\varphi)|$ dans les intervalles tels que $(a, a+c)$, $(b-c, b)$ contenus dans $(0, 2\pi)$, d'où

$$\int_0^{2\pi} |f(\varphi)|\, d\varphi = 2\sum \int_a^{a+c} |f(\varphi)|\, d\varphi.$$

$$\int_a^{a+c} |f(\varphi)|\, d\varphi < \int_a^{a+c} 2(\varphi - a)\pi\left(\frac{1}{\varphi - a}\right) d\varphi + \int_a^{a+c} \left|\pi'\left(\frac{1}{\varphi - a}\right)\right| d\varphi,$$

car π est une fonction positive. π étant inférieure à 1, ainsi que c, la première intégrale est inférieure à $2c$; calculons la seconde. Si γ est le plus grand entier non supérieur à $\frac{1}{c}$, on a

$$\begin{aligned}\int_a^{a+c} \left|\pi'\left(\frac{1}{\varphi - a}\right)\right| d\varphi &\leqq \int_\gamma^\infty \frac{|\pi'(t)|}{t^2}\, dt \\ &= \sum_\gamma^\infty \int_n^{n+1} \frac{|\pi'(t)|}{t^2}\, dt < \sum_\gamma^\infty \frac{|\pi(n+1) - \pi(n)|}{n^2} = \sum_\gamma^\infty \frac{1}{n^3} < \frac{1}{\gamma+1} < c.\end{aligned}$$

Donc, dans $(a, a+c)$, l'intégrale de $|f(\varphi)|$ est inférieure à $3c$, et, par suite, l'intégrale de $|f(\varphi)|$ est finie et inférieure à 6π dans $(0, 2\pi)$; il est légitime de parler de la série de Fourier relative à $f(\varphi)$.

La série de Fourier relative à $f(\varphi)$ converge évidemment pour toutes les valeurs de φ qui n'appartiennent pas à E, puisque $\pi''(t)$ existant, $f(\varphi)$ a une dérivée pour ces valeurs de φ.

Soit maintenant φ_0 un point de E; cherchons si la fonction $\left|\dfrac{f(\varphi)}{\varphi-\varphi_0}\right|$ a une intégrale. Pour cela calculons une limite supérieure de l'intégrale de $\left|\dfrac{f(\varphi)}{\varphi-\varphi_0}\right|$ étendue à un intervalle (a, b) contigu à E. Si φ_0 n'est pas supérieur à a, $\varphi - a$ est au plus égal à $\varphi-\varphi_0$, donc

$$\int_a^{a+c}\frac{|f(\varphi)|}{\varphi-\varphi_0}\,d\varphi \leqq \int_a^{a+c}\frac{|f(\varphi)|}{\varphi-a}\,d\varphi;$$

dans $(b-c, b)$, $\varphi-\varphi_0$ est au plus égal à $\varphi-a$, qui est plus grand que $b-\varphi$, donc

$$\int_{b-c}^{b}\frac{|f(\varphi)|}{\varphi-\varphi_0}\,d\varphi < \int_{b-c}^{b}\frac{|f(\varphi)|}{b-\varphi}\,d\varphi = \int_a^{a+c}\frac{|f(\varphi)|}{\varphi-a}\,d\varphi.$$

De ces deux inégalités on déduit

$$\int_a^b\left|\frac{f(\varphi)}{\varphi-\varphi_0}\right|d\varphi < 2\int_a^{a+c}\frac{|f(\varphi)|}{\varphi-a}\,d\varphi,$$

et l'on démontrerait de même cette inégalité si φ_0 était supérieur à a, et, par suite, à b.

Dans $(a, a+c)$ on a

$$\frac{|f(\varphi)|}{\varphi-a} < 2\left|\pi\left(\frac{1}{\varphi-a}\right)\right| + \frac{\left|\pi'\left(\dfrac{1}{\varphi-a}\right)\right|}{\varphi-a},$$

$$\int_a^{a+c}\frac{|f(\varphi)|}{\varphi-a}\,d\varphi < 2\int_a^{a+c}\left|\pi\left(\frac{1}{\varphi-a}\right)\right|d\varphi + \int_a^{a+c}\frac{\left|\pi'\left(\dfrac{1}{\varphi-a}\right)\right|}{\varphi-a}\,d\varphi$$
$$< 2c + \int_{\frac{1}{c}}^{\infty}\frac{|\pi'(t)|}{t}\,dt.$$

En conservant à γ la signification indiquée précédemment, on a

$$\int_1^{\infty}\frac{|\pi'(t)|}{t}\,dt < \sum_{n=\gamma}^{n=\infty}\left|\int_n^{n+1}\frac{\pi'(t)}{t}\,dt\right| < \sum_{n=\gamma}^{n=\infty}\frac{|\pi(n+1)-\pi(n)|}{n}$$
$$= \sum_{n=\gamma}^{n=\infty}\frac{1}{n^2} < \sum_{n=\gamma}^{n=\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{\gamma-1},$$

et si l'on remarque que γ est au moins égal à 3, on peut prendre pour valeur supérieure de l'intégrale $\frac{2}{\gamma+1}$ et, à plus forte raison, $2c$.

De sorte que, dans (a, b), l'intégrale de $\left|\frac{f(\varphi)}{\varphi-\varphi_0}\right|$ est inférieure à $8c$, donc à $4(b-a)$; par suite, $\left|\frac{f(\varphi)}{\varphi-\varphi_0}\right|$ a une intégrale dans $(0, 2\pi)$ au plus égale à 8π.

La série de Fourier est donc convergente pour les points de E.

Il est ainsi démontré qu'il existe des fonctions non intégrables représentables trigonométriquement; le calcul des coefficients qui a été fait au début n'est donc pas sans objet.

On sait qu'on obtiendrait immédiatement les coefficients trouvés si l'on admettait que la série et celles qu'on en déduit en multipliant tous les termes par $\sin n\theta$ et $\cos n\theta$ sont intégrables terme à terme entre o et 2π.

Soit $f(\varphi)$ une fonction représentable par une série de Fourier. Posons $\mathcal{F}(\varphi)=\int_0^\varphi f(\varphi)\,d\varphi$. $\mathcal{F}(\varphi)$ étant à variation bornée, au sens de M. Jordan, est représentable trigonométriquement. Les coefficients de son développement sont

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\theta f(\varphi)\,d\varphi\,d\theta,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^\theta f(\varphi)\,d\varphi\right]\cos n\theta\,d\theta,$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^\theta f(\varphi)\,d\varphi\right]\sin n\theta\,d\theta.$$

La fonction $f(\varphi)$ étant une limite de fonctions continues, on peut intervertir l'ordre des intégrations en φ et θ. En effectuant les intégrations en θ, qui sont immédiates, on trouve

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi-\varphi)\,f(\varphi)\,d\varphi,$$

$$\alpha_n=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\varphi\,f(\varphi)\,d\varphi,$$

$$\beta_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}(\cos n\varphi-1)\,f(\varphi)\,d\varphi;$$

ou, en appelant a_0, a_n, b_n les coefficients du développement de $f(\varphi)$,

$$\alpha_n = -\frac{1}{n} b_n, \qquad \beta_n = \frac{1}{n} a_n - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi.$$

Mais on a

$$\frac{\theta}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi - \sum \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi \sin n\theta,$$

donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (2\pi - \varphi) f(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi \\ = \left[\sum\left(-\frac{b_n}{n}\cos n\theta + \frac{a_n}{n}\sin n\theta\right)\right] + \frac{\theta}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi.\end{aligned}$$

Pour $\theta = 0$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi f(\varphi)\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = -\sum \frac{b_n}{n},$$

et, par suite,

$$\mathfrak{F}(\theta) = a_0\theta + \sum \frac{1}{n}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta + b_n).$$

Les séries de Fourier sont donc intégrables terme à terme dans tout intervalle. De là il résulte facilement qu'il en est de même si l'on multiplie tous les termes par $\sin n\theta$ ou $\cos n\theta$.

La proposition précédente est la généralisation d'un théorème dû à Du Bois-Reymond.