LUDWIG SCHLESINGER

Sur la détermination des fonctions algébriques uniformes sur une surface de Riemann donnée

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 20 (1903), p. 331-347

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__331_0>

SUR LA DÉTERMINATION

DES

FONCTIONS ALGÉBRIQUES UNIFORMES

SUR UNE SURFACE DE RIEMANN DONNÉE,

PAR M. LUDWIG SCHLESINGER.

Dans plusieurs Mémoires ([1]), je me suis occupé du problème dit de *Riemann*, relatif à la théorie des équations différentielles linéaires. Comme chaque fonction algébrique d'une variable doit satisfaire à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, il est évident que l'on peut appliquer à la théorie des fonctions algébriques les résultats relatifs à ce problème. En appliquant singulièrement les résultats du Mémoire RP.II aux fonctions algébriques, résultats qui, dans ce cas particulier, concordent avec ceux que MM. Thomae et Hurwitz ont développés ([2]), et en poursuivant la voie que j'avais indiquée autrefois ([3]) pour une fonction algébrique particulière, on parvient à une solution *purement algébrique* du célèbre problème de Riemann, consistant à déterminer une fonction algébrique qui soit uniforme sur une surface de Riemann donnée.

Sauf dans quelques cas particuliers, comme dans le cas hyperelliptique et d'autres analogues, on n'est arrivé jusqu'à présent qu'à

([1]) *Comptes rendus*, 7 mars 1898; *Journal de Crelle*, t. 123, p. 138; t. 124, p. 292. Les deux Mémoires du *Journal de Crelle* seront cités dans ce qui suit par les abréviations RP.I, RP.II.

([2]) *Journal de Crelle*, t. 75, p. 224; *Mathem. Annalen*, t. 39, p. 1.

([3]) *Journal de Crelle*, t. 105, p. 181.

démontrer la possibilité de résoudre ce problème, et cela par des méthodes d'un caractère entièrement transcendant; j'ose donc espérer que les développements qu'on va lire ne seront pas dénués d'intérêt, d'autant plus qu'ils conduisent, pour les fonctions algébriques, à une conception nouvelle qui peut être regardée comme une généralisation naturelle de la conception classique de Riemann.

Un résumé succinct du présent Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences le 27 octobre 1902.

I.

1. Je rappelle d'abord l'énoncé du problème de Riemann, de la théorie des équations différentielles linéaires.

(C) *Soient donnés* $\sigma+1$ *points* $a_1, \ldots, a_\sigma, a_{\sigma+1}$ *et* σ *substitutions* $A_1, \ldots, A_\sigma$ *linéaires et homogènes par rapport à* n *variables; joignons* $a_1, \ldots, a_\sigma$ *au point* $a_{\sigma+1}$ *par des coupures* $l_1, \ldots, l_\sigma$.

Il s'agit de déterminer n *fonctions* $y_1, \ldots, y_n$ *de la variable complexe* x, *qui soient holomorphes dans le voisinage de chaque point* x, *à l'exception des points* $a_1, \ldots, a_{\sigma+1}$, *qui subissent les substitutions* $A_1, \ldots, A_\sigma$ *quand la variable* x *franchit les coupures* $l_1, \ldots, l_\sigma$ *une fois et dans le sens positif, et qui, aux points* $a_1, \ldots, a_{\sigma-1}$ *eux-mêmes, ne soient pas indéterminées* (¹).

J'ai démontré (RP.I) que ce problème peut être résolu à l'aide des fonctions zétafuchsiennes de M. Poincaré, si l'on impose aux substitutions $A_1, \ldots, A_\sigma$ certaines conditions, que je nomme *les conditions de convergence*, et qui consistent en ce que les racines des équations fondamentales appartenant aux substitutions $A_1, \ldots, A_\sigma$ et à la substitution

$$A_{\sigma+1} = A_1^{-1} \ldots A_\sigma^{-1},$$

aient toutes pour module l'unité.

Supposons que les substitutions $A_1, \ldots, A_\sigma$ soient telles que le groupe Θ dérivé de ces substitutions comme substitutions fondamentales, soit un groupe *fini*. Alors il est évident d'abord que les conditions de convergence seront remplies et que d'autre part les fonctions

(¹) Dans le sens de FUCHS, *Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin*, 1885, p. 281.

$y_1, \ldots, y_n$ seront des fonctions algébriques de x. Mais on voit aisément que, dans le cas où le groupe Θ est un groupe fini, le problème (C) n'est autre chose que le problème consistant à déterminer une fonction algébrique qui soit uniforme sur une surface de Riemann donnée, problème que je désignerai par la lettre (D).

Supposons, en effet, qu'on se donne une surface connexe de Riemann R à m feuillets et aux points de ramification $a_1, \ldots, a_\sigma, a_{\sigma+1}$, étendue sur le plan de la variable x, et soient

$$(a_k, a_{\sigma+1}) = l_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

les lignes de croisement suivant lesquelles l'on passe de l'un des feuillets à l'autre. Alors la manière même dont est constituée la surface R détermine pour chaque ligne l_k une certaine permutation S_k des m feuillets et inversement, si l'on donne les points de ramification, les lignes de croisement et les permutations correspondantes des m feuillets, la surface R de Riemann sera parfaitement déterminée ([1]). En désignant par $y_1, \ldots, y_m$ les m branches d'une fonction algébrique y de x, uniforme sur la surface R, les permutations S_k pourront être regardées comme des substitutions homogènes et linéaires A_k appliquées aux quantités $y_1, \ldots, y_m$, le problème (C), proposé avec les points singuliers $a_1, \ldots, a_{\sigma+1}$ et avec les substitutions $A_1, \ldots, A_\sigma$, coïncide donc avec le problème (D) de la détermination de la fonction algébrique y. On doit remarquer cependant que le groupe Θ dérivé des substitutions $A_1, \ldots, A_\sigma$ comme substitutions fondamentales, pourra être réductible à un groupe à n variables, n étant $< m$, mais cela n'importe pas. La solution que nous venons d'indiquer pour le problème (D) a pourtant peu d'intérêt pratique, puisque la résolution du problème (C) exige que l'on sache résoudre le problème fondamental de la théorie des fonctions fuchsiennes — dans le cas actuel, pour les fonctions du genre zéro de la première famille — problème qui, comme on sait, est de nature très transcendante ([2]).

---

(1) *Cf.* Hurwitz, *loc. cit.*, p. 4.

(2) D'ailleurs M. Dixon, dans un Mémoire publié au Tome XXXI, page 297 des *Proceedings de la Société mathématique de Londres,* a déjà prouvé que le problème (D) peut être résolu à l'aide des fonctions fuchsiennes.

2. Nous allons alors appliquer les méthodes du Mémoire RP.II, c'est-à-dire chercher de quelle manière la fonction algébrique y, définie au numéro précédent, dépend des points de ramification $a_1, \ldots, a_{\sigma+1}$, lorsque l'on regarde les affixes de ces points comme des *variables indépendantes;* c'est précisément la question qui a déjà été traitée avec succès par MM. Thomae et Hurwitz dans leurs Mémoires cités. Les théorèmes que nous allons développer n'exigent pas que l'on ait démontré la possibilité de résoudre le problème (D); cela est de la plus haute importance, puisque nous nous proposons de faire usage de ces théorèmes pour la démonstration de cette possibilité; pour mettre ce fait en évidence, nous ne nous occuperons pas de la fonction y elle-même, mais plutôt de la surface de Riemann R [1].

Nous supposons dans ce qui suit que le point $a_{\sigma+1}$ aussi bien que les points à l'infini de la surface R soient des points réguliers; on a donc $A_{\sigma+1} = 1$,

$$A_\sigma A_{\sigma-1} \ldots A_1 = 1.$$

Si alors on fait décrire aux points a_k des chemins fermés quelconques [2], la surface R sera transformée en une surface $\overline{R}$, qui, d'après les théorèmes démontrés au n° VII du Mémoire RP.II, aura les propriétés suivantes :

La surface $\overline{R}$ possède les mêmes points de ramification a_k que R, et aussi les mêmes lignes de croisement l_k, mais la connexion des feuillets de $\overline{R}$ le long des lignes de croisement l_k est déterminée par des substitutions $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_\sigma$, en général différentes des substitutions $A_1, \ldots, A_\sigma$, mais contenues dans le groupe Θ dérivé de $A_1, \ldots, A_\sigma$ comme substitutions fondamentales; d'ailleurs chaque substitution $\overline{A}_k$ est la transformée de A_k par une substitution du groupe Θ. Il s'ensuit que les surfaces de Riemann R et $\overline{R}$ ont le même groupe de monodromie, et que pour ces deux surfaces la multiplicité des points de ramification aussi bien que la répartition des feuillets en cycles sont les mêmes [3], elles sont donc aussi du même genre. Nous dirons que les surfaces R, $\overline{R}$

---

(1) *Cf.* Hurwitz, *loc. cit.*, p. 42.

(2) Il ne s'agit naturellement que des chemins que M. Hurwitz désigne (*loc. cit.*) comme chemins parfaitement fermés (*vollstaendig geschlossen*).

(3) *Cf.* Hurwitz, *loc. cit.*, p. 32, 33.

se déduisent l'une de l'autre par *monodromie des points de ramification* (1).

Si l'on considère le passage du système de substitutions $A_1, \ldots, A_\sigma$ au système $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_\sigma}$ comme une opération appliquée au premier de ces systèmes, l'ensemble de toutes ces opérations, correspondant à tous les chemins fermés possibles de $a_1, \ldots, a_\sigma$, formera un groupe G (*Cf.* RP.II, p. 304), dérivé de $\sigma(\sigma+1)$ opérations fondamentales. Ces opérations fondamentales correspondent aux circuits simples que les points a_k décrivent autour des points $a_i\,(i \neq k)$ et x et voici leurs expressions explicites (2).

Si a_λ tourne autour de x, on a

$$\overline{A_k} = A_\lambda A_k A_\lambda^{-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma);$$

si a_λ tourne autour de a_h, on a pour $h < \lambda$

$$\begin{aligned}
&\overline{A_h} = A_h^{-1} A_\lambda^{-1} A_h A_\lambda A_h,\\
&\overline{A_\nu} = A_h^{-1} A_\lambda^{-1} A_h A_\lambda A_\nu A_\lambda^{-1} A_h^{-1} A_\lambda A_h \qquad (h < \nu < \lambda),\\
&\overline{A_\nu} = A_h^{-1} A_\lambda A_h,\\
&\overline{A_\mu} = A_\mu \qquad (\mu < h,\ \mu > \lambda);
\end{aligned}$$

et pour $h > \lambda$

$$\begin{aligned}
&\overline{A_\lambda} = A_\lambda^{-1} A_h^{-1} A_\lambda A_h A_\lambda,\\
&\overline{A_\nu} = A_\lambda^{-1} A_h^{-1} A_\lambda A_h A_\nu A_h^{-1} A_\lambda^{-1} A_h A_\lambda \qquad (\lambda < \nu < h),\\
&\overline{A_h} = A_\lambda^{-1} A_h A_\lambda,\\
&\overline{A_\mu} = A_\mu \qquad (\mu < \lambda,\ \mu > h);
\end{aligned}$$

la situation relative des lignes de croisement $l_1, \ldots, l_\sigma$ étant prise de telle façon qu'en tournant dans le sens positif autour du point $a_{\sigma+1}$, on rencontre ces lignes par ordre d'indices croissants.

Parmi les surfaces de Riemann, provenant de R par monodromie des points de ramification, il n'y en a qu'un nombre fini qui soient réelle-

---

(1) *Cf.* pour cette terminologie, BURKHARDT, *Funktionentheoretische Vorlesungen*, t. II, 1899, p. 192.

(2) RP.II équ. (6), p. 301, et (7), (7 *a*), p. 302; *Cf.* HURWITZ, *loc. cit.*, p. 25 et suivantes.

ment distinctes; ce nombre pourra être déterminé par le procédé indiqué par M. Hurwitz [1].

Les opérations de G correspondant aux transformations de la surface R en elle-même, forment un sous-groupe distingué (invariant) Γ de G; nous aurons à revenir sur ce sous-groupe.

Supposons, pour simplifier, que tous les points de ramification de la surface R soient *simples* (nous conserverons cette supposition aussi pour la suite). Alors le genre p de R se détermine par l'équation de Riemann

$$(r) \qquad \sigma - 2m = 2p - 2,$$

il faut donc que σ soit un nombre pair. En se reportant aux théorèmes de M. Lüroth [2] et de Clebsch [3] on démontre aisément, comme l'a fait remarquer M. Hurwitz [4], que toute surface de Riemann à m feuillets, ayant les points $a_1, \ldots, a_\sigma$ pour points de ramification simples et les l_k pour lignes de croisement, provient de la surface R par monodromie des points de ramification. On verra le rôle fondamental que cette remarque va jouer dans ce qui suit.

II.

3. Soit donnée une surface de Riemann R_0 connexe et à m feuillets, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma$ ses points de ramification supposés simples et $\lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma$ ses lignes de croisement, joignant les points α_k au point régulier $\alpha_{\sigma+1}$. Soit de plus R une surface comme celle que nous avons étudiée au numéro précédent, dont les affixes des points de ramification $a_1, \ldots, a_\sigma$ sont des variables indépendantes et dont les lignes de croisement $l_1, \ldots, l_\sigma$ joignant les points a_k au point $a_{\sigma+1}$ varient

---

(1) *Loc. cit.*, p. 3-22, *Cf.* aussi le Mémoire du même auteur, *Mathem. Annalen*, t. LV, mais il convient de remarquer que notre groupe G diffère essentiellement des groupes A, B de M. Hurwitz (*loc. cit.*, p. 23, 24); ainsi par exemple notre groupe G est toujours transitif, tandis que les groupes A, B de M. Hurwitz ne le sont pas (*loc. cit.*, p. 32).

(2) *Mathem. Annalen*, t. III, p. 181.

(3) *Ibid.*, t. VI; *voir* aussi, Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 372 et suivantes.

(4) *Loc. cit.*, p. 32.

d'une manière continue avec $a_1, \ldots, a_\sigma$, comme si ces lignes étaient des fils flexibles et extensibles [1]. On pourra évidemment considérer la surface R_0 comme provenant d'une surface R convenablement choisie, en faisant acquérir aux points de ramification $a_1, \ldots, a_\sigma$ de R les positions $\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma$ de manière que les lignes de croisement l_k de R viennent coïncider avec les lignes correspondantes λ_k de R_0.

Il s'agit de trouver une fonction algébrique y de x, uniforme sur la surface R_0. Nous allons résoudre d'abord le même problème pour la surface R.

Considérons l'équation

$$F(y, x) = \varphi_0(x) y^m + \varphi_1(x) y^{m-1} + \ldots + \varphi_m(x) = 0, \tag{1}$$

où les coefficients

$$\varphi_k(x) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} A_{k\lambda} x^{\nu-\lambda} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m) \tag{2}$$

sont des fonctions entières de degré ν en x, et proposons-nous de déterminer les $(m+1)(\nu+1)-1$ constantes $A_{k\lambda}$ (A_{00} étant égalé à l'unité) de manière que la fonction y définie par l'équation (1) soit uniforme sur la surface de Riemann R.

Le discriminant [2] de l'équation (1) par rapport à y

$$Q(x) = \varphi_0(x)^{m-2} \prod_{i=1}^{m} F'(y^{(i)}, x), \tag{3}$$

où $y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}$ désignent les m racines de (1) et

$$F'(y, x) = \frac{\partial F}{\partial y},$$

est une fonction homogène du degré $2(m-1)$ des coefficients $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$; elle est par suite une fonction entière du même degré des $(m+1)(\nu+1)-1$ quantités $A_{k\lambda}$ et du degré $2\nu(m-1)$ en x. Comme $a_1, \ldots, a_\sigma$ doivent être les seuls points de ramification simples,

---

(1) *Cf.* RP.II, p. 297.

(2) *Cf.* pour ce qui suit mon Mémoire, *Journal de Crelle*, t. 105, p. 184 et suivantes.

il faut que $Q(x)$ soit de la forme

$$Q(x)=(x-a_1)\ldots(x-a_\sigma)X^2, \tag{4}$$

X étant une fonction entière de x du degré

$$d=(m-1)(\nu-1)-p,$$

où p est le genre de la surface de Riemann R, défini par l'équation (r) du numéro précédent. Si dans l'équation (4) on regarde $Q(x)$ comme déterminé par l'équation (3), c'est-à-dire comme une fonction entière de x, dont les coefficients sont eux-mêmes des fonctions entières des $A_{k\lambda}$, en égalant les coefficients des mêmes puissances de x aux deux membres de l'équation (4), on obtient un système de $M=2\nu(m-1)+1$ équations, que nous désignerons par

$$(M)=0,$$

et où l'on doit regarder comme inconnues les $(m+1)(\nu+1)-1$ quantités $A_{k\lambda}$ et les $d+1$ coefficients de la fonction entière X. Nous avons donc en tout

$$N=(m+1)(\nu+1)-1+(m-1)(\nu-1)-p+1=2m\nu-p+2$$

inconnues, c'est-à-dire que le nombre des inconnues surpasse de $2\nu-p+1$ celui des équations. C'est ce qui concorde bien avec le théorème de Riemann ([1]), d'après lequel une fonction algébrique de genre p, qui acquiert ν fois chaque valeur, dépend de $2\nu-p+1$ constantes arbitraires.

Nous allons appliquer maintenant au système $(M)=0$ la méthode d'élimination de Kronecker, indiquée par Kronecker lui-même dans la *Festschrift* ([2]) et exposée avec plus de détail dans la Thèse de M. Molk ([3]). D'après cette méthode, le système $(M)=0$ peut être

---

([1]) *Œuvres* (2e édition, 1890), p. 108.

([2]) *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (*Festschrift*, etc. Berlin, 1882, p. 27 et suivantes).

([3]) *Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité*, etc. *Thèse*, Paris, 1884. *Acta mathematica*, t. VI, p. 1 et suivantes.

décomposé en un nombre fini de systèmes irréductibles et de rang différent de la manière suivante :

Le système $(M) = 0$ est équivalent à une équation résolvante [1]

$$R_1 R_2 \ldots R_N = 0,$$

chacun des facteurs R_h définissant celles des solutions du système $(M) = 0$ qui sont fonctions algébriques de $a_1, \ldots, a_\sigma$ et qui en outre dépendent de $N - h$ quantités arbitraires.

Suivant le théorème mentionné de Riemann, le facteur R_M est le seul dont nous avons à nous occuper. Dans le domaine de rationalité déterminé par $a_1, \ldots, a_\sigma$, regardés comme variables indépendantes, et par toutes les constantes numériques, décomposons R_M en facteurs irréductibles $R'_M, R''_M, \ldots$; chacun de ces facteurs représente un système irréductible d'équations [2]; soient

$$(M') = 0, \qquad (M'') = 0, \qquad \ldots \tag{5}$$

ces divers systèmes, et considérons l'un quelconque d'entre eux, par exemple

$$(M') = 0.$$

Ce système nous définit les N inconnues comme fonctions algébriques de $a_1, \ldots, a_\sigma$, dépendant encore de $2\nu - p + 1$ constantes arbitraires; nous regarderons ces dernières comme fixées une fois pour toutes. Un système irréductible, tel que $(M') = 0$, a des propriétés tout à fait analogues à celles d'une équation irréductible entre deux variables. Nous rappellerons seulement celles de ces propriétés qui correspondent au théorème de Puiseux.

Considérons un système de valeurs des variables indépendantes $a_1, \ldots, a_\sigma$ (un *point*), pour lequel les fonctions algébriques définies par le système $(M') = 0$ sont régulières. Remarquons de suite que, d'après les résultats du Mémoire RP.II [3], les lieux singuliers de notre système $(M') = 0$ sont donnés par les équations

$$a''_i = a_k \qquad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, \sigma), \tag{6}$$

---

(1) KRONECKER, *loc. cit.*, p. 29; MOLK, *loc. cit*, p. 131 et suivantes.
(2) *Cf.* KRONECKER, *loc. cit.*, p. 30; MOLK, *loc. cit.*, p. 155 et suivantes.
(3) *Cf.* aussi HURWITZ, *loc. cit.*, p. 25.

auxquelles on doit ajouter encore les valeurs infinies des a_k; donc, par exemple, le système de valeurs

$$a_k = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

est un point régulier. Autour de ce point les solutions du système $(M') = 0$ pourront être développées en séries de puissances ordinaires des incréments

$$a_1 - \alpha_1, \quad \ldots, \quad a_\sigma - \alpha_\sigma,$$

et nous aurons autant de systèmes de telles séries de puissances qu'il y a de solutions différentes du système $(M') = 0$. Considérons un quelconque de ces systèmes de séries — un *élément* des fonctions algébriques définies par le système $(M') = 0$ — et appliquons à cet élément le procédé de prolongement analytique. Joignons les lieux singuliers (6) aux lieux situés à l'infini de l'ensemble $(a_1, \ldots, a_\sigma)$ par des variétés analogues à des *coupures* (1); en faisant le prolongement analytique de notre élément, sans traverser ces coupures, nous formerons un ensemble d'éléments, constituant une branche uniforme des fonctions algébriques définies par le système $(M') = 0$.

M. Molk, dans sa Thèse citée (2), a démontré le théorème suivant :

Si une fonction rationnelle des N *inconnues* (*à coefficients appartenant au domaine de rationalité*) *s'annule pour une branche du système de fonctions algébriques définies par le système irréductible* $(M') = 0$, *elle s'annulera pour toutes les autres branches du même système de fonctions.*

La démonstration de M. Molk repose sur ce que le système $(M') = 0$ peut être remplacé par la seule équation résolvante irréductible $R'_M = 0$. En suivant une voie analogue, on peut démontrer que chaque élément (système de séries de puissances) vérifiant le système irréductible $(M') = 0$ peut être obtenu par prolongement analytique d'un élément quelconque, ou, ce qui est la même chose, que les fonctions algébriques définies par un système irréductible d'équations constituent *un seul système de fonctions monogène* (dans le sens de Cauchy). C'est

(1) *Cf.* Hurwitz, *loc. cit.*, p. 24, 25

(2) P. 156.

évidemment la généralisation du célèbre théorème de Puiseux, relatif à la théorie des fonctions algébriques d'une seule variable.

4. Après ces préliminaires, revenons à notre problème.

Considérons les coefficients $A_{k\lambda}$, définis comme fonctions algébriques de $a_1, \ldots, a_\sigma$ à l'aide d'un quelconque des systèmes irréductibles (5) (nous laissons de côté les autres inconnues, c'est-à-dire les coefficients de X) et formons avec ces $A_{k\lambda}$ comme coefficients l'équation (1). Il s'agit de décider si parmi les équations (1) formées de cette manière, il y en a une au moins qui soit irréductible? La réponse à cette question doit être affirmative. Supposons, en effet, que toutes les équations (1) formées soient réductibles; comme cela a lieu pour des valeurs indéterminées de $a_1, \ldots, a_\sigma$, le même fait subsistera pour tout système de valeurs particulières de ces quantités. Il n'y aurait donc point d'équation de degré m en y et de degré ν en x irréductible, à σ points de ramification simples, d'ailleurs quelconques, ce qui est évidemment absurde, puisque l'on peut facilement former de telles équations, soit à l'aide des fonctions théta-abéliennes, soit à l'aide des fonctions théta-fuchsiennes.

Parmi les systèmes (5) il y en a donc au moins un qui soit tel que l'équation (1) formée avec les $A_{k\lambda}$ définies par ce système, soit irréductible. Soit $(M') = 0$ un tel système; nous verrons tout à l'heure qu'il est unique. Soient $A_{k\lambda}^{(1)}$ une branche uniformément définie des fonctions $A_{k\lambda}$ de $a_1, \ldots, a_\sigma$, déterminées par le système $(M') = 0$ et soit

$$(1^1) \qquad F_1(y_1, x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\lambda=0}^{\nu} A_{k\lambda}^{(1)} x^{\nu-\lambda} y_1^{m-k} = 0$$

l'équation (1) correspondante; soit $R^{(1)}$ la surface de Riemann appartenant à cette équation. La surface $R^{(1)}$ sera connexe, à m feuillets et aux points de ramification simples $a_1, \ldots, a_\sigma$. Donc, d'après les théorèmes mentionnés au n° 2, la surface de Riemann R proviendra de $R^{(1)}$ par monodromie des points de ramification, c'est-à-dire qu'en faisant décrire aux points $a_1, \ldots, a_\sigma$ des chemins fermés convenablement choisis, la surface $R^{(1)}$ se déformera de manière à devenir identique à la surface R.

Si donc nous effectuons le prolongement analytique des $A_{k\lambda}^{(1)}$ suivant ces chemins fermés suivis par $a_1, \ldots, a_\sigma$, nous obtiendrons des déterminations $A_{k\lambda}^{(0)}$ des fonctions algébriques $A_{k\lambda}$, définies par le système $(M') = 0$, telles que la surface de Riemann appartenant à l'équation

$$(1^0) \qquad F_0(y, x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\lambda=0}^{\nu} A_{k\lambda}^{(0)} x^{\nu-\lambda} y^{m-k} = 0$$

soit précisément R. L'existence des fonctions algébriques uniformes sur la surface R donnée est donc démontrée.

Passons à la démonstration de l'existence des fonctions algébriques uniformes sur la surface R_0, dont les points de ramification $\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma$ ont des valeurs numériques déterminées. Soit $\overline{A_{k\lambda}^{(0)}}$ l'élément (système de séries de puissances), qui représente la branche $A_{k\lambda}^{(0)}$ des fonctions $A_{k\lambda}$ définies par le système $(M') = 0$ au voisinage du point

$$a_1 = \alpha_1, \qquad \ldots, \qquad a_\sigma = \alpha_\sigma;$$

en substituant dans les $\overline{A_{k\lambda}^{(0)}}$ pour $a_1, \ldots, a_\sigma$ les valeurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma$, ces séries de puissances se réduisent à leurs premiers termes $a_{k\lambda}^{(0)}$, et l'équation

$$(1_\alpha^0) \qquad \sum_{k=0}^{m} \sum_{\lambda=0}^{\nu} a_{k\lambda}^{(0)} x^{\nu-\lambda} y^{m-k} = 0$$

définit y comme fonction algébrique de x, uniforme sur la surface de Riemann R_0. Voilà donc une solution algébrique du problème (D) pour le cas d'une surface de Riemann n'ayant que des points de ramification simples; mais on peut entrevoir comment la méthode indiquée est susceptible d'être étendue au cas le plus général, soit en considérant le cas général de points de ramification à multiplicité quelconque comme cas limite de celui où tous ces points sont simples [1], soit en le traitant directement; je me propose de revenir sur ce sujet. Actuellement, en conservant la supposition de points de ramification simples, je voudrais énoncer encore quelques remarques relatives à l'équation (1^1).

---

(1) *Cf.* APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques* (Paris, 1895), p. 216.

5. Si dans l'équation (1^1) on fait décrire aux points $a_1, \ldots, a_\sigma$ tous les chemins fermés possibles, cette équation sera changée en des équations

$$(1^i) \qquad F_i(y_i, x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\lambda=0}^{\nu} A_{k\lambda}^{(i)} x^{\nu-\lambda} y_i^{m-k} = 0,$$
$$(i = 0, 1, \ldots, q-1),$$

en nombre q égal au nombre des solutions différentes du système $(M') = 0$. Désignons par $R^{(i)}$ les surfaces de Riemann appartenant respectivement aux équations (1^i); ces surfaces proviennent toutes l'une de l'autre par monodromie des points de ramification, et ce sont d'autre part toutes les surfaces de Riemann possibles connexes, à m feuillets possédant les σ points de ramification simples $a_1, \ldots, a_\sigma$. Il s'ensuit premièrement — comme nous l'avons annoncé plus haut — que parmi les systèmes (5) il ne pourra exister de système différent de $(M') = 0$, pour lequel l'équation (1) correspondante soit irréductible, puisque, comme nous venons de le voir, les équations (1) provenant du système $(M') = 0$ épuisent déjà tous les cas possibles.

Mais de l'analyse précédente nous pouvons tirer encore une autre conséquence, qui nous semble d'importance fondamentale.

Plaçons-nous au point de vue purement algébrique, ou — comme le disait Kronecker — *arithmétique*. Le système $(M') = 0$ nous définit les $A_{k\lambda}$ comme fonctions algébriques *en général multiformes* de $a_1, \ldots, \alpha_\sigma$; il n'y a pas de moyen arithmétique permettant de séparer les diverses branches de ces fonctions; au contraire, la séparation des branches ou, ce qui revient au même, la formation d'un élément (comme $\overline{A_{k\lambda}^{(0)}}$) représentant l'une de ces branches au voisinage d'un point, tel que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma)$, exige l'application de méthodes analytiques. Donc, *algébriquement*, nous n'avons que l'équation (1), où les coefficients $A_{k\lambda}$ sont définis par le système irréductible $(M') = 0$ comme un système de fonctions algébriques monogènes implicites de $a_1, \ldots, a_\sigma$, c'est-à-dire qu'au point de vue algébrique il faut envisager à la fois l'ensemble de toutes les équations (1^i) ou de toutes les fonctions algébriques y_i de x, qui correspondent à la totalité des surfaces de Riemann $R^{(i)}$, provenant l'une de l'autre par monodromie des points de ramification. Quand donc il s'agit de la formation effective d'une équation appartenant à une surface de Riemann R spécialement donnée, on ne peut que former une équation comprenant à la fois toutes celles qui appartiennent aux diverses surfaces de Riemann déduites de R par monodromie des points de ramification; quant à la détermination isolée de l'équation correspondante à la surface spéciale R, elle exige ensuite l'application de procédés particuliers d'un caractère analytique.

Pourtant il pourrait arriver, dans des cas particuliers, que le système $(M') = 0$ définît les quantités $A_{k\lambda}$ comme fonctions *uniformes* et par suite *rationnelles* de $a_1, \ldots, a_\sigma$. Cela se présentera toujours si la surface R de Riemann se trouve complètement déterminée par le nombre de ses feuillets et par la situation des points de ramification ou, en d'autres termes, si le groupe G coïncide avec le sous-groupe nommé Γ au n° 2; ce cas se présente, par exemple, si la surface considérée est hyperelliptique. Dans un tel cas (et dans un tel cas seul) les coefficients de l'équation correspondante sont des fonctions rationnelles des points de ramification, comme on le vérifie pour l'équation hyperelliptique.

En laissant de côté ces cas spéciaux, l'analyse précédente nous conduit donc à la généralisation suivante de la conception classique de Riemann sur la théorie des fonctions algébriques d'une variable :

Au lieu de considérer, comme le fait Riemann, une surface de Riemann R spéciale, et les fonctions algébriques y, uniformes sur cette surface, comme fonctions de x seul, il convient d'envisager à la fois l'ensemble de toutes les surfaces

$$R^{(0)},\quad R^{(1)},\quad \ldots,$$

provenant l'une de l'autre par monodromie des points de ramification et par suite l'ensemble de toutes les fonctions algébriques $y_0, y_1, \ldots$ uniformes sur ces surfaces. Cet ensemble peut être représenté par l'unique équation (1), où les $A_{k\lambda}$ sont définis par le système irréductible $(M') = 0$ comme fonctions algébriques de $a_1, \ldots, a_\sigma$, et cette équation, obtenue par l'application des procédés purement algébriques, définit y comme fonction algébrique des $\sigma + 1$ variables

$$x,\quad a_1,\quad \ldots,\quad a_\sigma;$$

l'ensemble en question se présente donc comme *une seule fonction monogène algébrique* de ces $\sigma + 1$ variables, c'est-à-dire que toutes les branches de cette fonction proviennent l'une de l'autre, en faisant décrire à x, a_1, ..., a_σ tous les chemins fermés possibles.

6. La considération des fonctions algébriques comme fonctions des points de ramification se présente déjà comme inévitable dans la théorie des intégrales abéliennes, surtout quand il s'agit de la formation des modules de périodicité de ces intégrales. Fuchs a montré [1] que ces modules, considérés comme fonctions d'un point de ramification, satisfont à des équations différentielles linéaires; nous allons montrer comment la conception d'une fonction algébrique, indiquée au numéro précédent, peut être utile pour l'étude de ces équations différentielles.

Soit R la surface de Riemann donnée, que nous supposons toujours posséder les points de ramification simples a_1, ..., a_σ; considérons une intégrale abélienne

$$\int G(x, y)\, dx, \tag{7}$$

appartenant à cette surface, c'est-à-dire à l'équation (1^0), et ne possédant pas de singularité logarithmique; $G(x, y)$ est donc une fonction rationnelle de (x, y) dont tous les résidus sont égaux à zéro. D'après Fuchs, les modules de périodicité de l'intégrale (7), considérés comme fonctions d'un point de ramification a_k, satisfont à une équation différentielle linéaire d'ordre $2p$,

$$\frac{\partial^{2p}\pi}{\partial a_k^{2p}} + \beta_1 \frac{\partial^{2p-1}\pi}{\partial a_k^{2p-1}} + \ldots + \beta_{2p}\pi = 0, \tag{8}$$

où les coefficients β_1, ..., β_{2p} s'expriment rationnellement par les coefficients $A_{k\lambda}^{(0)}$ de l'équation (1^0) et par les coefficients de la fonction rationnelle $G(x, y)$ [2]. Nous pouvons supposer, sans restreindre la

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 73, p. 324; *Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin*, 1897, p. 608; 1898, p. 477.

(2) *Journal de Crelle*, t. 73, p. 330.

généralité, que les coefficients de $G(x, y)$ sont rationnels par rapport aux quantités $a_1, \ldots, a_\sigma$ et $A_{k\lambda}^{(0)}$; alors $\beta_1, \ldots, \beta_{2p}$ s'expriment aussi rationnellement au moyen des mêmes quantités $a_1, \ldots, a_\sigma$, $A_{k\lambda}^{(0)}$. Donc, en général, les coefficients de l'équation différentielle (8) sont des fonctions algébriques multiformes, non seulement du point a_k choisi comme variable indépendante, mais aussi des autres points de ramification a_i $(i \neq k)$. Seulement dans les cas particuliers mentionnés plus haut, où la surface R se trouve uniformément déterminée par la situation des points de ramification et par le nombre des feuillets, les coefficients β_λ seront des fonctions rationnelles de $a_1, \ldots, a_\sigma$; cela se vérifie, en effet, pour les équations auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques de première et de seconde espèce, équations qui, comme on le sait (1), sont du type de l'équation de Tissot-Pochhammer. Dans le cas général, où les quantités β_λ sont des fonctions rationnelles des $a_1, \ldots, a_\sigma$ et des coefficients $A_{k\lambda}$ qui en sont des fonctions algébriques, définies par le système irréductible $(M') = 0$, les solutions de l'équation différentielle (8) seront, non seulement les modules de périodicité de l'intégrale (7) appartenant à l'équation (1°) ou à la surface de Riemann R, mais aussi les modules de périodicité des intégrales

$$\int G(x, y_i)\, dx \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

appartenant aux différentes surfaces $R^{(0)}, R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots$ qui proviennent de R par monodromie des points de ramification. Pour obtenir toutes ces quantités, il faut faire décrire tous les chemins fermés possibles, non seulement à la variable indépendante a_k, mais aussi aux autres points a_i $(i \neq k)$ qui jouent le rôle de *paramètres* dans l'équation (8). Le groupe de monodromie $\mathfrak{G}_k$ de l'équation (8) s'obtient en faisant décrire à a_k tous les chemins fermés qui ramènent à leurs valeurs initiales les coefficients β_λ; d'après Fuchs (2), ce groupe est indépendant des paramètres a_i $(i \neq k)$. Ce sont précisément les circonstances que

(1) *Voir* FUCHS, *Journal de Crelle*, t. 71, p. 91; *cf.* mon *Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen*, t. II, 1 (1897), p. 472.

(2) *Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin*, 1897, p. 621.

j'ai étudiées pour le cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels dans mon Mémoire RP.II (nº II et suivants); le groupe $\mathfrak{S}_k$ présente alors $\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}$ isomorphismes en lui-même. Il est contenu comme sous-groupe distingué dans le groupe $\mathfrak{S}$ que l'on obtient en faisant décrire à toutes les quantités $a_1, \ldots, a_\sigma$ les chemins fermés qui ramènent à leurs valeurs initiales les coefficients β_λ et ce dernier groupe est évidemment isomorphe au groupe Γ (sous-groupe de G, défini au nº 2); il donne d'ailleurs les substitutions linéaires et homogènes des périodes qui correspondent aux transformations linéaires des fonctions théta-abéliennes.