Annales scientifiques de l'É.N.S.

W. Kapteyn

Sur un cas particulier de l'équation différentielle de Monge

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 20 (1903), p. 289-329

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1903_3_20__289_0>

SUR UN CAS PARTICULIER

DE

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE MONGE,

PAR M. W. KAPTEYN.

1. Dans un premier Mémoire (3e série, t. XVII de ce Journal), nous avons étudié les cas les plus simples de l'équation différentielle de Monge; dans celui-ci nous nous proposons de poursuivre ces recherches en déterminant les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation

$$\mathrm{H}r + \mathrm{L}t + \mathrm{M} = 0$$

admette deux intégrales intermédiaires et ces intégrales elles-mêmes.

En adoptant pour l'équation la forme

$$r - \lambda^2 t + \mu = 0,$$

λ et μ étant des fonctions indéterminées des variables x, y, z, p et q, les deux systèmes de caractéristiques sont définis par les équations suivantes

$$\begin{aligned} dz - p\,dx - q\,dy &= 0, & dz - p\,dx - q\,dy &= 0,\\ dy + \lambda\,dx &= 0, & dy - \lambda\,dx &= 0,\\ dp + \lambda\,dq + \mu\,dx &= 0, & dp - \lambda\,dq + \mu\,dx &= 0. \end{aligned}$$

Les combinaisons intégrables de ces systèmes correspondent, d'après la théorie, avec les intégrales communes des deux systèmes linéaires

$$\mathrm{A}(\mathrm{V}) = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q} - \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p} = 0,$$

$$\mathrm{B}(\mathrm{V}) = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + (p - \lambda q)\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} - \mu \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p} = 0,$$

et

$$A_1(V) = \frac{\partial V}{\partial q} + \lambda \frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$

$$B_1(V) = \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y} + (p + \lambda q) \frac{\partial V}{\partial z} - \mu \frac{\partial V}{\partial p} = 0.$$

Supposons maintenant que l'équation donnée possède deux intégrales intermédiaires. Dans ce cas, il faut et il suffit que chacun des deux systèmes linéaires précédents admette deux intégrales communes. En déduisant des équations $A(V) = 0$ et $B(V) = 0$ les nouvelles équations

$$\begin{aligned} C(V) &= AB(V) - BA(V) = 0, \\ E(V) &= AC(V) - CA(V) = 0, \\ F(V) &= BC(V) - CB(V) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

pour obtenir le système complet, il est évident que ce système complet doit se réduire à trois équations indépendantes. Cette condition sera remplie si les équations $E(V) = 0$ et $F(V) = 0$ dépendent linéairement des trois premières. En développant

$$C(V) = -A(\lambda) \frac{\partial V}{\partial y} + A(p - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial z} + [B(\lambda) - A(\mu)] \frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$

$$E(V) = -AA(\lambda) \frac{\partial V}{\partial y} + AA(p - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial z} + [AB(\lambda) - AA(\mu) + C(\lambda)] \frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$

$$\begin{aligned} F(V) = [C(\lambda) - BA(\lambda)] \frac{\partial V}{\partial y} &+ [BA(p - \lambda q) - C(p - \lambda q)] \frac{\partial V}{\partial z} \\ &+ [BB(\lambda) - BA(\mu) + C(\mu)] \frac{\partial V}{\partial p} = 0, \end{aligned}$$

la condition cherchée prend la forme

$$\frac{AA(\lambda)}{A(\lambda)} = \frac{AA(p - \lambda q)}{A(p - \lambda q)} = \frac{AB(\lambda) - AA(\mu) + C(\lambda)}{B(\lambda) - A(\mu)},$$

$$\frac{BA(\lambda) - C(\lambda)}{A(\lambda)} = \frac{BA(p - \lambda q) - C(p - \lambda q)}{A(p - \lambda q)} = \frac{BB(\lambda) - BA(\mu) + C(\mu)}{B(\lambda) - A(\mu)}.$$

Il faut donc, pour que le premier système de caractéristiques admette deux combinaisons intégrables, que les quatre équations suivantes soient remplies :

$$
\begin{gathered}
2\lambda A A(\lambda) = 3A^2(\lambda), \\
3A(\lambda)[B(\lambda) - A(\mu)] = 2\lambda[AB(\lambda) - AA(\mu) + C(\lambda)], \\
2\lambda[BA(\lambda) - C(\lambda)] = A(\lambda)[3B(\lambda) - A(\mu)], \\
2\lambda[BB(\lambda) - BA(\mu) + C(\mu)] = [B(\lambda) - A(\mu)][3B(\lambda) - A(\mu)].
\end{gathered}
$$

En remarquant que la soustraction de la seconde de la troisième donne

$$\lambda[AA(\mu) - 3C(\lambda)] = A(\lambda)A(\mu),$$

on voit que le système précédent est équivalent au système

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
2\lambda AA(\lambda) &= 3A^2(\lambda), \\
\lambda[AA(\mu) - 3C(\lambda)] &= A(\lambda)A(\mu), \\
A(\lambda)[3B(\lambda) - A(\mu)] &= 2\lambda[BA(\lambda) - C(\lambda)], \\
2\lambda[BB(\lambda) - BA(\mu) + C(\mu)] &= [B(\lambda) - A(\mu)][3B(\lambda) - A(\mu)].
\end{aligned}
\right.
$$

Quand on pose

$$C_1(V) = A_1 B_1(V) - B_1 A_1(V),$$

le second système de caractéristiques admettra de même deux combinaisons intégrables, si l'on a

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
2\lambda A_1 A_1(\lambda) &= 3A_1^2(\lambda), \\
\lambda[A_1 A_1(\mu) + 3C_1(\lambda)] &= A_1(\lambda)A_1(\mu), \\
A_1(\lambda)[3B_1(\lambda) + A_1(\mu)] &= 2\lambda[B_1 A_1(\lambda) - C_1(\lambda)], \\
2\lambda[B_1 B_1(\lambda) + B_1 A_1(\mu) - C_1(\mu)] &= [B_1(\lambda) + A_1(\mu)][3B_1(\lambda) + A_1(\mu)].
\end{aligned}
\right.
$$

2. Pour déterminer la solution la plus générale de ces huit équations différentielles, nous allons d'abord les développer. La première équation du système (1) donne avec la première équation du système (2), par soustraction et addition

$$(\mathrm{I}^a)\qquad \lambda \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\, \partial q} - \frac{\partial \lambda}{\partial p}\frac{\partial \lambda}{\partial q} = 0,$$

$$(\mathrm{I}^b)\qquad 2\lambda\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}\right) - 3\left(\frac{\partial \lambda}{\partial q}\right)^2 - \lambda^2\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)^2 = 0.$$

En combinant de la même manière les équations correspondantes des systèmes (1) et (2), on obtient respectivement

$$(\mathrm{II}^a)\qquad \lambda \frac{\partial^2 \mu}{\partial p\, \partial q} = 2\frac{\partial \lambda}{\partial p}\frac{\partial \mu}{\partial q},$$

$$(\mathrm{II}^b)\qquad \lambda\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial q^2}+\lambda^2\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}\right)-3\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial p}\left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial p}-\mu\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)-\frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial\mu}{\partial q}$$
$$=3\lambda\left[\frac{\partial\lambda}{\partial p}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+p\frac{d\lambda}{\partial z}\right)-\frac{\partial\lambda}{\partial q}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)-2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right],$$

$$(\mathrm{III}^a)\qquad 2\lambda^2\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial x}+p\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial z}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial q\,\partial y}+q\frac{\partial^2\lambda}{\partial q\,\partial z}\right)$$
$$-4\lambda^2\frac{\partial\lambda}{\partial z}-2\lambda^2\mu\frac{\partial^2\lambda}{\partial p^2}+\lambda^2\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\mu}{\partial p}-\lambda\mu\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)^2-\frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial\mu}{\partial q}$$
$$=5\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)-\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial p}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+p\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right),$$

$$(\mathrm{III}^b)\qquad 2\lambda\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial q\,\partial x}+p\frac{\partial^2\lambda}{\partial q\,\partial z}+\lambda^2\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial y}+q\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial z}\right)\right]$$
$$+\lambda\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\mu}{\partial q}-\frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)+\mu\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\lambda}{\partial q}$$
$$=3\frac{\partial\lambda}{\partial q}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+p\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)+\lambda^2\frac{\partial\lambda}{\partial p}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right),$$

$$(\mathrm{IV}^a)\qquad 2\lambda^2\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}+q\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial z}+p\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\,\partial z}+q\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial y}+q\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial z}\right)\right.$$
$$+\lambda\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial q\,\partial x}+p\frac{\partial^2\mu}{\partial q\,\partial z}\right)+\lambda^3\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial p\,\partial y}+q\frac{\partial^2\mu}{\partial p\,\partial z}\right)$$
$$=2\lambda\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+p\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)-2\lambda\mu\frac{\partial\lambda}{\partial p}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)$$
$$+2\frac{\partial\mu}{\partial q}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+p\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)+2\lambda^2\frac{\partial\lambda}{\partial p}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}+q\frac{\partial\mu}{\partial z}\right),$$

$$(\mathrm{IV}^b)\qquad 2\lambda\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+2p\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial z}+p^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}-2\mu\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial x}+p\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial z}\right)\right]$$
$$+2\lambda^3\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2\lambda}{\partial y\,\partial z}+q^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right)$$
$$+2\lambda^2\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial p\,\partial x}+p\frac{\partial^2\mu}{\partial p\,\partial z}\right)+2\lambda^2\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial q\,\partial y}+q\frac{\partial^2\mu}{\partial q\,\partial z}\right)$$
$$=3\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+p\frac{\partial\lambda}{\partial z}-\mu\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)^2+\lambda^2\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2$$
$$+4\lambda\frac{\partial\mu}{\partial q}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)+2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial p}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}+p\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)$$
$$+2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q}\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}+q\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial\mu}{\partial q}\right)^2-2\lambda\mu\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\mu}{\partial p}$$
$$-\lambda^2\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)^2+4\lambda^2\frac{\partial\mu}{\partial z}+2\lambda\mu\frac{\partial\lambda}{\partial z}+2\lambda^2\mu\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}-2\lambda\mu^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial p^2}.$$

3. D'après le Mémoire cité (p. 261) la solution la plus générale des équations (I^a) et (I^b) s'écrit

$$\lambda = \frac{a + 2bp + cp^2}{f + 2gq + hq^2} = \frac{P}{Q}, \tag{3}$$

où les six fonctions a, b, c, f, g, h des variables x, y et z sont liées par la condition

$$b^2 - ac = g^2 - fh = \alpha^2. \tag{4}$$

En intégrant maintenant l'équation (II^a) on obtient aisément

$$\mu = \lambda^2 Q_1 + P_1, \tag{5}$$

P_1 désignant une fonction indéterminée de x, y, z, p et Q_1 une fonction indéterminée de x, y, z et q.

En introduisant les valeurs (3) et (5) dans l'équation (II^b) celle-ci se réduit à

$$\begin{aligned} P^2\left(Q^2\frac{\partial^2 Q_1}{\partial q^2} - 3QQ'\frac{\partial Q_1}{\partial q} + 3Q'^2Q_1\right) + Q^2\left(P^2\frac{\partial^2 P_1}{\partial p^2} - 3PP'\frac{\partial P_1}{\partial p} + 3P'^2P_1\right)& \\ = 3\left[P'Q^2\left(\frac{\partial P}{\partial x} + p\frac{\partial P}{\partial z}\right) - PP'Q\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + p\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + PQQ'\left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right)\right.& \\ \left. - P^2Q'\left(\frac{\partial Q}{\partial y} + q\frac{\partial Q}{\partial z}\right) - 2PQ\left(Q\frac{\partial P}{\partial z} - P\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\right],& \end{aligned}$$

où P' et Q' représentent respectivement $\frac{\partial P}{\partial p}$ et $\frac{\partial Q}{\partial q}$.

Comme le second membre de cette équation est un polynome du huitième degré en p et q, il s'ensuit que les fonctions indéterminées P_1 et Q_1 doivent représenter aussi des polynomes du second degré respectivement en p et en q. Posons donc

$$P_1 = A + 2Bp + Cp^2,$$
$$Q_1 = F + 2Gq + Hq^2,$$

où A, B, C, F, G, H désignent des fonctions inconnues de x, y et z.

En introduisant ces valeurs dans l'équation précédente, l'égalisation des coefficients des mêmes puissances de p et q dans les deux membres donne vingt-cinq relations. Comme nous n'avons pas besoin de toutes ces relations, nous nous contenterons d'écrire seulement les cinq suivantes, dans lesquelles nous avons représenté les dérivées par rapport à x, y, z par les indices 1, 2, 3 et introduit la notation

$$(k_i l) = k_i l - l_i k,$$

$$p^4 q^4 : \quad 2c^2h^2(C+H) = 6ch(c_3 h) = U_1,$$

$$p^3 q^4 : \quad 8bch^2(C+H) + 12ch^2(cB - bC) = 6ch(c_1 h) + 6bh(c_3 h) + 12ch(b_3 h) = U_2,$$

$$p^2 q^4 : \quad 4h^2(ac+2b^2)(C+H) + 12ch^2(cA - aC) + 12bh^2(cB - bC) = 6bh(c_1 h) + 12ch(b_1 h) + 12bh(b_3 h) + 6ch(a_3 h) = U_3,$$

$$pq^4 : \quad 8abh^2(C+H) + 12ch^2(bA - aB) + 12bh^2(cA - aC) = 12bh(b_1 h) + 6ch(a_1 h) + 6bh(a_3 h) = U_4,$$

$$q^4 : \quad 2a^2h^2(C+H) + 12bh^2(bA - aB) = 6bh(a_1 h) = U_5.$$

De ces équations on déduira aisément

$$\begin{aligned}
C + H &= \frac{1}{2c^2h^2} U_1, \\
cB - bC &= \frac{1}{12ch^2}\left(U_2 - \frac{4b}{c} U_1\right), \\
cA - aC &= \frac{1}{12ch^2}\left(U_3 - \frac{b}{c} U_2 - \frac{2a}{c} U_1\right), \\
bA - aB &= \frac{1}{12ch^2}\left(U_4 - \frac{b}{c} U_3 + \frac{b^2}{c^2} U_2 - \frac{2ab}{c^2} U_1\right), \\
bA - aB &= \frac{1}{12bh^2}\left(U_5 - \frac{a^2}{c^2} U_1\right),
\end{aligned}$$

par suite

$$c^3 U_5 - bc^2 U_4 + b^2 c U_3 - b^3 U_2 + a(2b^2 - ac) U_1 = 0.$$

En introduisant dans cette relation les valeurs de U_2, U_3, U_4 et U_5, on obtient

$$-h(b^2 - ac)^2 U_1 = 0,$$

d'où

$$(c_3 h) = 0, \tag{6}$$

et, par conséquent,

$$C + H = 0 \tag{7}$$

ou

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial q^2} = 0.$$

La dernière relation nous permet de réduire l'équation différentielle à la forme suivante, dans laquelle nous avons remplacé $\frac{\partial P_1}{\partial p}$ et $\frac{\partial Q_1}{\partial q}$ par P'_1 et Q'_1,

$$\begin{aligned} & P^2 Q'(Q'Q_1 - QQ'_1) + Q^2 P'(P'P_1 - PP'_1) \\ & \quad = P'Q^2\left(\frac{\partial P}{\partial x} + p\frac{\partial P}{\partial z}\right) - PP'Q\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + p\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + PQQ'\left(\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z}\right) \\ & \qquad - P^2 Q'\left(\frac{\partial Q}{\partial y} + q\frac{\partial Q}{\partial z}\right) - 2PQ\left(Q\frac{\partial P}{\partial z} - p\frac{\partial Q}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

En introduisant encore les abréviations

$$G = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}, \qquad H = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z},$$

l'équation précédente prend la forme

$$\begin{aligned} (8) \qquad & P^2 Q'(Q'Q_1 - QQ'_1) + Q^2 P'(P'P_1 - PP'_1) \\ & \quad = P'Q^2 G(P) - PP'QG(Q) + PQQ'H(P) \\ & \qquad - P^2 Q' H(Q) - 2PQ\left(Q\frac{\partial P}{\partial z} - P\frac{\partial Q}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

4. En posant de la même manière

$$\lambda = \frac{P}{Q}, \qquad \mu = \lambda^2 Q_1 + P_1,$$

dans l'équation III^a on obtient

$$\begin{aligned} & 2PQ^2 G(P') - 2P^2 QH(Q') + P'Q^2 G(P) - P^2 Q' H(Q) \\ & \quad + 3PQQ'H(P) - 3PP'QG(Q) - 4PQ\left(Q\frac{\partial P}{\partial z} - P\frac{\partial Q}{\partial z}\right) \\ & \quad = 2PP''(P^2 Q_1 + Q^2 P_1) - Q^2 P'(PP'_1 - P'P_1) \\ & \qquad - P^2 Q'(QQ'_1 - Q'Q_1) - P^2 Q_1 (P'^2 - Q'^2). \end{aligned}$$

Or, comme on a

$$P'^2 - 2PP'' = Q'^2 - 2QQ'',$$

le second membre est équivalent à

$$2QQ''P^2 Q_1 + 2PP''Q^2 P_1 + P^2 Q'(Q'Q_1 - QQ'_1) + Q^2 P'(P'P_1 - PP'_1).$$

En remplaçant dans cette expression les deux derniers termes par leur valeur dans l'équation (8), l'équation différentielle précédente s'écrit, en omettant le facteur $2PQ$,

$$(9)\quad QG(P') - PH(Q') + Q'H(P) - P'G(Q) = P''QP_1 + PQ''Q_1 + Q\frac{\partial P}{\partial z} - P\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

En développant, l'égalisation des coefficients des mêmes puissances de p et q dans les deux membres donne les neuf relations suivantes :

$$\begin{aligned}
1 &: \quad 2cfA + 2ahF = 2fb_1 - 2ag_2 + 2a_2g - 2bf_1 + (f_3a),\\
p &: \quad 4cfB + 4bhF = 2f(c_1+b_3) - 4bg_2 + 4gb_2 - 2bf_3 - 2cf_1 + 2(f_3b),\\
q &: \quad 4cgA + 4ahG = 4gb_1 - 2a(h_2+g_3) + 2ga_3 + 2ha_2 - 4bg_1 + 2(g_3a),\\
p^2 &: \quad 2cfC + 2chF = 2cf_3 - 2cg_2 + 2gc_2 - 2cf_3 + (f_3c),\\
pq &: \quad 8cgB + 8bhG\\
&\qquad = 4g(c_1+b_3) - 4b(h_2+g_3) + 4gb_3 - 4hb_2 - 4bg_3 - 4cg_1 + 4(g_3b),\\
q^2 &: \quad 2chA + 2ahH = 2hb_1 - 2ah_3 + 2ha_3 - 2bh_1 + (h_3a),\\
p^2q &: \quad 4cgC + 4chG = 4gc_3 - 2c(h_2+g_3) + 2gc_3 + 2hc_2 - 4cg_3 + 2(g_3c),\\
pq^2 &: \quad 4chB + 4bhH = 2h(c_1+b_3) - 4bh_3 + 4hb_3 - 2bh_3 - 2ch_1 + 2(h_3b),\\
p^2q^2 &: \quad 2chC + 2chH = 2c_3h - 2ch_3 + 2hc_3 - 2ch_3 + (h_3c).
\end{aligned}$$

A cause des équations (6) et (7), la dernière relation ne nous apprend rien de nouveau. Les autres se simplifient en introduisant les mêmes équations (6) et (7). En effet, on a

$$\begin{aligned}
1 &: \quad 2f(cA - aC) + 2a(hF - fH) = 2(b_1f) + 2(a_2g) + (f_3a),\\
p &: \quad 4f(cB - bC) + 4b(hF - fH) = 2(c_1f) + 4(b_2g),\\
q &: \quad 4g(cA - aC) + 4a(hG - gH) = 4(b_1g) + 2(a_2h),\\
p^2 &: \quad 2c(hF - fH) = (c_3f) + 2(c_2g),\\
pq &: \quad 8g(cB - bC) + 8b(hG - gH) = 4(c_1g) + 4(b_3g) + 4(b_2h),\\
q^2 &: \quad 2h(cA - aC) = (a_3h) + 2(b_1h),\\
p^2q &: \quad 4c(hG - gH) = 4(c_3g) + 2(c_2h),\\
pq^2 &: \quad 4h(cB - bC) = 2(c_1h) + 4(b_3h).
\end{aligned}$$

De ces équations je déduis d'abord les relations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
cA - aC &= \frac{(a_3h) + 2(b_1h)}{2h}, &\qquad cB - bC &= \frac{(c_1h) + 2(b_3h)}{2h},\\
hF - fH &= \frac{(c_3f) + 2(c_2g)}{2c}, &\qquad hG - gH &= \frac{(c_2h) + 2(c_3g)}{2c},
\end{aligned}\right.$$

ou, en posant

$$(a_i h) = A_i, \quad (b_i h) = B_i, \quad (c_i h) = C_i, \quad (f_i h) = F_i, \quad (g_i h) = G_i,$$

et en remarquant que

$$(k_i l) = \frac{l(k_i h) - k(l_i h)}{h}.$$

$$(11) \quad \begin{cases} cA - aC = \dfrac{A_3 + 2B_1}{2h}, & cB - bC = \dfrac{C_1 + 2B_3}{2h}, \\ hF - fH = \dfrac{2gC_2 - 2cG_2 - 2cF_3}{2ch}, & hG - gH = \dfrac{hC_2 - 2cG_3}{2ch}. \end{cases}$$

Quant aux autres relations, on les réduira aisément aux formes suivantes :

$$(12) \quad \begin{cases} bcF_1 = cgA_2 - agC_2 - cfA_3 + acF_3, \\ c^2F_1 = 2cgB_2 - 2bgC_2 - 2cfB_3 + bcF_3, \\ 2bcG_1 = chA_2 - ahC_2 - cgA_3 + 2acG_3, \\ c^2G_1 = chB_2 - bhC_2 - cgB_3 + bcG_3. \end{cases}$$

Pour faire voir que les dernières relations ne sont pas indépendantes, je remarque que, en différentiant par rapport à x, y et z l'équation (6), ou

$$\frac{ac}{h^2} - \frac{b^2}{h^2} = \frac{f}{h} - \frac{g^2}{h^2},$$

on obtient

$$(13) \quad \begin{cases} hF_1 - 2gG_1 = cA_1 - 2bB_1 + aC_1, \\ hF_2 - 2gG_2 = cA_2 - 2bB_2 + aC_2, \\ hF_3 - 2gG_3 = cA_3 - 2bB_3. \end{cases}$$

Si, maintenant, on compare les deux valeurs de F_1 et ensuite les deux valeurs de G_1, on trouve respectivement

$$g[c^2A_2 - 2bcB_2 + (2b^2 - ac)C_2] = c^2fA_3 - 2bcfB_3 + c(b^2 - ac)F_3$$

et

$$h[c^2A_2 - 2bcB_2 + (2b^2 - ac)C_2] = c^2gA_3 - 2bcgB_3 + 2c(b^2 - ac)G_3,$$

d'où

$$cA_3 - 2bB_3 = hF_3 - 2gG_3.$$

Après une légère réduction, les trois relations restantes prendront les formes suivantes :

$$(14)\qquad \begin{cases} cA_1 - 2bB_1 + aC_1 = bA_3 - 2aB_3, \\ c^2A_2 - 2bcB_2 + (2b^2 - ac)C_2 = c(gF_3 - 2fG_3), \\ c(gF_1 - 2fG_1) = bcA_2 - 2acB_2 + abC_2. \end{cases}$$

5. Après avoir trouvé les relations qui se déduisent de l'équation (III^a), arrêtons-nous un moment pour en déduire une conséquence qui nous permettra de simplifier encore l'équation (8) qui n'est autre que l'équation (II^b).

En substituant les valeurs

$$A = \frac{a}{c}C + \frac{A_3 + 2B_1}{2ch},$$
$$B = \frac{b}{c}C + \frac{C_1 + 2B_3}{2ch},$$

que l'on tire des équations (11), dans

$$P = A + 2Bp + Cp^2,$$

on obtient

$$P_1 = \frac{C}{c}(a + 2bp + cp^2) + \frac{1}{2ch}[A_3 + 2B_1 + 2(C_1 + 2B_3)p]$$

ou

$$P_1 = \frac{C}{c}P + \frac{1}{2ch}[A_3 + 2B_1 + 2(C_1 + 2B_3)p],$$

et en différentiant par rapport à p

$$P'_1 = \frac{C}{c}P' + \frac{1}{ch}(C_1 + 2B_3).$$

On aura donc

$$P'P_1 - PP'_1 = \frac{1}{ch}[b(2B_1 + A_3) - a(2B_3 + C_1) + (2B_1 + A_3)cp + (2B_3 + C_1)cp^2]$$

ou, d'après (14),

$$P'P_1 - PP'_1 = \frac{1}{h}[A_1 + 2B_1p + C_1p^2 + (A_3 + 2B_3p)p] = h\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{P}{h} + p\frac{\partial}{\partial z}\frac{P}{h}\right).$$

Par suite,

$$(15)\qquad P'P_1 - PP'_1 = G(P) - P\frac{G(h)}{h}$$

et de même

$$(16)\qquad Q'Q_1 - QQ'_1 = -H(Q) + Q\frac{H(c)}{c}.$$

En introduisant ces valeurs, l'équation (8) se réduit, après division par PQ, à cette forme :

$$(17)\quad Q'H(P) - P'G(Q) - 2\left(Q\frac{\partial P}{\partial z} - P\frac{\partial Q}{\partial z}\right) = \frac{PQ'}{c}H(c) - \frac{QP'}{h}G(h).$$

L'égalisation des coefficients des mêmes puissances de p et q dans les deux membres de cette équation ne donne rien de nouveau. Toutes les relations qui se déduisent des équations (II^b) et (III^a) seront donc comprises dans les équations (6), (7), (11) et (14).

6. L'équation différentielle (III^b) que nous allons étudier à présent s'écrit, en introduisant

$$\lambda = \frac{P}{Q}, \qquad \mu = \lambda^2 Q_1 + P_1,$$

$$\begin{aligned} &P^2P'(Q'Q_1 - QQ'_1) + Q_2Q'(P'P_1 + PP'_1)\\ &\quad = 2P^2QH(P') - 2PQ^2G(Q')\\ &\qquad + Q^2Q'G(P) - PP'QH(P) + PQQ'G(Q) - P^2P'H(Q).\end{aligned}$$

En profitant des relations (15) et (16), on obtient la forme plus simple

$$2PH(P') - 2QG(Q') - P'H(P) + Q'G(Q) = \frac{PP'}{c}H(c) - \frac{QQ'}{h}G(h).$$

Si maintenant on développe les deux membres, on verra aisément que l'égalisation des coefficients des mêmes puissances de p et q ne donne aucune relation nouvelle.

7. Il nous faut maintenant réduire l'équation (IV^a). Pour y arriver, nous la mettons d'abord sous la forme

$$\begin{aligned} &2\lambda^2 GG(\lambda) - 2\lambda^2\mu\frac{\partial}{\partial p}H(\lambda) + \lambda G\left(\frac{\partial\mu}{\partial q}\right) + \lambda^3\frac{\partial}{\partial p}H(\mu)\\ &\quad = 2\lambda G(\lambda)H(\lambda) - 2\lambda\mu\frac{\partial\lambda}{\partial p}H(\lambda) + 2\frac{\partial\mu}{\partial q}G(\lambda) + 2\lambda^2\frac{\partial\lambda}{\partial p}H(\mu).\end{aligned}$$

Or, on a

$$2\lambda^3 G \frac{H(\lambda)}{\lambda} = 2\lambda^2 GH(\lambda) - 2\lambda G(\lambda)\, H(\lambda)$$

$$-2\lambda^3\mu \frac{\partial}{\partial p} \frac{H(\lambda)}{\lambda} = -2\lambda^2\mu \frac{\partial}{\partial p} H(\lambda) + 2\lambda\mu\, H(\lambda) \frac{\partial\lambda}{\partial p}$$

$$\lambda^3 G \frac{\frac{\partial\mu}{\partial q}}{\lambda^2} = \lambda G \left(\frac{\partial\mu}{\partial q}\right) - 2G(\lambda) \frac{\partial\mu}{\partial q}$$

$$\lambda^5 \frac{\partial}{\partial p} \frac{H(\mu)}{\lambda^2} = \lambda^3 \frac{\partial}{\partial p} H(\mu) - 2\lambda^2 \frac{\partial\lambda}{\partial p} H(\mu),$$

par suite, l'équation précédente s'écrit aussi

$$2G \frac{H(\lambda)}{\lambda} - 2\mu \frac{\partial}{\partial p} \frac{H(\lambda)}{\lambda} + G \frac{\frac{\partial\mu}{\partial q}}{\lambda^2} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{H(\mu)}{\lambda^2} = 0.$$

En introduisant

$$\mu = \lambda^2 Q_1 + P_1,$$

on aura

$$\frac{H(\mu)}{\lambda^2} = H(Q_1) + 2Q_1 \frac{H(\lambda)}{\lambda} + \frac{H(P_1)}{\lambda^2},$$

par suite,

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{H(\mu)}{\lambda^2} = 2Q_1 \frac{\partial}{\partial p} \frac{H(\lambda)}{\lambda} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{H(P_1)}{\lambda^2}$$

et

$$\lambda^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{H(\mu)}{\lambda^2} = 2(\mu - P_1) \frac{\partial}{\partial p} \frac{H(\lambda)}{\lambda} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{H(P_1)}{\lambda^2}.$$

Avec cette valeur, l'équation se réduit à la forme

$$2G \frac{H(\lambda)}{\lambda} - 2P_1 \frac{\partial}{\partial p} \frac{H(\lambda)}{\lambda} + G \frac{\frac{\partial\mu}{\partial q}}{\lambda^2} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{H(P_1)}{\lambda^2} = 0.$$

Si maintenant on introduit

$$\lambda = \frac{P}{Q},$$

on obtiendra après quelques réductions faciles

$$\begin{aligned}(18)\quad & Q^2\left[PGH(P) - G(P)\,H(P) - PP_1\,H(P') + P'P_1\,H(P) + \frac{P^2}{2} H(P'_1) - PP'\,H(P_1)\right] \\ & = P^2\left[QGH(Q) - G(Q)\,H(Q) + QQ_1\,G(Q') + Q'Q_1\,G(Q) - \frac{Q^2}{2} G(Q'_1) + QQ'\,G(Q_1)\right]\end{aligned}$$

Cette équation admet encore une simplification notable avec les relations (15) et (16).

En effet, en opérant avec G sur l'équation

$$Q'Q_1 - QQ'_1 = -H(Q) + \frac{Q}{c}H(c),$$

on obtient

$$\begin{aligned} Q_1G(Q') + Q'G(Q_1) - QG(Q'_1) - Q'_1G(Q) + GH(Q) \\ = \frac{H(c)}{c}G(Q) + QG\frac{H(c)}{c}. \end{aligned}$$

Avec cette identité, l'expression entre parenthèses du second membre de l'équation (18) prend la forme simple

$$\frac{Q^2}{2}G(Q'_1) + Q^2G\frac{H(c)}{c}.$$

De la même manière, en opérant sur

$$P_1P' - PP'_1 = G(P) - \frac{P}{h}G(h),$$

avec H, le facteur entre parenthèses du premier membre de l'équation (18) s'écrit

$$-\frac{P^2}{2}H(P'_1) + P^2H\frac{G(h)}{h}.$$

En divisant par P^2Q^2, l'équation (18) se réduira à la forme

$$H\frac{G(h)}{h} - G\frac{H(c)}{c} = \tfrac{1}{2}[G(Q'_1) + H(P'_1)]. \tag{19}$$

Or,

$$\frac{G(h)}{h} = \frac{\partial}{\partial x}\log h + p\frac{\partial}{\partial z}\log h, \qquad \frac{H(c)}{c} = \frac{\partial}{\partial y}\log c + q\frac{\partial}{\partial z}\log c,$$
$$\tfrac{1}{2}Q'_1 = G + Hq, \qquad \tfrac{1}{2}P'_1 = B + Cp,$$

par suite

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\log h + p\frac{\partial}{\partial z}\log h\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\log c + q\frac{\partial}{\partial z}\log c\right) \\ = \frac{\partial G}{\partial x} + p\frac{\partial G}{\partial z} + q\frac{\partial H}{\partial x} + pq\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial y} + q\frac{\partial B}{\partial z} + p\frac{\partial C}{\partial y} + pq\frac{\partial C}{\partial z}. \end{aligned}$$

En comparant les coefficients des mêmes puissances de p et q, cette équation donne

$$\begin{aligned}
1: &\quad \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \log \frac{h}{c},\\
p: &\quad \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z} \log \frac{h}{c},\\
q: &\quad \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z} \log \frac{h}{c},\\
pq: &\quad \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \log \frac{h}{c},
\end{aligned}$$

ou, en faisant attention aux relations (6) et (7),

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \log \frac{h}{c},\\
&\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} = 0,
\end{aligned}\right.$$

8. Il nous reste encore à étudier l'équation différentielle (IV^b) qui est la plus compliquée.

Écrivons d'abord cette équation dans la forme

$$\begin{aligned}
&2\lambda G G(\lambda) - 4\lambda\mu G\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right) + 2\lambda^3 H H(\lambda) + 2\lambda^2 G\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right) + 2\lambda^2 H\left(\frac{\partial\mu}{\partial q}\right)\\
&\quad = 3\left[G^2(\lambda) - 2\mu\frac{\partial\lambda}{\partial p} G(\lambda) + \mu^2\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)^2\right] + \lambda^2 H^2(\lambda) + 4\lambda\frac{\partial\mu}{\partial q} H(\lambda)\\
&\qquad + 2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial p} G(\mu) + 2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q} H(\mu) + \left(\frac{\partial\mu}{\partial q}\right)^2 - 2\lambda\mu\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\mu}{\partial p} - \lambda^2\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)^2\\
&\qquad + 4\lambda^2\frac{\partial\mu}{\partial z} + 2\lambda\mu\frac{\partial\lambda}{\partial z} + 2\lambda^2\mu\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2} - 2\lambda\mu^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial p^2}.
\end{aligned}$$

En substituant

$$\lambda = \frac{P}{Q}, \qquad \mu = \lambda^2 Q_1 + P_1,$$

cette équation se réduira, si l'on fait attention aux relations (15),

(16) et (17), à cette forme symétrique

$$
\begin{aligned}
& Q^2 \Big[2PQ^2GG(P) - 2P^2QGG(Q) - 3Q^2G^2(P) + 2PQG(P)G(Q) \\
& \quad + P^2G^2(Q) + 3P'Q^2P_1G(P) + PP'QP_1G(Q) - 4PQ^2P_1G(P') \\
& \quad - 2PP'Q^2G(P_1) + 2P^3P'G(Q_1) + 2P^2Q^2G(P'_1) + 3P^2Q'P_1H(Q) \\
& \quad - 3PQQ'P_1H(P) + 4PQP_1\left(Q\frac{\partial P}{\partial z} + P\frac{\partial Q}{\partial z}\right) - 2P^2\frac{\partial}{\partial z}(P^2Q_1 + Q^2P_1) \\
& \quad + 2PP''Q^2P_1^2 + 3P^2Q'^2P_1Q_1 + P^2Q^2P_1'^2 \\
& \qquad\qquad\qquad - PQP_1(3PQ'Q'_1 + 2PQP''_1 + P'QP'_1) \Big] \\
& + P^2 \Big[-2P^2QHH(Q) + 2PQ^2HH(P) + 3P^2H^2(Q) \\
& \quad - 2PQH(P)H(Q) - Q^2H^2(P) + 3P^2Q'Q_1H(Q) \\
& \quad + PQQ'Q_1H(P) - 4P^2QQ_1H(Q') - 2P^2QQ'H(Q_1) \\
& \quad + 2Q^3Q'H(P_1) + 2P^2Q^2H(Q'_1) + 3P'Q^2Q_1G(P) \\
& \quad - 3PP'QQ_1G(Q) + 4PQQ_1\left(Q\frac{\partial P}{\partial z} + P\frac{\partial Q}{\partial z}\right) \\
& \quad - 2Q^2\frac{\partial}{\partial z}(P^2Q_1 + Q^2P_1) - 2P^2QQ''Q_1^2 - 3P'^2Q^2P_1Q_1 \\
& \quad - \quad P^2Q^2Q_1'^2 + PQQ_1(3P'QP'_1 - 2PQP''_1 + PQ'Q'_1) \Big] = 0.
\end{aligned}
$$

En remplaçant dans cette équation $GG(P)$ et $HH(Q)$, d'après (15) et (16), on obtiendra aisément

$$
\begin{aligned}
(a) \qquad & Q^2 \Big[-2P^2QGG(Q) + 2PQG(P)G(Q) + P^2G^2(Q) \\
& \quad + 2P^3P'G(Q_1) + 3P^2Q'P_1H(Q) - 3PQQ'P_1H(P) \\
& \quad - Q^2G^2(P) + P'Q^2P_1G(P) + PP'QP_1G(Q) - 2PQ^2P_1G(P') \\
& \quad + 2P^2Q^2G\frac{G(h)}{h} + 4PQP_1\left(Q\frac{\partial P}{\partial z} + P\frac{\partial Q}{\partial z}\right) \\
& \quad - 2P^2\frac{\partial}{\partial z}(P^2Q_1 + Q^2P_1) + 2PP''Q^2P_1^2 + 3P^2Q'^2P_1Q_1 \\
& \qquad\qquad + P^2Q^2P_1'^2 - PQP_1(3PQ'Q'_1 + 2PQP''_1 + P'QP'_1) \Big] \\
& + P^2 \Big[2PQ^2HH(P) - 2PQH(P)H(Q) - Q^2H^2(P) \\
& \quad + 2Q^3Q'H(P_1) + 3P'Q^2Q_1G(P) - 3PP'QQ_1G(Q) \\
& \quad + P^2H^2(Q) + P^2Q'Q_1H(Q) + PQQ'Q_1H(P)
\end{aligned}
$$

$$-2P^2QQ_1H(Q')-2P^2Q^2H\frac{H(c)}{c}+4PQQ_1\left(Q\frac{\partial P}{\partial z}-P\frac{\partial Q}{\partial z}\right)$$
$$-2Q^2\frac{\partial}{\partial z}(P^2Q_1+Q^2P_1)-2P^2QQ''Q_1^2-3P'^2Q^2P_1Q_1$$
$$\left.-P^2Q^2Q_1'^2+PQQ_1(3P'QP_1'+2PQQ_1''+PQ'Q_1')\right]=0.$$

Remarquons maintenant que, d'après les relations (15) et (16), on a

$$P^2Q^2P_1'^2-Q^2G^2(P)+P'Q^2P_1G(P)$$
$$=-P'Q^2P_1G(P)+P'^2Q^2P_1^2+\frac{2P^2Q^2P_1'}{h}G(h)-\frac{P^2Q^2}{h^2}G^2(h),$$
$$2PP''Q^2P_1^2-2P^2Q^2P_1P_1''-2PQ^2P_1G(P')$$
$$=-\frac{2PP'Q^2P_1}{h}G(h)+2PQ^2P_1\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{P}{h}h_3\right),$$
$$-PQ(3PQ'Q_1'+P'QP_1')P_1+3P^2Q'P_1H(Q)$$
$$=P'Q^2P_1G(P)-P'^2Q^2P_1^2$$
$$-\frac{PP'Q^2P_1}{h}G(h)-3P^2Q'^2P_1Q_1+\frac{3P^2QQ'P_1}{c}H(c).$$

En ajoutant ces trois équations, on voit que la somme des termes des premiers membres est divisible par P; en effet, cette somme se réduit à

$$P\left[Q^2\frac{2PP_1'-3P'P_1}{h}G(h)+\frac{3PQQ'P_1}{c}H(c)\right.$$
$$\left.-\frac{PQ^2}{h^2}G^2(h)+2Q^2P_1\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{P}{h}h_3\right)-3PQ'^2P_1Q_1\right].$$

La somme des termes analogues de la seconde partie du premier membre de l'équation (a) se réduira de la même manière à la forme

$$Q\left[P^2\frac{2QQ_1'-3Q'Q_1}{c}H(c)+\frac{3PP'QQ_1}{h}G(h)\right.$$
$$\left.+\frac{P^2Q}{c^2}H^2(c)+2P^2Q_1\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{Q}{c}c_3\right)+3P'^2QP_1Q_1\right].$$

En introduisant ces valeurs, l'équation (a) sera divisible par PQ;

en omettant ce facteur on obtiendra

$$
\begin{aligned}
(b)\qquad & Q\Big[-2PQGG(Q)+2QG(P)G(Q)+PG^2(Q)+2P^2P'G(Q_1)\\
&\quad -3QQ'P_1H(P)+P'QP_1G(Q)+2PQ^2G\frac{G(h)}{h}\\
&\quad +Q^2\frac{2PP'_1-3P'P_1}{h}G(h)+\frac{3PQQ'P_1}{c}H(c)-\frac{PQ^2}{h^2}G^2(h)\\
&\quad +2Q^2P_1\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{P}{h}h_3\right)+4QP_1\left(Q\frac{\partial P}{\partial z}+P\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\\
&\qquad\qquad -2P\frac{\partial}{\partial z}(P^2Q_1+Q^2P_1)\Big]\\
&+P\Big[2PQHH(P)-2PH(P)H(Q)-QH^2(P)+2Q^2Q'H(P_1)\\
&\quad -3PP'Q_1G(Q)+PQ'Q_1H(P)-2P^2QH\frac{H(c)}{c}\\
&\quad +P^2\frac{2QQ'_1-3Q'Q_1}{c}H(c)+\frac{3PP'QQ_1}{h}G(h)+\frac{P^2Q}{c^2}H^2(c)\\
&\quad +2P^2Q_1\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{Q}{c}c_3\right)+4PQ_1\left(Q\frac{\partial P}{\partial z}+P\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\\
&\qquad\qquad -2Q\frac{\partial}{\partial z}(P^2Q_1+Q^2P_1)\Big]=0.
\end{aligned}
$$

Pour simplifier encore cette équation, remarquons que

$$2G(P)G(Q)=2G(Q)\left[P_1P'-PP'_1+\frac{P}{h}G(h)\right],$$

par suite

$$
\begin{aligned}
&2G(P)G(Q)+P'P_1G(Q)-3Q'P_1H(P)\\
&\qquad=3P_1[P'G(Q)-Q'H(P)]+2G(Q)\left[\frac{P}{h}G(h)-PP'_1\right],
\end{aligned}
$$

ou, d'après l'équation (17),

$$
\begin{aligned}
&2G(P)G(Q)+P'P_1G(Q)-3Q'P_1H(P)\\
&\qquad=3P_1\left[2\left(P\frac{\partial Q}{\partial z}-Q\frac{\partial P}{\partial z}\right)-\frac{PQ'}{c}H(c)+\frac{P'Q}{h}G(h)\right]\\
&\qquad\qquad+2G(Q)\left[\frac{P}{h}G(h)-PP'_1\right].
\end{aligned}
$$

Ajoutons aux deux membres

$$4P_1\left(Q\frac{\partial P}{\partial z}+P\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{2PQP'_1}{h}G(h)$$
$$-\frac{3P'QP_1}{h}G(h)+\frac{3PQ'P_1}{c}H(c)+2QP_1\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{2PQP_1}{h}h_3,$$

alors on aura

$$2G(P)G(Q)+P'P_1G(Q)-3Q'P_1H(P)+4P_1\left(Q\frac{\partial P}{\partial z}+P\frac{\partial Q}{\partial z}\right)$$
$$+Q\frac{2PP'_1-3P'P_1}{h}G(h)+\frac{3PQ'P_1}{c}H(c)+2QP_1\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{P}{h}h_3\right)$$
$$=10PP_1\frac{\partial Q}{\partial z}+\frac{2PQP'_1}{h}G(h)-\frac{2PQP_1}{h}h_3+2G(Q)\left[\frac{P}{h}G(h)-PP'_1\right].$$

Une discussion analogue donne

$$-2H(P)H(Q)+Q'Q_1H(P)-3P'Q_1G(Q)+4Q_1\left(Q\frac{\partial P}{\partial z}+P\frac{\partial Q}{\partial z}\right)$$
$$+P\frac{2QQ'_1-3Q'Q_1}{c}H(c)+\frac{3P'QQ_1}{h}G(h)+2PQ_1\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{Q}{c}c_3\right)$$
$$=10QQ_1\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{2PQQ'_1}{c}H(c)-\frac{2PQQ_1}{c}c_3-2H(P)\left[\frac{Q}{c}H(c)+QQ'_1\right].$$

Si maintenant on introduit ces valeurs dans l'équation (b), on pourra omettre de nouveau un facteur PQ. De cette manière, on obtiendra

$$-2QGG(Q)+G^2(Q)+2PP'G(Q_1)+2Q^2G\frac{G(h)}{h}-\frac{Q^2}{h^2}G^2(h)$$
$$-2\frac{\partial}{\partial z}(P^2Q_1+Q^2P_1)+10QP_1\frac{\partial Q}{\partial z}+\frac{2Q^2P'_1}{h}G(h)-\frac{2Q^2P_1}{h}h_3$$
$$+2QG(Q)\left[\frac{G(h)}{h}-P'_1\right]+2PHH(P)-H^2(P)+2QQ'H(P_1)$$
$$-2P^2H\frac{H(c)}{c}+\frac{P^2}{c^2}H^2(c)-2\frac{\partial}{\partial z}(P^2Q_1+Q^2P_1)+10PQ_1\frac{\partial P}{\partial z}$$
$$+\frac{2P^2Q'_1}{c}H(c)-\frac{2P^2Q_1}{c}c_3-2PH(P)\left[\frac{H(c)}{c}+Q'_1\right]=0.$$

Or

$$2\mathrm{G}\frac{\mathrm{G}(h)}{h}-\frac{\mathrm{G}^2(h)}{h^2}=\frac{2h\mathrm{GG}(h)-3\mathrm{G}^2(h)}{h^2},$$

$$2\mathrm{H}\frac{\mathrm{H}(c)}{c}-\frac{\mathrm{H}^2(c)}{c^2}=\frac{2c\mathrm{HH}(c)-3\mathrm{H}^2(c)}{c^2},$$

$$-4\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{P}^2\mathrm{Q}_1+\mathrm{Q}^2\mathrm{P}_1)+10\mathrm{QP}_1\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}+10\mathrm{PQ}_1\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}$$
$$=-4\left(\mathrm{P}^2\frac{\partial \mathrm{Q}_1}{\partial z}+\mathrm{Q}^2\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial z}\right)+2\mathrm{PQ}_1\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}+2\mathrm{QP}_1\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z},$$

donc enfin

$$\begin{aligned}(21)\quad &\mathrm{Q}\Big[-2\mathrm{GG}(\mathrm{Q})+2\mathrm{Q}'\mathrm{H}(\mathrm{P}_1)+\frac{2\mathrm{G}(h)}{h}\mathrm{G}(\mathrm{Q})-2\mathrm{P}'_1\mathrm{G}(\mathrm{Q})\\
&\quad+\frac{2\mathrm{QP}'_1}{h}\mathrm{G}(h)-\frac{2\mathrm{QP}_1}{h}h_3+\mathrm{Q}\frac{2h\mathrm{GG}(h)-3\mathrm{G}^2(h)}{h^2}+2\mathrm{P}_1\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}\Big]\\
&+\mathrm{P}\Big[2\mathrm{HH}(\mathrm{P})+2\mathrm{P}'\mathrm{G}(\mathrm{Q}_1)-\frac{2\mathrm{H}(c)}{c}\mathrm{H}(\mathrm{P})-2\mathrm{Q}'_1\mathrm{H}(\mathrm{P})\\
&\quad+\frac{2\mathrm{PQ}'_1}{c}\mathrm{H}(c)-\frac{2\mathrm{PQ}_1}{c}c_3-\mathrm{P}\frac{2c\mathrm{HH}(c)-3\mathrm{H}^2(c)}{c^2}+2\mathrm{Q}_1\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}\Big]\\
&\qquad+\mathrm{G}^2(\mathrm{Q})+\mathrm{H}^2(\mathrm{P})-4\left(\mathrm{P}^2\frac{\partial \mathrm{Q}_1}{\partial z}+\mathrm{Q}^2\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial z}\right)=0.\end{aligned}$$

Cette équation du sixième degré en p et q doit donner les dernières relations entre les inconnues.

9. L'équation (21) peut être présentée sous une forme encore plus simple. En effet, en calculant le coefficient de p^3q dans le premier membre de l'équation (21), on obtient

$$\frac{4bc_2c_3}{c}+16bc\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}+8(bc_2)\mathrm{H}+8(b_{23}c)-\frac{2c_3}{c}(2b_2c-3bc_2)$$
$$-\frac{2c_2}{c}(2b_3c-3bc_3)+8c\left(c\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}+b\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}\right)-(4b_3c_2-4b_2c_3)-32bc\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}=0$$

ou

$$(c)\qquad c^2\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}=bc\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}+(b_2c)\mathrm{H}+\frac{c_3}{c}(b_2c)+\frac{c_2}{c}(b_3c)-(b_{23}c).$$

Or, en différentiant la relation connue (11)

$$\mathrm{B}=\frac{b}{c}\mathrm{C}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{c}{h}+\frac{(b_3c)}{c^2}$$

par rapport à y

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{b}{c}\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{(b_2 c)}{c^2} C + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\log\frac{c}{h} + \frac{(b_{23} c)}{c^2} - \frac{c_3}{c^3}(b_2 c) - \frac{c_2}{c^3}(b_3 c),$$

ou, d'après les équations (7) et (20),

$$(d)\quad c^2\frac{\partial B}{\partial y} = -\, bc\frac{\partial G}{\partial z} - (b_2 c) H + \frac{c^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\log\frac{c}{h} + (b_{23} c) - c_3(b_2 c) - c_2(b_3 c).$$

En ajoutant les équations (c) et (d) on trouve

$$c^2\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\log\frac{h}{c} = \frac{c^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\log\frac{c}{h},$$

d'où

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\log\frac{c}{h} = 0.$$

On voit donc que

$$\frac{c}{h} = \text{fonction de } x \text{ multipliée par une fonction de } y,$$

parce que, d'après l'équation (6), $\frac{c}{h}$ est indépendant de z. Or, comme la valeur de λ ne change pas quand on multiplie le numérateur et le dénominateur par un même facteur, on ne diminuera pas la généralité en choisissant

$$(22)\qquad \begin{cases} c = X, \\ h = Y, \end{cases}$$

en désignant par X une fonction arbitraire de x et par Y une fonction de la seule variable y.

D'après les équations (23) on aura

$$G(h) = H(c) = c_3 = h_3 = 0,$$

par suite, l'équation (21) prend la forme

$$(23)\qquad \begin{aligned} &Q\left[-2GG(Q) + 2Q'H(P_1) - 2P'_1 G(Q) + 2P_1\frac{\partial Q}{\partial z}\right] \\ &+ P\left[2HH(P) + 2P'G(Q_1) - 2Q'_1 H(P) + 2Q_1\frac{\partial P}{\partial z}\right] \\ &\qquad + G^2(Q) - H^2(P) - 4\left(P^2\frac{\partial Q_1}{\partial z} + Q^2\frac{\partial P_1}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned}$$

10. Avant d'étudier l'équation précédente, nous allons introduire les relations (11), (14), (20) et (22) dans les expressions de P, Q, P_1 et Q_1.

Pour y parvenir, j'écris les équations (14)

$$ch^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{b^2 - ac}{h^2} = b^3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{b^2 - ac}{b^2},$$

$$c^2 h \frac{\partial}{\partial y} \frac{b^2 - ac}{c^2} = g^3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{g^2 - fh}{g^2},$$

$$b^3 h \frac{\partial}{\partial y} \frac{b^2 - ac}{b^2} = cg^3 \frac{\partial}{\partial x} \frac{g^2 - fh}{g^2}.$$

En posant $b^2 - ac = g^2 - fh = \alpha^2$ et en faisant attention aux relations (22), ces équations se réduiront aux suivantes :

$$c \frac{\partial \alpha}{\partial x} = b \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \alpha \frac{\partial b}{\partial z},$$

$$h \frac{\partial \alpha}{\partial y} = g \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \alpha \frac{\partial g}{\partial z},$$

$$h\left(b \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \alpha \frac{\partial b}{\partial y}\right) = c\left(g \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \alpha \frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

Soit $\alpha = \dfrac{1}{\frac{\partial u}{\partial z}}$, alors les deux premières s'écriront

$$\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}{\frac{\partial u}{\partial z}} b = c \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial z}}{\frac{\partial u}{\partial z}},$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}{\frac{\partial u}{\partial z}} g = h \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z}}{\frac{\partial u}{\partial z}},$$

d'où

$$b = \frac{c \frac{\partial}{\partial x}(u + \varphi)}{\frac{\partial u}{\partial z}},$$

$$g = \frac{h \frac{\partial}{\partial y}(u + \psi)}{\frac{\partial u}{\partial z}},$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires des deux variables x et y. En substituant ces valeurs dans la troisième des équations précédentes, celle-ci donne

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y}.$$

On aura donc

$$\varphi - \psi = \xi - \eta,$$

où ξ représente une fonction de la variable x et η une fonction de la variable y.

Posons, au lieu des valeurs trouvées pour b et g,

$$b = \frac{c \dfrac{\partial}{\partial x}(u + \varphi + \eta)}{\dfrac{\partial}{\partial z}(u + \varphi + \eta)},$$

$$g = \frac{h \dfrac{\partial}{\partial y}(u + \psi + \xi)}{\dfrac{\partial}{\partial z}(u + \psi + \xi)},$$

et remarquons que

$$u + \varphi + \eta = u + \psi + \xi = v,$$

alors on voit que

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} b &= \frac{c v_1}{v_3}, \\ g &= \frac{h v_2}{v_3}, \end{aligned} \right.$$

et, par suite,

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{b^2 - \alpha^2}{c} = \frac{c^2 v_1^2 - 1}{c v_3^2}, \\ f &= \frac{g^2 - \alpha^2}{h} = \frac{h^2 v_2^2 - 1}{h v_3^2}. \end{aligned} \right.$$

En introduisant ces valeurs dans P et Q on a

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P} &= \frac{c^2 (v_1 + p v_3)^2 - 1}{c v_3^2} = \frac{c^2\, \mathrm{G}^2(v) - 1}{c v_3^2}, \\ \mathrm{Q} &= \frac{h^2 (v_2 + q v_3)^2 - 1}{h v_3^2} = \frac{h^2\, \mathrm{H}^2(v) - 1}{h v_3^2}, \end{aligned} \right.$$

Pour déterminer P_1 et Q_1 nous avons les relations (20), qui, d'après (23), s'écrivent

$$\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} = 0.$$

On y satisfera de la manière la plus générale en posant

$$B = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \qquad C = \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \qquad G = -\frac{\partial \sigma}{\partial y},$$

σ étant une fonction quelconque des variables x, y et z. Or cette fonction doit dépendre de la fonction v à cause des relations (11). En effet, d'après ces relations, on aura

$$B = \frac{b}{c}C + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{c}{h} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{b}{c},$$
$$G = -\frac{g}{h}C + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\log\frac{c}{h} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{g}{h},$$

ou

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{v_1}{v_3}\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_1}{v_3}\right) + \frac{c_1}{2c},$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{v_2}{v_3}\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_2}{v_3}\right) + \frac{h_2}{2h},$$

En posant

$$\sigma = \log(v_3\sqrt{ch}\,\rho), \tag{27}$$

ces équations se réduiront aux suivantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{v_1}{v_3}\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{v_2}{v_3}\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0,$$

qui font voir que ρ représente une fonction arbitraire de v. Il s'ensuit que

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} B &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{v_{13}}{v_3} + \frac{c_1}{2c} + \frac{\rho'}{\rho}v_1, \\ C &= \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{v_{33}}{v_3} + \frac{\rho'}{\rho}v_3, \\ G &= -\frac{\partial \sigma}{\partial y} = -\left(\frac{v_{23}}{v_3} + \frac{h_2}{2h} + \frac{\rho'}{\rho}v_2\right). \end{aligned}\right.$$

Pour déterminer les coefficients A et F, on substituera les valeurs trouvées dans les expressions

$$A = \frac{a}{c}C + \frac{a_3 + 2b_1}{2c},$$
$$F = -\frac{f}{h}C - \frac{2g_2 + f_3}{2h},$$

que l'on déduit des relations (11). De cette manière on obtient

$$(29)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{c^2 v_1^2 - 1}{c^2 v_3}\dfrac{\rho'}{\rho} + \dfrac{c_1 v_1 + c v_{11}}{c v_3}, \\ F = -\dfrac{h^2 v_2^2 - 1}{h^2 v_3}\dfrac{\rho'}{\rho} + \dfrac{h_2 v_2 + h v_{22}}{h v_3}, \end{cases}$$

d'où

$$(30)\qquad \begin{cases} P_1 = \dfrac{\rho'}{\rho}\dfrac{v_3}{c}P + \dfrac{c_1}{c v_3}G(v) + \dfrac{1}{v_3}GG(v) \\ -Q_1 = \dfrac{\rho'}{\rho}\dfrac{v_3}{h}Q + \dfrac{h^2}{h v_3}H(v) + \dfrac{1}{v_3}HH(v). \end{cases}$$

De la discussion précédente, il résulte que, si l'on choisit arbitrairement c comme fonction de x, h comme fonction de y, v comme fonction de x, y, z et $\rho(v) = \rho$ comme fonction de v, les fonctions

$$\lambda = \frac{P}{Q}, \qquad \mu = \frac{P^2 Q_1}{Q^2} + P_1$$

dans lesquelles P, Q, P_1 et Q_1 sont définies par les équations (26) et (30), représentent la solution la plus générale des équations différentielles (I^a), (I^b), (II^a), (II^b), (III^a), (III^b) et (IV^a).

11. Revenons, maintenant, à l'équation (23) que nous avons déduite de l'équation (IV^b). Je dis que la solution précédente satisfait aussi à cette équation. En effet, la partie dépendant de la fonction arbitraire s'écrit

$$2QQ'\left[\frac{v_3}{c}PH\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) + \frac{\rho'}{\rho}\frac{v_3}{c}H(P) + \frac{\rho'}{\rho}\frac{P}{c}H(v_3)\right],$$
$$-2PP'\left[\frac{v_3}{h}QG\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) + \frac{\rho'}{\rho}\frac{v^3}{h}G(Q) + \frac{\rho'}{\rho}\frac{Q}{h}G(v_3)\right]$$

et

$$\begin{aligned}
&-2QG(Q)\frac{\rho'}{\rho}\frac{v_3}{c}P' + 2PH(P)\frac{\rho'}{\rho}\frac{v_3}{h}Q' \\
&+2Q\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\rho'}{\rho}\frac{v_3}{c}P - 2P\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\rho'}{\rho}\frac{v_3}{h}Q, \\
&+4P^2\left[\frac{\rho\rho''-\rho'^2}{\rho^2}\frac{v_3^2}{h}Q + \frac{\rho'}{\rho}\frac{v_{33}}{h}Q + \frac{\rho'}{\rho}\frac{v_3}{h}\frac{\partial Q}{\partial z}\right] \\
&-4Q^2\left[\frac{\rho\rho''-\rho'^2}{\rho^2}\frac{v_3^2}{c}P + \frac{\rho'}{\rho}\frac{v_{33}}{c}P + \frac{\rho'}{\rho}\frac{v_3}{c}\frac{\partial P}{\partial z}\right].
\end{aligned}$$

Or, on a

$$H\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) = \frac{\rho\rho''-\rho'^2}{\rho^2}H(v), \qquad G\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) = \frac{\rho\rho''-\rho'^2}{\rho^2}G(v),$$

par suite, le coefficient de $\frac{\rho\rho''-\rho'^2}{\rho^2}$ prend la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{2PQQ'}{c}v_3H(v) - \frac{2PP'Q}{h}v_3G(v) + 4P^2Q\frac{v_3^2}{h} - 4PQ^2\frac{v_3^2}{c} \\
&= \frac{2PQ}{c}v_3[Q'(v^2+qv_3) - 2Qv_3] - \frac{2PQ}{h}v_3[P'(v_1+pv_3) - 2Pv_3] \\
&= \frac{4PQ}{c}v_3[gv_2 - fv_3 + (hv_2 - qv_3)q] - \frac{4PQ}{h}v_3[bv_1 - av_3 + (cv_1 - bv_3)q] .
\end{aligned}$$

On voit donc que ce coefficient se réduit à zéro, parce qu'on a

$$\begin{aligned}
hv_2 - gv_3 &= 0, & cv_1 - bv_3 &= 0, \\
gv_2 - fv_3 &= \frac{1}{hv_3}, & bv_1 - av_3 &= \frac{1}{cv_3}.
\end{aligned}$$

Quant au coefficient de $\frac{\rho'}{\rho}$ il se réduira aussi à zéro.

En effet, écrivons ce coefficient

$$\begin{aligned}
&2v_3\left(\frac{Q}{c} + \frac{P}{h}\right)[Q'H(P) - P'G(Q)] + 2PQ\left[\frac{Q'H(v_3)}{c} - \frac{P'G(v_3)}{h}\right] \\
&\quad + 2PQv_3\left(\frac{1}{c}\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{1}{h}\frac{\partial P}{\partial z}\right) + 4v_3\left(\frac{P^2}{h}\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{Q^2}{c}\frac{\partial P}{\partial z}\right) + 4PQv_{33}\left(\frac{P}{h} - \frac{Q}{c}\right)
\end{aligned}$$

et remarquons que l'on a

$$\begin{aligned}
&2v_3\left(\frac{Q}{c} + \frac{P}{h}\right)[Q'H(P) - P'G(Q)] + 2PQ\left[\frac{Q'H(v_3)}{c} - \frac{P'G(v_3)}{h}\right] \\
&\quad = \frac{2P'Q}{ch}(cP + 2hQ)G(v_3) - \frac{2PQ'}{ch}(hQ + 2cP)H(v_3),
\end{aligned}$$

et

$$2\,PQ\rho_3\left(\frac{1}{c}\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{1}{h}\frac{\partial P}{\partial z}\right)=\frac{4\,PQ}{ch\rho_3}\left[h_2 H(\rho)H(\rho_3)-c^2\,G(\rho)G(\rho_3)\right]+4\,PQ\rho_{33}\left(\frac{P}{h}-\frac{Q}{c}\right)$$

$$4\rho_3\left(\frac{P^2}{h}\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{Q^2}{c}\frac{\partial P}{\partial z}\right)=\frac{8}{\rho_3}\quad\left[P^2 H(\rho)H(\rho_3)-Q^2 G(\rho)G(\rho_3)\right]+8\,PQ\rho_{33}\left(\frac{P}{h}-\frac{Q}{c}\right),$$

alors, on voit que ce coefficient admet l'expression suivante

$$\begin{aligned}&\frac{2\,P'Q}{ch}(cP+2hQ)G(\rho_3)-\frac{2\,PQ'}{ch}(hQ+2cP)H(\rho_3)\\&\quad+\frac{4PQ}{ch\rho_3}\left[h^2 H(\rho)H(\rho_3)-c^2 G(\rho)G(\rho_3)\right]\\&\quad+\frac{8}{\rho_3}\left[P^2 H(\rho)H(\rho_3)-Q^2 G(\rho)G(\rho_3)\right].\end{aligned}$$

Si, maintenant, dans cette expression, on met

$$G(\rho)=\frac{\rho_3}{2\,c}\,P'\qquad\text{et}\qquad H(\rho)=\frac{\rho_3}{2\,h}\,Q',$$

d'après les équations (26), on obtient

$$\begin{aligned}&2\,P'Q\frac{G(\rho_3)}{ch}\left[cP+2hQ-cP-2hQ\right]\\&\quad+2\,PQ'\frac{H(\rho_3)}{ch}\left[-hQ-2cP+hQ+2cP\right]=0.\end{aligned}$$

On voit donc que le premier membre de l'équation (23) est indépendant de la fonction arbitraire $\frac{\rho'}{\rho}$.

Quant au reste, que nous passerons sous silence, on vérifiera aisément qu'il se réduit aussi à zéro.

Il s'ensuit que la solution précédente est la solution cherchée, qui satisfait de la manière la plus générale à toutes les équations différentielles de l'Article 2.

12. Considérons, maintenant, pour déterminer les intégrales intermédiaires, le système complet

$$\begin{aligned}&A(V)=\frac{\partial V}{\partial q}-\lambda\frac{\partial V}{\partial p}=0,\\&B(V)=\frac{\partial V}{\partial x}-\lambda\frac{\partial V}{\partial y}+(p-\lambda q)\frac{\partial V}{\partial z}-\mu\frac{\partial V}{\partial q}=0,\\&C(V)=-A(\lambda)\frac{\partial V}{\partial y}-[2\lambda+qA(\lambda)]\frac{\partial V}{\partial z}+[B(\lambda)-A(\mu)]\frac{\partial V}{\partial p}=0\end{aligned}$$

ou le système Jacobien équivalent

$$(31)\quad \begin{cases} A^{(1)}(V) = \dfrac{\partial V}{\partial q} - \lambda \dfrac{\partial V}{\partial p} = 0, \\ B^{(1)}(V) = \dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{2\lambda^2 + pA(\lambda)}{A(\lambda)}\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\lambda B(\lambda) + \mu A(\lambda) - \lambda A(\mu)}{A(\lambda)}\dfrac{\partial V}{\partial p} = 0, \\ C^{(1)}(V) = \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{2\lambda + qA(\lambda)}{A(\lambda)}\dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{A(\mu) - B(\lambda)}{A(\lambda)}\dfrac{\partial V}{\partial p} = 0. \end{cases}$$

La première équation de ce système s'intègre sans difficulté et l'intégrale générale est une fonction arbitraire de x, y, z et

$$(32)\qquad u = \frac{1 + cG}{1 - cG}\cdot\frac{1 + hH}{1 - hH}.$$

Posons donc

$$V = \varphi(x, y, z, u)$$

dans les équations $B^{(1)}(V) = 0$ et $C^{(1)}(V) = 0$, alors on aura

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{2\lambda^2 + pA(\lambda)}{A(\lambda)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + B^{(1)}(u)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{2\gamma + qA(\lambda)}{A(\lambda)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + C^{(1)}(u)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Il faut, maintenant, développer les coefficients de ces équations en fonction de x, y, z et u.

Soit

$$m = h(c^2G^2 - 1), \qquad n = c(h^2H^2 - 1)$$

alors

$$A(\lambda) = A\left(\frac{m}{n}\right) = -\frac{2chv_3}{n}\lambda(cG + hH).$$

En posant, pour un moment $1 - hH = \gamma$, $1 + hH = \delta$, on a

$$u = \frac{1 + cG}{1 - cG}\cdot\frac{\delta}{\gamma},$$

par suite

$$cG = \frac{\gamma u - \delta}{\gamma u + \delta}, \qquad p = \frac{\gamma u - \delta}{cv_3(\gamma u + \delta)} - \frac{v_1}{v_3},$$

$$m = \frac{-4\gamma\delta hu}{(\gamma u + \delta)^2}, \qquad n = -c\gamma\delta, \qquad \lambda = \frac{4hu}{c(\gamma u + \delta)^2}, \qquad cG + hH = \frac{\gamma\delta(u - 1)}{\gamma u + \delta},$$

$$A(\lambda) = \frac{2hv_3\lambda(u - 1)}{\gamma u + \delta}$$

et enfin

$$\frac{2\lambda^2}{A(\lambda)} + p = \frac{u+1}{cv_3(u-1)} - \frac{v_1}{v_3},$$

$$\frac{2\lambda}{A(\lambda)} + q = \frac{\gamma u + \delta}{hv_3(u-1)} + \frac{\delta - \gamma}{2hv_3} - \frac{v_2}{v_3} = \frac{u+1}{hv_3(u-1)} - \frac{v_2}{v_3}.$$

Pour obtenir les coefficients

$$B^{(1)}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\lambda^2 + pA(\lambda)}{A(\lambda)}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\lambda B(\lambda) + \mu A(\lambda) - \lambda A(\mu)}{A(\lambda)}\frac{\partial u}{\partial p}$$

et

$$C^{(1)}(u) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2\lambda + qA(\lambda)}{A(\lambda)}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{A(\mu) - B(\lambda)}{A(\lambda)}\frac{\partial u}{\partial p}$$

où

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2c_1h}{m}G - \frac{2ch}{m}\left(\frac{\partial G}{\partial x} + \lambda\frac{\partial H}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2ch_2}{n}H - \frac{2ch}{m}\left(\frac{\partial G}{\partial y} + \lambda\frac{\partial H}{\partial y}\right),$$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2ch}{m}\left(\frac{\partial G}{\partial z} + \lambda\frac{\partial H}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{2ch}{m}v_3,$$

nous commencerons par l'évaluation de

$$A(\mu) - B(\lambda).$$

D'abord on a

$$A(\mu) = A(\lambda^2 Q_1 + P_1) = \lambda^2 A(Q_1) + 2\lambda Q_1 A(\lambda) + A(P_1)$$

où

$$P_1 = \frac{\rho'}{\rho}\frac{v_3}{c}P + \frac{c_1}{cv_3}G(v) + \frac{1}{v_3}GG(v)$$

$$-Q_1 = \frac{\rho'}{\rho}\frac{v_3}{h}Q + \frac{h_2}{hv_3}H(v) + \frac{1}{v_3}HH(v).$$

Or,

$$P = \frac{c^2G^2 - 1}{cv_3^2}, \qquad Q = \frac{h^2H^2 - 1}{hv_3^2},$$

par conséquent

$$A(P) = -\frac{2c\lambda G}{v_3}, \qquad A(Q) = \frac{2hH}{v_3}, \qquad A(\lambda) = -\frac{2\lambda(cG + hH)}{v_3 Q}.$$

En substituant ces valeurs dans

$$\mathrm{A}(\mathrm{P}_1) = \frac{\rho'}{\rho}\frac{\varphi_3}{c}\mathrm{A}(\mathrm{P}) - \frac{c_1}{c}\lambda - \frac{2\lambda}{\varphi_3}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}$$

$$-\mathrm{A}(\mathrm{Q}_1) = \frac{\rho'}{\rho}\frac{\varphi_3}{h}\mathrm{A}(\mathrm{Q}) + \frac{h_2}{h} + \frac{2}{\varphi_3}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z},$$

on obtiendra

$$\mathrm{A}(\mu) = \frac{2\lambda}{h}\frac{\rho'}{\rho}[2\lambda(c\mathrm{G}+h\mathrm{H}) - h(\mathrm{G}+\lambda\mathrm{H})] - \lambda\left(\frac{c_1}{c}+\lambda\frac{h_2}{h}\right) + \frac{4h_2\lambda^2\mathrm{H}(c\mathrm{G}+h\mathrm{H})}{h\varphi_3^2\mathrm{Q}}$$
$$-\frac{2\lambda}{h}\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}+\lambda\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\right) + \frac{4\lambda^2(c\mathrm{G}+h\mathrm{H})}{\varphi_3^2\mathrm{Q}}\mathrm{H}\,\mathrm{H}(\varphi).$$

Pour déterminer ensuite $\mathrm{B}(\lambda)$, introduisons $\lambda = \frac{m}{n}\cdot$ Alors on a

$$\mathrm{B}(\lambda) = \frac{1}{n^2}\left[n\frac{\partial m}{\partial x} - m\frac{\partial n}{\partial x} - \lambda\left(n\frac{\partial m}{\partial y} - m\frac{\partial n}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left. + (p-\lambda q)\left(n\frac{\partial m}{\partial z} - m\frac{\partial n}{\partial z}\right) - \mu n\frac{\partial m}{\partial p}\right].$$

Or,

$$\frac{\partial m}{\partial x} = 2ch\mathrm{G}\left(c_1\mathrm{G} + c\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{c_1}{c}n + 2ch^2\mathrm{H}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{h_2}{h}m + 2c^2h\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial n}{\partial y} = 2ch\mathrm{H}\left(h_2\mathrm{H} + h\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial m}{\partial z} = 2c^2h\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial n}{\partial z} = 2ch^2\mathrm{H}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial m}{\partial p} = 2c^2h\varphi_3\mathrm{G};$$

par suite, après une légère réduction,

$$\mathrm{B}(\lambda) = \frac{2c^2h\varphi_3^2\lambda}{n}\mathrm{G}\frac{\rho'}{\rho}\left(\frac{\mathrm{P}}{h} - \frac{\mathrm{Q}}{c}\right) - \lambda\left(\frac{c_1}{c}+\lambda\frac{h_2}{h}\right) + \frac{2ch_2\lambda^2\mathrm{H}}{n}(c\mathrm{G}+h\mathrm{H})$$
$$-\frac{2ch\lambda}{n}(c\mathrm{G}+h\mathrm{H})\mathrm{G}\mathrm{H}(\varphi) + \frac{2ch\lambda^2}{n}(c\mathrm{G}+h\mathrm{H})\mathrm{H}\mathrm{H}(\varphi).$$

En réunissant, le coefficient de $\frac{\rho'}{\rho}$ dans $\mathrm{A}(\mu) - \mathrm{B}(\lambda)$ prend la forme

$$\mathrm{R} = \frac{2\lambda}{n}[2\lambda(c\mathrm{G}+h\mathrm{H}) - h(\mathrm{G}+\lambda\mathrm{H})] - \frac{2c^2h\varphi_3^2\lambda}{n}\left(\frac{\mathrm{P}}{h} - \frac{\mathrm{Q}}{c}\right)\mathrm{G},$$

ou, parce que

$$\frac{P}{h} - \frac{Q}{c} = \frac{(cG + hH)(cG - hH)}{ch\varphi_3^2},$$

$$R = \frac{2\lambda}{h}[2\lambda\alpha - h(G + \lambda H)] - \frac{2c\lambda\alpha G}{n}(cG - hH).$$

en désignant par α la fonction $cG + hH$.

Il s'ensuit

$$R = \frac{2\lambda\alpha}{h}[2(c^2G^2 - 1) - cG(cG - hH)] - \frac{2\lambda}{n}(chGH\alpha - \alpha)$$

$$= \frac{2\lambda^2\alpha}{h} = \frac{2\lambda^2(cG + hH)}{h}.$$

On obtient ainsi

$$A(\mu) - B(\lambda) = \frac{2\lambda^2(cG + hH)}{h}\frac{\rho'}{\rho} + \frac{2ch\lambda^2}{n}(cG + hH)HH(v)$$

$$+ \frac{2ch\lambda}{n}(cG + hH)GH(v) + \frac{2ch_2\lambda^2H}{n}(cG + hH)$$

$$- \frac{2\lambda}{v_3}\left(\frac{\partial G}{\partial z} + \lambda\frac{\partial H}{\partial z}\right).$$

En revenant maintenant aux valeurs de $B^{(1)}(u)$ et $C^{(1)}(u)$, nous divisons d'abord l'expression précédente par

$$\frac{A(\lambda)}{\lambda} = -\frac{2ch\varphi_3(cG + hH)}{n},$$

puis nous soustrayons la valeur de $\mu = \lambda^2 Q_1 + P_1$. De cette manière on trouve

$$\frac{\lambda A(\mu) - \lambda B(\mu) - \mu A(\lambda)}{A(\lambda)}$$

$$= -\frac{m}{c^2h\varphi_3}\frac{\rho'}{\rho} - \frac{\lambda}{\varphi_3}GH(v) - \frac{1}{\varphi_3}GG(v) - \frac{c_1}{c\varphi_3}G$$

$$+ \frac{m}{ch\varphi_3^2(cG + hH)}\left(\frac{\partial G}{\partial z} + \lambda\frac{\partial H}{\partial z}\right),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{B^{(1)}(u)}{u} = &-\frac{2hc_1}{m}G - \frac{2ch}{m}\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{2ch}{n}\frac{\partial H}{\partial x}\\ &-\frac{2ch}{m}\left(\frac{u+1}{cv_3(u-1)} - \frac{v_1}{v_3}\right)\left(\frac{\partial G}{\partial z} + \lambda\frac{\partial H}{\partial z}\right)\\ &+\frac{2chv_3}{m}\left[\frac{c_1}{cv_3}G + \frac{1}{v_3}\left(\frac{\partial G}{\partial x} + p\frac{\partial G}{\partial z}\right) + \frac{\lambda}{v_3}\left(\frac{\partial H}{\partial x} + p\frac{\partial H}{\partial z}\right)\right]\\ &-\frac{m\left(\dfrac{\partial G}{\partial z} + \lambda\dfrac{\partial H}{\partial z}\right)}{chv_3^2(cG+hH)} + \frac{2}{c}\frac{\rho'}{\rho}.\end{aligned}$$

Dans cette expression, le coefficient de $\dfrac{\partial G}{\partial z} + \lambda\dfrac{\partial H}{\partial z}$ se réduit à zéro. En effet, ce coefficient s'écrit

$$\begin{aligned}&\frac{2ch}{m}\left[\frac{v_1}{v_3} - \frac{u+1}{cv_3(u-1)} + p - \frac{m}{chv_3}\frac{1}{cG+hH}\right]\\ &\quad = \frac{2ch}{m}\left[-\frac{u+1}{cv_3(u-1)} + \frac{\gamma u - \delta}{cv_3(\gamma u+\delta)} + \frac{4u}{cv_3(u-1)(\gamma u+\delta)}\right] = 0.\end{aligned}$$

Quant aux autres termes, ils s'annulent tous, excepté le dernier; on aura donc le résultat simple

$$B^{(1)}(u) = \frac{2u}{c}\frac{\rho'}{\rho}.$$

En calculant de la même manière $C^{(1)}(u)$ on obtient

$$C^{(1)}(u) = \frac{2u}{h}\frac{\rho'}{\rho}.$$

Les équations différentielles (33) se réduiront donc aux suivantes :

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{u+1}{cv_3(u-1)} - \frac{v_1}{v_3}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{2u}{c}\frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0,\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \left(\frac{u+1}{hv_3(u-1)} - \frac{v_2}{v_3}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{2u}{h}\frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0.\end{aligned}\right.$$

Ce système complet à quatre variables admet deux intégrales communes, dont une seulement peut être déterminée sans connaître φ et la fonction ρ.

Cette intégrale commune sera

$$\varphi_1 = \frac{\rho\sqrt{u}}{u-1};$$

soit φ_2 la seconde, alors l'intégrale intermédiaire cherchée prendra la forme

$$\varphi_2 = f\left(\frac{\rho\sqrt{u}}{u-1}\right), \tag{35}$$

f désignant une fonction arbitraire.

13. De la même manière, les intégrales du second système

$$\left\{\begin{aligned} &A^{(2)}(V) = \frac{\partial V}{\partial q} + \lambda\frac{\partial V}{\partial q} = 0,\\ &B^{(2)}(V) = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{2\lambda^2 - pA_1(\lambda)}{A_1(\lambda)}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\lambda A_1(\mu) + \lambda B_1(\lambda) - \mu A_1(\lambda)}{A_1(\lambda)}\frac{\partial V}{\partial p} = 0.\\ &C^{(2)}(V) = \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{2\lambda + qA_1(\lambda)}{A_1(\lambda)}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{A_1(\mu) + B_1(\lambda)}{A_1(\lambda)}\frac{\partial V}{\partial p} = 0 \end{aligned}\right. \tag{36}$$

se détermineront. En effet, l'intégrale générale de la première équation s'écrit

$$V = \psi(x, y, z, w),$$

où ψ représente une fonction arbitraire et

$$w = \frac{1+cG}{1-cG}\cdot\frac{1-hH}{1+hH}.$$

En substituant cette valeur de V dans la seconde et dans la troisième des équations (36), on obtient

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x} + \left(\frac{w+1}{cv_3(w-1)} - \frac{v_1}{v_3}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{2w}{c}\frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial w} = 0,\\ &\frac{\partial\psi}{\partial y} - \left(\frac{w+1}{hv_3(w-1)} + \frac{v_2}{v_3}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{2w}{h}\frac{\rho'}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial w} = 0. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Une première intégrale commune de ce système sera

$$\psi_1 = \frac{\rho\sqrt{w}}{w-1};$$

si donc on appelle la seconde, qui exige la connaissance de φ et de la fonction ρ, ψ_2, alors la seconde intégrale s'écrira

$$\psi_2 = f\left(\frac{\rho\sqrt{w}}{w-2}\right), \tag{38}$$

f désignant comme tantôt une fonction arbitraire.

14. Il ne sera pas sans intérêt d'ajouter un seul exemple.

Choisissons

$$v = xyz, \qquad \rho = -\frac{1}{v}, \qquad c = \frac{1}{x^2}, \qquad h = \frac{1}{y^2},$$

alors

$$\mathrm{G}(v) = y(z+px), \qquad \mathrm{H}(v) = x(z+qy),$$

$$\mathrm{GG}(v) = 2py, \qquad \mathrm{HH}(v) = 2qx,$$

$$\mathrm{P} = \frac{y^2(z+px)^2 - x^4}{x^4y^2}, \qquad \mathrm{Q} = \frac{x^2(z+qy)^2 - y^4}{x^2y^4},$$

$$\mathrm{P}_1 = \frac{x^4 - y^2(z+px)^2}{x^2y^2z} - \frac{2z}{x^2}, \qquad -\mathrm{Q}_1 = \frac{y^4 - x^2(z+qy)^2}{x^2y^2z} - \frac{2z}{y^2},$$

$$u = \frac{x^2 + y(z+px)}{x^2 - y(z+px)} \cdot \frac{y^2 + x(z+qy)}{y^2 - x(z+qy)}.$$

Le système (34) devient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{x}{y}\,\frac{u+1}{u-1} - \frac{z}{x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{2xu}{yz}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \left(\frac{y}{x}\,\frac{u+1}{u-1} - \frac{z}{y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{2yu}{xz}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0.$$

La première de ces équations donne

$$y = \text{const.},$$

$$r = \frac{xz(u-1)}{\sqrt{u}} = \text{const.},$$

$$s = \frac{2x^3}{3} + \frac{xyz(u-1)}{\sqrt{u}}\log\frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u}+1} = \text{const.},$$

par suite, l'intégrale générale s'écrit

$$\varphi = \theta(y, r, s).$$

En substituant cette valeur dans la seconde, on obtient

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{r}{y}\,\frac{\partial\theta}{\partial r} - 2y^2\,\frac{\partial\theta}{\partial s} = 0,$$

qui admet les deux intégrales

$$\theta_1 = yr = \text{const.}, \qquad \theta_2 = \frac{2y^3}{3} + s = \text{const.}$$

Dans le second système (37), on aura

$$w = \frac{x^2 + y(z+px)}{x^2 - y(z+px)} \cdot \frac{y^2 - x(z+qy)}{y^2 + x(z+qy)}$$

et

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \left(\frac{x}{y}\,\frac{w+1}{w-1} - \frac{z}{x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{2xw}{yz}\,\frac{\partial\psi}{\partial w} = 0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} - \left(\frac{y}{x}\,\frac{w+1}{w-1} + \frac{z}{y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{2yw}{xz}\,\frac{\partial\psi}{\partial w} = 0.$$

La première de ces équations admet les intégrales

$$y = \text{const.},$$
$$r = \frac{xz(w-1)}{\sqrt{w}} = \text{const.},$$
$$s = \frac{2x^3}{3} + \frac{xyz(w-1)}{\sqrt{w}}\log\frac{\sqrt{w}-1}{\sqrt{w}+1} = \text{const.};$$

donc l'intégrale générale sera

$$\psi = \theta(y, r, s).$$

En substituant cette valeur dans la seconde équation, on trouve

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{r}{y}\,\frac{\partial\theta}{\partial r} + 2y^2\,\frac{\partial\theta}{\partial s} = 0,$$

dont les intégrales seront

$$\theta_1 = yr = \text{const.} \qquad \theta_2 = \frac{2y^2}{3} - s = \text{const.}$$

Dans ce cas, l'équation différentielle

$$Q^2 r - P^2 t + (P^2 Q_1 + Q^2 P_1) = 0$$

admettra donc les deux intégrales intermédiaires

$$\frac{2(x^3+y^3)}{3} + \frac{xyz(u-1)}{\sqrt{u}}\log\frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u}+1} = f\left[\frac{xyz(u-1)}{\sqrt{u}}\right]$$

et

$$\frac{2(y^3-x^3)}{3}+\frac{xyz(w-1)}{\sqrt{w}}\log\frac{\sqrt{w}-1}{\sqrt{w}+1}=f\left[\frac{xyz(w-1)}{\sqrt{w}}\right].$$

15. Considérons encore les deux cas spéciaux où λ et μ sont indépendants de x, y et z et où λ et μ sont indépendants de p et q.

Dans le premier cas, on a

$$\lambda=\frac{a+2bp+cp^2}{f+2gq+hq^2}=\frac{P}{Q},$$

où a, b, c, f, g, h sont maintenant des constantes satisfaisant à la condition

$$b^2-ac=g^2-fh=\alpha^2.$$

Pour déterminer la fonction $\mu=\lambda^2 Q_1+P_1$, nous aurons les quatre équations différentielles

$$(\text{II}^b)\qquad \lambda\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial q^2}+\lambda^2\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}\right)-3\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial p}\left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial p}-\mu\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)-\frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial\mu}{\partial q}=0,$$

$$(\text{III}^a)\qquad 2\lambda^2\mu\frac{\partial^2\lambda}{\partial p^2}-\lambda^2\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\mu}{\partial p}+\lambda\mu\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)^2+\frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial\mu}{\partial q}=0,$$

$$(\text{III}^b)\qquad \lambda\left(\frac{\partial\mu}{\partial q}\frac{\partial\lambda}{\partial p}-\frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)+\mu\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\lambda}{\partial q}=0,$$

$$(\text{IV}^b)\quad 2\lambda^2\mu\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}-2\lambda\mu^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial p^2}+\left(\frac{\partial\mu}{\partial q}\right)^2-2\lambda\mu\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\mu}{\partial p}-\lambda^2\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)^2+3\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)^2\mu^2=0.$$

La première se réduit aisément à

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial q^2}-\frac{3}{Q}\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q_1}{\partial q}+\frac{3}{Q^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^2 Q_1=-\left[\frac{\partial^2 P_1}{\partial p^2}+\frac{3}{P}\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P_1}{\partial p}+\frac{3}{P^2}\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^2 P_1\right].$$

On aura donc

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial p^2}-\frac{3P'}{P}\frac{\partial P_1}{\partial p}+\frac{3P'^2}{P^2}P_1=L,$$

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial q^2}-\frac{3Q'}{Q}\frac{\partial Q_1}{\partial q}+\frac{3Q'^2}{Q^2}Q_1=L,$$

L désignant une constante.

Une intégrale particulière de la première équation étant $\frac{L}{2c}P$, l'intégrale générale de cette équation linéaire s'écrira

$$P_1 = P\left[\frac{L}{2c} + A(P'^2 - PP'') + BP'\right],$$

A et B représentant les constantes arbitraires. De la même manière, C et D désignant des constantes arbitraires, on aura

$$Q_1 = Q\left[-\frac{L}{2h} + C(Q'^2 - QQ'') + DQ'\right].$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (III^b) on obtient, après une légère réduction,

$$P''Q'(AP' + B) + P'Q''(CQ' + D) = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace P par $a + 2bp + cp^2$ et Q par $f + 2gq + hq^2$, l'égalisation des coefficients donne

$$cA + hC = 0, \qquad B = 0, \qquad D = 0.$$

Ainsi, on obtient

$$P_1 = P\left[\frac{L}{2c} + hA(P'^2 - PP'')\right],$$
$$-Q_1 = Q\left[\frac{L}{2h} + cA(Q'^2 - QQ'')\right],$$

ou, en posant

$$L = 2chM,$$
$$P_1 = hP[M + A(P'^2 - PP'')],$$
$$-Q_1 = cQ[M + A(Q'^2 - QQ'')].$$

En remarquant que

$$P'^2 - PP'' = 4\alpha^2 + PP'',$$
$$Q'^2 - QQ'' = 4\alpha^2 + QQ'',$$

et en écrivant

$$M + 4\alpha^2 A = K,$$

on trouve

$$P_1 = hP(K + APP''),$$
$$-Q_1 = cQ(K + AQQ''),$$

d'où

$$\mu = K\lambda(hQ - cP).$$

Pour étudier les deux équations restantes (III^a) et (IV^b), je pose

$$\frac{\mu}{\lambda} = u,$$

alors ils prendront respectivement les formes suivantes

$$\lambda^3 \frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial p} - \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial q} - \left[2\lambda^3\frac{\partial^2\lambda}{\partial p^2} + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial q}\right)^2\right] u = 0,$$

$$2\lambda^4 u \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + 2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q} u \frac{\partial u}{\partial q} + \lambda^2\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2 - \lambda^4\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial q}\right)^2 u^2 = 0.$$

En substituant maintenant

$$\lambda = \frac{P}{Q}, \qquad u = K(hQ - cP)$$

on verra aisément que ces équations sont remplies.

Il s'ensuit que la condition nécessaire pour que l'équation différentielle $r - \lambda^2 t + \mu = 0$, où λ et μ ne dépendent que de p et q, possède deux intégrales intermédiaires, s'exprime de la manière suivante

$$\lambda = \frac{a + 2bp + cp^2}{f + 2gq + hq^2} = \frac{P}{Q}, \qquad (b^2 - ac = g^2 - fh),$$
$$\mu = K\lambda(hQ - cP).$$

16. Pour déterminer dans ce cas les intégrales intermédiaires nous chercherons les intégrales communes du système (31) qui se réduit à présent au système suivant

$$\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{P}{Q}\frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} + \left(p - \frac{2P}{P' + Q'}\right)\frac{\partial V}{\partial z} - hKP\frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} + \left(q - \frac{2Q}{P' + Q'}\right)\frac{\partial V}{\partial z} - cKP\frac{\partial V}{\partial p} = 0.$$

L'intégrale générale de la première de ces équations admet la forme

$$V = \varphi(x, y, z, u),$$

φ étant une fonction arbitraire et u désignant la fonction

$$u = \frac{b+cp-\alpha}{b+cp+\alpha}\,\frac{g+hq-\alpha}{g+hq+\alpha} = \frac{P'-2\alpha}{P'+2\alpha}\,\frac{Q'-2\alpha}{Q'+2\alpha}.$$

En substituant cette valeur de V dans les autres équations, on obtient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(p - \frac{2P}{P'+Q'}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z} - hK\,\frac{\partial u}{\partial p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \left(q - \frac{2Q}{P'+Q'}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z} - cK\,\frac{\partial u}{\partial p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0.$$

Pour simplifier ces équations je déduis de la valeur de u

$$Q' = 2\alpha\,\frac{P'-2\alpha+(P'+2\alpha)u}{P'-2\alpha-(P'+2\alpha)u}.$$

Avec cette valeur on déterminera

$$p - \frac{2P}{P'-Q'} = -\left[\frac{\alpha(u+1)}{c(u-1)} + \frac{b}{c}\right],$$

$$q - \frac{2Q}{P'+Q'} = -\left[\frac{\alpha(u+1)}{c(u-1)} + \frac{g}{h}\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{2\alpha u}{P},$$

par suite,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \left[\frac{\alpha(u+1)}{c(u-1)} + \frac{b}{c}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial z} - 2\alpha hKu\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \left[\frac{\alpha(u+1)}{c(u-1)} + \frac{g}{h}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial z} - 2\alpha cKu\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0.$$

De la première de ces équations on déduira aisément

$$\varphi = \theta(y, r, s),$$

où

$$r = e^{2\alpha hKx}\,u,$$

$$s = u^{b-\alpha}(u-1)^{2\alpha}\,e^{-2ch\alpha Kz}.$$

La substitution de cette valeur de φ dans la dernière des équations donne

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} - 2c\alpha Kr\,\frac{\partial\psi}{\partial r} + 2c\alpha K(g-b)\,s\,\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0.$$

En combinant les deux intégrales indépendantes de cette équation

$$s r^{g-b} = \text{const.},$$
$$r e^{2c\alpha K y} = \text{const.},$$

on trouve la première intégrale intermédiaire cherchée

$$u^{g-\alpha} (u - 1)^{2\alpha} e^{2h\alpha K[(g-b)x - cz]} = f(u e^{2\alpha K(hx+cy)}).$$

En traitant de la même manière le second système (36), on obtient la seconde intégrale intermédiaire

$$\varpi^{-g-\alpha} (\varpi - 1)^{2\alpha} e^{-2h\alpha K[(g+b)x+cz]} = f(\varpi e^{2\alpha K(hx-cy)}),$$

où f représente une fonction arbitraire, et ϖ la fonction

$$\varpi = \frac{b + cp - \alpha}{b + cp + \alpha} \frac{g + hq + \alpha}{g + hq - \alpha}.$$

17. Supposons maintenant que λ et μ sont indépendantes de p et q. Dans ce cas les équations différentielles de l'Art. 2 se réduiront aux suivantes

$$(\mathrm{II}^b) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0,$$

$$(\mathrm{IV}^a) \qquad \lambda \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial y},$$

$$(\mathrm{IV}^b) \qquad 2\lambda \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \right) = 3 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 + 4\lambda^2 \frac{\partial \mu}{\partial z}.$$

Les deux premières équations font voir que λ a la forme d'un produit d'une fonction de x par une fonction de y.

Posons donc

$$\lambda = \frac{X'}{Y'},$$

où X' et Y' désignent les dérivées d'une fonction de x et d'une fonction de la variable y, alors la dernière des équations différentielles donne

$$\mu = \frac{X'^2}{4} \left(\frac{2X'X''' - 3X''^2}{X'^4} - \frac{2Y'Y''' - 3Y''^2}{Y'^4} \right) z + F(x, y),$$

$F(x, y)$ désignant une fonction arbitraire.

Intégrons maintenant le système

$$\frac{\partial V}{\partial q} - \lambda \frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda \frac{\partial V}{\partial y} + (p - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial z} - \mu \frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$

$$-2\lambda \frac{\partial V}{\partial z} + B(\lambda) \frac{\partial V}{\partial p} = 0.$$

De la dernière je déduis

$$V = \varphi(x, y, q, u)$$

où

$$u = z B(\lambda) + 2\lambda p.$$

En substituant ce résultat dans la première équation, on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} - 2\lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0,$$

d'où

$$\varphi = \psi(x, y, v),$$

en posant

$$v = u + 2\lambda^2 q = z B(\lambda) + 2\lambda p + 2\lambda^2 q.$$

Avec cette valeur, la seconde équation prend la forme

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y} + B(v) \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0.$$

Or,

$$B(v) = z BB(\lambda) + 3(p + \lambda q) B(\lambda) - 2\lambda\mu$$

et

$$2\lambda \left[BB(\lambda) - 2\lambda \frac{\partial \mu}{\partial z} \right] = 3 B^2(\lambda),$$

par suite,

$$\mu = \frac{2\lambda BB(\lambda) - 3B^2(\lambda)}{4\lambda^2} z + F(x, y);$$

donc

$$B(v) = 3(p + \lambda q) B(\lambda) + \frac{3B^2(\lambda)}{2\lambda} z - 2\lambda F = \frac{3B(\lambda)}{2\lambda} v - 2\lambda F.$$

La dernière équation différentielle

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left[\frac{3B(\lambda)}{2\lambda} v - 2\lambda F \right] \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0,$$

ou le système équivalent

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\lambda} = \frac{2\lambda\, dv}{3B(\lambda)\, v - 4\lambda^2 F}$$

possède une première intégrale

$$X + Y = \text{const.} = C.$$

Si de cette équation on déduit y en fonction de x, la seconde intégrale se déduira de l'équation linéaire

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{3}{2} X' \left(\frac{X''}{X'^2} + \frac{Y''}{Y'^2}\right) v = -2 \frac{X'}{Y'} F(x, y).$$

En résolvant l'intégrale générale de cette équation linéaire par rapport à la constante C', et en remplaçant C' par une fonction arbitraire de $X + Y$, on aura la première intégrale intermédiaire cherchée.

La seconde intégrale intermédiaire se déterminera de la même manière de

$$X - Y = C$$

et

$$\frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{3}{2} X' \left(\frac{X''}{X'^2} - \frac{Y''}{Y'^2}\right) v' = -2 \frac{X'}{Y'} F(x, y),$$

où

$$v' = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) z + 2\lambda(p - \lambda q).$$