W. ANISSIMOFF

Complément au Mémoire sur la théorie des courbes géodésiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 19 (1902), p. 63-64
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1902_3_19__63_0>

COMPLÉMENT AU MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES COURBES GÉODÉSIQUES (1),

PAR M. W. ANISSIMOFF.

Notre classification des surfaces réelles en deux classes, adoptée au Mémoire ci-mentionné, n'est pas absolue. En coordonnées symétriques x, y une intégrale première

$$f(x, y, y') = \text{const.} \tag{1}$$

des géodésiques d'une surface est dite de la *première classe* si, au moyen de la transformation $x = u + iv$, $y = u - iv$, les coordonnées u, v étant réelles, et par la séparation des nombres réels des imaginaires $f(x, y, y') = \mathrm{M}(u, v, v') + i\mathrm{N}(u, v, v')$ nous n'obtenons qu'*une* intégrale première

$$\begin{matrix} \mathrm{M}(u, v, v') = \text{const.}, \\ \mathrm{N}(u, v, v') = \text{const.}, \end{matrix} \qquad \mathrm{N} = \varphi(\mathrm{M}),$$

et la même intégrale (1) est dite de la *deuxième classe*, si les *deux* intégrales

$$\begin{matrix} \mathrm{M}(u, v, v') = \text{const.}, \\ \mathrm{N}(u, v, v') = \text{const.}, \end{matrix} \qquad \mathrm{N} \neq \varphi(\mathrm{M}),$$

sont *indépendantes* l'une de l'autre. En ce dernier cas, l'intégrale générale des géodésiques s'obtient sans quadratures.

---

(1) *Annales de l'École Normale*, octobre-novembre 1901.

A propos de ces intégrales, M. *D. Egoroff*, privat-docent à l'Université de Moscou, a démontré le théorème suivant :

Pour chaque surface réelle, il existe toujours en coordonnées symétriques une intégrale première de la deuxième classe de ses géodésiques.

En effet, supposons que les deux intégrales indépendantes

$$f(x, y, y') = \mathrm{M}(u, v, v') + i\mathrm{N}(u, v, v') = \text{const.},$$
$$f_1(x, y, y') = \mathrm{M}_1(u, v, v') + i\mathrm{N}_1(u, v, v') = \text{const.}$$

sont de la première classe ; nous aurons

$$\mathrm{N} = \varphi(\mathrm{M}), \qquad \mathrm{N}_1 = \varphi_1(\mathrm{M}_1).$$

Formons l'expression $\mathrm{M} + i\mathrm{M}_1 = \mathrm{F}(x, y, y')$. L'équation

$$\mathrm{F}(x, y, y') = \text{const.}$$

sera une intégrale de la deuxième classe, parce qu'il ne peut exister une liaison $\mathrm{M}_1 = \psi(\mathrm{M})$, les intégrales $f = \text{const.}$ et $f_1 = \text{const.}$ étant, par hypothèse, indépendantes.

Ce théorème important forme un complément essentiel aux résultats de la méthode d'intégration des équations différentielles au moyen des variables complexes.