ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH RIQUIER

Sur les systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 18 (1901), p. 421-472

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1901_3_18__421_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

DONT L'INTÉGRATION SE RAMÈNE A CELLE

D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES,

PAR M. CH. RIQUIER,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CAEN.

INTRODUCTION.

Les résultats, dont on trouvera ci-après l'exposition détaillée, peuvent se résumer en une proposition unique, dont voici l'énoncé :

Un système orthonome passif étant donné, si l'ensemble des éléments arbitraires, dont la connaissance équivaut à celle des déterminations initiales des inconnues, ne renferme, avec un nombre quelconque de constantes, qu'une seule fonction d'un nombre quelconque de variables, la recherche, dans le système proposé, d'intégrales ordinaires satisfaisant à des conditions initiales données se ramène à l'intégration successive de deux systèmes passifs d'équations différentielles totales du premier ordre, dont le second est indépendant du choix des conditions initiales.

Indiquons, en quelques mots, la marche suivie.

Étant donné un système différentiel résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées (et dont les seconds membres ne contiennent aucune dérivée principale de ces inconnues), je nomme *grade* du système l'ordre maximum de ses premiers membres : il va sans dire que le grade peut être, soit inférieur, soit égal à l'*ordre* du système.

Quand on a affaire à un système de grade 1, on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x).

Cela posé, j'établis, en premier lieu, que si, dans un système orthonome passif, l'ensemble des éléments arbitraires, dont la connaissance équivaut à celle des déterminations initiales des inconnues, ne comprend, avec un nombre quelconque de constantes, qu'une seule fonction d'un nombre quelconque de variables, la recherche, dans le système proposé, d'intégrales ordinaires satisfaisant à des conditions initiales données se ramène, *par de simples différentiations*, à une semblable recherche effectuée dans un *système orthonome passif de grade* 1, *dont le Tableau n'offre de cases vides que dans une seule colonne*. Je prouve, en second lieu, que cette dernière recherche se ramène à deux intégrations successives, savoir : 1° celle d'un système passif d'équations différentielles totales, variable avec le choix des conditions initiales; 2° celle d'un système linéaire et passif d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, indépendant du choix dont il s'agit, et qui, bien que les fonctions inconnues s'y trouvent en nombre généralement supérieur à 1, peut se traiter par la méthode classique de Jacobi.

La proposition générale formulée au début de cette Introduction a été communiquée à l'Académie des Sciences le 21 novembre 1898. Au commencement de la même année (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 31 janvier 1898), M. Beudon avait formulé un résultat analogue ([1]). Je tiens à faire observer à ce propos que, dès le 30 juillet 1894 (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*), j'ai examiné le cas, très voisin du cas général, d'un *système passif d'ordre* 1, *dont le Tableau n'offre de cases vides que dans une seule colonne :* la proposition dont j'ai publié l'énoncé le 21 novembre 1898

([1]) Voir aussi les *Annales de l'École Normale* (*Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux équations du premier ordre*, BEUDON, 1898) et le *Journal de Mathématiques* (*Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux systèmes d'équations du premier ordre en involution*, BEUDON, 1899).

n'est ainsi que l'extension toute naturelle d'un résultat que j'avais publié plus de quatre ans auparavant.

Dans l'exposé qui suit, comme dans les quelques lignes qui précèdent, se rencontrent un certain nombre de termes dont j'ai fait usage dans mes Travaux antérieurs, et dont il m'a semblé inutile de répéter ici la définition : le lecteur voudra bien se reporter aux travaux dont il s'agit, et notamment à mon récent Mémoire *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta Mathematica,* t. XXIII).

Extension de la méthode de Jacobi pour intégrer les équations aux dérivées partielles du premier ordre où les dérivées entrent linéairement (¹).

1. *Si l'on considère le système (évidemment orthonome)*

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{U}_x + \mathrm{S}_x \dfrac{\partial u}{\partial s} + \mathrm{T}_x \dfrac{\partial u}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{V}_x + \mathrm{S}_x \dfrac{\partial v}{\partial s} + \mathrm{T}_x \dfrac{\partial v}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial x} = \mathrm{W}_x + \mathrm{S}_x \dfrac{\partial w}{\partial s} + \mathrm{T}_x \dfrac{\partial w}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{U}_y + \mathrm{S}_y \dfrac{\partial u}{\partial s} + \mathrm{T}_y \dfrac{\partial u}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{V}_y + \mathrm{S}_y \dfrac{\partial v}{\partial s} + \mathrm{T}_y \dfrac{\partial v}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = \mathrm{W}_y + \mathrm{S}_y \dfrac{\partial w}{\partial s} + \mathrm{T}_y \dfrac{\partial w}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \mathrm{U}_z + \mathrm{S}_z \dfrac{\partial u}{\partial s} + \mathrm{T}_z \dfrac{\partial u}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = \mathrm{V}_z + \mathrm{S}_z \dfrac{\partial v}{\partial s} + \mathrm{T}_z \dfrac{\partial v}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = \mathrm{W}_z + \mathrm{S}_z \dfrac{\partial w}{\partial s} + \mathrm{T}_z \dfrac{\partial w}{\partial t}, \end{array}\right.$$

où u, v, w désignent des fonctions inconnues de x, y, z, s, t, et

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{c} \mathrm{U}_x,\ \mathrm{U}_y,\ \mathrm{U}_z,\ \mathrm{V}_x,\ \mathrm{V}_y,\ \mathrm{V}_z,\ \mathrm{W}_x,\ \mathrm{W}_y,\ \mathrm{W}_z, \\ \mathrm{S}_x,\ \mathrm{S}_y,\ \mathrm{S}_z,\ \mathrm{T}_x,\ \mathrm{T}_y,\ \mathrm{T}_z \end{array}\right.$$

des fonctions connues de x, y, z, s, t, u, v, w satisfaisant aux conditions voulues pour que le système (1) soit passif, l'intégration de ce dernier se ramène à celle d'un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre.

I. Nous ferons observer tout d'abord qu'en égalant entre elles les

(¹) Voir les *Comptes rendus* du 30 juillet 1894.

deux expressions ultimes de chacune des dérivées cardinales

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, \\[2mm]
\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y\,dz}, \\[2mm]
\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y\,dz},
\end{array}$$

on arrive à des relations de la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
A_{xy,s}\dfrac{\partial u}{\partial s}+A_{xy,t}\dfrac{\partial u}{\partial t}+A_{xy,u}=0,\\[2mm]
A_{xz,s}\dfrac{\partial u}{\partial s}+A_{xz,t}\dfrac{\partial u}{\partial t}+A_{xz,u}=0,\\[2mm]
A_{yz,s}\dfrac{\partial u}{\partial s}+A_{yz,t}\dfrac{\partial u}{\partial t}+A_{yz,u}=0,
\end{array}\right.\\[8mm]
\left\{\begin{array}{l}
A_{xy,s}\dfrac{\partial v}{\partial s}+A_{xy,t}\dfrac{\partial v}{\partial t}+A_{xy,v}=0,\\[2mm]
A_{xz,s}\dfrac{\partial v}{\partial s}+A_{xz,t}\dfrac{\partial v}{\partial t}+A_{xz,v}=0,\\[2mm]
A_{yz,s}\dfrac{\partial v}{\partial s}+A_{yz,t}\dfrac{\partial v}{\partial t}+A_{yz,v}=0,
\end{array}\right.\\[8mm]
\left\{\begin{array}{l}
A_{xy,s}\dfrac{\partial w}{\partial s}+A_{xy,t}\dfrac{\partial w}{\partial t}+A_{xy,w}=0,\\[2mm]
A_{xz,s}\dfrac{\partial w}{\partial s}+A_{xz,t}\dfrac{\partial w}{\partial t}+A_{xz,w}=0,\\[2mm]
A_{yz,s}\dfrac{\partial w}{\partial s}+A_{yz,t}\dfrac{\partial w}{\partial t}+A_{yz,w}=0,
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

où les A désignent certaines expressions composées avec les fonctions (2) et leurs dérivées partielles du premier ordre. Les conditions de passivité du système (1) sont donc

$$\begin{array}{l}
A_{xy,s}=A_{xy,t}=A_{xy,u}=A_{xy,v}=A_{xy,w}=0,\\
A_{xz,s}=A_{xz,t}=A_{xz,u}=A_{xz,v}=A_{xz,w}=0,\\
A_{yz,s}=A_{yz,t}=A_{yz,u}=A_{yz,v}=A_{yz,w}=0,
\end{array}$$

relations qui doivent avoir lieu quels que soient x, y, z, s, t, u, v, w.

Nous ferons observer, en second lieu, que ces conditions de passivité sont exactement les mêmes que celles du système

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = S_x \dfrac{\partial f}{\partial s} + T_x \dfrac{\partial f}{\partial t} - U_x \dfrac{\partial f}{\partial u} - V_x \dfrac{\partial f}{\partial v} - W_x \dfrac{\partial f}{\partial w}, \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = S_y \dfrac{\partial f}{\partial s} + T_y \dfrac{\partial f}{\partial t} - U_y \dfrac{\partial f}{\partial u} - V_y \dfrac{\partial f}{\partial v} - W_y \dfrac{\partial f}{\partial w}, \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z} = S_z \dfrac{\partial f}{\partial s} + T_z \dfrac{\partial f}{\partial t} - U_z \dfrac{\partial f}{\partial u} - V_z \dfrac{\partial f}{\partial v} - W_z \dfrac{\partial f}{\partial w}, \end{cases}$$

où f désigne une fonction inconnue de

$$(5)\qquad x,\quad y,\quad z,\quad s,\quad t,\quad u,\quad v,\quad w.$$

Il est facile de vérifier par le calcul l'exactitude de ces deux remarques.

II. *Si l'on désigne par f_1, f_2, f_3 trois solutions ordinaires du système (4) telles que le système des équations finies*

$$(6)\qquad f_1 = 0,\qquad f_2 = 0,\qquad f_3 = 0$$

soit résoluble par rapport à u, v, w conformément au principe général des fonctions implicites, les fonctions de x, y, z, s, t fournies par cette résolution constituent un groupe d'intégrales ordinaires du système (1).

Effectivement, les fonctions implicites u, v, w fournies par la résolution de (6) vérifient les relations

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial f_1}{\partial s} + \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{\partial f_1}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial s} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial f_1}{\partial t} + \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial f_1}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

obtenues en différentiant la première des relations (6) successivement par rapport à x, s, t. En multipliant les relations (7) respectivement par 1, $-\mathrm{S}_x$, $-\mathrm{T}_x$, et ajoutant membre à membre, il vient :

$$(8)\quad \frac{\partial f_1}{\partial x}-\mathrm{S}_x\frac{\partial f_1}{\partial s}-\mathrm{T}_x\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{S}_x\frac{\partial u}{\partial s}-\mathrm{T}_x\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$
$$+\frac{\partial f_1}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\mathrm{S}_x\frac{\partial v}{\partial s}-\mathrm{T}_x\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\mathrm{S}_x\frac{\partial w}{\partial s}-\mathrm{T}_x\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0.$$

D'un autre côté, la relation

$$(9)\quad \frac{\partial f_1}{\partial x}-\mathrm{S}_x\frac{\partial f_1}{\partial s}-\mathrm{T}_x\frac{\partial f_1}{\partial t}=-\mathrm{U}_x\frac{\partial f_1}{\partial u}-\mathrm{V}_x\frac{\partial f_1}{\partial v}-\mathrm{W}_x\frac{\partial f_1}{\partial w}$$

est vérifiée pour toutes les valeurs des quantités (5), puisque f_1 est une intégrale de (4); et, si l'on y remplace u, v, w par leurs valeurs en x, y, z, s, t tirées du système (6), elle le sera, comme (8), pour toutes valeurs de x, y, z, s, t. Cela étant, la combinaison de (8) et (9) donne immédiatement :

$$(10)\quad \frac{\partial f_1}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{U}_x-\mathrm{S}_x\frac{\partial u}{\partial s}-\mathrm{T}_x\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial f_1}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\mathrm{V}_x-\mathrm{S}_x\frac{\partial v}{\partial s}-\mathrm{T}_x\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$
$$+\frac{\partial f_1}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\mathrm{W}_x-\mathrm{S}_x\frac{\partial w}{\partial s}-\mathrm{T}_x\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0.$$

En opérant sur les équations $f_2=0$, $f_3=0$ comme on vient de le faire sur $f_1=0$, on obtiendrait deux autres relations ne différant de (10) que par le changement de f_1 en f_2 et en f_3. Finalement, puisque le système (6) est supposé résoluble conformément au principe général des fonctions implicites, le déterminant différentiel de ses premiers membres par rapport à u, v, w est différent de zéro, et les trois relations que nous venons de former donnent immédiatement :

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{U}_x-\mathrm{S}_x\frac{\partial u}{\partial s}-\mathrm{T}_x\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}-\mathrm{V}_x-\mathrm{S}_x\frac{\partial v}{\partial s}-\mathrm{T}_x\frac{\partial v}{\partial t}=0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}-\mathrm{W}_x-\mathrm{S}_x\frac{\partial w}{\partial s}-\mathrm{T}_x\frac{\partial w}{\partial t}=0.$$

On reproduit ainsi la première ligne du système (1), et l'on en reproduirait de même les deux autres lignes.

III. *Réciproquement, toute solution ordinaire du système* (1) *peut s'obtenir en égalant à zéro trois solutions ordinaires convenablement choisies du système* (4), *et résolvant le système ainsi obtenu par rapport à* u, v, w *conformément au principe général des fonctions implicites.*

Désignons par x_0, y_0, z_0, s_0, t_0 les valeurs des variables à partir desquelles nous supposons développées les intégrales considérées du système (1), et par

$$\upsilon(s, t), \quad \varphi(s, t), \quad \psi(s, t)$$

les fonctions de s, t auxquelles ces intégrales se réduisent dans l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0.$$

Désignons d'un autre côté par

$$\Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3, \quad \Gamma_4, \quad \Gamma_5 \tag{11}$$

cinq intégrales particulières du système (4) possédant la double propriété : 1° d'être développables à partir des valeurs

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0, \quad s_0, \quad t_0,$$
$$u_0 = \upsilon(s_0, t_0), \qquad v_0 = \varphi(s_0, t_0), \qquad w_0 = \psi(s_0, t_0);$$

2° d'avoir, relativement à s, t, u, v, w, un déterminant différentiel différent de zéro pour ces mêmes valeurs. On sait qu'en désignant par F une composante arbitraire, la fonction composée

$$F(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5)$$

est nécessairement aussi une solution du système (4).

Cela étant, introduisons dans les fonctions (11) l'hypothèse collective

$$\left\{ \begin{array}{lll} x = x_0, & y = y_0, & z = z_0, \\ u = \upsilon(s, t), & v = \varphi(s, t), & w = \psi(s, t); \end{array} \right. \tag{12}$$

nous obtiendrons ainsi cinq fonctions,

des seules variables s, t, fonctions telles, comme nous allons le prouver, que l'un au moins des déterminants du second ordre extraits du Tableau

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial s}, & \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial \gamma_3}{\partial s}, & \dfrac{\partial \gamma_4}{\partial s}, & \dfrac{\partial \gamma_5}{\partial s}, \\ \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial t}, & \dfrac{\partial \gamma_3}{\partial t}, & \dfrac{\partial \gamma_4}{\partial t}, & \dfrac{\partial \gamma_5}{\partial t} \end{array}$$

possède une valeur initiale différente de zéro.

Considérons en effet le déterminant

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial s} & \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial s} & \dfrac{\partial \Gamma_3}{\partial s} & \dfrac{\partial \Gamma_4}{\partial s} & \dfrac{\partial \Gamma_5}{\partial s} \\ \dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial t} & \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial t} & \dfrac{\partial \Gamma_3}{\partial t} & \dfrac{\partial \Gamma_4}{\partial t} & \dfrac{\partial \Gamma_5}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \Gamma_3}{\partial u} & \dfrac{\partial \Gamma_4}{\partial u} & \dfrac{\partial \Gamma_5}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial v} & \dfrac{\partial \Gamma_3}{\partial v} & \dfrac{\partial \Gamma_4}{\partial v} & \dfrac{\partial \Gamma_5}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial w} & \dfrac{\partial \Gamma_2}{\partial w} & \dfrac{\partial \Gamma_3}{\partial w} & \dfrac{\partial \Gamma_4}{\partial w} & \dfrac{\partial \Gamma_5}{\partial w} \end{vmatrix},$$

dont la valeur initiale est, par hypothèse, différente de zéro. Dans ce déterminant, on peut, par l'application des règles élémentaires, substituer respectivement à $\dfrac{\partial \Gamma_i}{\partial s}$ et $\dfrac{\partial \Gamma_i}{\partial t}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, éléments de rang i des deux premières lignes, les expressions respectives

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial s} + \frac{\partial \Gamma_i}{\partial u}\frac{\partial \upsilon}{\partial s} + \frac{\partial \Gamma_i}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial \Gamma_i}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial s},$$
$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_i}{\partial u}\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_i}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_i}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial t};$$

on peut, d'autre part, pour calculer les valeurs initiales de ces deux expressions, introduire dans la fonction Γ_i l'hypothèse (12), prendre les deux dérivées premières de la fonction $\gamma_i(s, t)$, ainsi obtenue, et calculer finalement les valeurs initiales de ces dérivées. Le déterminant (13) a donc même valeur initiale que le suivant :

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\gamma_1}{\partial s} & \frac{\partial\gamma_2}{\partial s} & \frac{\partial\gamma_3}{\partial s} & \frac{\partial\gamma_4}{\partial s} & \frac{\partial\gamma_5}{\partial s} \\ \frac{\partial\gamma_1}{\partial t} & \frac{\partial\gamma_2}{\partial t} & \frac{\partial\gamma_3}{\partial t} & \frac{\partial\gamma_4}{\partial t} & \frac{\partial\gamma_5}{\partial t} \\ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial u} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial u} & \frac{\partial\Gamma_3}{\partial u} & \frac{\partial\Gamma_4}{\partial u} & \frac{\partial\Gamma_5}{\partial u} \\ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial v} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial v} & \frac{\partial\Gamma_3}{\partial v} & \frac{\partial\Gamma_4}{\partial v} & \frac{\partial\Gamma_5}{\partial v} \\ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial w} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial w} & \frac{\partial\Gamma_3}{\partial w} & \frac{\partial\Gamma_4}{\partial w} & \frac{\partial\Gamma_5}{\partial w} \end{vmatrix},$$

et, dès lors, si les déterminants du second ordre qu'on peut extraire des deux premières lignes de (14) avaient tous des valeurs initiales nulles, il en serait de même du déterminant (13), ce qui est absurde. Nous supposerons, pour fixer les idées, que

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\gamma_1}{\partial s} & \frac{\partial\gamma_2}{\partial s} \\ \frac{\partial\gamma_1}{\partial t} & \frac{\partial\gamma_2}{\partial t} \end{vmatrix}$$

a une valeur initiale différente de zéro.

Cela étant, considérons les expressions

$$\Gamma_3 - \mathrm{H}_3(\Gamma_1, \Gamma_2), \quad \Gamma_4 - \mathrm{H}_4(\Gamma_1, \Gamma_2), \quad \Gamma_5 - \mathrm{H}_5(\Gamma_1, \Gamma_2),$$

et cherchons à déterminer les composantes H_3, H_4, H_5 de telle manière que la résolution, par rapport à u, v, w, du système

$$(16)\qquad \begin{cases} \Gamma_3 - \mathrm{H}_3(\Gamma_1, \Gamma_2) = 0, \\ \Gamma_4 - \mathrm{H}_4(\Gamma_1, \Gamma_2) = 0, \\ \Gamma_5 - \mathrm{H}_5(\Gamma_1, \Gamma_2) = 0, \end{cases}$$

fournisse précisément les intégrales considérées du système (1).

Observons tout d'abord que si les premiers membres des équations (16) s'annulent, quels que soient x, y, z, s, t, par la substitution à u, v, w des intégrales dont il s'agit, ils s'annuleront forcément, quels que soient s, t, dans l'hypothèse (12); on doit donc avoir, quels que soient s, t,

$$(17)\qquad \begin{cases} \gamma_3 - \mathrm{H}_3(\gamma_1, \gamma_2) = 0, \\ \gamma_4 - \mathrm{H}_4(\gamma_1, \gamma_2) = 0, \\ \gamma_5 - \mathrm{H}_5(\gamma_1, \gamma_2) = 0. \end{cases}$$

Faisons alors un changement de variables, et posons :

$$\gamma_1(s, t) = \theta_1, \qquad \gamma_2(s, t) = \theta_2;$$

puisque le déterminant différentiel de γ_1 et γ_2 par rapport à s, t a une valeur initiale différente de zéro, on peut de ces formules tirer s et t en fonctions de θ_1 et θ_2, et, si l'on substitue à s et t dans (17) les expressions ainsi obtenues, les relations résultantes doivent être vérifiées quels que soient θ_1 et θ_2 : en désignant donc par

$$\mathrm{M}_3(\theta_1, \theta_2), \quad \mathrm{M}_4(\theta_1, \theta_2), \quad \mathrm{M}_5(\theta_1, \theta_2)$$

ce que deviennent $\gamma_3(s, t)$, $\gamma_4(s, t)$, $\gamma_5(s, t)$ par cette substitution, on devra avoir identiquement

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}_3(\theta_1, \theta_2) - \mathrm{H}_3(\theta_1, \theta_2) = 0, \\ &\mathrm{M}_4(\theta_1, \theta_2) - \mathrm{H}_4(\theta_1, \theta_2) = 0, \\ &\mathrm{M}_5(\theta_1, \theta_2) - \mathrm{H}_5(\theta_1, \theta_2) = 0, \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à prendre pour H_3, H_4, H_5 les déterminations respectives M_3, M_4, M_5. Par suite de ce choix, les équations (16) deviennent

$$(18)\qquad \begin{cases} \Gamma_3 - \mathrm{M}_3(\Gamma_1, \Gamma_2) = 0, \\ \Gamma_4 - \mathrm{M}_4(\Gamma_1, \Gamma_2) = 0, \\ \Gamma_5 - \mathrm{M}_5(\Gamma_1, \Gamma_2) = 0, \end{cases}$$

et leurs premiers membres acquièrent la propriété de s'annuler identiquement dans l'hypothèse (12); dès lors, en admettant pour un instant que le déterminant différentiel, relatif à u, v, w, des équations (18) ait une valeur initiale différente de zéro, les fonctions implicites qu'elles définissent, et qui, en vertu de l'alinéa II, vérifient identiquement le système (1), coïncideront précisément avec les intégrales particulières que l'on considère. Reste donc à établir que le déterminant différentiel dont il s'agit a une valeur initiale différente de zéro.

Considérons à cet effet le déterminant (14), dont la valeur initiale, égale, comme nous l'avons vu, à celle du déterminant (13), est par là même différente de zéro. Aux trois dernières colonnes du déterminant (14), on peut, par l'application des règles élémentaires, substituer respectivement les trois suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial\gamma_3}{\partial s}-\dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial s}-\dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial\gamma_4}{\partial s}-\dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial s}-\dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial\gamma_5}{\partial s}-\dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial s}-\dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial s}, \\[2ex]
\dfrac{\partial\gamma_3}{\partial t}-\dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial t}-\dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial t}, & \dfrac{\partial\gamma_4}{\partial t}-\dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial t}-\dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial t}, & \dfrac{\partial\gamma_5}{\partial t}-\dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial t}-\dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial t}, \\[2ex]
\dfrac{\partial\Gamma_3}{\partial u}-\dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial u}-\dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial\Gamma_4}{\partial u}-\dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial u}-\dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial\Gamma_5}{\partial u}-\dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial u}-\dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial u}, \\[2ex]
\dfrac{\partial\Gamma_3}{\partial v}-\dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial v}-\dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial v}, & \dfrac{\partial\Gamma_4}{\partial v}-\dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial v}-\dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial v}, & \dfrac{\partial\Gamma_5}{\partial v}-\dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial v}-\dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial v}, \\[2ex]
\dfrac{\partial\Gamma_3}{\partial w}-\dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial w}-\dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial w}, & \dfrac{\partial\Gamma_4}{\partial w}-\dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial w}-\dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial w}, & \dfrac{\partial\Gamma_5}{\partial w}-\dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial w}-\dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial w}.
\end{array}\right.$$

Or, dans le Tableau ci-dessus, les éléments des deux premières lignes ont tous pour valeur initiale zéro : car, si l'on considère, par exemple, le premier élément de la première ligne, il a évidemment même valeur initiale que l'expression

$$\frac{\partial\gamma_3}{\partial s}-\frac{\partial M_3}{\partial\gamma_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial s}-\frac{\partial M_3}{\partial\gamma_2}\frac{\partial\gamma_2}{\partial s},$$

laquelle est nulle quels que soient s, t, puisque l'expression

$$\gamma_3-M_3(\gamma_1,\gamma_2)$$

jouit elle-même de cette propriété. Cela étant, le déterminant (14) a évidemment même valeur initiale que le produit du déterminant (15) par le déterminant formé avec les trois dernières lignes de (19); le second facteur de ce produit a donc, comme le produit lui-même, une valeur initiale différente de zéro, ce qu'il s'agissait d'établir.

IV. Il résulte de ce qui précède que l'intégration du système passif (1) se ramène à celle du système passif (4), et par suite à celle d'un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre.

Intégration d'un système orthonome passif de grade 1 [1], dont le Tableau n'offre de cases vides que dans une seule colonne.

2. Pour familiariser le lecteur avec notre méthode, nous n'aborderons que progressivement le cas général formulé dans le titre ci-dessus, et nous commencerons par supposer que les seconds membres du système ne sont pas d'ordre supérieur à 1.

Observons à ce propos qu'un système du premier ordre, résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, ne peut manquer d'être orthonome, si toutes les cases vides de son Tableau se trouvent situées dans une même colonne. Supposons, en effet, pour fixer les idées, qu'il implique les trois fonctions inconnues u, v, w des cinq variables indépendantes x, y, z, s, t, et que toutes les cases de son Tableau soient pleines, à l'exception des cases (s) et (t) de la colonne (w); pour se convaincre de la nature orthonome d'un pareil système, il suffit d'attribuer : 1° à x, y, z, s, t des cotes premières égales à 1, et à u, v, w des cotes premières nulles; 2° à x, y, z et u, v des cotes secondes égales à 1, à s, t et w des cotes secondes nulles.

Dans le cas où les seconds membres du système en question sont linéaires par rapport aux dérivées (premières) des fonctions inconnues, nous dirons, pour abréger, que le système est *linéaire*.

3. *Si, dans le Tableau d'un système passif et linéaire du premier ordre, toutes les cases vides appartiennent à une même colonne, la recherche de la solution ordinaire qui répond à des conditions initiales données se ramène à l'intégration successive de deux systèmes passifs d'équations différentielles totales du premier ordre, dont le second est indépendant du choix des conditions initiales* [2].

---

[1] Pour la définition du mot *grade*, voir l'Introduction du présent Mémoire.

[2] Voir les *Comptes rendus* du 30 juillet 1894.

I. En supposant, comme au numéro précédent, que le Tableau contienne cinq lignes et trois colonnes, avec deux cases vides dans sa dernière colonne, le système proposé est de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = B_{ux} + B_{ux}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{ux}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t}, &&\frac{\partial v}{\partial x} = B_{vx} + B_{vx}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{vx}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t}, &&\frac{\partial w}{\partial x} = B_{wx} + B_{wx}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{wx}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t},\\
&\frac{\partial u}{\partial y} = B_{uy} + B_{uy}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{uy}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t}, &&\frac{\partial v}{\partial y} = B_{vy} + B_{vy}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{vy}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t}, &&\frac{\partial w}{\partial y} = B_{wy} + B_{wy}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{wy}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t},\\
&\frac{\partial u}{\partial z} = B_{uz} + B_{uz}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{uz}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t}, &&\frac{\partial v}{\partial z} = B_{vz} + B_{vz}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{vz}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t}, &&\frac{\partial w}{\partial z} = B_{wz} + B_{wz}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{wz}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t},\\
&\frac{\partial u}{\partial s} = B_{us} + B_{us}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{us}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t}, &&\frac{\partial v}{\partial s} = B_{vs} + B_{vs}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{vs}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t},\\
&\frac{\partial u}{\partial t} = B_{ut} + B_{ut}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{ut}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t}, &&\frac{\partial v}{\partial t} = B_{vt} + B_{vt}^{ws}\frac{\partial w}{\partial s} + B_{vt}^{wt}\frac{\partial w}{\partial t},
\end{aligned}$$

où les B désignent des fonctions données de x, y, z, s, t, u, v, w. L'hypothèse de la passivité y entraîne, comme nous allons voir, de grandes simplifications.

Considérons en effet les conditions de passivité correspondant aux dérivées cardinales qui intéressent les variables des lignes non entièrement pleines, c'est-à-dire ici les variables s, t. Dans les deux expressions ultimes de la dérivée cardinale $\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial t}$, les termes du second ordre sont, pour l'une

$$B_{us}^{ws}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t} + B_{us}^{wt}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

et pour l'autre

$$B_{ut}^{ws}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + B_{ut}^{wt}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t};$$

on a donc, quels que soient x, y, z, s, t, u, v, w,

$$(20)\qquad B_{us}^{wt} = 0,\qquad B_{ut}^{ws} = 0,\qquad B_{us}^{ws} = B_{ut}^{wt}.$$

On a de même, par le changement de u en v,

$$(21)\qquad B_{vs}^{wt} = 0,\qquad B_{vt}^{ws} = 0,\qquad B_{vs}^{ws} = B_{vt}^{wt}.$$

Considérons maintenant les conditions de passivité correspondant aux dérivées cardinales qui intéressent, avec l'une des variables s, t, l'une des variables x, y, z. En désignant par H_u la valeur commune des quantités B_{us}^{ws}, B_{ut}^{wt}, par H_v la valeur commune des quantités B_{vs}^{ws}, B_{vt}^{wt}, et introduisant dans le système donné les simplifications qu'indiquent les relations (20), (21), on trouve, pour les termes du second ordre contenus dans les deux expressions ultimes de la dérivée cardinale $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial s}$, les quantités

$$B_{ux}^{ws}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+B_{ux}^{wt}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t},\qquad H_u\left(B_{wx}^{ws}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+B_{wx}^{wt}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t}\right);$$

et de même, pour les termes du second ordre contenus dans les deux expressions ultimes de la dérivée cardinale $\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial s}$, les quantités

$$B_{vx}^{ws}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+B_{vx}^{wt}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t},\qquad H_v\left(B_{wx}^{ws}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+B_{wx}^{wt}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t}\right).$$

On en déduit, à cause de la passivité supposée,

$$(22)\qquad \begin{cases} B_{ux}^{ws}=H_u B_{wx}^{ws}, & B_{ux}^{wt}=H_u B_{wx}^{wt},\\ B_{vx}^{ws}=H_v B_{wx}^{ws}, & B_{vx}^{wt}=H_v B_{wx}^{wt}, \end{cases}$$

d'où, par le changement de x en y et z successivement,

$$(23)\qquad \begin{cases} B_{uy}^{ws}=H_u B_{wy}^{ws}, & B_{uy}^{wt}=H_u B_{wy}^{wt},\\ B_{vy}^{ws}=H_v B_{wy}^{ws}, & B_{vy}^{wt}=H_v B_{wy}^{wt}, \end{cases}$$

$$(24)\qquad \begin{cases} B_{uz}^{ws}=H_u B_{wz}^{ws}, & B_{uz}^{wt}=H_u B_{wz}^{wt},\\ B_{vz}^{ws}=H_v B_{wz}^{ws}, & B_{vz}^{wt}=H_v B_{wz}^{wt}. \end{cases}$$

En tenant compte des diverses identités (20), (21), (22), (23), (24), et introduisant certains changements de notations, le système proposé prend la forme

$$(25)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=B_{ux}+H_u\left(S_x\frac{\partial w}{\partial s}+T_x\frac{\partial w}{\partial t}\right), & \frac{\partial v}{\partial x}=B_{vx}+H_v\left(S_x\frac{\partial w}{\partial s}+T_x\frac{\partial w}{\partial t}\right), & \frac{\partial w}{\partial x}=W_x+S_x\frac{\partial w}{\partial s}+T_x\frac{\partial w}{\partial t},\\ \frac{\partial u}{\partial y}=B_{uy}+H_u\left(S_y\frac{\partial w}{\partial s}+T_y\frac{\partial w}{\partial t}\right), & \frac{\partial v}{\partial y}=B_{vy}+H_v\left(S_y\frac{\partial w}{\partial s}+T_y\frac{\partial w}{\partial t}\right), & \frac{\partial w}{\partial y}=W_y+S_y\frac{\partial w}{\partial s}+T_y\frac{\partial w}{\partial t},\\ \frac{\partial u}{\partial z}=B_{uz}+H_u\left(S_z\frac{\partial w}{\partial s}+T_z\frac{\partial w}{\partial t}\right), & \frac{\partial v}{\partial z}=B_{vz}+H_v\left(S_z\frac{\partial w}{\partial s}+T_z\frac{\partial w}{\partial t}\right), & \frac{\partial w}{\partial z}=W_z+S_z\frac{\partial w}{\partial s}+T_z\frac{\partial w}{\partial t},\\ \frac{\partial u}{\partial s}=U_s\ +H_u\frac{\partial w}{\partial s}, & \frac{\partial v}{\partial s}=V_s\ +H_v\frac{\partial w}{\partial s}, & \\ \frac{\partial u}{\partial t}=U_t\ +H_u\frac{\partial w}{\partial t}, & \frac{\partial v}{\partial t}=V_t\ +H_v\frac{\partial w}{\partial t}, & \end{cases}$$

les coefficients (fonctions de x, y, z, s, t, u, v, w) qui figurent dans les seconds membres se trouvant, en vertu de la passivité, liés entre eux par certaines relations qu'il est inutile d'écrire.

Le problème que nous nous posons actuellement consiste à rechercher, dans un pareil système, la solution ordinaire qui répond à un groupe donné de conditions initiales, savoir :

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} u = u_0 \\ v = v_0 \end{array}\right\} \text{ pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = t - t_0 = 0, \\ w = \psi(s, t) \text{ pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0. \end{array}\right.$$

II. Dans les trois premières équations de la colonne (u) du système (25), remplaçons $H_u \frac{\partial w}{\partial s}$ et $H_u \frac{\partial w}{\partial t}$ par leurs valeurs tirées des deux dernières; puis, dans les trois premières équations de la colonne (v), remplaçons de même $H_v \frac{\partial w}{\partial s}$ et $H_v \frac{\partial w}{\partial t}$ par leurs valeurs tirées des deux dernières; en posant, pour abréger,

$$\begin{array}{ll} B_{ux} - U_s S_x - U_t T_x = U_x, & B_{vx} - V_s S_x - V_t T_x = V_x, \\ B_{uy} - U_s S_y - U_t T_y = U_y, & B_{vy} - V_s S_y - V_t T_y = V_y, \\ B_{uz} - U_s S_z - U_t T_z = U_z, & B_{vz} - V_s S_z - V_t T_z = V_z, \end{array}$$

les trois premières lignes du système (25) deviennent :

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x} = U_x + S_x \frac{\partial u}{\partial s} + T_x \frac{\partial u}{\partial t}, & \frac{\partial v}{\partial x} = V_x + S_x \frac{\partial v}{\partial s} + T_x \frac{\partial v}{\partial t}, & \frac{\partial w}{\partial x} = W_x + S_x \frac{\partial w}{\partial s} + T_x \frac{\partial w}{\partial t}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = U_y + S_y \frac{\partial u}{\partial s} + T_y \frac{\partial u}{\partial t}, & \frac{\partial v}{\partial y} = V_y + S_y \frac{\partial v}{\partial s} + T_y \frac{\partial v}{\partial t}, & \frac{\partial w}{\partial y} = W_y + S_y \frac{\partial w}{\partial s} + T_y \frac{\partial w}{\partial t}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = U_z + S_z \frac{\partial u}{\partial s} + T_z \frac{\partial u}{\partial t}, & \frac{\partial v}{\partial z} = V_z + S_z \frac{\partial v}{\partial s} + T_z \frac{\partial v}{\partial t}, & \frac{\partial w}{\partial z} = W_z + S_z \frac{\partial w}{\partial s} + T_z \frac{\partial w}{\partial t}. \end{array}\right.$$

Je dis que *le système* (27), *indépendant des conditions initiales imposées aux intégrales du système* (25), *est passif, comme ce dernier.*

Effectivement, ce système est de la forme (1), définie au n° 1, et les relations obtenues en égalant entre elles les deux expressions ultimes de chacune des dérivées cardinales sont de la forme (3). Parmi les relations (3), qui sont toutes des conséquences analytiques de (27), par suite de (25), les trois dernières ne contiennent aucune dérivée qui soit principale relativement au système (25) : elles doivent dès lors, puisque ce dernier est passif, être vérifiées pour toutes valeurs numériques des quantités qu'elles renferment, c'est-à-dire être identiquement vérifiées. On a donc identiquement :

$$\begin{array}{lll} A_{xy,s}=0, & A_{xy,t}=0, & A_{xy,w}=0, \\ A_{xz,s}=0, & A_{xz,t}=0, & A_{xz,w}=0, \\ A_{yz,s}=0, & A_{yz,t}=0, & A_{yz,w}=0, \end{array}$$

et les six premières relations (3) se réduisent alors à

$$A_{xy,u}=0,\quad A_{xz,u}=0,\quad A_{yz,u}=0,\quad A_{xy,v}=0,\quad A_{xz,v}=0,\quad A_{yz,v}=0;$$

celles-ci, ne contenant que x, y, z, s, t, u, v, w, doivent, à cause de la passivité de (25), être vérifiées pour toutes valeurs numériques de ces quantités, c'est-à-dire être identiquement vérifiées comme les précédentes. En conséquence, toutes les conditions de passivité du système (27) se trouvent identiquement satisfaites, ce que nous voulions établir.

III. Cela posé, considérons, dans le système (25), le groupe des intégrales ordinaires, u, v, w, qui répondent aux conditions initiales données (26) : si l'on désigne par

$$\upsilon(s, t), \quad \varphi(s, t)$$

ce que deviennent u, v dans l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0, \tag{28}$$

et par

$$\Upsilon(x, y, z, s, t), \quad \Phi(x, y, z, s, t), \quad \Psi(x, y, z, s, t)$$

certaines fonctions dont chacune s'annule dans la même hypothèse, il est clair que les intégrales dont il s'agit peuvent, par un groupement convenable des termes de leurs développements, être mises sous la forme

$$u = \Upsilon + \upsilon, \qquad v = \Phi + \varphi, \qquad w = \Psi + \psi; \tag{29}$$

on voit d'ailleurs qu'en vertu des conditions initiales (26), les fonctions $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$ satisfont elles-mêmes aux suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\upsilon &= u_0\\ \varphi &= v_0\end{aligned}\right\}\text{ pour } s - s_0 = t - t_0 = 0. \tag{30}$$

Cela étant, si, dans les deux dernières lignes du système (25),

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} &= \mathrm{U}_s + \mathrm{H}_u \frac{\partial w}{\partial s}, &\qquad \frac{\partial v}{\partial s} &= \mathrm{V}_s + \mathrm{H}_v \frac{\partial w}{\partial s},\\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \mathrm{U}_t + \mathrm{H}_u \frac{\partial w}{\partial t}, &\qquad \frac{\partial v}{\partial t} &= \mathrm{V}_t + \mathrm{H}_v \frac{\partial w}{\partial t},\end{aligned}$$

on introduit l'hypothèse numérique (28), il résulte des formules (29) (où Υ, Φ, Ψ s'annulent dans cette hypothèse) que u, $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, v, $\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ se réduisent respectivement à υ, $\frac{\partial \upsilon}{\partial s}$, $\frac{\partial \upsilon}{\partial t}$, φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, et w, $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ aux fonctions connues ψ, $\frac{\partial \psi}{\partial s}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$. Les fonctions υ, φ vérifient donc, avec les conditions initiales (30), un système différentiel total du premier ordre, dont la passivité est d'ailleurs évidente : car, le système (25) étant passif, on peut, sans toucher aux valeurs numériques x_0, y_0, z_0 ni à la fonction $\psi(s, t)$, qui figurent dans les conditions initiales (26) en même temps que les valeurs numériques s_0, t_0, u_0, v_0, faire varier arbitrairement ces dernières, qui figurent seules dans les conditions initiales (30).

Si maintenant on suppose connues les fonctions υ, φ, on se trouve ramené, pour connaître u, v, w, à rechercher, dans le système passif (27), la solution ordinaire répondant aux conditions initiales

$$\left.\begin{aligned}u &= \upsilon(s, t)\\ v &= \varphi(s, t)\\ w &= \psi(s, t)\end{aligned}\right\}\text{ pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0.$$

Or, l'intégration du système (27), indépendant du choix des conditions initiales imposées aux intégrales de (25), se ramène, comme nous l'avons vu au n° 1, à celle d'un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre.

4. *La conclusion formulée au numéro précédent est applicable à un système passif et non linéaire du premier ordre, dont le Tableau n'offre de cases vides que dans une seule colonne* [1].

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait affaire au système

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = U_x, & \dfrac{\partial v}{\partial x} = V_x, & \dfrac{\partial w}{\partial x} = W_x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = U_y, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = V_y, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = W_y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = U_z, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = V_z, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = W_z, \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} = U_s, & \dfrac{\partial v}{\partial s} = V_s, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = U_t, & \dfrac{\partial v}{\partial t} = V_t, & \end{array}\right.$$

où u, v, w désignent trois fonctions inconnues des cinq variables indépendantes x, y, z, s, t; ces équations (31) ont pour seconds membres certaines fonctions connues de

$$x,\quad y,\quad z,\quad s,\quad t,\quad u,\quad v,\quad w,\quad \frac{\partial w}{\partial s},\quad \frac{\partial w}{\partial t},$$

et nous supposons, comme le dit l'énoncé, qu'elles forment un système passif. Le problème que nous nous posons consiste à rechercher, dans un pareil système, la solution ordinaire qui répond à un groupe donné de conditions initiales, savoir :

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} u = u_0 \\ v = v_0 \end{array}\right\} \text{ pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = t - t_0 = 0, \\ w = \psi(s, t) \text{ pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0. \end{array}\right.$$

I. Posons

$$(33)\qquad \frac{\partial w}{\partial s} = w'_s, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = w'_t$$

---

[1] Voir les *Comptes rendus* du 30 juillet 1894.

$\left(\text{d'où } \frac{\partial w'_s}{\partial t} = \frac{\partial w'_t}{\partial s}\right)$, introduisons ce changement de notations dans les équations (31), et considérons les équations suivantes, qui, moyennant le changement de notations, sont évidemment des conséquences analytiques de (31) :

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{U}_x + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_s}\left(\dfrac{\partial u}{\partial s} - \mathrm{U}_s\right) + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{U}_t\right), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{V}_x + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_s}\left(\dfrac{\partial v}{\partial s} - \mathrm{V}_s\right) + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_t}\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{V}_t\right), \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = \mathrm{W}_x + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_s}\left(\dfrac{\partial w}{\partial s} - w'_s\right) + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_t}\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} - w'_t\right), \\ \dfrac{\partial w'_s}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial s} + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial u}\mathrm{U}_s + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial v}\mathrm{V}_s + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w}w'_s + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_s}\dfrac{\partial w'_s}{\partial s} + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_t}\dfrac{\partial w'_s}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial w'_t}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial u}\mathrm{U}_t + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial v}\mathrm{V}_t + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w}w'_t + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_s}\dfrac{\partial w'_t}{\partial s} + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_t}\dfrac{\partial w'_t}{\partial t}. \end{cases}$$

Adjoignons ensuite aux équations (34) un groupe

(35),

se déduisant de (34) par le changement de x en y dans les indices et dans les différentielles, puis un groupe

(36),

se déduisant de (34) par le changement de x en z dans les notations dont il s'agit; les équations

(34), (35), (36)

constituent, dans leur ensemble, un système du premier ordre, S, impliquant les inconnues

$$u,\quad v,\quad w,\quad w'_s,\quad w'_t,$$

et indépendant des conditions initiales imposées aux intégrales de (31) : je dis que *ce système* S *est passif, comme* (31).

Effectivement, il est de la forme (1), définie au n° 1, et, par conséquent, les relations obtenues en égalant entre elles les deux expressions ultimes de chacune des dérivées cardinales, sont de la forme suivante :

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{xy,s}\frac{\partial u}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial u}{\partial t}+A_{xy,u}=0,\\ &A_{xz,s}\frac{\partial u}{\partial s}+A_{xz,t}\frac{\partial u}{\partial t}+A_{xz,u}=0,\\ &A_{yz,s}\frac{\partial u}{\partial s}+A_{yz,t}\frac{\partial u}{\partial t}+A_{yz,u}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{xy,s}\frac{\partial v}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial v}{\partial t}+A_{xy,v}=0,\\ &A_{xz,s}\frac{\partial v}{\partial s}+A_{xz,t}\frac{\partial v}{\partial t}+A_{xz,v}=0,\\ &A_{yz,s}\frac{\partial v}{\partial s}+A_{yz,t}\frac{\partial v}{\partial t}+A_{yz,v}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{xy,s}\frac{\partial w}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial w}{\partial t}+A_{xy,w}=0,\\ &A_{xz,s}\frac{\partial w}{\partial s}+A_{xz,t}\frac{\partial w}{\partial t}+A_{xz,w}=0,\\ &A_{yz,s}\frac{\partial w}{\partial s}+A_{yz,t}\frac{\partial w}{\partial t}+A_{yz,w}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{xy,s}\frac{\partial w'_s}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial w'_s}{\partial t}+A_{xy,w'_s}=0,\\ &A_{xz,s}\frac{\partial w'_s}{\partial s}+A_{xz,t}\frac{\partial w'_s}{\partial t}+A_{xz,w'_s}=0,\\ &A_{yz,s}\frac{\partial w'_s}{\partial s}+A_{yz,t}\frac{\partial w'_s}{\partial t}+A_{yz,w'_s}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{xy,s}\frac{\partial w'_t}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial w'_t}{\partial t}+A_{xy,w'_t}=0,\\ &A_{xz,s}\frac{\partial w'_t}{\partial s}+A_{xz,t}\frac{\partial w'_t}{\partial t}+A_{xz,w'_t}=0,\\ &A_{yz,s}\frac{\partial w'_t}{\partial s}+A_{yz,t}\frac{\partial w'_t}{\partial t}+A_{yz,w'_t}=0,\end{aligned}\right.$$

où les A désignent certaines fonctions de

$$(42)\qquad x,\ y,\ z,\ s,\ t,\ u,\ v,\ w,\ w'_s,\ w'_t.$$

Parmi les relations ci-dessus, qui sont toutes des conséquences analytiques de S, et par suite [moyennant le changement de notations (33)] de (31), les trois dernières ne contiennent, avec les quantités (42), que $\frac{\partial w'_t}{\partial s}$ et $\frac{\partial w'_t}{\partial t}$: elles doivent donc, à cause de la passivité de (31), être vérifiées pour toutes valeurs numériques des quantités qu'elles renferment, c'est-à-dire être identiquement vérifiées. Les divers coefficients A qui figurent dans les relations (41) sont donc tous identiquement nuls, et les relations (37), (38), (39) et (40) se réduisent alors à

$$\begin{array}{lll} A_{xy,u} = 0, & A_{xz,u} = 0, & A_{yz,u} = 0, \\ A_{xy,v} = 0, & A_{xz,v} = 0, & A_{yz,v} = 0, \\ A_{xy,w} = 0, & A_{xz,w} = 0, & A_{yz,w} = 0, \\ A_{xy,w'_s} = 0, & A_{xz,w'_s} = 0, & A_{yz,w'_s} = 0; \end{array}$$

ces dernières, ne contenant que les quantités (42), doivent, à cause de la passivité de (31), être vérifiées pour toutes valeurs numériques de ces quantités, c'est-à-dire être identiquement vérifiées comme les précédentes. En conséquence, toutes les conditions de passivité du système S se trouvent identiquement satisfaites, ce que nous voulions établir.

II. Cela posé, considérons, dans le système (31), le groupe des intégrales ordinaires, u, v, w, qui répondent aux conditions initiales données (32) : si l'on désigne par $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$ ce que deviennent u, v dans l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0,$$

on verra, comme au numéro précédent, que les fonctions υ, φ vérifient, avec les conditions initiales

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon = u_0 \\ \varphi = v_0 \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad s - s_0 = t - t_0 = 0,$$

un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre, qui se déduit des deux dernières lignes de (31) par l'introduction de cette hypothèse numérique.

Les fonctions υ, φ étant supposées connues, on observera que les fonctions

$$u, \quad v, \quad w, \quad w'_s = \frac{\partial w}{\partial s}, \quad w'_t = \frac{\partial w}{\partial t}$$

vérifient le système passif S, et l'on se trouvera ramené à rechercher, dans ce dernier système, la solution ordinaire qui répond aux conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} u &= \upsilon(s, t) \\ v &= \varphi(s, t) \\ w &= \psi(s, t) \\ w'_s &= \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial s} \\ w'_t &= \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0.$$

Or l'intégration du système S, indépendant du choix des conditions initiales imposées aux intégrales de (31), se ramène, comme nous savons (n° 1), à celle d'un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre.

5. Les exemples suivants, quelque peu d'intérêt qu'ils offrent par eux-mêmes, aideront à mieux comprendre les méthodes que nous venons d'exposer.

I. Étant donné le système linéaire passif

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2(u - 2v - x^2)\frac{\partial v}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = (u - 2v - x^2)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{\partial v}{\partial y}, \\ &\frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 2v - u + 2\frac{\partial v}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

où se trouvent engagées deux fonctions inconnues des trois variables indépendantes x, y, z, on propose d'en rechercher la solution (u, v) satisfaisant aux conditions initiales

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{A} \quad &\text{pour}\quad & x = y = z = 0, \\ v &= e^{(y+z)^2} \quad &\text{pour}\quad & x = 0. \end{aligned}$$

En désignant par $\upsilon(y, z)$ ce que devient u dans l'hypothèse numérique $x = 0$, la fonction υ vérifie, avec la condition initiale

$$\upsilon = A \quad \text{pour} \quad y = z = 0,$$

le système passif d'équations différentielles totales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \upsilon}{\partial y} &= 4(y + z)e^{(y+z)^2}, \\
\frac{\partial \upsilon}{\partial z} &= 4(y + z)e^{(y+z)^2} + 2e^{(y+z)^2} - \upsilon.
\end{aligned}$$

Ce dernier a pour intégrale générale

$$\upsilon = 2e^{(y+z)^2} + Ce^{-z};$$

d'ailleurs, à cause de la condition initiale imposée à υ, on doit avoir $C = A - 2$, ce qui donne

$$\upsilon = 2e^{(y+z)^2} + (A - 2)e^{-z}.$$

On se trouve ainsi ramené, par l'application de notre méthode, à intégrer le système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= u - 2v - x^2 + 2x + (u - 2v - x^2)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= (u - 2v - x^2)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},
\end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$(44) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= 2e^{(y+z)^2} + (A - 2)e^{-z} \\ v &= e^{(y+z)^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

A cet effet, on forme l'équation aux dérivées partielles (homogène)

$$\frac{\partial f}{\partial x} - (u - 2v - x^2)\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} + (u - 2v - x^2 + 2x)\frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

où f désigne une fonction inconnue de x, y, z, u, v; son intégrale générale est une fonction arbitraire des quatre quantités

$$x + z, \quad v, \quad (u - 2v - x^2)e^{-x}, \quad y + u - 2v - x^2.$$

On pose alors

$$(45)\qquad \begin{cases} v = \Phi(x+z,\ y+u-2v-x^2), \\ (u-2v-x^2)e^{-x} = \Psi(x+z,\ y+u-2v-x^2), \end{cases}$$

et l'on détermine les composantes Φ, Ψ de manière que les valeurs de u, v tirées de (45) vérifient les conditions initiales (44). Pour cela, il faut que l'on ait, quels que soient y et z,

$$e^{(y+z)^2} = \Phi[z,\ y+(\mathrm{A}-2)e^{-z}],$$
$$(\mathrm{A}-2)e^{-z} = \Psi[z, y+(\mathrm{A}-2)e^{-z}];$$

c'est-à-dire, en effectuant le changement de variables

$$z = \theta_1,$$
$$y+(\mathrm{A}-2)e^{-z} = \theta_2,$$

que l'on ait, quels que soient θ_1 et θ_2,

$$e^{[\theta_2+\theta_1-(\mathrm{A}-2)e^{-\theta_1}]^2} = \Phi(\theta_1, \theta_2),$$
$$(\mathrm{A}-2)e^{-\theta_1} = \Psi(\theta_1, \theta_2).$$

Les composantes Φ et Ψ étant connues, les formules (45) deviennent

$$v = e^{[x+y+z+(\mathrm{A}-2)e^{-z}(1-e^{-x})]^2},$$
$$u-2v-x^2 = (\mathrm{A}-2)e^{-z},$$

et la résolution de ces dernières par rapport à u et v fournit les intégrales cherchées du système (43).

II. Considérons le système passif non linéaire

$$(46)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x+2(u-2v-x^2)\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\dfrac{\partial v}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = (u-2v-x^2)\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = x^2+2v-u+2\dfrac{\partial v}{\partial z}, \end{cases}$$

où se trouvent engagées deux fonctions inconnues des trois variables indépendantes x, y, z, et proposons-nous d'en rechercher la solution

(u, v) satisfaisant aux conditions initiales

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{A} && \text{pour} \quad x = y = z = 0, \\ v &= y + z^2 && \text{pour} \quad x = 0. \end{aligned}$$

En désignant par $\upsilon(y, z)$ ce que devient u dans l'hypothèse numérique $x = 0$, la fonction υ vérifie, avec la condition initiale

$$\upsilon = \mathrm{A} \qquad \text{pour} \qquad y = z = 0,$$

le système passif d'équations différentielles totales

$$\begin{aligned} \frac{\partial \upsilon}{\partial y} &= 2, \\ \frac{\partial \upsilon}{\partial z} &= 2(y + 2z + z^2) - \upsilon. \end{aligned}$$

Ce dernier a pour intégrale générale

$$\upsilon = 2(y + z^2) + \mathrm{C}e^{-z};$$

d'ailleurs, à cause de la condition initiale imposée à υ, on doit avoir $\mathrm{C} = \mathrm{A}$, ce qui donne

$$\upsilon = 2(y + z^2) + \mathrm{A}e^{-z}.$$

On se trouve ainsi ramené, par l'application de notre méthode, à intégrer le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x + (u - 2v - x^2)(1 - 2v_y'^2) + 2v_y'(u - 2v - x^2)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= (x^2 + 2v - u)v_y'^2 \qquad\qquad + 2v_y'(u - 2v - x^2)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_y'}{\partial x} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2v_y'(u - 2v - x^2)\frac{\partial v_y'}{\partial y} + \frac{\partial v_y'}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_z'}{\partial x} &= (x^2 + 2v - u)v_y'^2 \qquad\qquad + 2v_y'(u - 2v - x^2)\frac{\partial v_z'}{\partial y} + \frac{\partial v_z'}{\partial z}, \end{aligned}$$

aux quatre inconnues u, v, v_y', v_z', avec les conditions initiales

$$(47) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= 2(y + z^2) + \mathrm{A}e^{-z} \\ v &= y + z^2 \\ v_y' &= 1 \\ v_z' &= 2z \end{aligned} \right\} \qquad \text{pour} \qquad x = 0.$$

A cet effet, on forme l'équation aux dérivées partielles (homogène)

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 2v'_y(u - 2v - x^2)\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} + [2x + (u - 2v - x^2)(1 - 2v'^2_y)]\frac{\partial f}{\partial u}$$
$$- v'^2_y(u - 2v - x^2)\frac{\partial f}{\partial v} - v'^2_y(u - 2v - x^2)\frac{\partial f}{\partial v'_z} = 0,$$

où f désigne une fonction inconnue de x, y, z, u, v, v'_y, v'_z; son intégrale générale est une fonction arbitraire des six quantités

$$v'_y, \quad x + z, \quad v'_z - v, \quad yv'_y - 2v'_z, \quad (u - 2v - x^2)e^{-x}, \quad v + v'^2_y(u - 2v - x^2).$$

On pose alors

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} (u - 2v - x^2)e^{-x} &= \Upsilon(x + z, v'_z - v), \\ v'_y &= \Phi(x + z, v'_z - v), \\ v + v'^2_y(u - 2v - x^2) &= \Psi(x + z, v'_z - v), \\ yv'_y - 2v'_z &= \Omega(x + z, v'_z - v), \end{aligned}\right.$$

et l'on détermine les composantes Υ, Φ, Ψ, Ω de manière que les relations (48) soient identiquement vérifiées quand on tient compte des conditions initiales (47). Il vient ainsi

$$\begin{aligned} Ae^{-z} &= \Upsilon(z, 2z - y - z^2), \\ 1 &= \Phi(z, 2z - y - z^2), \\ Ae^{-z} + y + z^2 &= \Psi(z, 2z - y - z^2), \\ y - 4z &= \Omega(z, 2z - y - z^2), \end{aligned}$$

relations qui, par le changement de variables

$$z = \theta_1, \qquad 2z - y - z^2 = \theta_2,$$

prennent la forme

$$\begin{aligned} Ae^{-\theta_1} &= \Upsilon(\theta_1, \theta_2), \\ 1 &= \Phi(\theta_1, \theta_2), \\ Ae^{-\theta_1} + 2\theta_1 - \theta_2 &= \Psi(\theta_1, \theta_2), \\ -\theta_1^2 - 2\theta_1 - \theta_2 &= \Omega(\theta_1, \theta_2). \end{aligned}$$

Les composantes Υ, Φ, Ψ, Ω étant connues, les relations (48) deviennent

$$\begin{aligned} (u - 2v - x^2)e^{-x} &= Ae^{-(x+z)}, \\ v'_y &= 1, \\ v + v'^2_y(u - 2v - x^2) &= Ae^{-(x+z)} + 2(x + z) + v - v'_z, \\ yv'_y - 2v'_z &= v - v'_z - 2(x + z) - (x + z)^2, \end{aligned}$$

et l'on en tire

$$v = y + (x+z)^2 + \mathrm{A}e^{-z} - \mathrm{A}e^{-(x+z)},$$
$$u = 2v + x^2 + \mathrm{A}e^{-z},$$

solution cherchée du système (46).

III. La méthode d'intégration exposée au n° 4 est évidemment applicable à tout système passif du premier ordre où ne se trouve engagée qu'une seule fonction inconnue, puisque le Tableau d'un pareil système ne comprend qu'une seule colonne.

Considérons, par exemple, l'équation aux dérivées partielles

$$(49) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = u + \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

où u désigne une fonction inconnue des trois variables indépendantes x, y, z, et proposons-nous d'en rechercher l'intégrale particulière qui, pour $x=0$, se réduit à $e^y + yz$. On se trouve ramené, par l'application de notre méthode, à intégrer le système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= u - u_z'^2 + \frac{\partial u}{\partial y} + 2u'_z\frac{\partial u}{\partial z},\\
\frac{\partial u'_y}{\partial x} &= u'_y \qquad\;\; + \frac{\partial u'_y}{\partial y} + 2u'_z\frac{\partial u'_y}{\partial z},\\
\frac{\partial u'_z}{\partial x} &= u'_z \qquad\;\; + \frac{\partial u'_z}{\partial y} + 2u'_z\frac{\partial u'_z}{\partial z},
\end{aligned}$$

aux trois inconnues u, u'_y, u'_z, avec les conditions initiales

$$(50) \qquad \left.\begin{array}{l} u = e^y + yz \\ u'_y = e^y + z \\ u'_z = y \end{array}\right\} \text{ pour } x = 0.$$

On forme, à cet effet, l'équation aux dérivées partielles (homogène)

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} - 2u'_z\frac{\partial f}{\partial z} + (u - u_z'^2)\frac{\partial f}{\partial u} + u'_y\frac{\partial f}{\partial u'_y} + u'_z\frac{\partial f}{\partial u'_z} = 0,$$

où f désigne une fonction inconnue de x, y, z, u, u'_y, u'_z; son intégrale générale est une fonction arbitraire des cinq quantités

$$x+y, \quad z + 2u'_z, \quad u'_y e^{-x}, \quad u'_z e^{-x}, \quad (u + u_z'^2)e^{-x}.$$

On pose alors

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} (u + u'^2_z)e^{-x} &= \Phi(x+y,\ z+2u'_z),\\ u'_y e^{-x} &= \Psi(x+y,\ z+2u'_z),\\ u'_z e^{-x} &= \Omega(x+y,\ z+2u'_z),\end{aligned}\right.$$

et l'on détermine les composantes Φ, Ψ, Ω de manière que les relation (51) soient identiquement vérifiées quand on tient compte des conditions initiales (50). Il vient ainsi

$$\begin{aligned} e^y + yz + y^2 &= \Phi(y,\ z+2y),\\ e^y + z &= \Psi(y,\ z+2y),\\ y &= \Omega(y,\ z+2y),\end{aligned}$$

relations qui, par le changement de variables

$$y = \theta_1, \qquad z + 2y = \theta_2,$$

prennent la forme

$$\begin{aligned} e^{\theta_1} - \theta_1^2 + \theta_1\theta_2 &= \Phi(\theta_1, \theta_2),\\ e^{\theta_1} - 2\theta_1 + \theta_2 &= \Psi(\theta_1, \theta_2),\\ \theta_1 &= \Omega(\theta_1, \theta_2).\end{aligned}$$

Les composantes Φ, Ψ, Ω étant connues, les relations (51) deviennent

$$\begin{aligned} u + u'^2_z &= e^x[e^{x+y} - (x+y)^2 + (x+y)(z+2u'_z)],\\ u'_y &= e^x[e^{x+y} - 2(x+y) + z + 2u'_z],\\ u'_z &= e^x(x+y),\end{aligned}$$

et l'on en tire

$$u = z(x+y)e^x + e^{2x+y} + e^x(e^x - 1)(x+y)^2,$$

intégrale cherchée de l'équation (49).

6. *La conclusion formulée au n° 3 est applicable à un système orthonome passif de grade* 1 *et d'ordre supérieur à* 1, *dont le Tableau n'offre de cases vides que dans une seule colonne.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait affaire au système orthonome et passif, de grade 1,

$$(52)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial u}{\partial x} = U_x, & \dfrac{\partial v}{\partial x} = V_x, & \dfrac{\partial w}{\partial x} = W_x,\\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial y} = U_y, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = V_y, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = W_y,\\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial z} = U_z, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = V_z, & \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial s} = U_s, & \dfrac{\partial v}{\partial s} = V_s, & \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial t} = U_t, & \dfrac{\partial v}{\partial t} = V_t, &
\end{array}\right.$$

où u, v, w désignent trois fonctions inconnues des cinq variables x, y, z, s, t, et soit N l'ordre maximum (plus grand que 1) des dérivées figurant dans les seconds membres : ces derniers sont alors fonctions des diverses quantités

$$x,\ y,\ z,\ s,\ t,\ u,\ v,\ w \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} w}{\partial z^\alpha\, \partial s^\beta\, \partial t^\gamma}$$
$$(\alpha+\beta+\gamma = 1, 2, \ldots, N).$$

Le problème que nous nous posons consiste à rechercher, dans un pareil système, la solution ordinaire répondant à un groupe donné de conditions initiales, savoir :

$$(53)\quad \left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} u = u_0 \\ v = v_0 \end{array}\right\} \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = t - t_0 = 0,\\
w = \psi(z, s, t) \text{ pour } x - x_0 = y - y_0 = 0.
\end{array}\right.$$

I. Considérant, à l'exclusion de toutes autres, les solutions, *en nombres entiers positifs ou nuls,* de l'équation indéterminée

$$(54)\qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_p = N,$$

où x_1, x_2, ..., x_p désignent des inconnues en nombre quelconque (au moins égal à 2), et N un entier positif donné, nous dirons que deux semblables solutions,

$$x'_1,\quad x'_2,\quad \ldots,\quad x'_p,$$
$$x''_1,\quad x''_2,\quad \ldots,\quad x''_p,$$

sont *voisines,* si les différences

$$x'_1 - x''_1, \quad x'_2 - x''_2, \quad \ldots, \quad x'_p - x''_p$$

sont toutes nulles, à l'exception de deux, dont une égale à 1, et l'autre à -1.

Cela posé, *on peut, avec les diverses solutions (en nombres entiers positifs ou nuls) de l'équation* (54), *former une suite ayant pour termes extrêmes*

$$(\mathrm{N}, 0, \ldots, 0), \quad (0, 0, \ldots, \mathrm{N}),$$

et telle que deux termes consécutifs quelconques soient des solutions voisines.

La proposition est évidente pour $p = 2$, car les solutions de l'équation (54) peuvent alors être rangées comme il suit :

$$(\mathrm{N}, 0); \quad (\mathrm{N}-1, 1); \quad (\mathrm{N}-2, 2); \quad \ldots; \quad (1, \mathrm{N}-1); \quad (0, \mathrm{N}).$$

Il suffit donc de faire voir qu'en la supposant vraie pour $p-1$ inconnues ($p > 2$), elle l'est nécessairement encore pour p inconnues.

Or, les diverses solutions de l'équation (54) peuvent évidemment se partager en $\mathrm{N}+1$ groupes, suivant qu'elles vérifient l'un ou l'autre des systèmes

$$\begin{array}{ll}
x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = \mathrm{N}, & x_p = 0; \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = \mathrm{N}-1, & x_p = 1; \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = \mathrm{N}-2, & x_p = 2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots; \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = 1, & x_p = \mathrm{N}-1; \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = 0, & x_p = \mathrm{N}.
\end{array}$$

D'un autre côté, la proposition étant supposée vraie pour $p-1$ inconnues, on peut, avec les solutions de ces $\mathrm{N}+1$ groupes, former les $\mathrm{N}+1$ suites

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{N}, \quad 0, \ldots, 0, \quad 0), & \ldots, & (0, \quad 0, \ldots, \mathrm{N}, \quad 0); \\
(0, \quad 0, \ldots, \mathrm{N}-1, 1), & \ldots, & (\mathrm{N}-1, 0, \ldots, 0, \quad 1); \\
(\mathrm{N}-2, 0, \ldots, 0, \quad 2), & \ldots, & (0, \quad 0, \ldots, \mathrm{N}-2, 2); \\
(0, \quad 0, \ldots, \mathrm{N}-3, 3), & \ldots, & (\mathrm{N}-3, 0, \ldots, 0, \quad 3); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
 & (0, 0, \ldots, 0, \mathrm{N}), &
\end{array}$$

dans chacune desquelles deux termes consécutifs quelconques sont des solutions voisines de l'équation (54). Cela étant, il nous suffit, pour achever la démonstration, d'observer que la première suite commence par $(N, 0, \ldots, 0, 0)$, que la dernière comprend le terme unique $(0, 0, \ldots, 0, N)$, et enfin que, dans deux suites consécutives quelconques, le terme final de la première et le terme initial de la seconde sont deux solutions voisines.

II. L'inconnue w étant, dans le système proposé (52), la seule qui admette quelque dérivée paramétrique, il résulte immédiatement de l'orthonomie du système que, si l'on considère la relation ultime ayant pour premier membre

$$\frac{\partial^{N+1} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha}\, \partial s^{\beta}\, \partial t^{\gamma}} \qquad (\alpha+\beta+\gamma=N), \tag{55}$$

son second membre est d'ordre au plus égal à $N+1$. Cela posé, je dis que *l'ensemble des termes d'ordre* $N+1$ *dans le second membre dont il s'agit est de la forme*

$$H\frac{\partial^{N+1} w}{\partial z^{\alpha+1}\, \partial s^{\beta}\, \partial t^{\gamma}} + K\frac{\partial^{N+1} w}{\partial z^{\alpha}\, \partial s^{\beta+1}\, \partial t^{\gamma}} + L\frac{\partial^{N+1} w}{\partial z^{\alpha}\, \partial s^{\beta}\, \partial t^{\gamma+1}}, \tag{56}$$

où les fonctions H, K, L *satisfont aux conditions suivantes :* 1° *elles ne contiennent, avec* x, y, z, s, t, u, v, w, *que des dérivées paramétriques de* w *d'ordre inférieur à* $N+1$; 2° *elles sont indépendantes des valeurs attribuées à* α, β, γ (*sous la condition* $\alpha+\beta+\gamma=N$).

1° J'établirai, en premier lieu, que l'expression ultime de la dérivée (55) est linéaire par rapport aux dérivées paramétriques d'ordre $N+1$, et qu'elle n'en contient pas *effectivement* plus de trois, celles qui se trouvent mises en évidence dans l'expression (56).

Exécutons en effet, comme il suit, sur l'équation $\frac{\partial w}{\partial x} = W_x$, α dérivations premières relatives à z, β relatives à s, γ relatives à t; la première dérivation n'introduit dans le second membre, en fait de dérivées principales, que des dérivées premières de u et v, qu'on remplacera par leurs expressions ultimes, et, en vertu de l'orthonomie du système, le second membre de la relation résultante sera d'ordre au plus égal à 2; en effectuant sur celle-ci une nouvelle dérivation première, et remplaçant par leurs expressions ultimes les dérivées premières de u et v que cette opération y introduit, le second membre de la relation ainsi obtenue sera d'ordre au plus égal à 3. Ainsi de suite. Quand on aura effectué $N - 1$ dérivations premières, en ayant soin de remplacer après chacune d'elles les dérivées premières de u et v par leurs expressions ultimes, on tombera sur une formule dont le premier membre sera d'ordre N, et dont le second, indépendant de toute dérivée principale, sera d'ordre au plus égal à N. En exécutant alors, sur la formule dont il s'agit, la $N^{\text{ième}}$ dérivation première, la relation résultante aura pour premier membre la dérivée (55); quant à son second membre, il ne pourra contenir, en fait de dérivées d'ordre $N + 1$, que des dérivées paramétriques, il sera de plus linéaire par rapport à elles, et, en remplaçant finalement les dérivées premières de u et v par leurs expressions ultimes, qui sont au plus d'ordre N, cette double propriété subsistera. En résumé donc, la suite des opérations que nous venons d'indiquer conduit, pour la dérivée (55), à une expression indépendante de toute dérivée principale, et linéaire par rapport aux dérivées paramétriques d'ordre $N + 1$ de w. D'ailleurs, cette expression n'est autre que l'expression ultime de la dérivée (55) : car, le système proposé admettant un groupe (unique) d'intégrales ordinaires pour des données initiales arbitrairement choisies, il est clair que les deux expressions dont il s'agit doivent être égales pour toutes valeurs numériques des quantités qu'elles renferment, c'est-à-dire être identiquement égales.

Ainsi, l'expression ultime de la dérivée (55) est linéaire par rapport aux dérivées paramétriques d'ordre $N + 1$: elle n'en peut d'ailleurs, comme nous allons le voir, contenir aucune dont l'ordre partiel relatif à z tombe au-dessous de α.

Si α est nul, ce point est évident.

Supposons $\alpha > 0$, et considérons, d'une part, l'expression ultime de (55), d'autre part, l'expression ultime de

$$(57) \qquad \frac{\partial^{N+1} w}{\partial x\, \partial s^{\alpha+\beta} \partial t^{\gamma}}.$$

Si sur l'expression ultime de (57) on effectue α dérivations premières relatives à z, en ayant soin de remplacer après chacune d'elles les dérivées premières de u et v par leurs expressions ultimes (d'ordre $\leqq$N), on tombe sur l'expression ultime de

$$\frac{\partial^{N+1+\alpha} w}{\partial x \,\partial z^{\alpha}\,\partial s^{\alpha+\beta}\,\partial t^{\gamma}}. \tag{58}$$

Si sur l'expression ultime de (55) on effectue α dérivations premières relatives à s, en effectuant après chacune d'elles les substitutions dont nous avons parlé, on tombe encore sur l'expression ultime de (58). Les deux expressions ainsi déduites, l'une de (57), l'autre de (55), sont donc identiquement égales entre elles. D'un autre côté, il est bien facile de se rendre compte que chacune d'elles est linéaire par rapport aux dérivées paramétriques de w d'ordre $N+1+\alpha$; que pour obtenir, dans l'expression déduite de (57), la portion linéaire et homogène d'ordre $N+1+\alpha$, il faut considérer, dans (57), la portion linéaire et homogène d'ordre $N+1$, et effectuer sur chacune des dérivées d'ordre $N+1$ qui y figurent la dérivation $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial z^{\alpha}}$, en assimilant les coefficients de ces dérivées à des constantes; que pour obtenir de même, dans l'expression déduite de (55), la portion linéaire et homogène d'ordre $N+1+\alpha$, il faut considérer, dans (55), la portion linéaire et homogène d'ordre $N+1$, et effectuer sur chacune des dérivées d'ordre $N+1$ qui y figurent la dérivation $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial s^{\alpha}}$, en assimilant les coefficients de ces dérivées à des constantes. D'après cela, il est clair que, dans l'expression déduite de (57), aucune dérivée de w d'ordre $N+1+\alpha$ ne possédera, relativement à z, un ordre partiel inférieur à α : il en sera donc de même dans l'expression identique déduite de (55). D'ailleurs, pour avoir les dérivées d'ordre $N+1+\alpha$ figurant dans cette dernière expression, il suffit, comme nous l'avons dit, de considérer les dérivées d'ordre $N+1$ figurant dans l'expression ultime de (55), et d'effectuer sur elles la dérivation $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial s^{\alpha}}$, c'est-à-dire une dérivation n'intéressant pas la variable z : on en conclut immédiatement que chacune des dérivées d'ordre $N+1$ figurant dans l'expression ultime de (55) possède, relativement à z, un ordre partiel au moins égal à α.

Ainsi, l'expression ultime de (55) est linéaire par rapport aux dérivées paramétriques d'ordre $N+1$ de w qu'elle contient *effectivement*, et, pour l'une quelconque de ces dernières, les ordres partiels relatifs à z, s, t ne peuvent tomber au-dessous de α, β, γ respectivement : comme on a d'ailleurs $\alpha+\beta+\gamma=N$, ces ordres partiels sont nécessairement égaux,

$$\begin{aligned}&\text{soit à}\quad \alpha+1,\ \beta,\ \gamma,\\ &\text{soit à}\quad \alpha,\ \beta+1,\ \gamma,\\ &\text{soit à}\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma+1,\end{aligned}$$

c'est-à-dire que, dans l'expression ultime de (55), la portion linéaire et homogène d'ordre $N+1$ est bien de la forme (56), où H, K, L ne contiennent, avec x, y, z, s, t, u, v, w, que les dérivées paramétriques d'ordre inférieur à $N+1$.

2° Reste à faire voir que les fonctions H, K, L sont indépendantes des valeurs attribuées à α, β, γ sous la condition $\alpha+\beta+\gamma=N$ (¹).

Considérons à cet effet les deux dérivées

$$(59)\qquad \frac{\partial^{N+1} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha'}\, \partial s^{\beta'}\, \partial t^{\gamma'}},\qquad \frac{\partial^{N+1} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha''}\, \partial s^{\beta''}\, \partial t^{\gamma''}},$$

où $\alpha'+\beta'+\gamma'=\alpha''+\beta''+\gamma''=N$. En vertu de l'alinéa I, ces deux dérivées peuvent être reliées l'une à l'autre par une chaîne de dérivées telle que deux anneaux consécutifs de la chaîne correspondent à deux solutions voisines de l'équation $\alpha+\beta+\gamma=N$. Il suffit donc, pour établir que les fonctions H, K, L sont respectivement les mêmes dans les expressions ultimes des deux dérivées (59), d'examiner le cas où ces deux dérivées correspondent à deux solutions voisines de l'équation dont il s'agit.

Pour fixer les idées, nous supposerons

$$\alpha''=\alpha'-1,\qquad \beta''=\beta'+1,\qquad \gamma''=\gamma',$$

et nous considérerons les deux dérivées

$$(60)\qquad \frac{\partial^{N+1} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha'}\, \partial s^{\beta'}\, \partial t^{\gamma'}},\qquad \frac{\partial^{N+1} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha'-1}\, \partial s^{\beta'+1}\, \partial t^{\gamma'}}.$$

(¹) Lorsque la fonction arbitraire unique qui figure dans l'ensemble des déterminations initiales des inconnues ne dépend que d'une seule variable, l'équation $\alpha=N$ n'a qu'une seule solution, et la deuxième partie de la démonstration devient inutile.

Dans les expressions ultimes de ces dérivées, les portions linéaires et homogènes d'ordre $\mathrm{N}+1$ ont respectivement les formes

$$\mathrm{H}'\frac{\partial^{\mathrm{N}+1}w}{\partial z^{\alpha'+1}\,\partial s^{\beta'}\,\partial t^{\gamma'}}+\mathrm{K}'\frac{\partial^{\mathrm{N}+1}w}{\partial z^{\alpha'}\,\partial s^{\beta'+1}\,\partial t^{\gamma'}}+\mathrm{L}'\frac{\partial^{\mathrm{N}+1}w}{\partial z^{\alpha'}\,\partial s^{\beta'}\,\partial t^{\gamma'+1}},$$

$$\mathrm{H}''\frac{\partial^{\mathrm{N}+1}w}{\partial z^{\alpha'}\,\partial s^{\beta'+1}\,\partial t^{\gamma'}}+\mathrm{K}''\frac{\partial^{\mathrm{N}+1}w}{\partial z^{\alpha'-1}\,\partial s^{\beta'+2}\,\partial t^{\gamma'}}+\mathrm{L}''\frac{\partial^{\mathrm{N}+1}w}{\partial z^{\alpha'-1}\,\partial s^{\beta'+1}\,\partial t^{\gamma'+1}}.$$

Il en résulte que, dans l'expression ultime de la dérivée

$$\frac{\partial^{\mathrm{N}+2}w}{\partial x\,\partial z^{\alpha'}\,\partial s^{\beta'+1}\,\partial t^{\gamma'}},$$

résultante d'ordre minimum des deux dérivées (60), la portion linéaire et homogène d'ordre $\mathrm{N}+2$ est, d'une part

$$\mathrm{H}'\frac{\partial^{\mathrm{N}+2}w}{\partial z^{\alpha'+1}\,\partial s^{\beta'+1}\,\partial t^{\gamma'}}+\mathrm{K}'\frac{\partial^{\mathrm{N}+2}w}{\partial z^{\alpha'}\,\partial s^{\beta'+2}\,\partial t^{\gamma'}}+\mathrm{L}'\frac{\partial^{\mathrm{N}+2}w}{\partial z^{\alpha'}\,\partial s^{\beta'+1}\,\partial t^{\gamma'+1}},$$

et d'autre part

$$\mathrm{H}''\frac{\partial^{\mathrm{N}+2}w}{\partial z^{\alpha'+1}\,\partial s^{\beta'+1}\,\partial t^{\gamma'}}+\mathrm{K}''\frac{\partial^{\mathrm{N}+2}w}{\partial z^{\alpha'}\,\partial s^{\beta'+2}\,\partial t^{\gamma'}}+\mathrm{L}''\frac{\partial^{\mathrm{N}+2}w}{\partial z^{\alpha'}\,\partial s^{\beta'+1}\,\partial t^{\gamma'+1}}.$$

On a donc identiquement

$$\mathrm{H}''=\mathrm{H}',\qquad \mathrm{K}''=\mathrm{K}',\qquad \mathrm{L}''=\mathrm{L}'.$$

III. Considérons actuellement, dans le système (52), les relations ultimes ayant pour premiers membres respectifs

$$\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial w}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial^{1+\alpha+\beta+\gamma}w}{\partial x\,\partial z^{\alpha}\,\partial s^{\beta}\,\partial t^{\gamma}}\;(\alpha+\beta+\gamma=1,2,\ldots,\mathrm{N}): \tag{61}$$

les deux premières sont, en vertu de nos hypothèses, d'ordre au plus égal à N; la troisième, en vertu de l'orthonomie de (52), d'ordre 1; la quatrième, pour la même raison, d'ordre $1+\alpha+\beta+\gamma$. Pour les trois dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$, les expressions ultimes sont respectivement

U_x, V_x, W_x; pour la dérivée (61), on peut avoir.

$$\text{ou bien} \quad \alpha+\beta+\gamma=1, 2, \ldots, N-1,$$
$$\text{ou bien} \quad \alpha+\beta+\gamma=N:$$

dans le premier cas, je désignerai par $W_{x,\alpha,\beta,\gamma}$ l'expression ultime de la dérivée dont il s'agit, et, dans le second cas, par $P_{x,\alpha,\beta,\gamma}$ ce qui reste de cette expression ultime quand on y fait abstraction de la partie linéaire et homogène d'ordre $N+1$; je poserai enfin

$$(62)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} w}{\partial z^\alpha\,\partial s^\beta\,\partial t^\gamma} = w^{\alpha,\beta,\gamma} \\ (\alpha+\beta+\gamma=1, 2, \ldots, N), \end{cases}$$

et j'attribuerai aux notations H, K, L le même sens qu'à l'alinéa précédent.

Cela étant, je considère les équations

$$(63)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = U_x + H\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - U_z\right) + K\left(\dfrac{\partial u}{\partial s} - U_s\right) + L\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} - U_t\right), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = V_x + H\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} - V_z\right) + K\left(\dfrac{\partial v}{\partial s} - V_s\right) + L\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} - V_t\right), \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = W_x + H\left(\dfrac{\partial w}{\partial z} - w^{1,0,0}\right) + K\left(\dfrac{\partial w}{\partial s} - w^{0,1,0}\right) + L\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} - w^{0,0,1}\right); \\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x} = W_{x,\alpha,\beta,\gamma} + H\left(\dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial z} - w^{\alpha+1,\beta,\gamma}\right) \\ \qquad + K\left(\dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial s} - w^{\alpha,\beta+1,\gamma}\right) + L\left(\dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial t} - w^{\alpha,\beta,\gamma+1}\right) \\ \qquad (\alpha+\beta+\gamma=1, 2, \ldots, N-1); \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x} = P_{x,\alpha,\beta,\gamma} + H\dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial z} + K\dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial s} + L\dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial t} \\ \qquad (\alpha+\beta+\gamma=N). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

[Il va sans dire que, dans les coefficients des dérivées premières mises ci-dessus en évidence, et dans les termes indépendants de ces dérivées, on a introduit les changements de notations indiqués par la formule (62); les équations (63) sont alors toutes linéaires et du premier ordre.] Je formerai ensuite, de la même manière, un groupe d'équations,

$$(64),$$

se déduisant de (63) par le changement de x en y dans les indices et dans les différentielles. Les équations

$$(63),\quad (64)$$

constituent, dans leur ensemble, un système du premier ordre, S, impliquant les inconnues

$$u,\quad v,\quad w,\quad w^{\alpha,\beta,\gamma}\qquad (\alpha+\beta+\gamma=1,2,\ldots,N),$$

et indépendant des conditions initiales imposées aux intégrales de (52): je dis que *ce système* S *est passif, comme* (52).

Effectivement, le système en question est de la forme (1), définie au n° 1, et par conséquent les relations obtenues en égalant entre elles les deux expressions ultimes de chacune des dérivées cardinales sont de la forme suivante :

$$(65)\qquad A_{xy,z}\frac{\partial u}{\partial z}+A_{xy,s}\frac{\partial u}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial u}{\partial t}+A_{xy,u}=0,$$

$$(66)\qquad A_{xy,z}\frac{\partial v}{\partial z}+A_{xy,s}\frac{\partial v}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial v}{\partial t}+A_{xy,v}=0,$$

$$(67)\qquad A_{xy,z}\frac{\partial w}{\partial z}+A_{xy,s}\frac{\partial w}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial w}{\partial t}+A_{xy,w}=0,$$

$$(68)\qquad A_{xy,z}\frac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial z}+A_{xy,s}\frac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial t}+A_{xy,w^{\alpha,\beta,\gamma}}=0,$$
$$(\alpha+\beta+\gamma=1,2,\ldots,N),$$

où les A désignent certaines fonctions de

$$(69)\qquad x,\quad y,\quad z,\quad s,\quad t,\quad u,\quad v,\quad w,\quad w^{\alpha,\beta,\gamma}\qquad (\alpha+\beta+\gamma=1,2.\ldots,N).$$

Parmi les relations ci-dessus, qui sont toutes des conséquences analytiques de S, et par suite [moyennant le changement de notations (62)] de (52), considérons celle qu'on obtient en attribuant à α, β, γ, dans (68), des valeurs particulières α', β', γ', dont la somme soit égale à N. Cette relation ne contient, avec les quantités (69), que

$$\frac{\partial w^{\alpha',\beta',\gamma'}}{\partial z},\quad \frac{\partial w^{\alpha',\beta',\gamma'}}{\partial s},\quad \frac{\partial w^{\alpha',\beta',\gamma'}}{\partial t};$$

elle doit donc, à cause de la passivité de (52), être vérifiée pour toutes valeurs numériques des quantités qu'elle renferme, c'est-à-dire être identiquement vérifiée. Les divers coefficients A qui figurent dans la relation considérée sont donc tous identiquement nuls, et les relations restantes du groupe (68), ainsi que les relations (65), (66) et (67), se réduisent chacune à leur dernier terme, qui ne contient que les seules quantités (69); elles doivent dès lors, à cause de la passivité de (52), être vérifiées pour toutes valeurs numériques de ces quantités.

En conséquence, toutes les conditions de passivité du système S se trouvent identiquement satisfaites, ce que nous voulions établir.

IV. Cela posé, considérons, dans le système (52), le groupe des intégrales ordinaires, u, v, w, qui répondent aux conditions initiales données (53) : si l'on désigne par $\upsilon(z, s, t)$ et $\varphi(z, s, t)$ ce que deviennent u et v dans l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = 0,$$

on verra, comme au n° 3, que les fonctions υ, φ vérifient, avec les conditions initiales

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon = u_0 \\ \varphi = v_0 \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad z - z_0 = s - s_0 = t - t_0 = 0,$$

un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre qui se déduit des trois dernières lignes de (52) par l'introduction de cette hypothèse numérique.

Les fonctions υ, φ étant supposées connues, on observera que les fonctions

$$u, \qquad v, \qquad w \qquad \text{et} \qquad w^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} w}{\partial z^\alpha \, \partial s^\beta \, \partial t^\gamma}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})$$

vérifient le système passif S, et l'on se trouvera ramené à rechercher, dans ce dernier système, la solution ordinaire qui répond aux conditions initiales

$$\left.\begin{array}{ll} u & = \upsilon(z, s, t) \\ v & = \varphi(z, s, t) \\ w & = \psi(z, s, t) \\ w^{\alpha,\beta,\gamma} & = \dfrac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} \psi}{\partial z^\alpha \, \partial s^\beta \, \partial t^\gamma} \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad x - x_0 = y - y_0 = 0.$$

Or, l'intégration du système S, indépendant du choix des conditions initiales imposées aux intégrales de (52), se ramène, comme nous savons (n° 1), à celle d'un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre.

V. On voit, par ce qui précède, qu'étant donné un système orthonome passif de grade 1 et d'ordre N, dont le Tableau n'offre de cases vides que dans une seule colonne, on en peut toujours ramener l'intégration à celle d'équations différentielles totales en adjoignant aux inconnues primitives, à titre d'inconnues auxiliaires, les dérivées paramétriques des ordres 1, 2, ..., N : il convient d'ajouter que, si le système en question est *linéaire* par rapport aux dérivées de l'ordre N, l'adjonction de ces dernières devient inutile, et qu'on peut alors se borner à prendre comme inconnues auxiliaires les dérivées paramétriques des ordres 1, 2. ..., $N-1$. Nous avons, au n° 3, vérifié le fait pour $N=1$, et nous en trouverons ci-après, dans un exemple numérique (n° 7, II), une vérification nouvelle; il nous semble d'ailleurs inutile d'y insister davantage (¹).

7. Appliquons à quelques exemples la méthode exposée au numéro précédent.

I. Considérons d'abord le système

$$(70)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^3, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+u,\\ &\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2, \end{aligned}\right.$$

où se trouvent engagées deux fonctions inconnues des variables indépendantes x et y. Ce système est orthonome, comme on le voit par l'attribution aux variables et aux inconnues des cotes suivantes :

(¹) On peut encore observer (et c'est là un point dont la démonstration serait fort aisée) que, si le système proposé est d'ordre supérieur au nombre de ses inconnues, son intégration se ramène immédiatement : 1° à celle d'un système de même nature, mais d'ordre inférieur ou égal au nombre de ses inconnues; 2° à celle d'un système d'équations différentielles totales.

	x	y	u	v
Cotes premières...........	1	1	1	0
Cotes deuxièmes..........	2	1	1	0
Cotes troisièmes...........	0	0	1	0

;

il est d'ailleurs passif. Cela étant, on propose d'en rechercher la solution (u, v) satisfaisant aux conditions initiales

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{A} \qquad \text{pour} \qquad x-1=y=0, \\ v &= y^2 \qquad \text{pour} \qquad x-1=0. \end{aligned}$$

En désignant par $\upsilon(y)$ ce que devient u dans l'hypothèse numérique $x=1$, la fonction υ vérifie, avec la condition initiale

$$\upsilon = \mathrm{A} \qquad \text{pour} \qquad y=0,$$

l'équation différentielle $\dfrac{d\upsilon}{dy} = 2$; elle est, par suite, égale à $2y+\mathrm{A}$. On se trouve ainsi ramené, par l'application de notre méthode, à intégrer le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{6}v''^3 + (1+v'')\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= u - v'v'' + (1+v'')\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{2}v''^2 + (1+v'')\frac{\partial v'}{\partial y}, \\ \frac{\partial v''}{\partial x} &= \phantom{-\frac{1}{2}v''^2 +{}} (1+v'')\frac{\partial v''}{\partial y}, \end{aligned}$$

aux quatre inconnues u, v, v', v'', avec les conditions initiales

$$(71) \qquad \left\{\begin{aligned} u &= 2y+\mathrm{A} \\ v &= y^2 \\ v' &= 2y \\ v'' &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{pour} \qquad x=1.$$

A cet effet, on forme l'équation aux dérivées partielles (homogène)

$$\frac{\partial f}{\partial x} - (1+v'')\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{6}v''^3\frac{\partial f}{\partial u} + (u - v'v'')\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2}v''^2\frac{\partial f}{\partial v'} = 0,$$

où f désigne une fonction inconnue de x, y, u, v, v', v''; son intégrale générale est une fonction arbitraire des cinq quantités

$$x(1+v'')+y, \quad v'', \quad xv''^3+6u, \quad xv''^2+2v',$$
$$6v-6ux+x^2v''^3+6xv'v''.$$

On pose alors

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} v'' &= \Upsilon[x(1+v'')+y], \\ xv''^3+6u &= \Phi[x(1+v'')+y], \\ xv''^2+2v' &= \Psi[x(1+v'')+y], \\ 6v-6ux+x^2v''^3+6xv'v'' &= \Omega[x(1+v'')+y], \end{aligned}\right.$$

et l'on détermine les composantes Υ, Φ, Ψ, Ω, de manière que les relations (72) soient identiquement vérifiées quand on tient compte des conditions initiales (71). Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} 2 &= \Upsilon(y+3), \\ 12y+8+6A &= \Phi(y+3), \\ 4y+4 &= \Psi(y+3), \\ 6y^2+12y+8-6A &= \Omega(y+3), \end{aligned}$$

relations qui, par le changement de variable

$$y+3=\theta,$$

prennent la forme

$$\begin{aligned} 2 &= \Upsilon(\theta), \\ 12\theta-28+6A &= \Phi(\theta), \\ 4\theta-8 &= \Psi(\theta), \\ 6\theta^2-24\theta+26-6A &= \Omega(\theta). \end{aligned}$$

Les composantes Υ, Φ, Ψ, Ω étant connues, les relations (72) deviennent

$$v''=2, \qquad xv''^3+6u=12[x(1+v'')+y]-28+6A,$$
$$xv''^2+2v'=4[x(1+v'')+y]-8,$$
$$6v-6ux+x^2v''^3+6xv'v''=6[x(1+v'')+y]^2-24[x(1+v'')+y]+26-6A,$$

et l'on en tire

$$u = \frac{14x + 6y + 3A - 14}{3},$$

$$v = \frac{13x^2 + 12xy + 3y^2 + (3A - 26)x - 12y + 13 - 3A}{3},$$

solution cherchée du système (70).

II. Considérons maintenant le système

$$(73)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2(1+u)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (1+4u)\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} + (2u-1)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + u^2 + v, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \end{aligned} \right.$$

linéaire par rapport aux dérivées du second ordre, et où se trouvent engagées deux fonctions inconnues des variables indépendantes x, y, z. Ce système est orthonome, comme on le voit par l'attribution aux variables et aux inconnues des cotes suivantes :

	x	y	z	u	v
Cotes premières..........	1	1	1	1	0
Cotes deuxièmes..........	2	1	1	1	0
Cotes troisièmes..........	0	0	0	1	0

;

il est d'ailleurs passif. Cela étant, on propose d'en rechercher la solution, (u, v), satisfaisant aux conditions initiales

$$u = A \quad \text{pour } x = y = z = 0,$$
$$v = y + 2z \quad \text{pour } x = 0.$$

En désignant par $\upsilon(y, z)$ ce que devient u dans l'hypothèse numérique $x = 0$, la fonction υ vérifie, avec la condition initiale

$$\upsilon = A \text{ pour } y = z = 0,$$

le système des deux équations $\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \upsilon}{\partial z} = 0$; on a donc identiquement $\upsilon(y, z) = A$.

Cela étant, le système (73) nous fournit, pour $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$, les expressions ultimes

$$(74) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= 2(1+u)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1-2u)\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} &= 2(1+u)\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + (1-2u)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

On peut, d'autre part, en tenant compte des deux dernières équations du système (73), ajouter au second membre de la première la quantité (nulle)

$$2(1+u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right) + (1-2u)\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

et l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2(1+u)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (1+4u)\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + (2u-1)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ &\quad + 2(1+u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\right) + (1-2u)\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \end{aligned}$$

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$(75) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 2(1+u)\frac{\partial u}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Si l'on pose maintenant

$$(76) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = v'_y, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = v'_z,$$

la deuxième équation du système (73) peut s'écrire

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2v'_y + v'_z + u^2 + v + 2(1+u)\left(\frac{\partial v}{\partial y} - v'_y\right) + (1-2u)\left(\frac{\partial v}{\partial z} - v'_z\right),$$

ou, toutes réductions faites,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2(1+u)\frac{\partial v}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial v}{\partial z} + 2u(v'_z - v'_y) + u^2 + v.$$

Finalement, si l'on tient compte, dans les équations (74) et (75), du changement de notations (76), on tombe sur le système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= v'_y - v'_z &&+ 2(1+u)\frac{\partial u}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial u}{\partial z},\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= u^2 + v + 2u(v'_z - v'_y) &&+ 2(1+u)\frac{\partial v}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial v}{\partial z},\\
\frac{\partial v'_y}{\partial x} &= v'_y &&+ 2(1+u)\frac{\partial v'_y}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial v'_y}{\partial z},\\
\frac{\partial v'_z}{\partial x} &= v'_z &&+ 2(1+u)\frac{\partial v'_z}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial v'_z}{\partial z},
\end{aligned}$$

aux quatre inconnues u, v, v'_y, v'_z; il ne reste plus qu'à intégrer ce dernier avec les conditions initiales

$$(77)\qquad \left.\begin{cases} u = \mathrm{A} \\ v = y + 2z \\ v'_y = 1 \\ v'_z = 2 \end{cases}\right\} \text{pour } x = 0.$$

A cet effet, on forme l'équation aux dérivées partielles (homogène)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} - 2(1+u)\frac{\partial f}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial f}{\partial z} + (v'_y - v'_z)\frac{\partial f}{\partial u}\\
&\qquad + (u^2 + v + 2uv'_z - 2uv'_y)\frac{\partial f}{\partial v} + v'_y\frac{\partial f}{\partial v'_y} + v'_z\frac{\partial f}{\partial v'_z} = 0,
\end{aligned}$$

où f désigne une fonction inconnue de x, y, z, u, v, v'_y, v'_z; son intégrale générale est une fonction arbitraire des six quantités

$$\begin{gathered}
u - v'_y + v'_z, \quad v'_y e^{-x}, \quad v'_z e^{-x}, \quad (u^2 + v)e^{-x},\\
3x + y + z, \qquad z - 2u + (1 - 2u + 2v'_y - 2v'_z)x.
\end{gathered}$$

On pose alors

$$(78)\qquad \begin{cases}
u - v'_y + v'_z = \Upsilon\,[3x + y + z, \quad z - 2u + (1 - 2u + 2v'_y - 2v'_z)x],\\
v'_y e^{-x} = \Phi\,[3x + y + z, \quad z - 2u + (1 - 2u + 2v'_y - 2v'_z)x],\\
v'_z e^{-x} = \Psi\,[3x + y + z, \quad z - 2u + (1 - 2u + 2v'_y - 2v'_z)x],\\
(u^2 + v)e^{-x} = \Omega\,[3x + y + z, \quad z - 2u + (1 - 2u + 2v'_y - 2v'_z)x],
\end{cases}$$

et l'on détermine les composantes des seconds membres de manière que les relations (78) soient identiquement vérifiées quand on tient compte des conditions initiales (77). Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} A + 1 &= \Upsilon(y+z,\ z-2A), \\ 1 &= \Phi(y+z,\ z-2A), \\ 2 &= \Psi(y+z,\ z-2A), \\ y + 2z + A^2 &= \Omega(y+z,\ z-2A), \end{aligned}$$

relations qui, par le changement de variables

$$y + z = \theta_1, \qquad z - 2A = \theta_2,$$

prennent la forme

$$\begin{aligned} A + 1 &= \Upsilon(\theta_1, \theta_2), & 1 &= \Phi(\theta_1, \theta_2), \\ 2 &= \Psi(\theta_1, \theta_2), & \theta_1 + \theta_2 + A^2 + 2A &= \Omega(\theta_1, \theta_2). \end{aligned}$$

Les composantes Υ, Φ, Ψ, Ω étant connues, les relations (78) deviennent

$$u - v'_y + v'_z = A + 1, \qquad v'_y e^{-x} = 1, \qquad v'_z e^{-x} = 2,$$
$$(u^2 + v)e^{-x} = (3x + y + z) + [z - 2u + (1 - 2u + 2v'_y - 2v'_z)x] + A^2 + 2A,$$

et l'on en tire

$$\begin{aligned} u &= A + 1 - e^x, \\ v &= e^{2x} + e^x[2(1-A)x + y + 2z + A^2 + 2A] - (A+1)^2, \end{aligned}$$

solution cherchée du système (73).

Intégration d'un système orthonome passif ne dépendant que d'une seule fonction arbitraire et d'un nombre quelconque de constantes.

8. *Un système orthonome passif étant donné, si l'ensemble des éléments arbitraires, dont la connaissance équivaut à celle des déterminations initiales des inconnues, ne renferme, avec un nombre quelconque de constantes, qu'une seule fonction d'un nombre quelconque de variables, la recherche, dans le système proposé, d'intégrales ordinaires satisfaisant à des conditions initiales données, se ramène à l'intégration successive de deux systèmes passifs d'équations différentielles totales du premier ordre, dont le second est indépendant du choix des conditions initiales.*

I. Un système de grade 1 sera dit *régulier*, si les lignes de son Tableau peuvent être rangées dans un ordre tel, que les cases vides de chaque colonne se trouvent situées au bas de cette colonne. Il est clair que lorsqu'on parcourt de bas en haut les lignes successives d'un pareil Tableau, le nombre des cases vides ne va jamais en augmentant; on peut d'ailleurs, l'ordre des lignes étant ainsi fixé, adopter en même temps pour les colonnes un ordre tel, qu'en parcourant de droite à gauche ces colonnes successives, le nombre des cases vides n'aille pas non plus en augmentant : nous supposerons, dans ce qui suit, cette double condition satisfaite.

Considérons actuellement *un système régulier de grade* 1 : *si, moyennant l'attribution aux diverses variables et inconnues de cotes premières convenablement choisies, celles des variables étant toutes égales à un même entier positif, on peut faire en sorte que les cotes premières des inconnues et dérivées figurant dans chaque second membre ne surpassent pas celle du premier membre correspondant, le système dont il s'agit est nécessairement orthonome.*

Il suffit, pour le prouver, d'établir qu'il est toujours possible de trouver pour les variables et les inconnues des cotes secondes telles, que la cote seconde minima des dérivées (principales) figurant dans l'ensemble des premiers membres soit supérieure à la cote seconde maxima des inconnues et dérivées (paramétriques) figurant dans l'ensemble des seconds membres.

Distribuons à cet effet les variables indépendantes en groupes successifs d'après les nombres décroissants de cases vides contenues dans les lignes correspondantes, et pareillement les fonctions inconnues en groupes successifs d'après les nombres décroissants de cases vides contenues dans les colonnes correspondantes. S'il existe des lignes entièrement vides, à ce groupe de lignes correspondra un groupe de variables auxquelles j'attribuerai une cote seconde positive, par exemple $c_0 = 1$; de même, s'il existe des colonnes entièrement vides, à ce groupe de colonnes correspondra un groupe d'inconnues auxquelles j'attribuerai une cote seconde quelconque, par exemple $\gamma_0 = 0$. Abstraction étant faite de ces groupes, dont l'existence est éventuelle, il est facile de voir que le nombre des groupes restants de variables est exactement égal à celui des groupes restants d'inconnues; nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il y en a cinq, et nous nommerons

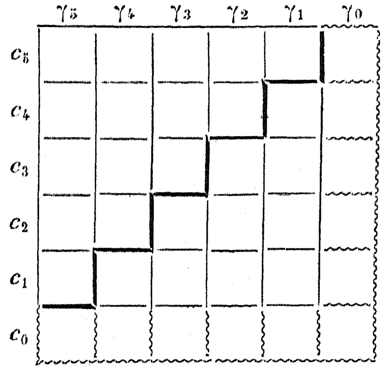
(79) $$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad c_4, \quad c_5$$

les cotes secondes respectives des cinq groupes successifs de variables (considérés dans l'ordre que nous venons d'indiquer),

(80) $$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3, \quad \gamma_4, \quad \gamma_5$$

les cotes secondes respectives des cinq groupes successifs d'inconnues (considérés également dans l'ordre que nous venons d'indiquer).

Pour faciliter l'intelligence de ce qui va suivre, on peut représenter à l'aide de la figure schématique ci-dessous les divers groupes de variables et d'inconnues, avec les cotes secondes qui leur sont respectivement attribuées.



Dans cette figure, à un groupe de variables correspond une seule ligne, à un groupe d'inconnues une seule colonne, et la cote seconde se trouve indiquée, dans le premier cas à gauche de la ligne, dans le second cas au-dessus de la colonne. Les traits tremblés ont été réservés au groupe de variables et au groupe d'inconnues dont l'existence est éventuelle. Enfin le trait plus gros, en forme d'escalier, qui partage la figure en deux régions, indique quelles sont, pour chaque groupe d'inconnues, les variables auxquelles se rapportent les dérivées paramétriques : par exemple, pour une inconnue appartenant au groupe (γ_2), les dérivées paramétriques sont celles qui intéressent, à l'exclusion de toute autre, les variables des groupes (c_3), (c_2), (c_1) et éventuellement (c_0).

Fixons maintenant les valeurs des diverses cotes (79) et (80).

A cet effet, nous désignerons par q un entier positif, arbitrairement choisi sous la seule condition d'être au moins égal à l'ordre maximum des dérivées figurant effectivement dans les seconds membres du système, et nous choisirons les entiers (79) et (80) sous les seules conditions

$$(81) \qquad c_1 > c_0 q, \quad c_2 > c_1 q, \quad c_3 > c_2 q, \quad c_4 > c_3 q, \quad c_5 > c_4 q;$$

$$(82) \qquad \gamma_0 + q c_5 = \gamma_1 + q c_4 = \gamma_2 + q c_3 = \gamma_3 + q c_2 = \gamma_4 + q c_1 = \gamma_5 + q c_0.$$

Les entiers q, $c_0 = 1$ et $\gamma_0 = 0$ étant connus, il est clair qu'on pourra, à l'aide de (81), déterminer successivement c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, puis, à l'aide de (82), déterminer successivement $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$.

Cela étant, je dis que la cote seconde maxima des dérivées paramétriques des ordres $0, 1, 2, \ldots, q$ (et, par suite, des inconnues et dérivées figurant dans les seconds membres du système) est inférieure à la cote seconde minima des premiers membres. Pour l'établir, nous désignerons par θ la valeur commune des quantités (82), et nous prouverons : 1° que la cote seconde d'une dérivée paramétrique appartenant aux ordres $0, 1, 2, \ldots, q$ est au plus égale à θ; 2° que la cote seconde d'un premier membre est supérieure à θ.

Remarquons en effet que, pour les groupes successifs de variables, parcourus de bas en haut, la cote seconde va toujours en croissant. Il résulte de là que, pour les groupes d'inconnues $(\gamma_0), (\gamma_1), (\gamma_2), (\gamma_3), (\gamma_4)$, les plus grandes valeurs que puisse prendre la cote seconde d'une dérivée paramétrique appartenant aux ordres $0, 1, 2, \ldots, q$ seront respectivement inférieures ou égales à

$$\gamma_0 + q c_5, \quad \gamma_1 + q c_4, \quad \gamma_2 + q c_3, \quad \gamma_3 + q c_2, \quad \gamma_4 + q c_1,$$

c'est-à-dire à θ. Pour le groupe d'inconnues (γ_5), deux cas sont à distinguer, suivant que les colonnes correspondantes contiennent quelque case vide ou n'en contiennent aucune : dans le premier cas, on trouvera de même, comme limite supérieure, $\gamma_5 + q c_0$, c'est-à-dire θ; dans le second cas, chacune de ces inconnues n'a qu'une seule dérivée paramétrique, appartenant à l'ordre zéro, et ayant pour cote seconde

$$\gamma_5 < \gamma_5 + q c_0 = \theta.$$

D'un autre côté, la plus petite valeur que puisse prendre la cote seconde d'un premier membre du système est évidemment égale à l'une ou à l'autre des quantités

$$\gamma_1 + c_5, \quad \gamma_2 + c_4, \quad \gamma_3 + c_3, \quad \gamma_4 + c_2, \quad \gamma_5 + c_1,$$

suivant qu'il s'agit de l'un ou de l'autre des groupes d'inconnues (γ_1), (γ_2), (γ_3), (γ_4), (γ_5) : or, en vertu de (81), ces quantités sont respectivement supérieures à

$$\gamma_1 + qc_4, \quad \gamma_2 + qc_3, \quad \gamma_3 + qc_2, \quad \gamma_4 + qc_1, \quad \gamma_5 + qc_0,$$

c'est-à-dire à 0.

II. *Tout système complètement intégrable,* S, *dont le grade surpasse l'unité, se ramène, par de simples différentiations, à un système complètement intégrable,* Σ, *de grade* 1, *où se trouvent engagées, avec les inconnues du système* S, *quelques-unes de leurs dérivées à titre d'inconnues adjointes; l'économie des conditions initiales est d'ailleurs identique dans les deux systèmes à la notation près, en sorte que la recherche, dans le système* S, *d'une solution ordinaire répondant à des conditions initiales données, se ramène à une semblable recherche effectuée dans le système* Σ.

Il va sans dire que chaque dérivée principale des inconnues du système S est supposée avoir une expression *ultime*, déduite du système S prolongé, et ne contenant, avec les variables indépendantes et les inconnues, que les dérivées paramétriques de ces dernières. Je rappelle en outre qu'on peut, à l'aide des considérations les plus élémentaires, trouver la forme schématique des déterminations initiales des inconnues de S, et fixer, par suite, l'économie des conditions initiales qui déterminent entièrement une solution ordinaire du système (¹).

Cela posé, construisons, comme il suit, le Tableau du système Σ, en ne nous occupant tout d'abord que des premiers membres.

Si l'on désigne par u l'une des inconnues engagées dans S, par x, y, ..., les variables indépendantes, et par x_0, y_0, ..., les valeurs ini-

---

(¹) Voir à ce sujet la Iʳᵉ Partie de mon récent Mémoire : *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta mathematica*, t. XXIII).

tiales (schématiques) de x, y, ..., la détermination initiale de u est une somme de termes (en nombre limité) dont chacun a la forme

$$(x-x_0)^{\alpha}(y-y_0)^{\beta}\ldots F_{\alpha,\beta,\ldots},$$

$F_{\alpha,\beta,\ldots}$ désignant une fonction schématique de quelques-unes des variables. Cela étant, nous prendrons, dans Σ, pour l'une de nos inconnues, la quantité

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots} u}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}\ldots} = u_{\alpha,\beta,\ldots};$$

puis, en supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq variables indépendantes x, y, z, s, t, et que $F_{\alpha,\beta,\ldots}$ dépende de s, t, nous écrirons, dans les cases (x), (y), (z) de la colonne $(u_{\alpha,\beta,\ldots})$, les premiers membres

$$\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial x} = \ldots, \qquad \frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial y} = \ldots, \qquad \frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial z} = \ldots,$$

et nous laisserons vides les cases (s) et (t) de cette même colonne. Ce que nous venons de faire pour un terme de la détermination initiale de u, nous le ferons pour tous les autres; et, ce que nous aurons fait pour la détermination initiale de u, nous le ferons successivement pour celle de toutes les inconnues engagées dans le système S. Nous aurons ainsi un Tableau contenant des cases pleines et des cases vides; d'ailleurs, quelque seconds membres que nous écrivions ultérieurement dans les cases pleines, on voit dès maintenant que si l'on forme successivement, dans l'ancien système, puis dans le nouveau, un ensemble composé des inconnues et de leurs dérivées paramétriques, les deux ensembles ainsi obtenus se correspondront terme à terme et seront identiques de part et d'autre à la notation près; de même, et toujours à la notation près, l'économie des conditions initiales sera identique dans les deux systèmes, et l'on y trouvera, de part et d'autre, *le même nombre d'arbitraires, dépendant respectivement des mêmes nombres de variables*. Quant aux dérivées principales du nouveau système, elles coïncideront, à la notation près, les unes avec des dérivées principales, les autres avec des dérivées paramétriques de l'ancien.

Occupons-nous maintenant des seconds membres du système Σ, et considérons, pour fixer les idées, l'équation qui, dans Σ, a pour premier membre $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial x}$. A la notation près, ce premier membre coïncide avec une dérivée ancienne, $\frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta+\dots} u}{\partial x^{\alpha+1}\, \partial y^{\beta} \dots}$; si cette dernière est principale par rapport à S, nous remplacerons, dans son expression ultime tirée de S, toutes les dérivées paramétriques par leurs notations nouvelles, et nous égalerons $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial x}$ à l'expression ainsi modifiée; si, au contraire, la dérivée $\frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta+\dots} u}{\partial x^{\alpha+1}\, \partial y^{\beta} \dots}$ est paramétrique par rapport à S, il existe, dans le nouveau système, une dérivée paramétrique ou fonction inconnue (et une seule), qui, à la notation près, coïncide avec elle, et à laquelle nous devrons alors égaler $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial x}$.

Le système Σ, ainsi formé, est évidemment de grade 1, et à toute solution ordinaire de S correspond une solution ordinaire de Σ; d'ailleurs le système S, étant complètement intégrable, admet une solution ordinaire répondant à des conditions initiales arbitraires; enfin, puisque l'économie des conditions initiales est identique dans les deux systèmes à la notation près, le système Σ admet, lui aussi, une solution ordinaire répondant à des conditions initiales arbitraires, et, par suite, est complètement intégrable.

Nous terminerons par l'observation suivante, qui nous sera utile dans un instant : Si, dans le système S, on attribue à chacune des variables et des inconnues une cote quelconque, et que, dans le système Σ, on attribue à chacune des variables et des inconnues une cote précisément égale à celle de la quantité qui lui correspond dans S, *la cote de toute dérivée du système* S *dont on aura été conduit, en construisant le système Σ, à modifier l'écriture, restera la même, nonobstant le changement d'écriture.*

III. *La recherche, dans le système différentiel spécifié au début du présent n° 8, de la solution ordinaire répondant à des conditions initiales données, se ramène à une semblable recherche effectuée dans un système orthonome passif de grade* 1; *ce dernier est indépendant du choix des conditions initiales, et son Tableau n'offre de cases vides que dans une seule colonne.*

Ainsi se trouve achevée, eu égard aux propositions des n^{os} 3, 4 *et* 6, *notre démonstration actuelle.*

On se trouve ramené en effet, par l'application de l'alinéa II, à résoudre le problème posé, non dans le système différentiel primitif, mais dans un système complètement intégrable de grade 1, indépendant du choix des conditions initiales, et dont le Tableau, n'offrant de cases vides que dans une seule colonne, est par là même régulier. D'ailleurs, le système primitif étant orthonome, toutes les variables indépendantes y ont une même cote première positive, et chacune des inconnues ou dérivées figurant dans le second membre d'une relation ultime possède une cote première au plus égale à celle du premier membre correspondant : il en résulte, conformément à l'observation finale de l'alinéa II, que chacune des équations du système nouveau possède aussi cette propriété. Cela étant, notre proposition de l'alinéa I fait voir immédiatement que le système nouveau est orthonome.

9. On sait qu'un système passif de nature quelconque, s'il ne dépend que d'un nombre limité de constantes arbitraires, est complètement intégrable [1] : en appliquant à un pareil système la transformation définie dans l'alinéa II du numéro précédent, et observant que les fonctions schématiques $F_{\alpha,\beta,\ldots}$ se réduisent toutes en ce cas à des constantes, on le ramène immédiatement à un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre.

---

[1] Le lecteur pourra consulter à ce sujet mon récent Mémoire : *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* (*Acta mathematica*, t. XXV).

FIN DU TOME XVIII DE LA TROISIÈME SÉRIE.