ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. RAFFY

Sur les surfaces à linges de courbure planes, dont les plans enveloppent un cylindre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 18 (1901), p. 343-370

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1901_3_18__343_0>

SUR LES

SURFACES A LIGNES DE COURBURE PLANES

DONT LES PLANS ENVELOPPENT UN CYLINDRE,

Par M. L. RAFFY,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

L'objet de ce Mémoire est de présenter quelques applications d'une méthode qui me paraît convenir très bien à l'étude des surfaces définies par des propriétés de leurs lignes de courbure : cette méthode consiste à déterminer l'une des nappes de la surface des centres de courbure des surfaces qu'on cherche; après quoi l'on obtient immédiatement ces surfaces elles-mêmes. La principale de ses applications est la détermination entièrement explicite des surfaces pour lesquelles les lignes de courbure d'un système sont dans des plans parallèles à une droite (*surfaces* K); mais ce n'est pas la seule; aussi mon analyse a-t-elle beaucoup plus d'étendue que si je n'avais pas en vue d'autres résultats.

J'expose d'abord (§ I) le principe de la méthode et je montre comment elle fournit la seconde nappe de la développée, dès que la première est connue.

Abordant les surfaces (K), je détermine (§ II) la nappe de développée qui contient les centres de courbure relatifs aux lignes de courbure planes.

Je calcule ensuite (§ III) les cosinus directeurs de la normale à ces surfaces, ainsi que l'élément linéaire de leur représentation sphérique, et je forme la condition pour que cette représentation soit isothermique.

Aussitôt après sont formées (§ IV) les expressions des coordonnées des surfaces (K), de leurs rayons de courbure principaux, de leur élément linéaire, et celles des coordonnées de la seconde nappe de leur développée.

Je montre ensuite (§ V) que les surfaces (K) sont entièrement caractérisées par la propriété d'être *doublement cylindrées* suivant leurs lignes de courbure : j'entends par là que les plans osculateurs menés en tous les points d'une ligne de courbure quelconque aux diverses lignes de courbure de l'autre système sont parallèles à une droite. Ce théorème, dont j'étais en possession peu de jours après la publication de ma Note des *Comptes rendus* sur le même sujet (janvier 1899), complète et précise certains résultats de cette Note.

Enfin, j'indique (§ VI) les moyens d'obtenir les coordonnées des surfaces (K) exprimées sans aucun signe de quadrature; les calculs, qui sont exécutés jusqu'au bout, conduisent à distinguer une classe particulière de surfaces (K) dont la représentation sphérique est isothermique et qui ne dépendent que d'*une* fonction arbitraire de v (paramètre des lignes de courbure planes) et d'*une* fonction arbitraire de u (paramètre du second système), tandis que les surfaces (K) générales dépendent de *deux* fonctions arbitraires de v et d'*une* fonction arbitraire de u. Les résultats auxquels on arrive font prévoir combien seraient compliquées les expressions des surfaces les plus générales à lignes de courbure planes dans un système.

Les formules contenues dans ce Mémoire sont susceptibles de nombreuses applications; je souhaite qu'elles puissent servir à d'autres chercheurs; je les ai calculées avec grand soin et, le plus souvent, vérifiées de diverses manières.

I. — Les surfaces à lignes de courbure planes, déterminées par l'une des nappes de leur développée; recherche de la seconde nappe.

Nous commencerons par rappeler quelques propriétés de la surface lieu des centres de courbure d'une surface (S).

Soient $u =$ const. et $v =$ const. les lignes de courbure (C_u) et (C_v) de (S). Soient M un point de (S) et K_u, K_v les centres de courbure relatifs, le premier à la ligne $u =$ const., le second à la ligne $v =$ const. qui passent en M; nous appellerons (S_u) et (S_v) les nappes de la surface des centres qui contiennent, l'une tous les points K_u, l'autre tous les points K_v.

La normale MK_v reste constamment tangente à une géodésique de (S_v) quand M se déplace sur une ligne $v =$ const. Les lignes qui correspondent sur (S_v) aux lignes $u =$ const. sont conjuguées de ces géodésiques $v =$ const. et la tangente au point K_v à la courbe $u =$ const. n'est autre que la droite polaire, relative au point M, de la ligne de courbure $v =$ const. de la surface (S). En conséquence, les lignes $u =$ const. et $v =$ const. de (S_v) se coupent en K_v sous un angle égal à celui que font le plan tangent à la surface (S) et le plan osculateur de (C_v) au point d'incidence M de la normale MK_v. La nappe (S_u) jouit de propriétés semblables.

Réciproquement, considérons une surface (x_1, y_1, z_1) rapportée à un réseau conjugué (u, v) tel que les courbes $v =$ const. soient des géodésiques, ce qui exige, premièrement que x_1, y_1, z_1, considérés comme fonctions de u et de v, soient solutions d'une équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = B \frac{\partial \theta}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \theta}{\partial v}, \tag{1}$$

secondement que l'élément linéaire soit de la forme

$$ds_1^2 = \mu_u'^2\, du^2 + 2\mu_u' \mu_v'\, du\, dv + G\, dv^2. \tag{2}$$

Si l'on porte sur les tangentes aux géodésiques $v =$ const. à partir de leur point de contact K_v une longueur $MK_v = -\mu$ dans la direction dont les cosinus sont

$$a = \frac{1}{\mu_u'} \frac{\partial x_1}{\partial u}, \qquad b = \frac{1}{\mu_u'} \frac{\partial y_1}{\partial u}, \qquad c = \frac{1}{\mu_u'} \frac{\partial z_1}{\partial u},$$

le lieu du point $M(x, y, z)$ ainsi obtenu est une surface qui admet pour lignes de courbure les lignes $u =$ const. et $v =$ const.

En conséquence, si l'on peut trouver une surface (x_1, y_1, z_1) jouissant des deux propriétés exprimées par les équations (1) et (2), on aura les coordonnées x, y, z d'une surface *rapportée à ses lignes de courbure* $u =$ const., $v =$ const., en posant

$$x = x_1 - \frac{\mu}{\mu_u'} \frac{\partial x_1}{\partial u}, \qquad y = y_1 - \frac{\mu}{\mu_u'} \frac{\partial y_1}{\partial u}, \qquad z = z_1 - \frac{\mu}{\mu_u'} \frac{\partial z_1}{\partial u}. \tag{3}$$

Appliquons ces considérations au cas où les lignes de courbure (C_v) ou $v = \text{const.}$ sont *planes*. Alors les droites polaires d'une ligne (C_v), qui sont les tangentes aux courbes $u = \text{const.}$ de la surface (S_v) le long d'une géodésique $v = \text{const.}$, forment un cylindre; c'est-à-dire que *ces géodésiques* $v = \text{const.}$ *sont les courbes de contact de cylindres circonscrits à* (S_v).

Réciproquement, s'il en est ainsi, les droites polaires de chaque ligne (C_v) étant parallèles entre elles, ces lignes de courbure $v = \text{const.}$ sont planes.

La détermination des surfaces à lignes de courbure planes ($v = \text{const.}$) est donc un problème strictement équivalent au suivant :

Trouver trois fonctions x_1, y_1, z_1 *de deux variables* u *et* v, *telles que, sur la surface* (S_v), *lieu du point* (x_1, y_1, z_1) :

1° *Les lignes* $u = \text{const.}$ *et* $v = \text{const.}$ *forment un réseau conjugué;*

2° *Les lignes* $v = \text{const.}$ *soient des lignes géodésiques;*

3° *Les lignes* $v = \text{const.}$ *soient des courbes de contact de cylindres circonscrits.*

Il convient de remarquer que, d'après ces conditions, l'angle ω sous lequel se coupent les courbes du réseau conjugué *ne dépend que de* v (1). En effet, quand deux surfaces sont tangentes tout le long d'une courbe, si cette courbe est une géodésique pour l'une des surfaces, elle est aussi géodésique pour l'autre surface, son plan osculateur étant partout normal au plan tangent commun. Si l'une des surfaces est un cylindre, comme ici, la courbe de contact, qui est géodésique pour la surface (S_v) par hypothèse, sera géodésique pour le cylindre et coupera sous le même angle toutes les génératrices du cylindre, qui sont précisément, d'après la définition même des directions conjuguées, les tangentes aux courbes $u = \text{const.}$ menées par les divers points de la courbe de contact.

Réciproquement, si toute courbe $v = \text{const.}$ est une courbe de contact de cylindre circonscrit et coupe les courbes conjuguées de la sur-

(1) L'angle ω est celui que fait le plan de la ligne de courbure plane $v = \text{const.}$ avec le plan tangent à la surface (x, y, z).

face (S_v) sous un angle qui ne dépend que de v, elle est géodésique du cylindre et, par suite, de la surface (S_v).

Enfin, le réseau (u, v) étant conjugué sur la surface (S_v), si les courbes $v = \text{const.}$ sont des géodésiques et si l'angle des courbes coordonnées ne dépend que de v, les courbes $v = \text{const.}$ sont des courbes de contact de cylindres circonscrits. En effet, le réseau étant conjugué, on a

$$(1') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u\, \partial v} &= B \frac{\partial x_1}{\partial u} + B_1 \frac{\partial x_1}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial u\, \partial v} &= B \frac{\partial y_1}{\partial u} + B_1 \frac{\partial y_1}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial u\, \partial v} &= B \frac{\partial z_1}{\partial v} + B_1 \frac{\partial z_1}{\partial v}; \end{aligned} \right.$$

les courbes $v = \text{const.}$ étant des géodésiques, on a de plus

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = E_1\, du^2 + F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2,$$

avec

$$(4) \qquad E_1 = \mu_u'^2, \qquad F_1 = \mu_u' \mu_v';$$

l'angle des lignes coordonnées ne dépendant que de v, on a

$$(5) \qquad \frac{F_1^2}{E_1 G_1} = \cos^2 \omega(v), \qquad G_1 = \frac{\mu_v'^2}{\cos^2 \omega(v)}.$$

On sait d'ailleurs que les expressions générales de B et B_1 pour l'élément linéaire ci-dessus sont

$$B = \frac{G_1 \dfrac{\partial E_1}{\partial v} - F_1 \dfrac{\partial G_1}{\partial u}}{2(E_1 G_1 - F_1^2)}, \qquad B_1 = \frac{E_1 \dfrac{\partial G_1}{\partial u} - F_1 \dfrac{\partial E_1}{\partial v}}{2(E_1 G_1 - F_1^2)}.$$

D'après les valeurs trouvées pour E_1, F_1, G_1, on voit que B est nul, ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes $v = \text{const.}$ soient des courbes de contact de cylindres circonscrits.

Ainsi, des quatre propriétés suivantes :

1° Le réseau (u, v) est conjugué;

2° Les lignes $v = \text{const.}$ sont des géodésiques;

3° Les lignes $v = \text{const.}$ sont des courbes de contact de cylindres circonscrits;

4° L'angle des courbes coordonnées ne dépend que de v;
la *première* et *deux* des trois dernières entraînent celle qui reste.

Cette équivalence de conditions nous servira pour simplifier les calculs.

Si l'on porte les valeurs actuelles de E_1, F_1, G_1 dans l'expression de B_1, on trouve

$$B_1 = \frac{\mu''_{uv}}{\mu'_v}.$$

En conséquence, la recherche des surfaces à lignes de courbure planes revient à cette question d'analyse :

Trouver trois fonctions x_1, y_1, z_1 de deux variables u et v telles que l'on ait

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{\mu''_{uv}}{\mu'_v}\frac{\partial x_1}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 y_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{\mu''_{uv}}{\mu'_v}\frac{\partial y_1}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{\mu''_{uv}}{\mu'_v}\frac{\partial z_1}{\partial v},$$

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = \mu'^2_u\,du^2 + 2\mu'_u\mu'_v\,du\,dv + \frac{\mu'^2_v}{\cos^2\omega}\,dv^2,$$

μ étant une fonction inconnue de u et de v, et ω une fonction de la seule variable v.

Cela fait, la surface à lignes de courbure planes sera représentée par les formules

$$(3)\qquad x = x_1 - \frac{\mu}{\mu'_u}\frac{\partial x_1}{\partial u}, \qquad y = y_1 - \frac{\mu}{\mu'_u}\frac{\partial y_1}{\partial u}, \qquad z = z_1 - \frac{\mu}{\mu'_u}\frac{\partial z_1}{\partial u},$$

les lignes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ seront ses lignes de courbure; les lignes $v = \text{const.}$ seront les lignes de courbure planes. La surface (S_v) lieu des points (x, y, z) sera le lieu des centres de courbure principaux relatifs aux lignes planes $v = \text{const.}$

Il est facile, grâce à ce qui précède, de déterminer la seconde nappe de la surface des centres. En effet, les coordonnées x_2, y_2, z_2 de cette nappe seront définies par des équations de la forme

$$x_2 = x_1 - \frac{\lambda}{\mu'_u}\frac{\partial x_1}{\partial u}, \qquad y_2 = y_1 - \frac{\lambda}{\mu'_u}\frac{\partial y_1}{\partial u}, \qquad z_2 = z_1 - \frac{\lambda}{\mu'_u}\frac{\partial z_1}{\partial u};$$

la longueur inconnue λ doit être déterminée par la condition que le point (x_2, y_2, z_2) décrive, quand v varie, une courbe tangente à la droite qui le joint au point (x_1, y_1, z_1). Cette condition s'exprime par les relations

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial v} - \lambda \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mu'_u} \frac{\partial x_1}{\partial u}\right)}{\frac{1}{\mu'_u} \frac{\partial x_1}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial v} - \lambda \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mu'_u} \frac{\partial y_1}{\partial u}\right)}{\frac{1}{\mu'_u} \frac{\partial y_1}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial v} - \lambda \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\mu'_u} \frac{\partial z_1}{\partial u}\right)}{\frac{1}{\mu'_u} \frac{\partial z_1}{\partial u}}.$$

Mais si l'on tient compte des équations (6), qui donnent les dérivées secondes de x_1, y_1, z_1, on substituera aux relations qui précèdent la nouvelle suite de rapports égaux

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}\left(1 - \frac{\lambda \mu''_{uv}}{\mu'_u \mu'_v}\right)}{\frac{1}{\mu'_u} \frac{\partial x_1}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial v}\left(1 - \frac{\lambda \mu''_{uv}}{\mu'_u \mu'_v}\right)}{\frac{1}{\mu'_u} \frac{\partial y_1}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial z_1}{\partial v}\left(1 - \frac{\lambda \mu''_{uv}}{\mu'_u \mu'_v}\right)}{\frac{1}{\mu'_u} \frac{\partial z_1}{\partial u}},$$

dont la valeur commune peut être mise, eu égard aux équations (4), sous la forme

$$\frac{\left(1 - \frac{\lambda \mu''_{uv}}{\mu'_u \mu'_v}\right) \sum \frac{1}{\mu'_u} \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v}}{\sum \left(\frac{1}{\mu'_u} \frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2} = \left(1 - \frac{\lambda \mu''_{uv}}{\mu'_u \mu'_v}\right) \mu'_v;$$

dès lors, pour que les trois coordonnées x_1, y_1, z_1 ne soient pas des fonctions de μ, ce qui réduirait la surface (S_v) à une courbe, il faut que la parenthèse soit nulle, c'est-à-dire qu'on ait

$$\lambda = \frac{\mu'_u \mu'_v}{\mu''_{uv}}.$$

Alors les formules de départ deviennent

$$(7) \qquad x_2 = x_1 - \frac{\mu'_v}{\mu''_{uv}} \frac{\partial x_1}{\partial u}, \qquad y_2 = y_1 - \frac{\mu'_v}{\mu''_{uv}} \frac{\partial y_1}{\partial u}, \qquad z_2 = z_1 - \frac{\mu'_v}{\mu''_{uv}} \frac{\partial z_1}{\partial u}.$$

D'après la détermination qui vient d'être faite [1] de λ, on voit que

---

[1] Si l'on ne suppose pas que les lignes $v =$ const. soient planes, on trouve par les mêmes calculs

$$\lambda = \frac{\mu'_u}{B_1} = 2\mu'_u : \frac{\partial}{\partial u} \log(G_1 - \mu'^2_v);$$

il suffit d'avoir égard aux équations (1') et (4), ainsi qu'à l'expression générale de B_1.

les rayons de courbure principaux de la surface (x, y, z) ont respectivement pour longueurs

$$(8) \qquad R_1 = \mu, \qquad R_2 = \mu - \frac{\mu'_u \mu'_v}{\mu''_{uv}},$$

R_1 étant le rayon de la section normale tangente à la courbe $v = \text{const.}$, R_2 celui de la section normale tangente à la courbe $u = \text{const.}$

II. — Les surfaces (K) à lignes de courbure planes dont les plans enveloppent un cylindre. Détermination d'une des nappes de la développée.

Nous ne nous occuperons plus, à partir d'ici, que des surfaces qui admettent pour lignes de courbure des courbes planes $v = \text{const.}$ *dont les plans sont parallèles à une droite,* l'axe des z. Ces surfaces, que nous appellerons, pour abréger, *surfaces* (K), ne sont évidemment autres que les surfaces (x, y, z) du paragraphe précédent, particularisées par l'hypothèse que tous les cylindres circonscrits aux surfaces (S_v) le long des courbes $v = \text{const.}$ *soient parallèles au plan* $z = 0$.

Or, un cylindre parallèle au plan des xy, de forme variable avec l'orientation de ses génératrices, peut toujours être représenté par l'équation

$$x \cos v + y \sin v = f(z, v);$$

et l'on sait, en vertu d'un théorème dû à M. Kœnigs, que, sur la surface (S_v) enveloppe de ce cylindre, les caractéristiques $v = \text{const.}$ forment un réseau conjugué avec les sections planes $z = \text{const.}$ Il y aura avantage, en vue de ce qui doit suivre, à modifier un peu ces notations et à représenter la surface (S_v) par les trois équations

$$\begin{aligned} x_1 \cos v + y_1 \sin v &= \varphi(u, v), \\ -x_1 \sin v + y_1 \cos v &= \varphi'_v(u, v), \\ z_1 &= U_1(u), \end{aligned}$$

où U_1 désigne une fonction, provisoirement indéterminée, de la variable u. Si l'on pose

$$p = \varphi'_u, \qquad q = \varphi'_v, \qquad r = \varphi''_{u^2}, \qquad s = \varphi''_{uv}, \qquad t = \varphi''_{v^2},$$

on trouvera tout d'abord

$$(9)\qquad x_1 = \varphi\cos v - q\sin v,\qquad y_1 = \varphi\sin v + q\cos v,\qquad z_1 = U_1;$$

puis, pour les coefficients E_1, F_1, G_1 de l'élément linéaire

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = E_1\, du^2 + 2\,F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2,$$

les valeurs suivantes

$$(10)\qquad E_1 = s^2 + p^2 + U_1'^2,\qquad F_1 = (\varphi + t)\,s,\qquad G_1 = (\varphi + t)^2.$$

D'après une remarque précédemment faite, les lignes $v = \text{const.}$ seront des géodésiques, si les lignes coordonnées font entre elles l'angle ω, indépendant de u, c'est-à-dire si l'on a

$$F_1^2 = E_1 G_1 \cos^2\omega,$$

équation qui, à raison des valeurs de E_1, F_1, G_1, revient à

$$(11)\qquad (s^2 + p^2 + U_1'^2)\cos^2\omega = s^2,\qquad \frac{s}{\sqrt{p^2 + U_1'^2}} = \cot\omega.$$

Négligeant le cas particulier où $\cos\omega$ serait constamment nul, et qui correspond aux surfaces moulures, nous introduirons une fonction auxiliaire $V(v)$ définie par la relation

$$(12)\qquad \frac{dV}{dv} = V' = \cot\omega;$$

l'équation précédente s'écrira

$$\frac{\dfrac{\partial p}{\partial v}}{\sqrt{p^2 + U_1'^2}} = \frac{dV}{dv},$$

et donnera par intégration

$$(13)\qquad \frac{p}{U_1'} = \mathrm{Sh}(U + V),$$

Sh étant un sinus hyperbolique et U une fonction arbitraire de u. On aura donc, pour déterminer φ, sa dérivée partielle

$$(14)\qquad p = \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{U_1'}{2}(e^U e^V - e^{-U} e^{-V}) = \frac{e^V}{2} e^U U_1' - \frac{e^{-V}}{2} e^{-U} U_1'.$$

Or, on a identiquement

$$\frac{d}{du}\left[e^{\mathrm{U}}\left(\frac{du}{d\mathrm{U}}-\frac{d^2u}{d\mathrm{U}^2}\right)\right]=\left(\frac{du}{d\mathrm{U}}-\frac{d^3u}{d\mathrm{U}^3}\right)e^{\mathrm{U}}\,\mathrm{U}',$$
$$\frac{d}{du}\left[e^{-\mathrm{U}}\left(\frac{du}{d\mathrm{U}}+\frac{d^2u}{d\mathrm{U}^2}\right)\right]=-\left(\frac{du}{d\mathrm{U}}-\frac{d^3u}{d\mathrm{U}^3}\right)e^{-\mathrm{U}}\,\mathrm{U}'.$$

On voit donc qu'il suffira de déterminer la fonction auxiliaire U_1 par la condition

$$d\mathrm{U}_1=\left(\frac{du}{d\mathrm{U}}-\frac{d^3u}{d\mathrm{U}^3}\right)d\mathrm{U},$$

c'est-à-dire de prendre

$$(15)\qquad z_1=\mathrm{U}_1=u-\frac{d^2u}{d\mathrm{U}^2}=u+\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'^3},$$

pour que l'équation précédente (14) devienne

$$(16)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{e^{\mathrm{V}}}{2}\frac{d}{du}\left[e^{\mathrm{U}}\left(\frac{1}{\mathrm{U}'}+\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'^3}\right)\right]+\frac{e^{-\mathrm{V}}}{2}\frac{d}{du}\left[e^{-\mathrm{U}}\left(\frac{1}{\mathrm{U}'}-\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'^3}\right)\right].$$

Sous cette forme, elle donne, par une intégration immédiate,

$$(17)\qquad \varphi=\frac{\mathrm{Ch}(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\mathrm{U}'}+\frac{\mathrm{U}''\,\mathrm{Sh}(\mathrm{U}+\mathrm{V})}{\mathrm{U}'^3}+\psi(v),$$

$\psi(v)$ désignant une fonction arbitraire de v. Telle est la forme la plus générale de la fonction φ qui convient à notre problème. Si l'on tient compte de cette expression de φ et de celle de U_1, les formules (9), qui donnent les coordonnées x_1, y_1, z_1, deviendront

$$(18)\quad \begin{cases} x_1=\left(\dfrac{\cos v}{\mathrm{U}'}-\dfrac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'^3}\sin v\cot\omega\right)\mathrm{Ch}(\mathrm{U}+\mathrm{V})+\left(\dfrac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'^3}\cos v-\dfrac{\sin v\cot\omega}{\mathrm{U}'}\right)\mathrm{Sh}(\mathrm{U}+\mathrm{V})+\psi\cos v-\psi'\sin v,\\ y_1=\left(\dfrac{\sin v}{\mathrm{U}'}+\dfrac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'^3}\cos v\cot\omega\right)\mathrm{Ch}(\mathrm{U}+\mathrm{V})+\left(\dfrac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'^3}\sin v+\dfrac{\cos v\cot\omega}{\mathrm{U}'}\right)\mathrm{Sh}(\mathrm{U}+\mathrm{V})+\psi\sin v+\psi'\cos v,\\ z_1=u+\dfrac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'^3}. \end{cases}$$

Telle est la représentation générale de la nappe (S_v) lieu des centres de courbure principaux, relatifs aux lignes de courbure $v=\text{const.}$, des surfaces pour lesquelles ces lignes sont dans des plans parallèles à l'axe des z.

A la vérité, en mettant l'équation (13) sous la forme (16), nous avons implicitement écarté le cas où l'on aurait

$$\frac{du}{dU} - \frac{d^3 u}{dU^3} = 0.$$

Mais cette équation revient à l'équation finie

$$u - h = k\,\mathrm{Ch}(U + m),$$

où h, k, m sont trois constantes arbitraires. On en déduit

$$\mathrm{Sh}(U + m) = \frac{\sqrt{(u-h)^2 - k^2}}{k},$$

et si l'on substitue ces fonctions hyperboliques dans l'équation (13), qui peut s'écrire

$$\frac{1}{U'_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \mathrm{Sh}(U + V) = \mathrm{Ch}(U + m)\,\mathrm{Sh}(V - m) + \mathrm{Sh}(U + m)\,\mathrm{Ch}(V - m),$$

elle prendra la forme

$$\frac{k}{U'_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = (u - h)\,\mathrm{Sh}(V - m) + \sqrt{(u-h)^2 - k^2}\,\mathrm{Ch}(V - m).$$

Déterminons la fonction auxiliaire U_1 par la relation

$$U'_1 = \frac{dz_1}{du} = \frac{1}{\sqrt{(u-h)^2 - k^2}},$$

qui équivaut à

$$z_1 + n = \log\frac{u - h + \sqrt{(u-h)^3 - k^2}}{k} = U + m \qquad (n = \text{const.});$$

il viendra

$$k\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{u - h}{\sqrt{(u-h)^2 - k^2}}\,\mathrm{Sh}(V - m) + \mathrm{Ch}(V - m),$$

d'où, par intégration,

$$k\varphi = \sqrt{(u-h)^2 - k^2}\,\mathrm{Sh}(V - m) + (u - h)\,\mathrm{Ch}(V - m) + k\psi(v).$$

On a donc finalement

$$\varphi = \mathrm{Ch}(U + V) + \psi(v),$$
$$z_1 = U + m - n.$$

La fonction U étant seule à figurer dans ces relations, on peut la remplacer par u; on peut aussi négliger la constante $m - n$; il vient ainsi

$$\varphi = \mathrm{Ch}(u + \mathrm{V}) + \psi(v),$$
$$z_1 = u.$$

Ces résultats sont précisément ceux que donnent les formules (15) et (17) quand on y assigne à la fonction U l'expression particulière $\mathrm{U} = u$. Les surfaces correspondantes sont donc bien parmi celles que représentent les équations (18).

III. — Les cosinus directeurs de la normale aux surfaces (K); représentation sphérique.

Nous connaissons maintenant les coordonnées x_1, y_1, z_1 de la nappe (S_r). Pour pouvoir calculer x, y, z par les formules (3), il nous faut encore connaître la fonction μ et les trois cosinus

$$a = \frac{1}{\mu'_u}\frac{\partial x_1}{\partial u}, \qquad b = \frac{1}{\mu'_u}\frac{\partial y_1}{\partial u}, \qquad c = \frac{1}{\mu'_u}\frac{\partial z_1}{\partial u},$$

de la normale à la surface cherchée.

On déterminera μ en identifiant, ce que nous savons d'avance être possible, la forme de différentielles

$$\mu'^2_u\, du^2 + 2\mu'_u \mu'_v\, du\, dv + \frac{\mu'^2_v}{\cos^2\omega}\, dv^2,$$

avec ce que devient

$$\mathrm{E}_1\, du^2 + 2\mathrm{F}_1\, du\, dv + \mathrm{G}_1\, dv^2,$$

quand on remplace dans les expressions de E_1, F_1 et G_1 la fonction φ et ses dérivées par leurs valeurs déduites de l'équation (17). Or, en vertu des relations (10) et (11), on a

$$\mathrm{E}_1 = s^2 + p^2 + \mathrm{U}'^2_1 = \frac{s^2}{\cos^2\omega}, \qquad \mathrm{F}_1 = (\varphi + t)s_v, \qquad \mathrm{G}_1 = (\varphi + t)^2.$$

Nous n'aurons donc, pour identifier, qu'à prendre

$$\mu'_u = \frac{s}{\cos\omega}, \qquad \mu'_v = (\varphi + t)\cos\omega, \tag{19}$$

sans nous occuper du signe de μ, puisque les formules (3) ne contiennent que $\frac{\mu'_u}{\mu}$. Mais la formule (16), différentiée par rapport à v, donne

$$s = \frac{V' e^V}{2} \frac{d}{du}\left[e^U\left(\frac{1}{U'} + \frac{U''}{U'^3}\right)\right] - \frac{V' e^{-V}}{2} \frac{d}{du}\left[e^{-U}\left(\frac{1}{U'} - \frac{U''}{U'^3}\right)\right].$$

Divisant par $\cos\omega$ et tenant compte de la condition (12), on aura

$$(19') \qquad \mu'_u = \frac{e^V}{2\sin\omega} \frac{d}{du}\left[e^U\left(\frac{1}{U'} + \frac{U''}{U'^3}\right)\right] - \frac{e^{-V}}{2\sin\omega} \frac{d}{du}\left[e^{-U}\left(\frac{1}{U'} - \frac{U''}{U'^3}\right)\right].$$

En conséquence μ est nécessairement de la forme

$$\mu = \frac{e^V e^U}{2\sin\omega}\left(\frac{1}{U'} + \frac{U''}{U'^3}\right) - \frac{e^{-V} e^{-U}}{2\sin\omega}\left(\frac{1}{U'} - \frac{U''}{U'^3}\right) + \chi(v),$$

ou encore

$$(20) \qquad \mu = \frac{\mathrm{Sh}(U+V)}{U'\sin\omega} + \frac{U''\,\mathrm{Ch}(U+V)}{U'^3\sin\omega} + \chi(v),$$

la fonction $\chi(v)$ devant être déterminée de manière que μ'_v soit identique à $(\varphi + t)\cos\omega$. Or, si l'on calcule μ'_v au moyen de cette expression de μ, en tenant compte de la condition (12), on trouve

$$(21) \quad \mu'_v = \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\left[\left(\frac{U''}{U'^3} - \frac{\omega'}{U'}\right)\mathrm{Sh}(U+V) + \left(\frac{1}{U'} - \omega'\frac{U''}{U'^3}\right)\mathrm{Ch}(U+V)\right] + \chi'(v),$$

ω' étant la dérivée de ω par rapport à v. Si, d'autre part, nous formons $(\varphi + t)\cos\omega$ en partant de la relation (16), nous obtiendrons

$$(\varphi + t)\cos\omega = \frac{\cos\omega}{\sin^2\omega}\left[\left(\frac{U''}{U'^3} - \frac{\omega'}{U'}\right)\mathrm{Sh}(U+V)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{U'} - \omega'\frac{U''}{U'^3}\right)\mathrm{Ch}(U+V)\right] + [\psi(v) + \psi''(v)]\cos\omega.$$

En conséquence, la fonction $\chi(v)$ doit être déterminée par l'équation

$$(22) \qquad \chi'(v) = [\psi(v) + \psi''(v)]\cos\omega.$$

Pour avoir les coordonnées des surfaces cherchées, fournies par les formules (3), remarquons que la relation (19') peut s'écrire

$$(23)\qquad \mu'_u = \left[1 + \left(\frac{U''}{U'^3}\right)'\right] \frac{\mathrm{Ch}(U+V)}{\sin\omega},$$

et différentions les expressions (9) de x_1, y_1 et z_1 par rapport à u; on trouve ainsi

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = p\cos v - s\sin v, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial u} = p\sin v + s\cos v, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial u} = 1 + \left(\frac{U''}{U'^3}\right)'.$$

D'autre part, la formule (13), rapprochée de l'équation (15), donne

$$p = \left[1 + \left(\frac{U''}{U'^3}\right)'\right] \mathrm{Sh}(U+V);$$

en ayant égard à la relation (12), on en déduit

$$s = \left[1 + \left(\frac{U''}{U'^3}\right)'\right] \mathrm{Ch}(U+V)\cot\omega,$$

de sorte qu'il vient

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \left[1 + \left(\frac{U''}{U'^3}\right)'\right] [\mathrm{Sh}(U+V)\cos v - \mathrm{Ch}(U+V)\sin v\cot\omega], \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} &= \left[1 + \left(\frac{U''}{U'^3}\right)'\right] [\mathrm{Sh}(U+V)\sin v + \mathrm{Ch}(U+V)\cos v\cot\omega], \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} &= \quad 1 + \left(\frac{U''}{U'^3}\right)'. \end{aligned}\right.$$

Il suffit de rapprocher de ces résultats la formule (23) pour obtenir les valeurs des cosinus directeurs a, b, c de la normale à la surface cherchée, savoir

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{1}{\mu'_u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = \cos v\sin\omega\frac{\mathrm{Sh}(U+V)}{\mathrm{Ch}(U+V)} - \sin v\cos\omega, \\ b &= \frac{1}{\mu'_u}\frac{\partial y_1}{\partial u} = \sin v\sin\omega\frac{\mathrm{Sh}(U+V)}{\mathrm{Ch}(U+V)} + \cos v\cos\omega, \\ c &= \frac{1}{\mu'_u}\frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{\sin\omega}{\mathrm{Ch}(U+V)}. \end{aligned}\right.$$

Ainsi qu'on pouvait le prévoir, ce sont là précisément les cosinus directeurs de la normale à la surface de Joachimstahl la plus générale

$$\frac{x}{\cos v} = \frac{y}{\sin v} = \frac{1}{U' \operatorname{Ch}(U+V)}, \qquad z = u - \frac{\operatorname{Sh}(U+V)}{U' \operatorname{Ch}(U+V)},$$

pour laquelle les plans des lignes de courbure $v = \text{const.}$ passent par l'axe des z. Un calcul que nous omettons donne pour l'élément linéaire de la représentation sphérique

$$(26) \qquad da^2 + db^2 + dc^2 = \frac{\sin^2\omega\, dU^2}{\operatorname{Ch}^2(U+V)} + \left[\frac{\operatorname{Sh}(U+V)}{\operatorname{Ch}(U+V)} - \omega'\right]^2 dv^2.$$

D'autre part, on déduit immédiatement des relations (25)

$$-a\frac{\sin v}{\cos\omega} + b\frac{\cos v}{\cos\omega} - 1 = 0,$$

ce qui montre que, sur la sphère

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0,$$

la courbe qui correspond à une valeur donnée de v est le cercle de contact du cône circonscrit qui a pour sommet le point P de coordonnées

$$x = -\frac{\sin v}{\cos\omega}, \qquad y = \frac{\cos v}{\cos\omega}, \qquad z = 0.$$

En conséquence, les tangentes menées aux courbes $u = \text{const.}$ en tous les points de ce cercle vont concourir au point P; on doit donc avoir les relations

$$(27) \qquad \frac{a'_v}{a + \dfrac{\sin v}{\cos\omega}} = \frac{b'_v}{b - \dfrac{\cos v}{\cos\omega}} = \frac{c'_v}{c},$$

qu'il serait aisé de vérifier au moyen des formules (25). Si, pour abréger l'écriture, on pose

$$(28) \qquad \lambda = \frac{c'_v}{c} = \cot\omega\left[\omega' - \frac{\operatorname{Sh}(U+V)}{\operatorname{Ch}(U+V)}\right],$$

on voit que les trois cosinus a, b et c satisfont à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta'_v}{\lambda} - \theta\right) = 0,$$

qui, développée, s'écrit

$$(29) \qquad \theta''_{uv} - \lambda\theta'_u - \frac{\lambda'_u}{\lambda}\theta'_v = 0.$$

La condition connue pour que la représentation sphérique soit isothermique est

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\lambda'_u}{\lambda}.$$

Or, si l'on développe cette condition, on trouve qu'elle se réduit à

$$(30) \qquad (\omega'^2 - 1)\cot\omega + \omega'' = 0.$$

Nous aurons à en faire usage un peu plus loin.

IV. — Coordonnées des surfaces (K); rayons principaux; élément linéaire; seconde nappe de la développée.

Achevons maintenant le calcul des coordonnées (x, y, z) des surfaces cherchées (K). Nous n'avons qu'à substituer dans les formules (3) les expressions (18), (20) et (25); on trouve ainsi, en réduisant et groupant les termes,

$$(31) \quad \begin{cases} x = \left[\dfrac{1 - U'\chi(v)\sin\omega\,\mathrm{Sh}(U+V)}{U'\,\mathrm{Ch}(U+V)} + \psi(v)\cos v\right]\cos v + [\chi\cos\omega - (\psi\cos v)']\sin v, \\ y = \left[\dfrac{1 - U'\chi(v)\sin\omega\,\mathrm{Sh}(U+V)}{U'\,\mathrm{Ch}(U+V)} + \psi(v)\cos v\right]\sin v - [\chi\cos\omega - (\psi\cos v)']\cos v, \\ z = u - \dfrac{\mathrm{Sh}(U+V) + U'\chi(v)\sin\omega}{U'\,\mathrm{Ch}(U+V)}. \end{cases}$$

Ces formules représentent, abstraction faite des surfaces moulures, l'*ensemble des surfaces qui admettent pour lignes de courbure une famille de courbes planes dont les plans enveloppent un cylindre* parallèle à l'axe des z.

Si, dans ces formules, on fait $\psi(v) = \chi(v) = 0$ on obtient toutes les surfaces de Joachimsthal; si l'on fait, en outre, $U = u$, on a les surfaces de Bonnet, qui admettent comme cercles géodésiques leurs deux familles de lignes de courbure.

Il ne faut pas oublier que les fonctions V, ω, χ, et ψ, qui figurent dans les formules (31), ne sont pas indépendantes; on a, en effet, trouvé précédemment les deux relations

$$(12)\qquad \frac{dV}{dv} = \cot\omega,$$

$$(22)\qquad \chi'(v) = [\psi(v) + \psi''(v)]\cos\omega.$$

Nous ne nous occuperons qu'au paragraphe VI de faire disparaître les signes de quadrature que l'existence de ces relations introduit dans les expressions (31). On peut d'ailleurs, avant toute recherche dans ce sens, déduire des équations précédentes une classe au moins de surfaces qui semblent dignes de remarque : ce sont celles pour lesquelles les lignes de courbure planes sont dans des plans parallèles à l'axe des z et coupant tous la surface sous le même angle ω; ces surfaces se rapprochent des surfaces moulures, pour lesquelles ω est égal à un droit. On les obtiendra en faisant

$$\cot\omega = m = \frac{dV}{dv}, \qquad \psi(v) = W'(v),$$

ce qui donnera

$$V = mv, \qquad \chi(v) = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}[W(v) + W'(v)]$$

et il n'y aura plus qu'à substituer ces expressions de ω, ψ, V et χ dans les équations générales (31).

Laissant de côté ces surfaces particulières qui mériteraient, semble-t-il, d'être étudiées de près, nous revenons au cas général pour donner les expressions des rayons principaux des surfaces (K), ainsi que leur élément linéaire.

Le calcul de ces divers résultats serait impraticable, si l'on partait des formules (31). Mais nous avons établi au paragraphe I que les rayons principaux ont pour expressions

$$R_1 = \mu, \qquad R_2 = \mu - \frac{\mu'_u}{\mu'_{uv}}\mu'_v.$$

On a donc, en vertu de la formule (20),

$$R_1 = \frac{1}{U'\sin\omega}\left[\operatorname{Sh}(U+V) + U'\chi\sin\omega + \frac{U''}{U'^2}\operatorname{Ch}(U+V)\right].$$

Pour calculer R_2, reportons-nous à la relation (23), d'où l'on déduit immédiatement

$$\frac{\mu''_{uv}}{\mu'_u} = \left[\frac{\mathrm{Sh}(U+V)}{\mathrm{Ch}(U+V)} - \omega'\right]\cot\omega;$$

il viendra

$$R_2 = R_1 - \frac{\mu_v' \operatorname{tang}\omega}{\dfrac{\mathrm{Sh}(U+V)}{\mathrm{Ch}(U+V)} - \omega'},$$

ou, en tenant compte de la relation (21),

$$R_2 = \frac{-\dfrac{1}{U'\sin\omega\,\mathrm{Ch}(U+V)} + \chi\left[\dfrac{\mathrm{Sh}(U+V)}{\mathrm{Ch}(U+V)} - \omega'\right] - \chi'\dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}}{\dfrac{\mathrm{Sh}(U+V)}{\mathrm{Ch}(U+V)} - \omega'}.$$

Maintenant il est facile de former l'élément linéaire des surfaces (K). On sait, en effet, que, quand l'élément linéaire de la représentation sphérique des lignes de courbure d'une surface est

$$d\sigma^2 = \varepsilon\, du^2 + \gamma\, dv^2,$$

si R_1 et R_2 sont les rayons principaux de la surface, correspondant le premier à $dv = 0$, le second à $du = 0$, l'élément linéaire de la surface elle-même est

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 = \varepsilon R_1^2\,du^2 + \gamma R_2^2\,dv^2.$$

Or nous avons déterminé $d\sigma^2$ au paragraphe III et trouvé

$$\varepsilon = \frac{U'^2\sin^2\omega}{\mathrm{Ch}^2(U+V)}, \qquad \gamma = \left[\frac{\mathrm{Sh}(U+V)}{\mathrm{Ch}(U+V)} - \omega'\right]^2.$$

On aura, en conséquence, pour E et G les valeurs suivantes

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} E &= \left[\frac{\mathrm{Sh}(U+V) + U'\chi\sin\omega}{\mathrm{Ch}(U+V)} + \frac{U''}{U'^2}\right]^2, \\ G &= \left\{\frac{1}{U'\sin\omega\,\mathrm{Ch}(U+V)} - \chi\left[\frac{\mathrm{Sh}(U+V)}{\mathrm{Ch}(U+V)} - \omega'\right] + \chi'\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\right\}^2. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les expressions, entièrement explicites, des rayons de courbure principaux et de l'élément linéaire des surfaces (K).

Nous donnerons encore celle des coordonnées x_2, y_2, z_2 de la surface (S_u), seconde nappe de la développée d'une surface (K); il suffira, pour les obtenir, de substituer dans les équations (7)

$$x_2 = x_1 - \frac{\mu'_v}{\mu''_{uv}} \frac{\partial x_1}{\partial u}, \qquad y_2 = y_1 - \frac{\mu'_v}{\mu''_{uv}} \frac{\partial y_1}{\partial u}, \qquad z_2 = z_1 - \frac{\mu'_v}{\mu''_{uv}} \frac{\partial z_1}{\partial u},$$

les valeurs des dérivées de x_1, y_1, z_1, fournies par les formules (24), en tenant compte de la relation

$$\frac{\mu'_v}{\mu''_{uv}} = \frac{\left(\frac{U''}{U'^3} - \frac{\omega'}{U'}\right)\mathrm{Sh}(U+V) + \left(\frac{1}{U'} - \frac{\omega' U''}{U'^3}\right)\mathrm{Ch}(U+V) + (\psi + \psi'')\sin^2\omega}{\left[1 + \left(\frac{U''}{U'^3}\right)'\right]\left[\mathrm{Sh}(U+V) - \omega'\mathrm{Ch}(U+V)\right]}$$

qui résulte de l'équation (21) et de la condition (22).

D'assez importantes réductions de termes se présentent au cours des calculs et l'on trouve finalement

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} x_2 &= \frac{u'(\cot\omega \sin v - \omega' \cos v) - \sin^2\omega(\psi + \psi'')(\cos v\,\mathrm{Sh} - \cot\omega \sin v\,\mathrm{Ch})}{\mathrm{Sh} - \omega'\mathrm{Ch}} + \psi\cos v - \psi' \sin v, \\ y_2 &= \frac{-u'(\cot\omega \cos v + \omega' \sin v) - \sin^2\omega(\psi + \psi'')(\sin v\,\mathrm{Sh} + \cot\omega \cos v\,\mathrm{Ch})}{\mathrm{Sh} - \omega'\mathrm{Ch}} + \psi\sin v + \psi' \cos v, \\ z_2 &= \frac{u'(\omega'\mathrm{Sh} - \mathrm{Ch}) - \sin^2\omega(\psi + \psi'')}{\mathrm{Sh} - \omega'\mathrm{Ch}} + u. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, nous avons posé

$$u' = \frac{1}{U'}$$

et sous-entendu l'argument $U + V$ des fonctions hyperboliques.

V. — Identité des surfaces (K) avec les surfaces doublement cylindrées suivant leurs lignes de courbure.

Les formules que nous venons d'obtenir vont nous permettre d'établir une propriété importante des surfaces (K):

Les courbes $v =$ const. *sur la nappe* (S_u) *de la surface des centres d'une surface* (K) *sont des courbes planes, dont les plans sont parallèles à la même droite que les plans des lignes de courbure* $v =$ const.

Nous allons prouver, en effet, qu'il existe trois fonctions V_1, V_2, V_3

de la seule variable v, telles qu'on ait identiquement

$$V_1 x_2 + V_2 y_2 + V_3 = 0.$$

D'après les expressions (33) des coordonnées x_2 et y_2, il s'agit de satisfaire à l'identité

$$\begin{aligned}
&V_1 u'(\cot\omega \sin v - \omega' \cos v) - V_1 \sin^2\omega(\psi + \psi'')(\cos v \,\mathrm{Sh} - \cot\omega \sin v \,\mathrm{Sh})\\
&\quad + V_1(\psi \cos v - \psi' \sin v)(\mathrm{Sh} - \omega' \,\mathrm{Ch}) - V_2 u'(\cot\omega \cos v + \omega' \sin v)\\
&\quad - V_2 \sin^2\omega(\psi + \psi'')(\sin v \,\mathrm{Sh} + \cot\omega \cos v \,\mathrm{Ch})\\
&\qquad\qquad + V_2(\psi \sin v + \psi' \cos v)(\mathrm{Sh} - \omega' \,\mathrm{Ch}) + V_3(\mathrm{Sh} - \omega' \,\mathrm{Ch}) = 0.
\end{aligned}$$

Pour faire disparaître u', prenons

$$V_1 = \cot\omega \cos v + \omega' \sin v,$$
$$V_2 = \cot\omega \sin v - \omega' \cos v;$$

d'où résultera

$$V_1 \cos v + V_2 \sin v = \cot\omega,$$
$$V_1 \sin v - V_2 \cos v = \omega'.$$

Égalons ensuite à zéro le coefficient de $\mathrm{Sh}(U + V)$ et celui de $\mathrm{Ch}(U + V)$, en tenant compte de ces deux derniers résultats; il viendra

$$-(\psi + \psi'')\sin\omega\cos\omega + \psi\cot\omega - \psi'\omega' + V_3 = 0,$$
$$(\psi + \psi'')\omega' \sin\omega\cos\omega + \psi\omega'\cot\omega + \psi'\omega'^2 - V_3\omega' = 0.$$

Ces deux équations n'en font qu'une, qui détermine V_3. En conséquence, on a bien

$$\begin{aligned}
(34)\quad & x_2(\cot\omega \cos v + \omega' \sin v) + y_2(\cot\omega \sin v - \omega' \cos v)\\
&\qquad - \psi \cos^2\omega \cot\omega + \psi'\omega' + \psi'' \sin\omega \cos\omega = 0,
\end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété annoncée.

Cela posé, rappelons qu'une surface *doublement cylindrée suivant ses lignes de courbure* est définie [1] par la propriété qu'en tous les points de chaque ligne de courbure les plans osculateurs aux lignes de courbure de l'autre système soient parallèles à une droite.

Il est évident que, si les lignes de courbure $v =$ const. d'une surface sont dans des plans parallèles à une droite (D), chaque ligne de cour-

---

[1] L. RAFFY, *Surfaces doublement cylindrées et surfaces isothermiques* (*Comptes rendus Acad. des Sciences*, janvier 1899).

bure $u =$ const. est *cylindrée;* c'est-à-dire qu'en tous ses points les plans osculateurs aux diverses lignes de courbure $v =$ const. sont parallèles à une droite, puisqu'ils coïncident avec les plans mêmes de ces courbes, qui sont supposés parallèles à (D).

La question générale de savoir si une ligne de courbure d'une surface est *cylindrée* revient à une autre, parfois plus simple, en vertu de la proposition suivante :

Pour qu'une ligne de courbure $u = u_0$ d'une surface (S) *soit cylindrée, il faut et il suffit que, sur la nappe* (S_v) *de la développée de* (S) *qui contient les centres de courbure principaux relatifs aux lignes de courbure* $v =$ const., *la ligne $u = u_0$ soit plane.*

Soient, en effet, M_1 un point de la ligne de courbure $u = u_0$; M_1T_1 la tangente à la ligne de courbure $v = v_1$ qui passe en M_1; C_1 le centre de courbure de cette ligne $v = v_1$ relatif au point M_1; K_1 le centre de courbure de la section normale dont le plan contient M_1T_1. Le plan $T_1M_1C_1$ est le plan osculateur de la ligne $v = v_1$ en M_1 et C_1K_1 est la droite polaire; c'est de plus la tangente à la courbe $u = u_0$ de la surface (S_v) lieu des centres de courbure K_1, relatifs aux lignes de courbure $v =$ const.

Si la courbe $u = u_0$ de la surface (S) est *cylindrée*, le plan osculateur $T_1M_1C_1$, qui se déplace quand M_1 décrit la ligne $u = u_0$, reste constamment parallèle à une droite (D); la droite polaire C_1K_1, qui est perpendiculaire au plan osculateur $T_1M_1C_1$, reste perpendiculaire à la droite (D). La courbe $u = u_0$, de (S_v), ayant ses tangentes perpendiculaires à une droite, est plane.

Réciproquement, si la courbe $u = u_0$ de la surface (S_v) est plane, tout plan perpendiculaire à l'une de ses tangentes est perpendiculaire au plan même de la courbe. Donc les plans osculateurs menés aux diverses lignes de courbure $v =$ const. de la surface (S) en tous les points de la ligne $u = u_0$ sont perpendiculaires à un même plan, c'est-à-dire parallèles à une droite et la courbe $u = u_0$ est *cylindrée*.

Pareillement, *pour qu'une ligne de courbure $v = v_0$ d'une surface* (S) *soit cylindrée, il faut et il suffit que, sur la nappe* (S_u) *de la développée de* (S) *qui contient les centres de courbure principaux relatifs aux lignes de courbure $u =$* const., *la ligne $v = v_0$ soit plane.*

En conséquence, *toutes les surfaces* (K), *représentées par les formules* (31), *sont doublement cylindrées suivant leurs lignes de courbure,* puisque, sur la nappe (S_v) de la développée, les lignes $u =$ const. sont planes (paragraphe II) et que sur la nappe (S_u) les lignes $v =$ const. sont planes également, ainsi qu'il a été démontré au début du présent paragraphe.

D'autre part, les surfaces moulures, que nous avons laissées en dehors de notre recherche, jouissent évidemment de la propriété d'être doublement cylindrées suivant leurs lignes de courbure. Donc :

Toute surface à lignes de courbure planes, situées dans des plans parallèles à une droite, est doublement cylindrée suivant ses lignes de courbure.

Pour démontrer que l'ensemble des surfaces (K) coïncide avec l'ensemble des surfaces doublement cylindrées suivant leurs lignes de courbure, il suffit donc d'établir que toute surface doublement cylindrée suivant ses lignes de courbure est une surface (K). Or, dans la Note rappelée plus haut, j'ai prouvé que, *si les plans osculateurs menés aux lignes de courbure* $v =$ const. *en tous les points de chaque ligne de courbure* $u =$ const. *sont parallèles à une droite dont les cosinus sont* $U_1(u)$, $U_2(u)$, $U_3(u)$ *et si les plans correspondants relatifs à chaque ligne* $v =$ const. *sont parallèles à une droite dont les cosinus sont* $V_1(v)$, $V_2(v)$, $V_3(v)$, *on a nécessairement*

$$U_1 V_1 + U_2 V_2 + U_3 V_3 = 0.$$

Cette condition exige, ou bien que les U soient indépendants de u, ou bien que les V soient indépendants de v. On peut donc prendre

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = 0, \qquad U_3 = 1.$$

Mais, en un point (x, y, z) d'une surface (S), le plan osculateur à la ligne $v =$ const. a pour équation

$$\begin{aligned}(y'_u z''_{u^2} - z'_u y''_{u^2})(X - x) + (z'_u x''_{u^1} - x'_u z''_{u^2})(Y - y)& \\ + (x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^1})(Z - z) &= 0.\end{aligned}$$

Pour que ce plan soit parallèle à Oz, quels que soient u et v, il faut qu'on ait

$$x_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2} = 0.$$

Cette équation, qui a visiblement pour intégrale

$$W_1 x + W_2 y + W_3 = 0,$$

les W ne dépendant que de v, exprime que les lignes de courbure $v = \text{const.}$ sont dans des plans parallèles à Oz; c'est-à-dire que *toute surface doublement cylindrée suivant ses lignes de courbure est une surface* (K).

VI. — Les coordonnées des surfaces (K) exprimées sans signes de quadrature; les deux classes de surfaces (K).

On a vu plus haut que les quatre fonctions ω, V, χ, ψ de la variable v, qui se sont introduites naturellement dans notre analyse, sont liées par les deux relations

$$(12) \qquad \cot\omega = V' = \frac{dV}{dv},$$

$$(22) \qquad \chi'(v) = [\psi(v) + \psi''(v)]\cos\omega.$$

La première permettant d'exprimer les lignes trigonométriques de l'angle ω au moyen de la fonction V qui reste arbitraire, nous n'avons qu'à résoudre le problème suivant :

Exprimer au moyen de ω (ou de V) et d'une nouvelle fonction arbitraire les deux fonctions χ et ψ liées par l'équation (22).

A cet effet, nous poserons

$$(35) \qquad \begin{cases} \psi = \alpha W + \beta W', \\ \chi = AW + BW' + CW'', \end{cases}$$

W désignant une fonction de v, qui devra rester absolument arbitraire; α, β, A, B, C sont des fonctions à déterminer. Nous représentons par des accents les dérivées prises par rapport à v.

Des différentiations successives donnent

$$\begin{aligned}
\psi' &= \alpha' W + (\alpha + \beta')W' + \beta W'', \\
\psi'' &= \alpha'' W + (2\alpha' + \beta'')W' + (\alpha + 2\beta')W'' + \beta W''', \\
\chi' &= A'W + (A + B')W' + (B + C')W'' + CW'''.
\end{aligned}$$

Écrivons la condition

$$(22)\qquad \chi' = (\psi + \psi'') \cos\omega\,;$$

nous devons avoir *identiquement*

$$\begin{aligned} &A'W + (A + B')W' + (B + C')W'' + CW''' \\ &\quad = [(\alpha + \alpha'')W + (2\alpha' + \beta + \beta'')W' + (\alpha + 2\beta')W'' + \beta W'''] \cos\omega, \end{aligned}$$

sans que la fonction W soit aucunement déterminée par là. Il faut donc égaler les coefficients de W et de ses dérivées dans les deux membres. Commençant par les dérivées de l'ordre le plus élevé, nous aurons

$$(36)\qquad C = \beta \cos\omega,$$

$$(37)\qquad B + C' = (\alpha + 2\beta') \cos\omega,$$

$$(38)\qquad A + B' = (2\alpha' + \beta + \beta'') \cos\omega,$$

$$(39)\qquad A' = (\alpha + \alpha'') \cos\omega.$$

L'équation (36) donne C; on en déduit

$$C' = \beta' \cos\omega - \beta\omega' \sin\omega.$$

Substituant dans la relation (37), on trouve

$$(40)\qquad B = (\alpha + \beta') \cos\omega + \beta\omega' \sin\omega,$$

d'où résulte, par différentiation,

$$B' = (\alpha' + \beta\omega'^2 + \beta'') \cos\omega - (\alpha\omega' - \beta\omega'') \sin\omega.$$

Cette valeur de B', portée dans l'équation (38), donne

$$(41)\qquad A = \beta(1 - \omega'^2) \cos\omega + (\alpha\omega' - \beta\omega'') \sin\omega.$$

On a donc, en différentiant,

$$\begin{aligned} A' = {} & [\alpha\omega'^2 - 3\beta\omega'\omega'' + \beta'(1 - \omega'^2)] \cos\omega \\ & + \{\alpha\omega'' + \alpha'\omega' - \beta[\omega'(1 - \omega'^2) + \omega'''] - \beta'\omega''\} \sin\omega. \end{aligned}$$

Portant cette expression de A' dans la relation (39), on obtient une équation qui peut s'écrire

$$(42)\qquad \begin{aligned} &(\beta' - \alpha)[(1 - \omega'^2) \cos\omega - \omega'' \sin\omega] \\ &\quad - \beta\{3\omega'\omega'' \cos\omega + [\omega'(1 - \omega'^2) + \omega'''] \sin\omega\} = 0. \end{aligned}$$

Or, si l'on pose

$$\Omega(v) = (1 - \omega'^2)\cos\omega - \omega''\sin\omega, \tag{43}$$

la relation (42) devient

$$(\beta' - \alpha)\Omega + \beta\Omega' = 0, \tag{44}$$

d'où deux cas à distinguer, suivant que la fonction Ω est identiquement nulle ou différente de zéro :

Premier cas : cas particulier $\Omega = 0$. — Si l'on se reporte à la formule (30), on voit immédiatement que *la condition* $\Omega = 0$ *caractérise les surfaces pour lesquelles la représentation sphérique* (26) *des lignes de courbure est isothermique.*

Dans le cas présent, on peut prendre *arbitrairement* les deux fonctions α et β. Le plus simple est de poser

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0.$$

Cette hypothèse, qui revient à garder ψ comme fonction arbitraire, entraîne, en vertu des relations (36), (40) et (41),

$$\chi = \psi\omega'\sin\omega + \psi'\cos\omega. \tag{22'}$$

Telle est l'expression de χ au moyen de la fonction *arbitraire* ψ et de l'angle ω, qui est déterminé par la relation

$$\Omega(v) = (1 - \omega'^2)\cos\omega - \omega''\sin\omega = 0. \tag{45}$$

Si $\omega' = -1$, d'où résulte

$$\omega = v_0 - v \qquad (v_0 = \text{const.}), \tag{46}$$

l'équation (12) donne

$$e^V = \frac{1}{\sin(v - v_0)}, \tag{47}$$

si l'on fait rentrer la constante d'intégration dans la fonction V, ce qui est permis.

Si $\omega' = 1$, d'où résulte

$$\omega = v - v_0 \qquad (v_0 = \text{const.}), \tag{46'}$$

on trouve, sous le bénéfice de la même observation,

$$(47)' \qquad e^{\mathrm{V}} = \sin(v - v_0).$$

Dans un cas comme dans l'autre, on a

$$(22)'' \qquad \chi = \psi \sin(v - v_0) + \psi' \cos(v - v_0).$$

Supposant désormais $\omega'^2 - 1 \neq 0$, nous remarquerons l'identité

$$(\omega'^2 - 1)\cot\omega + \omega'' = e^{-2\mathrm{V}} \frac{(\omega'+1)^2}{2} \frac{d}{dv}\left(\frac{\omega'-1}{\omega'+1} e^{2\mathrm{V}}\right).$$

On en conclut que l'équation (45) revient à

$$(48) \qquad \frac{\omega'-1}{\omega'+1} e^{2\mathrm{V}} = \text{const.}$$

La constante qui figure au second membre n'étant ni nulle ni infinie ($\omega'^2 - 1 \neq 0$), on peut, comme plus haut, la réduire à l'unité. Il vient alors

$$(48)' \qquad \omega' \,\mathrm{Sh}\,\mathrm{V} - \mathrm{Ch}\,\mathrm{V} = 0.$$

Mais la relation (12) différentiée donne

$$-\omega'(1 + \mathrm{V}'^2) = \mathrm{V}'',$$

ce qui permet d'écrire l'équation précédente sous la forme

$$(48)'' \qquad \frac{\mathrm{V}'\mathrm{V}''}{1 + \mathrm{V}'^2} + \mathrm{V}' \frac{\mathrm{Ch}\,\mathrm{V}}{\mathrm{Sh}\,\mathrm{V}} = 0.$$

On déduit de là, par une intégration immédiate,

$$(49) \qquad \sqrt{1 + \mathrm{V}'^2}\,\mathrm{Sh}\,\mathrm{V} = \sqrt{m^2 - 1} \qquad (m = \text{const.}).$$

Cette équation revient à

$$\mathrm{Ch}^2\mathrm{V} + \left(\frac{d\,\mathrm{Ch}\,\mathrm{V}}{dv}\right)^2 = m^2,$$

on en conclut

$$(50) \qquad \begin{cases} \mathrm{Ch}\,\mathrm{V} = m \sin(v - v_0) & (v_0 = \text{const.}), \\ \mathrm{Sh}\,\mathrm{V} = \sqrt{m^2 \sin^2(v - v_0) - 1}, \end{cases}$$

L'équation $(48)'$ donne alors

$$\omega' = \frac{m\sin(v - v_0)}{\sqrt{m^2\sin^2(v - v_0) - 1}}. \tag{51}$$

D'autre part, les relations (50) entraînent

$$V' = \cot\omega = \frac{m\cos(v - v_0)}{\sqrt{m^2\sin^2(v - v_0) - 1}}. \tag{52}$$

On connaît donc ω', $\cos\omega$, $\sin\omega$; et si l'on substitue leurs valeurs dans l'équation $(22)'$ on trouve

$$\chi = \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}}[\psi\sin(v - v_0) + \psi'\cos(v - v_0)]. \tag{22'''}$$

Il n'y aurait plus maintenant, pour avoir les coordonnées des surfaces (K), sans aucun signe de quadrature, qu'à substituer dans les formules (31) les expressions de ω, de V et de χ fournies, soit par les relations (46), (47), $(22)'$ ou $(46)'$, $(47)'$, $(22)''$, soit par les relations (50), (52) et $(22)'''$.

Second cas : cas général $\Omega \neq 0$. — L'équation (44) donne

$$\alpha = \frac{1}{\Omega}\frac{d}{dv}(\beta\Omega); \tag{44'}$$

elle ne détermine donc que l'une des fonctions α et β, puisque la fonction Ω est connue. Si l'on substitue V à ω dans l'équation (43) qui définit Ω, on trouve

$$\Omega = \frac{V'(1 + V'^2)^2 - 3V'V''^2 + (1 + V'^2)V'''}{(1 + V'^2)^{\frac{5}{2}}}. \tag{43'}$$

Cette valeur de Ω est assez compliquée. De quelque façon que l'on procède, on ne pourra pas obtenir, pour les coordonnées (31), des expressions simples.

Si l'on prend

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{1}{\Omega},$$

en tenant compte des relations (35), (36), (40) et (41), on trouvera

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi = \frac{W'}{\Omega}, \\ &\chi = W + W'\left(\frac{\omega' \sin\omega}{\Omega} - \frac{\Omega' \cos\omega}{\Omega^2}\right) + \frac{W'' \cos\omega}{\Omega}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on prend

$$\alpha = 2\Omega', \qquad \beta = \Omega,$$

en tenant toujours compte des mêmes relations, on trouvera

$$(53)'\quad \left\{\begin{aligned} &\psi = 2\Omega' W + \Omega W', \\ &\chi = W(\Omega^2 + 2\Omega'\omega' \sin\omega) + W'(3\Omega' \cos\omega + \Omega\omega' \sin\omega) + W''\Omega \cos\omega. \end{aligned}\right.$$

Ces formules sont plus simples que les précédentes, parce que Ω n'y figure pas en dénominateur.

Il n'y a plus maintenant qu'à remplacer dans les formules (31) les fonctions ψ et χ par leurs valeurs (53) ou (53)', en ayant toujours égard à la relation (12). On obtiendra ainsi les coordonnées des surfaces (K) sous leur forme la plus générale, exprimées sans aucun signe de quadrature.

Il résulte des développements de ce paragraphe que ces surfaces forment deux classes : l'une, plus particulière, est caractérisée par l'isothermie de sa représentation sphérique; les surfaces de cette classe dépendent *d'une fonction arbitraire de u et d'une fonction arbitraire de v*, les fonctions U et ψ. Les surfaces de la classe générale n'ont pas leur représentation sphérique isotherme; elles dépendent *d'une fonction arbitraire de u et de deux fonctions arbitraires de v*, les fonctions U, V et W.

Mais il y aura avantage, vraisemblablement, dans bien des cas, à se servir des formules (31) où cette distinction n'intervient pas et qui sont assez maniables; on devra seulement avoir égard aux conditions (12) et (22).