L. BACHELIER

Théorie mathématique du jeu

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 18 (1901), p. 143-209
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1901_3_18__143_0>

THÉORIE MATHÉMATIQUE DU JEU,

PAR M. L. BACHELIER,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

INTRODUCTION.

La théorie du jeu constitue encore aujourd'hui la plus belle étude du calcul des probabilités, auquel elle a donné naissance. Le calcul des probabilités, bien que nécessairement abstrait, ne comporte pas de difficultés insurmontables. Ses progrès toutefois ont été lents et peu de théories mathématiques ont donné lieu à un aussi grand nombre d'interprétations erronées.

La théorie du jeu, présentée sous une forme irréprochable depuis quelques années, comportait de nombreuses lacunes que cette étude vient en partie combler. Les problèmes réellement importants, ceux qui, à toutes les époques, ont attiré l'attention des géomètres, sont relatifs aux épreuves répétées; ils constituent l'objet de ce travail.

En le composant, nous nous sommes proposé de suivre une voie directe, négligeant à dessein plusieurs questions intéressantes qui s'écartaient de notre sujet. La théorie du jeu y est nettement divisée en trois problèmes dont la solution, jusqu'ici partiellement connue, est entièrement établie.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES PROBABILITÉS.

1. On appelle *probabilité* d'un événement le rapport du nombre des cas favorables à l'arrivée de cet événement au nombre total des cas possibles.

La probabilité d'amener le point quatre, par exemple, avec un dé est $\frac{1}{6}$ parce que six cas peuvent se présenter quand le dé est jeté sur le tapis et qu'un seul est favorable à l'arrivée du point quatre. La probabilité de retourner un roi sur un jeu de 32 cartes est $\frac{1}{8}$: il y a en effet 32 cas possibles et 4 favorables; la probabilité est donc $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Cette définition de la probabilité suppose toujours que les cas sont également vraisemblables.

Dans le premier exemple donné ci-dessus, il faudrait se garder de dire : le dé peut montrer le point quatre ou il peut montrer un autre point : il y a donc deux cas possibles dont un favorable : la probabilité est $\frac{1}{2}$. Les deux cas possibles ne sont pas également vraisemblables.

La probabilité est toujours comprise entre zéro et un; cette dernière valeur correspond à la certitude.

Dans le langage ordinaire, on dit qu'un événement a neuf *chances* sur dix de se produire pour exprimer que sa probabilité est 0,9.

2. **Principe de la probabilité totale.** — *Si l'on partage les cas favorables à l'arrivée d'un événement en différents groupes, la probabilité de l'événement sera la somme des probabilités pour qu'il appartienne à chacun des groupes.*

On additionne en effet des fractions de même dénominateur en additionnant les numérateurs.

Le choix des groupes est arbitraire, sous la condition de comprendre dans ces groupes tous les cas possibles sans qu'aucun s'y rencontre deux fois.

La probabilité d'amener avec deux dés une somme de points supérieure à dix est égale à la somme des probabilités pour amener 11 ou 12.

La probabilité d'amener le point 2 ou le point 5 avec deux dés n'est pas représentée par la probabilité pour amener 2 ajoutée à la probabilité pour amener 5. On peut, en effet, les amener tous deux; le point 2,5 considéré une première fois comme contenant 2 ne doit pas être compté une seconde fois comme contenant 5.

3. **Principe de la probabilité composée.** — *Lorsqu'un événement* E *dépend du concours de deux autres,* E_1, E_2, *et que l'arrivée de* E_2 *est subor-*

donnée à celle de E_1, *la probabilité de* E *est égale au produit de la probabilité de* E_1 *par la probabilité qu'acquiert* E_2 *quand on suppose* E_1 *arrivé.*

Soit en effet μ le nombre des cas qui peuvent se présenter quand on attend l'événement E; sur ces μ cas, il y en a, par exemple, m favorables à l'arrivée de E_1 et, parmi ces m cas, n favorables à l'arrivée de E_2, la probabilité de E est $\frac{n}{\mu}$; or

$$\frac{n}{\mu} = \frac{m}{\mu}\frac{n}{m},$$

$\frac{m}{\mu}$ est la probabilité de E_1 et $\frac{n}{m}$ est la probabilité qu'acquiert E_2 quand on suppose E_1 arrivé : le principe est donc démontré.

4. En particulier : *Si les événements* E_1, E_2 *sont indépendants, la probabilité de* E *sera égale au produit des probabilités de* E_1 *et* E_2.

Ce principe serait encore vrai dans le cas d'un événement composé dépendant de plusieurs événements E_1, E_2, E_3, ...

On a souvent commis des erreurs en confondant le cas particulier de la probabilité composée avec le cas général, et en considérant comme indépendantes des probabilités qui ne l'étaient pas.

5. *La probabilité d'un événement étant p, quelle est la probabilité pour que l'événement ne se produise pas en n épreuves.*

La probabilité pour que l'événement ne se produise pas à la première épreuve est $1-p$.

La probabilité pour qu'il ne se produise ni à la première ni à la seconde épreuve est égale, d'après le principe de la probabilité composée, au produit de la probabilité pour qu'il ne se produise pas à la première épreuve, multipliée par la probabilité pour que, ne s'étant pas produit à la première épreuve, il ne se produise pas à la seconde; c'est-à-dire est égale à $(1-p)^2$; etc.

La probabilité pour que l'événement ne se produise pas en n épreuves est donc

$$(1-p)^n.$$

Cette probabilité décroît constamment lorsque n croît; la probabilité de l'arrivée de l'événement finit donc par devenir une quasi-certitude.

6. *Dans un jeu de 32 cartes, on tire deux cartes au hasard, quelle est la probabilité de tirer deux rois?*

Le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 32 objets 2 à 2, c'est-à-dire : $\frac{32.31}{2}$; le nombre des cas favorables est celui des combinaisons de 4 objets 2 à 2, c'est-à-dire : $\frac{4.3}{2}$; la probabilité cherchée est donc : $\frac{4.3}{32.31}$.

On peut aussi résoudre cette question en employant le principe de la probabilité composée : la probabilité pour retourner deux rois est égale au produit de la probabilité pour retourner un roi au premier tirage multipliée par la probabilité pour que, ayant déjà retourné un roi, on en tourne un second au second tirage. La probabilité de tourner deux rois est donc : $\frac{4}{32}\frac{3}{31}$ puisque, au second tirage, il reste 31 cartes dont 3 rois.

Dans les mêmes conditions, la probabilité pour tirer au moins un roi est égale à la probabilité pour retourner un roi au premier tirage, plus la probabilité pour en amener un au second tirage si, au premier, on n'a pas retourné un roi, c'est donc : $\frac{4}{32}+\frac{28}{32}\frac{4}{31}$.

7. *On mêle un grand nombre de jeux de 32 cartes; quelle est la probabilité de tirer quatre cartes noires de suite?*

La probabilité de tirer une noire est $\frac{16}{32}$, le nombre des cartes étant supposé indéfini, la probabilité de tirer quatre noires (n° 4) de suite est : $\left(\frac{16}{32}\right)^4$.

Si l'on opérait sur un seul jeu de 32 cartes, la probabilité de retourner quatre noires serait

$$\frac{16}{32}\cdot\frac{15}{31}\cdot\frac{14}{30}\cdot\frac{13}{29}.$$

Lorsque le nombre des jeux de cartes est limité, la probabilité est comprise entre ce dernier chiffre et $\left(\frac{16}{32}\right)^4$.

Supposons que nous puissions jouer à égalité sur la rouge ou sur la noire, en choisissant la couleur. La première partie est jouée, nous avons retourné une noire; le nombre des cartes n'étant pas infini, il y aura avantage à parier pour la rouge; si la noire passe une seconde fois, il y aura à plus forte raison avantage à parier pour la rouge, à la troisième partie, etc. Nous aurons toujours avantage à parier pour la couleur qui est sortie le moins souvent. Ce fait est généralement bien compris.

8. Ce qui ne l'est généralement pas, c'est qu'un tel avantage n'existe plus quand le jeu est identique à chaque partie; il n'existerait plus dans le jeu précédent si, après chaque partie, on mêlait à nouveau les cartes après avoir remis dans le jeu la carte sortie.

On joue à pile ou face. Pile est sorti quatre fois, à la cinquième partie, il n'est pas plus avantageux de jouer face que pile.

On joue à pair ou impair avec un dé. Sept fois de suite le point obtenu est pair; la probabilité pour que le point suivant soit pair n'en est pas moins $\frac{1}{2}$.

Avant de commencer le jeu, la probabilité pour obtenir huit fois de suite un chiffre pair était $\left(\frac{1}{2}\right)^8$, mais quand le fait s'est produit sept fois, la probabilité pour qu'il se reproduise une fois encore est $\frac{1}{2}$.

9. **L'espérance mathématique.** — On appelle *espérance mathématique* d'un bénéfice éventuel le produit de ce bénéfice par la probabilité de le réaliser.

L'espérance mathématique est donc négative lorsqu'elle correspond à une perte.

L'espérance mathématique totale d'un joueur sera la somme des produits des bénéfices éventuels par les probabilités correspondantes.

Il est évident qu'un joueur n'est ni avantagé ni lésé si son espérance mathématique totale est nulle. On dit alors que le jeu est *équitable.*

L'avantage absolu d'un joueur est égal à la différence entre la somme de ses espérances positives et la somme de ses espérances négatives; l'avantage absolu est donc l'espérance mathématique totale; c'est la somme que l'on devrait équitablement donner au joueur si on l'empêchait de jouer, lorsque le jeu le favorise.

10. L'espérance mathématique nous indique si un jeu est avantageux ou non; elle nous apprend de plus ce que le jeu doit logiquement faire gagner ou faire perdre; mais elle ne donne pas un coefficient représentant, en quelque sorte, la valeur intrinsèque du jeu.

Ceci va nous amener à introduire une nouvelle notion, celle de l'*avantage relatif*. Nous appellerons ainsi le rapport de l'espérance positive à la somme arithmétique des espérances positive et négative.

L'avantage relatif varie, comme la probabilité, de zéro à un; il est égal à $\frac{1}{2}$ quand le jeu est équitable.

Nous verrons que si un jeu est désavantageux, et si l'on considère un nombre de plus en plus grand de parties identiques, l'avantage relatif est de plus en plus faible et tend vers zéro.

11. **Application de la notion de l'espérance mathématique.** — La notion de l'espérance mathématique permet quelquefois de déterminer les probabilités. On peut citer comme exemple ce problème classique :

Deux joueurs font un nombre illimité de parties à un jeu dont les conditions sont équitables; leurs fortunes sont m et n; quelle est, pour chacun d'eux, la probabilité de ruiner (¹) *l'autre?*

Soit P la probabilité pour que le premier joueur ruine son adversaire; son espérance positive est Pn, son espérance négative est $-(1-P)m$. Le jeu est équitable, l'espérance totale est nulle, et l'on a

$$Pn-(1-P)m=0,$$

d'où

$$P=\frac{m}{m+n};$$

on aurait de même

$$1-P=\frac{n}{m+n}.$$

Les probabilités de gain des joueurs sont proportionnelles aux sommes qu'ils jouent.

(¹) Pour simplifier le langage, on dit qu'un joueur est ruiné lorsqu'on veut exprimer qu'il a perdu la somme totale qu'il consacrait au jeu.

12. On étendrait facilement ce résultat au cas de trois joueurs, en supposant que le jeu se termine lorsque deux d'entre eux sont ruinés. Si leurs fortunes sont m, n, r, la probabilité pour que le premier d'entre eux ruine les autres est

$$\frac{m}{m+n+r}.$$

On traiterait de même le cas d'un nombre quelconque de joueurs.

13. Les probabilités de ruine de deux joueurs qui jouent indéfiniment ensemble sont inversement proportionnelles aux sommes jouées; il en résulte que le plus pauvre d'entre eux sera vraisemblablement ruiné. Celui qui joue continuellement contre tout adversaire qui se présente se trouve dans les mêmes conditions que s'il jouait contre un adversaire très riche; sa ruine est à peu près certaine. Elle serait plus certaine encore si le jeu le désavantageait.

Nous verrons plus loin que si un jeu est avantageux, quelque faible que soit son avantage, la probabilité de ruine ne tend plus vers l'unité lorsque la fortune de l'adversaire augmente indéfiniment.

Celui qui joue équitablement contre tout adversaire qui se présente joue un jeu dangereux; mais en même temps que sa probabilité de ruine s'approche de la certitude, le bénéfice espéré par lui croît indéfiniment. Il y a plus : dans ce cas, la durée moyenne du jeu est infinie, comme nous le verrons.

14. **Principe relatif à la théorie du jeu.** — Nous appliquerons encore la notion de l'espérance mathématique à la démonstration d'un principe fondamental de la théorie du jeu :

Quand on joue plusieurs parties dans des conditions identiques, l'avantage du jeu est proportionnel au nombre des parties.

Supposons que, à chaque partie, on ait la probabilité p de gagner la somme α et la probabilité q de perdre la somme β.

L'avantage absolu pour une partie est la quantité

$$\alpha p - \beta q;$$

c'est la somme qu'on devrait équitablement payer au joueur pour l'empêcher de jouer une partie, si le jeu est avantageux pour lui; c'est la somme qu'on devrait lui verser pour le forcer à jouer si le jeu le désavantage.

Dans ce dernier cas, à chaque nouvelle partie qu'on le contraindrait à jouer on devrait lui verser la même somme.

On lui verserait donc une somme proportionnelle au nombre des parties; cette somme représentant le désavantage absolu du jeu, la proposition est ainsi démontrée.

THÉORIE DES ÉPREUVES RÉPÉTÉES.

15. *La probabilité d'un événement est p, celle de l'événement contraire est $q = 1 - p$; on fait μ épreuves dans les mêmes conditions. Quelle est la probabilité pour que le premier événement se produise n fois, et le second $\mu - n$ fois?*

Cherchons d'abord la probabilité pour que les événements se succèdent dans un ordre déterminé. D'après le principe de la probabilité composée (nº 4), la probabilité cherchée est

$$p^n q^{\mu-n}.$$

Elle est indépendante de l'ordre considéré. L'ordre étant indéterminé, la probabilité cherchée est, en vertu du principe de la probabilité totale (nº 2), la somme d'autant de termes égaux à $p^n q^{\mu-n}$ qu'il y a d'unités dans le nombre des permutations avec répétition de n lettres A et de $\mu - n$ lettres B; ce nombre est [1]

$$\frac{\mu!}{n!(\mu-n)!}.$$

La probabilité demandée est donc

$$\frac{\mu!}{n!(\mu-n)!} p^n q^{\mu-n}.$$

C'est l'un des termes du développement de $(p+q)^\mu$.

[1] On emploie le symbole $\mu!$ pour désigner la factorielle : $1.2.3\ldots\mu$. Le symbole $0!$ doit être remplacé par un.

Si l'on écrit

$$(p+q)^{\mu} = p^{\mu} + \mu p^{\mu-1} q + \frac{\mu\,!}{2\,!\,(\mu-2)\,!} p^{\mu-3} q^2 + \ldots + q^{\mu},$$

le premier terme représente la probabilité pour que l'événement, dont la probabilité est q, ne se présente pas une seule fois; le deuxième représente la probabilité pour que cet événement arrive une fois; le troisième pour qu'il arrive deux fois, etc.

La somme des k premiers termes est la probabilité pour que cet événement arrive au plus $k-1$ fois sur μ épreuves.

La somme de tous les termes est la probabilité pour que l'événement se présente au plus μ fois; c'est la certitude, et la somme des termes est égale, en effet, à l'unité, puisque $p+q=1$.

16. **Probabilité maxima.** — *La probabilité d'un événement est p, celle de l'événement contraire est q; on fait μ épreuves dans les mêmes conditions. Quel est, pour chacun des événements, le nombre d'arrivées le plus probable?*

Le rapport d'un terme

$$\frac{\mu\,!}{n\,!\,(\mu-n)\,!} p^n q^{\mu-n}$$

au précédent

$$\frac{\mu\,!}{(n-1)\,!\,(\mu-n+1)\,!} p^{n-1} q^{\mu-n+1},$$

c'est-à-dire la quantité

$$\frac{\mu-n+1}{n}\,\frac{p}{q},$$

devra, pour le terme maximum, être plus grand que un, mais il devra devenir plus petit que l'unité si l'on remplace n par $n+1$.

La valeur de n qui correspond au maximum doit donc vérifier les inégalités

$$\frac{\mu-n+1}{n}\,\frac{p}{q} > 1,$$

$$\frac{\mu-n}{n+1}\,\frac{p}{q} < 1,$$

d'où l'on déduit

$$\mu p + p > n > \mu p - q.$$

Le nombre entier n, compris entre deux limites dont la différence $p+q$ est égale à l'unité, est donc déterminé, sauf dans le cas où $\mu p+p$ est entier; alors $\mu p-q$ est aussi entier. Deux termes consécutifs dans le développement de $(p+q)^\mu$ sont égaux entre eux. On peut dire, en négligeant la fraction, que μp est le nombre le plus probable d'arrivées pour l'événement dont la probabilité est p; le nombre d'arrivées le plus probable, pour l'événement dont la probabilité est q, est

$$\mu-\mu p=\mu q.$$

La combinaison dont la probabilité est la plus grande est donc celle dans laquelle les événements se produisent en nombre porportionnel à leur probabilité.

17. Soit p_1 la probabilité pour qu'une certaine quantité a soit égale à a_1.

Soit p_2 la probabilité pour qu'une certaine quantité a soit égale à a_2....

Soit p_n la probabilité pour qu'une certaine quantité a soit égale à a_n.

La *valeur moyenne* de a est, par définition,

$$\frac{a_1 p_1+a_2 p_2+\ldots+a_n p_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}.$$

Si, en particulier, $p_1+\ldots+p_n=1$, la valeur moyenne de a est l'espérance mathématique d'un joueur à qui l'on promettrait une somme égale à a.

18. La probabilité d'un événement est p, on fait μ épreuves identiques, quelle est la valeur moyenne du nombre des arrivées de cet événement?

D'après la définition ci-dessus, cette valeur moyenne est

$$\sum\frac{\mu!\,n}{n!(\mu-n)!}p^n q^{\mu-n}$$

ou, en considérant p comme une variable indépendante de q,

$$p\frac{\partial}{\partial p}\sum\frac{\mu!}{n!(\mu-n)!}p^n q^{\mu-n}=p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^\mu,$$

c'est-à-dire

$$\mu p(p+q)^{\mu-1}=\mu p.$$

La valeur μp du nombre d'arrivées de l'événement n'est pas seulement la valeur la plus probable, c'est aussi la valeur moyenne du nombre des arrivées de cet événement.

19. On considère la valeur μp du nombre d'arrivées d'un événement dont la probabilité est p comme une valeur normale, la plus probable de toutes, et les autres sont définies par leur différence à celle-là.

Cette différence prend le nom d'*écart*. Si, par exemple, on fait cent épreuves à pile ou face et que pile se présente cinquante-quatre fois, l'écart sera quatre.

Dire que l'écart est h, c'est dire qu'il y a eu $\mu p+h$ cas favorables et $\mu q-h$ cas défavorables. La probabilité pour que l'écart soit h est donc (n° 15)

$$\frac{\mu!}{(\mu p+h)!\,(\mu q-h)!}\,p^{\mu p+h}q^{\mu q-h}.$$

La plus grande probabilité ($h=0$) a pour expression

$$\frac{\mu!}{\mu p!\,\mu q!}\,p^{\mu p}q^{\mu q}.$$

Ces formules n'expriment pas rigoureusement la probabilité (n° 16), mais elles sont très suffisamment approchées.

20. **Formule de Stirling.** — Le calcul de la factorielle $n!$ devient impraticable lorsque n est un peu grand, mais on peut alors remplacer cette quantité par une autre facilement calculable d'après une formule célèbre due à Stirling, dont je ne crois pas utile de rappeler la démonstration.

La formule de Stirling

$$n!=e^{-n}\,n^n\sqrt{2\pi n}$$

exprime une égalité asymptotique, la différence de ses deux membres croît sans cesse, mais leur rapport tend vers un.

Serret a démontré les inégalités suivantes :

$$n! > e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n},$$
$$n! < e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{1}{12n}};$$

elles montrent la grande approximation fournie par la formule de Stirling. Un exemple numérique montrera encore l'approximation fournie par cette formule; en supposant, par exemple, que $n = 20$, on a

$$20! = 2432902008176640000,$$
$$e^{-20}\, 20^{20} \sqrt{40\pi} = 2422786385510400000,$$

le rapport des deux nombres est 1,00417.

21. Appliquons la formule de Stirling à l'expression de la probabilité maxima (n° 16)

$$\frac{\mu!}{\mu p!\, \mu q!}\, p^{\mu p} q^{\mu q},$$

elle devient, en remplaçant les factorielles par leur valeur approchée,

$$\frac{e^{-\mu} \mu^{\mu} \sqrt{2\pi\mu}\, p^{\mu p} q^{\mu q}}{e^{-\mu p} (\mu p)^{\mu p} \sqrt{2\pi\mu p}\, e^{-\mu q} (\mu q)^{\mu q} \sqrt{2\pi\mu q}}$$

ou, en simplifiant, et en remarquant que $p + q = 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Cette probabilité, la plus grande de toutes, contient $\sqrt{\mu}$ en dénominateur; elle tend vers zéro quand le nombre des épreuves augmente.

22. **Expression asymptotique de la probabilité.** — Appliquons la formule de Stirling à la recherche de l'expression asymptotique de la probabilité de l'écart h (n° 19)

$$\frac{\mu!}{(\mu p + h)!\, (\mu q - h)!}\, p^{\mu p + h} q^{\mu q - h},$$

en supposant $\frac{h}{\mu}$ négligeable et $\frac{h}{\sqrt{\mu}}$ fini. La formule de Stirling réduit l'expression ci-dessus à la suivante

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\,\frac{1}{\left(1+\frac{h}{\mu p}\right)^{\mu p+h+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{h}{\mu q}\right)^{\mu q-h-\frac{1}{2}}}.$$

On a

$$\log\left(1+\frac{h}{\mu p}\right)^{\mu p+h+\frac{1}{2}}=\left(\mu p+h+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{h}{\mu p}-\frac{h^2}{2\mu^2p^2}+\frac{h^3}{3\mu^3p^3}-\ldots\right),$$

$$\log\left(1-\frac{h}{\mu q}\right)^{\mu q-h-\frac{1}{2}}=\left(\mu q-h+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{h}{\mu q}-\frac{h^2}{2\mu^2q^2}-\frac{h^3}{3\mu^3q^3}-\ldots\right);$$

en additionnant et en supprimant les quantités négligeables en vertu des hypothèses faites, on obtient

$$\log\left[\left(1+\frac{h}{\mu p}\right)^{\mu p+h+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{h}{\mu q}\right)^{\mu q-h+\frac{1}{2}}\right]=\frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right).$$

En remarquant que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{pq}$ et en passant des logarithmes aux nombres, on obtient

$$\left(1+\frac{h}{\mu p}\right)^{\mu p+h+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{h}{\mu q}\right)^{\mu q-h+\frac{1}{2}}=e^{\frac{h^2}{2\mu pq}};$$

en portant cette valeur dans l'expression ci-dessus elle devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\,e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}.$$

Telle est la formule asymptotique exprimant la probabilité de l'écart h en μ épreuves.

23. Cette formule a l'avantage de se prêter aux calculs numériques; elle est de plus continue; on peut considérer l'écart h comme une variable continue, en assignant à un écart compris entre x et $x+dx$ la probabilité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\,e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\,dx.$$

Il faut rappeler que l'on nomme *écart* la différence entre le nombre des arrivées de l'événement et la valeur μp qui est la valeur la plus probable et la valeur moyenne.

Sous sa forme continue, l'expression ci-dessus peut se déterminer directement, et c'est là sa meilleure justification. Telle que nous l'avons établie, son exactitude peut faire naître quelques doutes qu'il est utile de dissiper, d'autant qu'on applique cette expression lorsque μ n'est pas très grand, et quelle que soit la valeur de h.

24. L'écart le plus probable est $x = 0$, sa probabilité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

décroît proportionnellement à la racine carrée du nombre des épreuves. Cette valeur avait été trouvée précédemment (n° 21) et nous la savions très approchée (n° 20).

La formule asymptotique fournit donc la valeur de la plus grande probabilité avec une très grande approximation.

25. Cherchons quelle est la somme des probabilités de tous les écarts, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\,dx;$$

posons $\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}} = \lambda$, cette expression devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

C'est une intégrale classique dont la valeur est un.

Ce résultat n'était pas évident, puisque la formule asymptotique n'est qu'approchée.

26. La formule asymptotique accorde une probabilité à des écarts qui, en réalité, n'existent pas. Le nombre des épreuves étant μ, le plus grand écart possible est μq ou $-\mu p$ suivant que q est supérieur

ou inférieur à p. Supposons $p < q$, la formule asymptotique se trouve attribuer la probabilité

$$\int_{\mu q}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}} dx$$

aux écarts compris entre μq et ∞, écarts qui, en réalité, ne peuvent être atteints.

Nous verrons plus loin comment on calcule ces sortes d'intégrales; un exemple suffira ici : si l'on suppose que $\mu = 32$ et que $p = q = \frac{1}{2}$, l'expression ci-dessus a pour valeur

$$0,0000000077;$$

elle est donc tout à fait négligeable.

27. La formule asymptotique attribue la même probabilité à des écarts symétriques, aussi est-elle très approchée lorsque p est égal à q ou très voisin de q : μ étant même un petit nombre. Quand p est très différent de q, la symétrie ne s'établit qu'à la longue, et la formule asymptotique n'est approchée que si μ est grand.

28. **Nouvelles déterminations de la formule asymptotique.** — On fait μ_1 épreuves, l'écart est x, cela revient à dire qu'il y a eu $\mu_1 p + x$ cas favorables.

On fait une nouvelle série de μ_2 épreuves, l'écart est y, cela revient à dire qu'il y a, dans cette nouvelle série d'épreuves, $\mu_2 p + y$ cas favorables. Parmi les $\mu_1 + \mu_2$ épreuves, il y en a $(\mu_1 + \mu_2)p + x + y$ favorables, l'écart est donc $x + y$; nous le désignerons par z.

Soit $\varpi_{x,\mu_1} dx$ la probabilité de l'écart x en μ_1 épreuves (c'est-à-dire la probabilité pour que l'écart supposé continu soit compris entre x et $x + dx$); en la multipliant par $\varpi_{y,\mu_2} = \varpi_{z-x,\mu_2}$ on obtient, d'après le principe de la probabilité composée (n° 3), la probabilité pour que l'écart soit $x + y = z$ en $\mu_1 + \mu_2$ épreuves, cet écart ayant été x en μ_1 épreuves.

D'après le principe de la probabilité totale (n° 2), la probabilité de l'écart $x + y = z$ en $\mu_1 + \mu_2$ épreuves est la somme de toutes ces quantités telles que $\varpi_{x,\mu_1} \times \varpi_{z-x,\mu_2}\, dx$, x prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. La probabilité de l'écart z en $\mu_1 + \mu_2$ épreuves est donc

$$dz \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{x,\mu_1}\, \varpi_{z-x,\mu_2}\, dx.$$

D'après nos notations, la probabilité de cet écart a pour expression $\varpi_{z,\mu_1+\mu_2}\, dz$; on doit donc avoir

$$\varpi_{z,\mu_1+\mu_2}\, dz = dz \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{x,\mu_1}\, \varpi_{z,\mu_1+\mu_2}\, dx,$$

ou

$$\varpi_{z,\mu_1+\mu_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{x,\mu_1}\, \varpi_{z,\mu_1+\mu_2}\, dx.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction ϖ.

29. On vérifie facilement [1] que la fonction

$$\varpi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\, e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}$$

satisfait bien à l'équation ci-dessus.

30. Enfin, la théorie du *rayonnement de la probabilité* permet d'obtenir directement la formule précédente. Cette théorie a été exposée ailleurs [2], je ne crois pas utile de la reproduire ici.

31. En résumé :

La probabilité d'un événement étant p, l'hypothèse la plus probable en faisant μ épreuves identiques correspond au nombre μp d'arrivées de cet événement.

La probabilité d'un écart x, c'est-à-dire la probabilité pour que le nombre d'arrivées de cet événement soit compris entre $\mu p + x$ et

(1) Consulter la *Théorie de la spéculation* dans les *Annales de l'École Normale*, p. 36; 1900.

(2) *Id.*, p. 45.

$\mu p + x + dx$ est exprimée par la formule

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\, e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\, dx.$$

32. **Courbe de probabilité.** — La fonction

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\, e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}$$

peut se représenter par une courbe dont l'ordonnée est maxima à l'origine, et qui présente deux points d'inflexion pour

$$x = \pm\sqrt{\mu pq}.$$

33. La probabilité de l'écart x est une fonction de μ, elle croît jusqu'à une certaine valeur de μ et décroît ensuite. Sa dérivée par rapport à μ s'annule lorsque $x = \sqrt{\mu pq}$. La probabilité de l'écart x est donc maxima quand cet écart correspond au point d'inflexion de la courbe des probabilités.

34. **Probabilité dans un intervalle donné.** — L'intégrale

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\, dx$$

n'est pas exprimable en termes finis, on l'évalue soit par un développement en série dont on calcule les termes de proche en proche, soit par un développement en fraction continue.

35. La fonction

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-y^2}\, dy$$

étant d'un usage continuel dans le calcul des probabilités et aussi dans la Physique mathématique, on a édité des Tables donnant les valeurs de cette fonction ; ces Tables sont reproduites à la fin de ce Mémoire.

Si, dans la formule (1), l'on pose

$$\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}} = \lambda,$$

elle devient

$$\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}\right).$$

Telle est l'expression de la probabilité pour que l'écart soit compris entre zéro et x.

La probabilité pour qu'il soit compris entre $\pm x$ serait

$$\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}\right).$$

36. La probabilité

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda,$$

pour que l'écart soit plus grand que x (dans un seul sens), croît constamment avec μ. Si μ était infini, elle serait égale à $\frac{1}{2}$, résultat évident.

37. La probabilité

$$\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x_1}{\sqrt{2\mu pq}}}^{\frac{x_2}{\sqrt{2\mu pq}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda,$$

pour que l'écart se trouve compris dans l'intervalle fini x_2, x_1 (x_2 et x_1 sont supposés de même signe), est nulle pour $\mu = 0$ et pour $\mu = \infty$; elle est maxima lorsque

$$\mu = \frac{1}{2pq}\left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{\log\frac{x_2}{x_1}}\right).$$

Si nous supposons l'intervalle x_2, x_1 très petit, nous retrouvons pour μ la valeur déjà obtenue (n° 33) :

$$\mu = \frac{x^2}{pq}.$$

38. La fonction $\Theta(y)$ s'approche beaucoup de l'unité lorsque y est supérieur à 3; on a, en effet,

$$\begin{aligned}
\Theta(2) &= 0,9953223,\\
\Theta(2,5) &= 0,9995930,\\
\Theta(3) &= 0,9999779,\\
\Theta(3,5) &= 0,99999925.
\end{aligned}$$

La courbe des probabilités, asymptote à l'axe des x, s'approche donc extrêmement vite de cet axe dès que $y = 2$, c'est-à-dire dès que $x = 2\sqrt{2\mu pq}$.

39. **Écart moyen.** — L'*écart moyen* (n° 17), ou espérance mathématique de celui qui toucherait une somme égale à la valeur absolue de l'écart, a pour valeur

$$\frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi\mu pq}} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\,dx}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\,dx} = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \int_0^\infty x\, e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}\,dx.$$

Posons

$$\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}} = \lambda,$$

l'intégrale devient

$$\frac{2\sqrt{2\mu pq}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{2\sqrt{2\mu pq}}{\sqrt{\pi}} \left| -\frac{1}{2} e^{-\lambda^2} \right|_0^\infty = \frac{\sqrt{2\mu pq}}{\sqrt{\pi}} = 0,79789\sqrt{\mu pq}.$$

L'écart moyen est proportionnel à la racine carrée du nombre des épreuves.

40. **Écart probable.** — C'est l'écart qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassé; sa valeur (n° 35) vérifie donc l'équation

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}\right) = \frac{1}{4},$$

on en déduit

$$x = 0,47693\sqrt{2\mu pq}.$$

L'écart probable est proportionnel à la racine carrée du nombre des épreuves.

Le rapport de l'écart probable à l'écart moyen est 0,8463.

41. Plus généralement, considérons un intervalle $\pm x$ tel que la probabilité pour que l'écart soit inférieur à x soit égale à une quantité donnée quelconque u; on doit avoir (n° 35)

$$\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2\mu pq}}\right) = u.$$

L'intervalle $\pm x$ est donc proportionnel à la racine carrée du nombre des épreuves.

Les écarts de probabilité donnée, de même que l'écart moyen, croissant proportionnellement à la racine carrée du nombre des épreuves, décroissent donc *relativement* à ce dernier nombre. C'est le théorème de Jacques Bernoulli.

PREMIER PROBLÈME DE LA THÉORIE DU JEU.

42. **Étude de la probabilité.** — La théorie qui précède fournit la solution de ce que nous appellerons le *premier problème de la probabilité :*

On suppose deux joueurs ayant à leur disposition une somme indéfinie, jouant un nombre déterminé de parties, et réglant les différences à la fin du jeu.

Soit p la probabilité pour qu'un des joueurs gagne à chaque partie, et soit $q = 1 - p$ la probabilité pour qu'il perde. Dans l'hypothèse la plus probable, le joueur gagnerait μp parties et il en perdrait μq.

La probabilité pour qu'il se produise un écart égal à h, c'est-à-dire pour que le nombre des parties gagnées soit $\mu p + h$ (n° 19), est

$$\frac{\mu!}{(\mu p + h)!(\mu q - h)!} p^{\mu p + h} q^{\mu q - h}.$$

43. Si le nombre des parties est suffisamment grand, la probabilité

d'un écart compris entre h et $h+dh$ (n° 22) est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\,e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}\,dh.$$

44. La probabilité pour que l'écart soit supérieur à h, dans un sens déterminé, est donné par l'expression (n° 36)

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{h}{\sqrt{2\mu pq}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

On peut calculer cette probabilité en se servant de la Table qu'on trouvera à la fin du Mémoire.

45. L'*écart moyen* (n° 39) a pour valeur $\sqrt{\frac{2\mu pq}{\pi}}$ ou $0,79789\sqrt{\mu pq}$.

L'*écart probable* (n° 40), c'est-à-dire celui qui a probabilité égale d'être ou de ne pas être dépassé, a pour valeur : $0,47693\sqrt{2\mu pq}$.

Ces écarts sont proportionnels à la racine carrée du nombre des parties jouées.

Ils sont donc de plus en plus faibles *relativement* au nombre des parties jouées.

46. Plus généralement, si l'on considère un écart ($\pm u$) variable, mais tel que la probabilité pour que cet écart ne soit pas dépassé soit constante, cet écart est proportionnel à la racine carrée du nombre des parties jouées.

47. **Étude de l'espérance mathématique.** — La connaissance des probabilités est insuffisante pour faire connaître le désavantage d'un jeu; ce désavantage dépend en effet des sommes jouées.

Supposons que le joueur ait, à chaque partie, la probabilité p de gagner la somme α et la probabilité q de perdre la somme β.

L'espérance mathématique ou *avantage absolu* (n° 9) sera, pour une partie,

$$\alpha p-\beta q.$$

L'*avantage relatif* (n° 10) sera, pour une partie,

$$\frac{\alpha p}{\alpha p + \beta q}.$$

48. Cherchons quelle est l'espérance correspondant à un écart h, en μ parties.

Si l'écart est h, c'est qu'il y a eu $\mu p + h$ parties gagnées et $\mu q - h$ parties perdues; chacune des premières donnant le bénéfice α, et chacune des dernières la perte β, le bénéfice correspondant à l'écart h est

$$(\mu p + h)\alpha - (\mu q - h)\beta = \mu(\alpha p - \beta q) + h(\alpha + \beta);$$

en multipliant cette quantité par la probabilité de l'écart h (n° 22), on obtient l'espérance mathématique cherchée :

$$[\mu(\alpha p - \beta q) + h(\alpha + \beta)] \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}} dh.$$

49. L'espérance mathématique totale ou avantage absolu du jeu s'obtiendra en intégrant cette expression entre $-\infty$ et $+\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \left[(\alpha + \beta) \int_{-\infty}^{+\infty} h e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}} dh + \mu(\alpha p - \beta q) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}} dh \right].$$

La première intégrale est nulle, la seconde a pour valeur $\sqrt{2\pi\mu pq}$; l'expression ci-dessus se réduit donc à

$$\mu(\alpha p - \beta q).$$

L'avantage absolu du jeu est proportionnel au nombre des parties jouées.

Ce résultat avait déjà été obtenu (n° 14).

Cette expression est aussi celle de la perte moyenne et celle de la perte la plus probable puisqu'elle est la perte correspondant à $h = 0$.

50. Cherchons la probabilité pour que la perte soit supérieure à m.

Supposons la perte égale à m; soient x le nombre de parties gagnées,

$\mu - x$ le nombre de parties perdues, on aura

$$\alpha x - \beta(\mu - x) = -m;$$

d'où

$$x = \frac{\mu\beta - m}{\alpha + \beta}.$$

L'écart h est égal à $\mu p - x$; on a donc

$$h = \mu p - \frac{\mu\beta - m}{\alpha + \beta} = \frac{\mu(\alpha p - \beta q) + m}{\alpha + \beta};$$

la formule (n° 44) donne alors la probabilité pour que l'écart h et, par suite, la perte m soient dépassés :

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\mu(\alpha p - \beta q) + m}{(\alpha+\beta)\sqrt{2\mu pq}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda$$

ou

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left[\frac{\mu(\alpha p - \beta q) + m}{(\alpha+\beta)\sqrt{2\mu pq}}\right].$$

51. En particulier, la probabilité totale de perte qui correspond à $m = 0$ a pour valeur

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\mu(\alpha p - \beta q)}{(\alpha+\beta)\sqrt{2\mu pq}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

52. L'espérance positive totale a pour valeur

$$\mathcal{E}_1 = \int_{h_0}^{\infty} [\mu(\alpha p - \beta q) + h(\alpha + \beta)] \frac{e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\, dh,$$

h_0 étant la valeur de h qui correspond à $m = 0$, c'est-à-dire

$$-\mu\frac{\alpha p - \beta q}{\alpha + \beta}.$$

La différence entre les valeurs absolues de l'espérance mathématique positive $\mathcal{E}_1$ et de l'espérance négative $\mathcal{E}_2$ est $\mu(\alpha p - \beta q)$.

L'avantage relatif du jeu est

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}.$$

L'expression de l'espérance positive peut s'écrire

$$\mathcal{E}_1 = (\alpha+\beta)\int_{-\mu\frac{\alpha p-\beta q}{\alpha+\beta}}^{\infty} \frac{he^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\,dh + \mu(\alpha p - \beta q)\int_{-\mu\frac{\alpha p-\beta q}{\alpha+\beta}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\,dh.$$

La première intégrale peut se calculer exactement; en posant, dans la seconde, $\frac{h}{\sqrt{2\mu pq}} = \lambda$, on obtient

$$\mathcal{E}_1 = (\alpha+\beta)\sqrt{\frac{\mu pq}{2\pi}}\,e^{-\frac{\mu(\alpha p-\beta q)^2}{2pq(\alpha+\beta)^2}} + \frac{\mu(\alpha p - \beta q)}{\sqrt{\pi}}\int_{-\sqrt{\mu}\frac{\alpha p-\beta q}{(\alpha+\beta)\sqrt{2pq}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

53. Cherchons la valeur asymptotique du second terme lorsque μ devient très grand. Rappelons la formule connue [1]

$$\int_u^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{e^{-u^2}}{2u} - \frac{e^{-u^2}}{4u^3} + \frac{3e^{-u^2}}{8u^5} - \dots$$

Cette série diverge au delà d'un certain terme; cette divergence n'importe pas, on a asymptotiquement, lorsque μ est très grand,

$$\int_u^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \frac{e^{-u^2}}{2u}.$$

D'après cette formule, le second terme de l'espérance positive a pour valeur asymptotique

$$-(\alpha+\beta)\sqrt{\frac{\mu pq}{2\pi}}\,e^{-\frac{\mu(\alpha p-\beta q)^2}{2pq(\alpha+\beta)^2}}.$$

Il est égal au premier terme changé de signe; la valeur asymptotique de $\mathcal{E}_1$ est donc zéro.

Lorsqu'un jeu est désavantageux, si l'on considère un nombre de plus en plus grand de parties, l'espérance positive finit par décroître, même en valeur absolue, et elle a pour limite zéro.

---

[1] Pour la démonstration de cette formule, consulter entre autres les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, p. 43; 1900.

La valeur asymptotique de l'espérance positive d'un jeu avantageux est égale, lorsque μ est très grand, à la quantité $\mu(\alpha p - \beta q)$.

54. Nous avons vu que la perte moyenne avait pour expression

$$\mu(\beta q - \alpha p).$$

A l'écart moyen en plus ou en moins $(h = 0{,}79789\sqrt{\mu p q})$ correspond la perte moyenne en plus ou en moins de

$$h(\alpha + \beta) = 0{,}79789(\alpha + \beta)\sqrt{\mu p q}.$$

Ainsi, en résumé :

La perte moyenne

$$\mu(\beta q - \alpha p)$$

est proportionnelle au nombre des parties jouées ; l'écart moyen en plus ou en moins est proportionnel à la racine carrée du même nombre, il a pour expression

$$0{,}79789(\alpha + \beta)\sqrt{\mu p q}.$$

L'écart moyen diminue donc *relativement* au bénéfice ou à la perte moyenne ; c'est pourquoi, en jouant un grand nombre de parties, la perte du ponte est très voisine de la perte moyenne ; le bénéfice réalisé par les maisons de jeu est très voisin du bénéfice moyen.

55. **Cas où le jeu est équitable.** — Lorsque le jeu est équitable, $p\alpha = q\beta$, toutes les formules précédentes se simplifient, l'espérance totale est nulle, les *espérances partielles* positive et négative ont pour valeur

$$\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2\pi\mu p q}} \int_0^\infty h e^{-\frac{h^2}{2\mu p q}} dh = \sqrt{\frac{\mu p q}{2\pi}}(\alpha + \beta).$$

L'espérance partielle varie proportionnellement à la somme des mises et à la racine carrée du nombre des parties.

L'espérance partielle est égale au double de l'écart moyen (n° 45) multiplié par la somme des mises.

56. Pour obtenir la probabilité $\mathfrak{P}$ pour que la perte m soit dépassée

en μ parties, il suffit de faire $\alpha p - \beta q = 0$ dans la formule du n° 50; on obtient ainsi

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{(\alpha+\beta)\sqrt{2\mu pq}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda$$

ou

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left[\frac{m}{(\alpha+\beta)\sqrt{2\mu pq}}\right].$$

57. Dans le cas le plus simple où $\alpha = \beta$, $p = q = \frac{1}{2}$, l'espérance positive devient

$$\alpha\sqrt{\frac{\mu}{2\pi}},$$

l'écart moyen a pour valeur $\sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}$; pour $\mu = 100$, il est voisin de quatre.

La probabilité pour que la perte soit plus grande que m en μ parties est

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\alpha\sqrt{2\mu}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda$$

ou

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{m}{\alpha\sqrt{2\mu}}\right)e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

58. Si l'enjeu par partie est de 1^{fr}, $\alpha = 1$, et l'on a simplement

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\sqrt{2\mu}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Telle est l'expression de la probabilité pour que la perte soit supérieure à m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

59. **Quelques exemples.** — Supposons que, pour chaque partie, un joueur ait une chance sur dix de gagner; il a neuf chances sur dix de perdre.

Il joue 1^{fr} par partie, et s'il gagne il touche 9^{fr} (son bénéfice est de 8^{fr} puisque sa mise est de 1^{fr}). Dans le jeu considéré (¹) on a donc

$$p = \frac{1}{10}, \qquad q = \frac{9}{10}, \qquad \alpha = 8, \qquad \beta = 1.$$

L'espérance positive pour une partie est $\frac{8}{10}$ ou 80^c, l'espérance négative est $\frac{9}{10}$ ou 90^c.

La perte moyenne pour une partie est donc 10^c. L'avantage relatif du jeu est $\frac{8}{17} = 0,47$.

60. Supposons maintenant que l'on joue deux parties; la probabilité de les gagner toutes deux est $p^2 = \frac{1}{100}$, le bénéfice correspondant est 16^{fr}. La probabilité de gagner une partie est $2pq = \frac{18}{100}$, le bénéfice correspondant est 7^{fr}; enfin le joueur a 81 chances sur 100 de perdre les deux parties.

La probabilité totale de réussite est $\frac{1}{100} + \frac{18}{100} = \frac{19}{100}$, elle a donc augmenté.

L'espérance positive est $\frac{16}{100} + \frac{18.7}{100} = \frac{142}{100}$. L'espérance négative est $\frac{2 \times 81}{100} = \frac{162}{100}$. L'espérance totale du jeu a donc pour valeur -20^c.

L'avantage relatif $\frac{142}{304} = 0,467$ a, comme on voit, diminué.

61. Si l'on jouait 500 parties, la perte moyenne serait

$$-\mu(\alpha p - \beta q) = \frac{500}{10} = 50.$$

Cette perte moyenne de 50^{fr} correspond au gain de 50 parties; l'écart moyen en plus ou en moins correspond à 48^{fr}. La probabilité de gain est 0,20.

L'espérance positive est égale à 7^{fr} : c'est contre cette somme que le joueur pourrait abandonner sa chance de bénéfice.

(¹) C'est le jeu des petits chevaux communément pratiqué dans les casinos.

L'espérance négative est 57^{fr}.

L'avantage du jeu est 0,11.

La probabilité de réaliser un bénéfice de quelque importance est très faible, le joueur a moins de 6 chances sur 100 de gagner plus de 50^{fr}.

62. La probabilité de réussite et l'espérance mathématique totales d'un jeu varient à chaque partie depuis le début du jeu. Dans l'exemple qui précède, je suppose que, sur les 200 premières épreuves, 25 aient donné un gain et que, par suite, ces 200 parties aient produit un bénéfice net de 25^{fr}.

L'espérance totale du jeu de 500 parties est alors

$$25 + \mu(\alpha p - \beta q) = 25 - 300 \times 0,1 = -5^{\text{fr}}.$$

La probabilité totale de réussite, c'est-à-dire la probabilité de gain au bout des 500 parties, est 0,45.

63. Supposons que l'on joue 50000 parties, la perte moyenne est 5000^{fr}, avec un écart moyen en plus ou en moins de 480^{fr}; la probabilité de gain et l'espérance positive sont d'une excessive petitesse; on n'a que 5 chances sur 100 de perdre moins de 4000^{fr}.

64. Cet exemple suffit pour montrer que le moindre désavantage dans un jeu rend impossible à la longue toute chance de bénéfice; il montre aussi que l'on peut prévoir la perte avec une erreur relative de plus en plus petite.

SECOND PROBLÈME DE LA THÉORIE DU JEU.

65. Nous avons supposé deux joueurs ayant à leur disposition une somme indéfinie, jouant un nombre de parties convenu, et réglant à la fin du jeu les différences. C'est le premier problème de la théorie du jeu.

Nous allons aborder maintenant l'étude du second problème : la somme totale que l'un des joueurs veut risquer au jeu, et que, pour simplifier, nous appellerons *sa fortune*, est limitée; la fortune de son adversaire est supposée infinie.

Ces conditions sont réalisables : en effet, jouer contre tout adversaire qui se présente, c'est, en réalité, jouer contre un adversaire de fortune infinie.

Nous dirons, pour simplifier, que le joueur est ruiné quand il a perdu la somme totale qu'il consacrait au jeu.

Le problème dont nous allons nous occuper peut être considéré comme actuellement résolu; de Moivre en avait traité un cas particulier que Laplace et Lagrange ont présenté sous une autre forme. Ces savants n'ont pas fait usage des formules asymptotiques que Laplace appliquait à la théorie des épreuves répétées.

Nous nous occuperons d'abord du cas particulier du jeu équitable et des probabilités égales. Il nous a été possible de simplifier beaucoup l'étude de ce dernier cas, en sorte qu'il constitue aujourd'hui un des problèmes les plus simples du calcul des probabilités.

On trouvera à la fin de ce Chapitre l'étude du cas général du second problème de la théorie du jeu; cette question, du moins à notre connaissance, n'avait pas été résolue.

66. **Étude d'un cas particulier.** — *Un joueur A possède m francs; il a, pour chaque partie, probabilité égale de gagner ou de perdre* 1^{fr}; *quelle est la probabilité pour qu'il perde ses m francs en jouant au maximum μ parties?*

Soit P la probabilité cherchée; désignons par $\mathfrak{P}$ la probabilité pour que la perte soit supérieure à m si l'on jouait μ parties, on a

$$\mathrm{P} = 2\mathfrak{P},$$

c'est-à-dire :

La probabilité pour qu'une certaine perte soit dépassée avant un nombre donné de parties est le double de la probabilité pour que cette perte soit dépassée au bout de ce même nombre de parties.

En effet, la perte m ne peut être dépassée au bout de μ parties sans l'avoir été antérieurement; la probabilité $\mathfrak{P}$ est donc égale à la probabilité P multipliée par la probabilité pour que, la perte m ayant été atteinte avant μ parties, soit dépassée en μ parties, c'est-à-dire multipliée par $\frac{1}{2}$. On a donc

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathrm{P}}{2}.$$

67. Cherchons la valeur exacte de $\mathfrak{P}$. Si le joueur a perdu m francs en μ parties, c'est qu'il a gagné $\frac{\mu - m}{2}$ parties et perdu $\frac{\mu + m}{2}$ parties. La probabilité de cette éventualité [1] est (n° 15)

$$\varpi_{\mu, m} = \frac{\mu!}{\frac{\mu + m}{2}!\,\frac{\mu - m}{2}!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}.$$

La probabilité $\mathfrak{P}$ est la somme des expressions analogues obtenues en remplaçant m par $(m + 2)$, $(m + 4)$, ..., μ. On a donc

$$\mathfrak{P} = \sum_{m=m}^{m=\mu} \varpi_{\mu, m}$$

et, par suite,

$$\mathrm{P} = 2 \sum_{m=m}^{m=\mu} \varpi_{\mu, m}.$$

68. Pour avoir l'expression asymptotique de P il suffit de remplacer $\mathfrak{P}$ par sa valeur asymptotique (n° 58)

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{m}{\sqrt{2\mu}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda,$$

on a donc

$$\mathrm{P} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{m}{\sqrt{2\mu}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

C'est l'expression de la probabilité pour que le jeu se termine avant μ parties.

---

[1] La lettre $\varpi_{\mu, m}$ ne désigne pas ici la même probabilité que précédemment (n° 28).

69. On calcule la probabilité

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{m}{\sqrt{2\mu}}} e^{-\lambda^2} d\lambda = 1 - \Theta\left(\frac{m}{\sqrt{2\mu}}\right)$$

en employant les Tables de la fonction Θ qui se trouvent à la fin du Mémoire.

70. Nous allons retrouver les mêmes formules en employant, dans le problème particulier que nous étudions, la méthode qui conduit à la solution du problème général. Ce dernier problème présente quelque complication ; c'est pourquoi nous avons cru devoir traiter séparément un cas particulier.

71. **Probabilité pour que le jeu se termine par une partie indiquée d'avance.** — *Un joueur A possède m francs, il a pour chaque partie probabilité égale de gagner ou de perdre* 1^{fr}; *quelle est la probabilité pour qu'il perde ses m francs précisément après avoir fait μ parties, de telle sorte que la $\mu^{\text{ième}}$ partie lui enlève son dernier franc?*

Si le joueur a perdu m francs en μ parties, c'est qu'il a gagné $\frac{\mu - m}{2}$ parties et perdu $\frac{\mu + m}{2}$ parties ; la probabilité de cette éventualité est (n° 15)

$$\varpi_{\mu, m} = \frac{\mu!}{\frac{\mu + m}{2}!\, \frac{\mu - m}{2}!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}.$$

Cette probabilité est plus grande que celle que nous cherchons, elle est relative à toutes les séries de parties amenant la ruine du joueur A en μ coups, nous devons en retrancher celles qui auraient amené sa ruine avant le $\mu^{\text{ième}}$ coup.

Nous allons donc chercher, parmi les séries qui auraient produit la perte m en μ coups, celles qui auraient produit cette perte avant le $\mu^{\text{ième}}$ coup.

Considérons une série qui aurait produit la ruine (c'est-à-dire la perte m) en γ parties ; cette série, si elle avait pu se continuer, se serait composée, au delà du $\gamma^{\text{ième}}$ coup, de $\frac{\mu-\gamma}{2}$ parties gagnées et $\frac{\mu-\gamma}{2}$ parties perdues, puisque la perte totale aurait été égale à m.

Donc, à partir de la $\gamma^{\text{ième}}$ partie, il se produit une suite de pertes et de gains que l'on peut représenter symboliquement comme suit :

$$G_1 G_2 P_1 \ldots G_{\frac{\mu-\gamma}{2}} \ldots P_{\frac{\mu-\gamma}{2}-1} P_{\frac{\mu-\gamma}{2}}.$$

G_1 indique que la $(\gamma+1)^{\text{ième}}$ partie a donné un gain;
G_2 indique que la partie suivante a donné un gain;
P_1 signifie que la partie suivante a donné une perte, etc.

Considérons une suite quelconque

$$G_1 P_1 \ldots G_{\frac{\mu-\gamma}{2}} \ldots P_{\frac{\mu-\gamma}{2}-1} P_{\frac{\mu-\gamma}{2}}$$

se terminant par une perte, et la suite symétrique

$$P_1 G_1 \ldots P_{\frac{\mu-\gamma}{2}} \ldots G_{\frac{\mu-\gamma}{2}-1} G_{\frac{\mu-\gamma}{2}}$$

se terminant par un gain.

A chacune des suites de la première forme correspond une suite de la seconde et inversement.

Si nous lisons ces suites en commençant par la droite, le nombre de celles qui commencent par un G est égal au nombre de celles qui commencent par un P. Donc le nombre total de ces suites est le double du nombre de celles qui commencent par un G, et cela a lieu évidemment quel que soit γ.

Or, pour que la $\mu^{\text{ième}}$ partie fournisse un gain, il faut que la perte soit $(m+1)$ à la $(\mu-1)^{\text{ième}}$ partie. Donc :

Le nombre des séries qui auraient produit la perte m en moins de μ parties est égal au double du nombre des séries qui, produisant la perte $m+1$ en $\mu-1$ parties, produiraient la perte m en μ parties [1].

Passant du nombre des séries aux probabilités, nous pouvons dire que la probabilité cherchée $\Pi_{\mu,m}$ est égale à la probabilité $\varpi_{\mu,m}$ diminuée du double de la probabilité pour que, la perte étant $m+1$ en

[1] Ce raisonnement, appliqué d'une façon un peu différente, est dû à M. André.

$\mu - 1$ parties soit égale à m en μ parties, c'est-à-dire diminuée de $\varpi_{\mu-1, m+1}$; on a donc

$$\Pi_{\mu, m} = \varpi_{\mu, m} - \varpi_{\mu-1, m+1}$$

ou

$$\Pi_{\mu, m} = \frac{m}{\mu} \frac{\mu!}{\frac{\mu+m}{2}!\,\frac{\mu-m}{2}!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu} = \frac{m}{\mu} \varpi_{\mu, m}.$$

Telle est la probabilité pour que le joueur perde ses m francs précisément à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

72. Si le nombre μ est grand, on peut, dans cette dernière formule, remplacer la quantité $\varpi_{\mu,m}$ par sa valeur asymptotique; on a ainsi

$$\Pi_{\mu, m} = \frac{m}{\mu} \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{m^2}{2\mu}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}}.$$

73. **Probabilité pour que le jeu se termine dans un nombre donné de parties.** — La probabilité pour que les m francs soient perdus après le $\mu^{\text{ième}}$ coup s'obtiendra en intégrant l'expression ci-dessus entre les limites μ et ∞ après l'avoir divisée par 2, puisque la ruine ne peut avoir lieu que de deux en deux parties.

Prenons d'abord l'intégrale entre les limites zéro et ∞, nous avons

$$\int_0^\infty \frac{m}{\sqrt{2\pi}\mu\sqrt{\mu}} e^{-\frac{m^2}{2\mu}} d\mu$$

ou, en posant $\frac{m^2}{2\mu} = \lambda$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

C'est une intégrale classique dont la valeur est un. Ce résultat est exact (nos 11, 93).

Il n'était pas évident qu'on devait l'obtenir, puisque la formule asymptotique n'est qu'approchée.

74. La probabilité pour que la ruine ait lieu après la $\mu^{\text{ième}}$ partie est

$$\int_\mu^\infty \frac{m}{\sqrt{2\pi}\mu\sqrt{\mu}} e^{-\frac{m^2}{2\mu}} d\mu$$

ou, en posant $\frac{m^2}{2\mu} = \lambda$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{m}{\sqrt{2\mu}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

La probabilité $P_{\mu,m}$ pour que la ruine ait lieu avant le $\mu^{\text{ième}}$ coup sera, d'après le numéro précédent, égale à l'unité diminuée de l'intégrale ci-dessus. On a donc

$$P_{\mu,m} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{m}{\sqrt{2\mu}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

C'est l'expression de la probabilité pour que le jeu se termine avant μ parties.

Nous retrouvons donc la formule obtenue précédemment (n° 68).

75. **Durée probable du jeu.** — La probabilité

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{m}{\sqrt{2\mu}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

est une fonction de m et de μ.

L'étude de sa variation en considérant m comme variable ne présente aucune particularité; la fonction décroît constamment quand m croît. Supposons maintenant que m soit constant, et étudions la variation de la fonction en considérant μ comme variable; nous aurons à résoudre trois problèmes importants sur la durée du jeu.

76. Cherchons quel est le nombre μ de parties qui correspond à la plus grande probabilité pour que la ruine du joueur s'accomplisse précisément à la $\mu^{\text{ième}}$ partie; en annulant la dérivée de l'expression

$$\frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}}\, e^{-\frac{m^2}{2\mu}}$$

on obtient le nombre cherché

$$\mu = \frac{m^2}{3}.$$

77. Ce nombre est fourni par la formule asymptotique, il n'est donc qu'approché; on peut obtenir sa valeur exacte.

Si dans la formule

$$\frac{m}{\mu}\,\frac{\mu!}{\dfrac{\mu-m}{2}!\,\dfrac{\mu+m}{2}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}$$

on remplace μ par $\mu+2$ (la perte m ne peut se produire que de deux en deux parties), elle se multiplie par

$$\frac{\mu}{\mu+2}\,\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{\left(\dfrac{\mu-m}{2}+1\right)\left(\dfrac{\mu+m}{2}+1\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mu(\mu+1)}{(\mu+2)^2-m^2}.$$

L'expression augmente avec μ tant que l'on a

$$\mu(\mu+1) > (\mu+2)^2-m^4,$$

c'est-à-dire

$$3\mu < m^2-4$$

et la probabilité maxima correspond à

$$\mu = \frac{m^2}{3}-\frac{4}{3}.$$

La valeur de μ est donc très voisine de celle que l'on déduit de la formule asymptotique.

78. La *durée probable* du jeu est exprimée par le nombre μ de parties tel que $P=\frac{1}{2}$. Ce nombre est

$$\mu = 2,17m^2.$$

79. La *durée moyenne* du jeu, ou la somme des espérances de durée, est exprimée par l'intégrale

$$\int_0^\infty \mu\frac{\partial P}{\partial\mu}\,d\mu = \int_0^\infty \frac{me^{-\frac{m^2}{2\mu}}}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\mu}}\,d\mu;$$

en posant $\frac{m^2}{2\mu} = \lambda^2$, elle devient

$$\frac{m^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda^2} d\lambda,$$

cette intégrale est infinie.

La durée moyenne du jeu est donc infinie.

80. Pour résoudre complètement le problème actuel il resterait à étudier le cas où le joueur n'est pas ruiné; si cette éventualité se réalise, quelle est la distribution de la probabilité, c'est-à-dire : quelle est la probabilité pour que le joueur ait perdu 1^{fr}, 2^{fr}, ..., $(\mu - 1)^{\text{fr}}$ ou pour qu'il ait gagné 1^{fr}, 2^{fr}, ...? Si le joueur n'est pas ruiné, il est probable qu'il a gagné; quel est alors son bénéfice probable, son bénéfice moyen, son bénéfice le plus probable (c'est-à-dire celui qui a la plus grande probabilité)? Quelle est son espérance positive?

Le joueur peut perdre non seulement parce qu'il peut être ruiné avant qu'il ait joué μ parties, mais encore parce que, les μ parties étant jouées, il a pu perdre une fraction des m francs qu'il possédait. Quelle est la probabilité totale de perte?

Toutes ces questions ont été résolues dans un Mémoire récemment publié ([1]); je ne crois pas utile de reproduire ici leurs solutions.

81. **Probabilité pour que le jeu se termine par une partie indiquée d'avance dans le cas général.** — *Un joueur A possède m francs; il a, pour chaque partie, la probabilité p de gagner la somme α et la probabilité $q = 1 - p$ de perdre la somme β; quelle est la probabilité pour qu'il perde ses m francs précisément après avoir fait μ parties, de telle sorte que la $\mu^{\text{ième}}$ partie lui enlève ses derniers β francs?*

Nous reprendrons le raisonnement du n° 71. Si le joueur a perdu m francs en μ parties, c'est qu'il a gagné $\frac{\beta\mu - m}{\alpha + \beta}$ parties et perdu $\frac{\alpha\mu + m}{\alpha + \beta}$ parties. La probabilité de gain étant p, la probabilité pour que

([1]) Consulter la *Théorie de la spéculation* dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, p. 81 et suivantes; 1900.

cet événement se produise $\frac{\beta\mu - m}{\alpha+\beta}$ fois en μ épreuves (n° 15) est

$$\varpi_{\mu,m} = \frac{\mu!}{\frac{\beta\mu - m}{\alpha+\beta}!\,\frac{\alpha\mu+m}{\alpha+\beta}!}\,p^{\frac{\beta\mu-m}{\alpha+\beta}}\,q^{\frac{\alpha\mu+m}{\alpha+\beta}}.$$

Cette probabilité est plus grande que celle que nous cherchons; elle est relative à toutes les séries de parties amenant la ruine du joueur A en μ coups. Nous devons en retrancher celles qui auraient amené cette ruine avant le $\mu^{\text{ième}}$ coup.

Nous allons donc chercher, parmi les séries qui auraient produit la perte m en μ coups, celles qui auraient produit cette perte avant le $\mu^{\text{ième}}$ coup.

Considérons une série qui aurait produit la ruine (c'est-à-dire la perte m) en γ parties; cette série, si elle avait pu se continuer, se serait composée, au delà du $\mu^{\text{ième}}$ coup, de $\frac{\beta(\mu-\gamma)}{\alpha+\beta}$ parties gagnées et de $\frac{\alpha(\mu-\gamma)}{\alpha+\beta}$ parties perdues, puisque la perte totale aurait été égale à m. Quel que soit γ, le rapport du nombre des parties gagnées au nombre des parties perdues est toujours $\frac{\beta}{\alpha}$.

A partir de la $\gamma^{\text{ième}}$ partie, il se produit une suite de pertes et de gains que l'on peut représenter symboliquement comme suit :

$$G_1 G_2 P_1 \ldots G_{\frac{\beta(\mu-\gamma)}{\alpha+\beta}} \ldots P_{\frac{\alpha(\mu-\gamma)}{\alpha+\beta}};$$

G_1 indique que la $(\gamma+1)^{\text{ième}}$ partie a donné un gain, G_2 indique que la partie suivante a donné un gain, P_1 signifie que la partie suivante a donné une perte, etc.

Considérons une suite quelconque

$$GP\ldots.$$

C'est une permutation quelconque qui contient, comme nous l'avons vu, des nombres de lettres G et de lettres P proportionnels à β et α. Donc le nombre de ces permutations qui se terminent par P est au nombre des permutations qui se terminent par G dans le rapport de α à β.

Donc, le nombre total des permutations est égal au nombre de celles qui se terminent par G multiplié par $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$.

Si la dernière lettre est G, c'est que la dernière partie a été un gain; or, pour que la $\mu^{\text{ième}}$ partie fournisse un gain, il faut que la perte soit $(m+\alpha)$ à la $(\mu-1)^{\text{ième}}$ partie.

Donc :

Le nombre des séries qui auraient produit la perte en moins de μ parties est égal au produit par $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ du nombre des séries qui, produisant la perte $(m+\alpha)$ en $(\mu-1)$ parties, produiraient la perte m en μ parties.

Passant du nombre des séries aux probabilités, nous pouvons dire que la probabilité $\Pi_{\mu,m}$ est égale à la probabilité $\varpi_{\mu,m}$ diminuée du produit par $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ de la probabilité pour que la perte étant $(m+\alpha)$ en $(\mu-1)$ parties soit égale à m en μ parties, c'est-à-dire diminuée de $p\frac{\alpha+\beta}{\beta}\varpi_{\mu-1,m+\alpha}$. On a donc

$$\Pi_{\mu,m} = \varpi_{\mu,m} - p\frac{\alpha+\beta}{\beta}\varpi_{\mu-1,m+\alpha}.$$

82. Si l'enjeu β n'est pas égal à l'unité il pourra se faire que le joueur soit forcé de cesser de jouer avant d'avoir tout perdu, possédant une somme inférieure à β. Nous négligerons cette petite somme, qui cependant mettrait la formule en défaut dans le cas où elle formerait une partie notable de la fortune du joueur.

La même remarque s'applique à toutes les questions analogues.

83. Si, dans la formule précédente, on remplace $\varpi_{\mu-1,m+\alpha}$ par sa valeur, on obtient finalement

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m}{\mu\beta}\varpi_{\mu,m}.$$

Telle est l'expression de la probabilité pour que le joueur perde ses m francs à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

84. Lorsque la quantité μ est grande on peut remplacer la valeur

exacte $\varpi_{\mu,m}$ par sa valeur asymptotique, on obtient alors

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m}{\mu\beta\sqrt{2\pi\mu pq}} e^{-\frac{[\beta\mu - m - \mu p(\alpha+\beta)]^2}{2(\alpha+\beta)^2\mu pq}}.$$

ou, en mettant en évidence les quantités $\alpha p - \beta q$ et $\alpha + \beta$ qui caractérisent le jeu,

$$\frac{m e^{-\frac{m(\alpha p - \beta q)}{(\alpha+\beta)^2 pq}}}{\beta\sqrt{2\pi pq}} \frac{e^{-\frac{m^2 + \mu^2(\alpha p - \beta q)^2}{2(\alpha+\beta)^2\mu pq}}}{\mu\sqrt{\mu}}.$$

85. **Probabilité pour que le jeu se termine dans un nombre donné de parties.** — Lorsque le nombre donné est faible, on doit faire la somme

$$\Sigma\Pi_{\mu,m}$$

en donnant à $\Pi_{\mu,m}$ sa valeur exacte.

Si l'on cherche la probabilité pour que le jeu se termine entre la $\mu_1^{\text{ième}}$ et la $\mu_2^{\text{ième}}$ partie, lorsque μ_1 et μ_2 sont grands, on est ramené à une intégrale.

On intègre entre μ_1 et μ_2 l'expression asymptotique de $\Pi_{\mu,m}$ après l'avoir multipliée par $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$, puisque la ruine ne peut avoir lieu que toutes les $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ parties. On obtient ainsi :

$$\frac{m e^{-\frac{m(\alpha p - \beta q)}{(\alpha+\beta)^2 pq}}}{(\alpha+\beta)\sqrt{2\pi pq}} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{e^{-\frac{m^2 + \mu^2(\alpha p - \beta q)^2}{2(\alpha+\beta)^2\mu pq}}}{\mu\sqrt{\mu}} d\mu.$$

Telle est l'expression asymptotique de la probabilité; son calcul paraît pénible.

86. **Cas où le jeu est équitable.** — Lorsque le jeu est équitable, $\alpha p - \beta q = 0$, et l'intégrale devient

$$\frac{m}{(\alpha+\beta)\sqrt{2\pi pq}} \int \frac{1}{\mu\sqrt{\mu}} e^{-\frac{m^2}{2(\alpha+\beta)^2\mu pq}} d\mu.$$

Intégrons entre zéro et l'infini et posons

$$\frac{m^2}{2(\alpha+\beta)^2\mu pq} = \lambda^2;$$

nous obtenons

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

C'est une intégrale classique dont la valeur est un. Le résultat est exact (nos 11 et 93) et il n'était pas évident, *a priori*, que la formule asymptotique qui n'est qu'approchée conduirait à ce résultat exact.

87. La probabilité pour que la ruine ait lieu après le $\mu^{\text{ième}}$ coup est

$$\frac{m}{(\alpha+\beta)\sqrt{2\pi pq}}\int_\mu^\infty \frac{1}{\mu\sqrt{\mu}}\,e^{-\frac{m^2}{2(\alpha+\beta)^2\mu pq}}\,d\mu,$$

ou, en posant $\dfrac{m^2}{2(\alpha+\beta)^2\mu pq}=\lambda^2$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{(\alpha+\beta)\sqrt{2\mu pq}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

D'après le paragraphe précédent, la probabilité P pour que la ruine ait lieu avant le $\mu^{\text{ième}}$ coup est égale à l'unité diminuée de l'intégrale ci-dessus, on a donc

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{(\alpha+\beta)\sqrt{2\mu pq}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Telle est l'expression de la probabilité pour que la perte m se produise avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

On peut encore l'écrire

$$P = 1 - \Theta\left[\frac{m}{(\alpha+\beta)\sqrt{2\mu pq}}\right],$$

et l'on peut calculer P avec l'aide de la Table de probabilité.

88. La probabilité pour que la perte m soit dépassée au bout de μ parties est (n° 56)

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{(\alpha+\beta)\sqrt{2\mu pq}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda;$$

on a donc

$$\mathfrak{P} = \frac{P}{2}$$

comme dans le cas particulier précédemment étudié (n° 71). La démonstration directe de cette formule sera analogue à celle du n° 66, mais il faut bien remarquer que l'égalité est rigoureusement exacte quand $p = q$, quel que soit μ. Si, au contraire, on suppose p différent de q, le jeu restant équitable, l'égalité $2\mathfrak{P} = P$ n'est vraie qu'asymptotiquement.

PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA THÉORIE DU JEU.

89. Ce que nous appellerons le *problème général* consiste dans l'étude du cas où les joueurs ont tous deux des fortunes limitées. Nous étudierons seulement le cas où le jeu est équitable et où les joueurs ont pour chaque partie égale probabilité de gain ou de perte.

90. **Étude d'un cas particulier.** — Traitons d'abord un cas particulier très simple, l'un des seuls qui puissent être étudiés d'une façon élémentaire.

Le joueur A *possède un franc, le joueur* B *possède deux francs : ils jouent un franc par partie avec égale probabilité de gain et de perte; quels sont les résultats que fournit le calcul sur cette question?*

Pour que le jeu ne se termine pas il faut que le joueur A gagne la première partie, le joueur B la seconde, le joueur A la troisième, etc. La probabilité pour que le jeu ne soit pas terminé en n parties est donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Le joueur A peut perdre à la première partie, la probabilité de cette éventualité est $\frac{1}{2}$; il peut perdre à la troisième, la probabilité est $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; il peut perdre à la cinquième, la probabilité est $\left(\frac{1}{2}\right)^5$, etc.

Le joueur B peut perdre à la seconde partie, la probabilité est $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; à la quatrième, la probabilité est $\left(\frac{1}{2}\right)^4$, etc.

91. La probabilité de perte du joueur A en n parties est

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^n}.$$

Cette même probabilité pour un nombre infini de parties est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante; cette somme est égale à $\frac{2}{3}$.

La probabilité de perte du joueur B pour un nombre infini de parties est $\frac{1}{3}$.

Les probabilités totales de gain sont donc proportionnelles aux sommes engagées.

92. Le nombre probable des parties jouées est un, car il y a une chance sur deux pour que le jeu s'arrête à la première partie.

La durée moyenne du jeu est l'espérance mathématique d'un joueur qui recevrait un franc si le jeu se terminait par la première partie, deux francs s'il se terminait par la seconde, etc.

Cette durée est donc exprimée par la série

$$\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2^2}\times 2+\frac{1}{2^3}\times 3+\ldots,$$

qui se décompose, comme l'on sait, en une somme de progressions géométriques.

La valeur de la série est deux.

93. **Cas où le nombre des parties peut être illimité.** — Lorsque le nombre des parties n'est pas limité on peut calculer la probabilité de gain de chaque joueur et la durée moyenne du jeu. Pour chacun de ces problèmes nous étudierons d'abord le cas d'un jeu équitable.

Le joueur A *possède m francs, le joueur* B *possède n francs; ils jouent un nombre illimité de parties; quelle est, pour chacun d'eux, la probabilité de ruiner l'autre?*

Supposons d'abord le jeu équitable; soient β la mise du joueur A et α la mise du joueur B. Soit y_x la probabilité qu'a le joueur A de ruiner son adversaire quand il possède x francs et quand, par suite, le joueur B possède $m+n-x$ francs.

On aura

$$(1) \qquad y_x = p\,y_{x+\alpha} + q\,y_{x-\beta}.$$

En effet, en jouant la partie suivante, le joueur A a la probabilité p de gagner la somme α et la probabilité q de perdre la somme β; l'équation (1) résulte donc de l'application des principes de la probabilité composée et de la probabilité totale.

$p\alpha$ étant égal à $q\beta$, puisque le jeu est équitable, la solution générale de l'équation (1) est

$$y_x = \lambda x + \nu,$$

λ et ν étant arbitraires; on les détermine par les conditions

$$y_0 = 0, \qquad y_{m+n} = 1;$$

on en déduit

$$\nu = 0, \qquad \lambda = \frac{1}{m+n}.$$

Donc

$$y_x = \frac{m}{m+n},$$

et, par conséquent,

$$y_m = \frac{m}{m+n}, \qquad y_n = \frac{n}{m+n}.$$

Les probabilités de réussite de chacun des joueurs sont proportionnelles à leurs fortunes.

Ce résultat avait déjà été trouvé d'une façon plus simple (n° 11), mais on admettait alors que la probabilité pour que le jeu se continue indéfiniment est nulle. La démonstration actuelle ne nécessite pas cette hypothèse.

94. Lorsque le jeu n'est pas équitable, en employant les mêmes notations, on a toujours l'équation (1); la solution générale de cette équation est

$$y_x = C_1 + C_2\,\rho^x,$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires et v satisfaisant à la condition

$$1 = pv^{\alpha} + q\frac{1}{v^{\beta}};$$

les constantes C_1 et C_2 se déterminent par les conditions

$$y_0 = 0, \qquad y_{m+n} = 1,$$

et l'on trouve

$$y_m = \frac{v^m - 1}{v^{m+n} - 1}. \tag{2}$$

Ce résultat est dû à de Moivre.

95. Dans le cas du jeu équitable, si le joueur B a une fortune très grande, la probabilité de ruine du joueur A est très voisine de l'unité: elle tend vers un, à mesure que la fortune du joueur B croît.

Quand le jeu n'est pas équitable, la probabilité de ruine

$$y_n = \frac{v^n - 1}{v^{m+n} - 1}$$

tend vers $\frac{1}{v^m}$ lorsque n tend vers l'infini, cette probabilité de ruine est très faible si le jeu est avantageux et si m est suffisamment grand.

Supposons, par exemple, que $\alpha = \beta = 1$ et que $p = 0,51$, $q = 0,49$. La quantité v sera donnée par l'équation

$$qv^2 - v + p = 0,$$

d'où l'on déduit

$$v = \frac{51}{49}.$$

Si m est égal à 100, la probabilité de ruine n'est que 0,0018. Cet exemple, comme ceux qui ont été précédemment donnés nos 59 à 64, montre à quel point le moindre désavantage change les conditions de réussite d'un jeu.

96. Occupons-nous maintenant de la durée moyenne du jeu supposé équitable.

Soit y_x cette valeur moyenne lorsque le joueur A possède x francs, c'est-à-dire l'espérance mathématique de celui qui aurait promesse de recevoir 1^{fr} par partie jouée ; on aura

$$y_x = 1 + p y_{x+\alpha} + q y_{x-\beta}. \tag{3}$$

Le nombre des parties jouées comprend, en effet, la partie par laquelle on commence et qui certainement aura lieu ; après cette partie, l'espérance mathématique devient $y_{x+\alpha}$ ou $y_{x-\beta}$ selon que le joueur a gagné ou perdu, la première éventualité ayant pour probabilité p et la seconde pour probabilité q, l'équation ci-dessus est la conséquence immédiate des principes.

La solution générale de cette équation est

$$y_x = -\frac{x^2}{\alpha\beta} + \lambda x + \nu.$$

Les conditions

$$y_0 = 0, \qquad y_{m+n} = 0$$

donnent

$$\nu = 0, \qquad \lambda = \frac{m+n}{\alpha\beta}$$

et, par suite,

$$y_m = \frac{mn}{\alpha\beta}.$$

La durée moyenne du jeu est proportionnelle au produit des fortunes des joueurs.

Elle sera infinie si la fortune de l'un des joueurs est infinie. Ce résultat avait été obtenu précédemment (n° 79) dans un cas particulier.

97. Lorsque le jeu n'est pas équitable, le problème est encore régi par l'équation (3), mais celle-ci a pour solution

$$y_x = C\nu^x - \frac{x}{(\alpha+\beta)p - \beta} + C'';$$

ν est la racine de l'équation

$$p\nu^{\alpha+\beta} - \nu^\beta - q = 0,$$

C et C″ sont des constantes arbitraires que l'on détermine par les conditions

$$y_0 = 0, \qquad y_{m+n} = 0.$$

Si l'on nomme U la probabilité nº 94 [formule (2)] pour que le joueur A ruine son adversaire, on trouve en effectuant les calculs

$$y_m = \frac{(m+n)\mathrm{U} - m}{\alpha p - \beta q},$$

$\alpha p - \beta q$ est l'avantage absolu (nº 14) du joueur A pour une partie; son espérance positive totale est $\mathrm{U}n$, son espérance négative est $(1-\mathrm{U})m$, le numérateur de y_m est donc l'avantage total du jeu; par conséquent :

Le nombre moyen des parties est égal au rapport de l'avantage total de l'un des joueurs à l'avantage du même joueur dans chaque partie.

Ce remarquable résultat est dû à M. Rouché.

98. **Probabilité pour que le jeu se termine par une partie indiquée d'avance.** — Nous allons, maintenant, nous occuper du cas où le nombre des parties est limité, et nous résoudrons d'abord le problème suivant :

Le joueur A *possède* m *francs et le joueur* B, n *francs; ils jouent un franc par partie avec égale probabilité de gain et de perte; quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la* $\mu^{\text{ième}}$ *partie par la ruine du joueur* A.

Désignons par $\Pi_{\mu,m,\infty}$ la probabilité pour que le jeu se termine par la ruine du joueur A, précisément en μ parties, en supposant la fortune de son adversaire infinie. Cette probabilité a été calculée (nº 71), elle a pour valeur

$$(1) \qquad \Pi^1_{\mu,m;\infty} = \frac{m}{\mu}\,\frac{\mu!}{\frac{\mu-m}{2}!\,\frac{\mu+m}{2}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}.$$

Désignons par $\Pi_{\mu,m,n}$ la probabilité cherchée, nous pouvons poser en première approximation (nous faisons remarquer, dès maintenant, que la formule définitive à laquelle nous arriverons est rigoureusement exacte) :

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty}.$$

Cette formule donne pour la probabilité cherchée une valeur trop forte; de toutes les séries d'alternatives de gain et de perte produisant la ruine du joueur A précisément en μ parties, nous devons retrancher celles qui produiraient précédemment la ruine du joueur B.

Si le joueur B quand il est ruiné pouvait continuer à jouer jusqu'à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, il y aurait probabilité égale pour qu'il gagnât $m+n$ francs et qu'il ruinât le joueur A, ou pour qu'il perdit encore $m+n$ francs, ce qui porterait sa perte à $m+2n$ francs.

A chaque série d'alternatives de gain et de perte qui produit la ruine du joueur B et qui aurait ensuite produit celle du joueur A correspond une série qui donnerait au joueur B la perte $m+2n$ s'il possédait cette somme; et, comme aucune des premières séries ne ruine le joueur A avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie, aucune des secondes ne ruinerait le joueur B avant cette $\mu^{\text{ième}}$ partie, s'il possédait $m+2n$ francs. Ceci nous incite à poser en seconde approximation

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \Pi_{\mu,m+2n,\infty}.$$

La quantité $\Pi_{\mu,m+2n,\infty}$ que nous avons retranchée est trop forte, car nous avons retranché les séries produisant la ruine du joueur B supposé posséder $m+2n$ francs, alors que nous n'aurions dû tenir compte parmi elles que de celles qui ne causent pas d'abord la ruine du joueur A.

Or, si le joueur A supposé d'abord ruiné avait pu continuer à jouer, il n'est ni plus ni moins probable qu'il eût gagné les $2m+2n$ francs qui auraient amené la ruine de B qu'il n'est probable qu'il eût perdu ces $2m+2n$ francs, ce qui aurait porté sa perte à $3m+2n$ francs. On doit donc poser en troisième approximation

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \Pi_{\mu,m+2n,\infty} + \Pi_{\mu,3m+2n,\infty}$$

et ainsi de suite, on a donc

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} &- \Pi_{\mu,m+2n,\infty} + \Pi_{\mu,3m+2n,\infty} - \ldots \\ &+ \Pi_{\mu,(2\lambda+1)m+2\lambda n,\infty} - \Pi_{\mu,(2\lambda+1)m+(2\lambda+2)n,\infty} + \ldots.\end{aligned}$$

La formule s'arrête lorsque la quantité $(2\lambda+1)m+2\lambda n$ ou $(2\lambda+1)m+(2\lambda+2)n$ est inférieure à μ.

99. Cette formule établie par une suite d'approximations est *rigoureusement exacte,* car elle contient toutes les séries d'alternatives amenant la ruine du joueur A dans les conditions imposées par l'énoncé, et celles-là seulement.

La démonstration que l'on vient de lire paraît pénible, la théorie de la spéculation la présente, comme nous le verrons (n° 118), sous un aspect beaucoup plus clair; c'est, du reste, grâce à cette dernière théorie que la formule fut découverte.

100. Appliquons la formule ci-dessus à quelques exemples simples : Supposons que le joueur A possède 1^{fr} et le jour B 2^{fr}, et cherchons quelle est la probabilité pour que le jeu se termine précisément à la septième partie par la perte du joueur A.

La formule

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \Pi_{\mu,m+2n,\infty} + \ldots$$

devient ici

$$\Pi_{7,1,2} = \Pi_{7,1,\infty} - \Pi_{7,5,\infty} + \Pi_{7,7,\infty}.$$

On calcule les termes du second membre par la formule (1) (n° 98), on obtient ainsi

$$\Pi_{7,1,2} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

C'est bien le résultat obtenu directement (n° 90).

101. Supposons, maintenant, que les joueurs A et B possèdent chacun 3^{fr}; quelle est la probabilité pour que le jeu se termine par la perte du joueur A, à la neuvième partie?

On peut résoudre le problème directement : on voit que la probabilité de perte du joueur A est $\frac{1}{2^3}$ à la troisième partie, $\frac{3}{2^5}$ à la cinquième partie, $\frac{9}{2^7}$ à la septième partie, $\frac{27}{2^9}$ à la neuvième partie, etc.

Employons la formule ci-dessus, on aura

$$\Pi_{9,3,3} = \Pi_{9,3,\infty} - \Pi_{9,9,\infty}$$

ou

$$\Pi_{9,3,3} = 28\left(\frac{1}{2}\right)^9 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{27}{2^9}.$$

C'est le résultat trouvé directement.

102. Application à la théorie des combinaisons. — Le joueur A a perdu m francs en μ parties, il a donc gagné $\frac{\mu - m}{2}$ parties, et il en a perdu $\frac{\mu + m}{2}$. Désignons par la lettre K les parties gagnées et par la lettre H les parties perdues; une quelconque des permutations des μ lettres K et H produisant la perte m en μ parties peut s'écrire, par exemple,

$$K_1 K_2 H_3 K_4 \ldots.$$

K_1 indique que le joueur a gagné la première partie, K_2 indique qu'il a gagné la seconde, H_3 indique qu'il a perdu la troisième, etc.

Le nombre total des indices est μ, et il y a $\frac{\mu + m}{2}$ lettres H et $\frac{\mu - m}{2}$ lettres K.

Si le joueur est ruiné en μ coups précisément, la permutation doit se terminer par un H, et en la lisant à l'envers, c'est-à-dire de droite à gauche, le nombre des lettres H doit, durant toute la lecture, être supérieur au nombre des lettres K. Puisque le joueur B n'a pas été, par hypothèse, ruiné avant le joueur A, en lisant toujours la permutation de droite à gauche, le nombre des lettres H ne doit jamais, pendant la lecture, surpasser celui des K de la quantité $m + n$.

La théorie présente nous permet donc de résoudre le problème suivant :

Quel est le nombre des permutations de μ lettres dont $\frac{\mu + m}{2}$ lettres H et $\frac{\mu - m}{2}$ lettres K, ces permutations étant telles que, en les lisant dans un sens déterminé :

1° Le nombre des lettres H soit, durant toute la lecture, toujours supérieur au nombre des lettres K;

2° L'excès du nombre des lettres H sur le nombre des lettres K soit, durant toute la lecture, inférieur à une quantité donnée $m + n$.

La probabilité étant le rapport du nombre N des permutations au nombre des cas possibles, on a

$$\Pi_{\mu, m, n} = \frac{N}{2^{\mu}}, \qquad \text{d'où} \qquad N = 2^{\mu} \Pi_{\mu, m, n}.$$

Je crois qu'il serait pénible de résoudre directement cette question.

Si, par exemple, $\mu = 7$, $m = 1$, $n = 2$, on doit avoir $N = 1$. Il est facile de reconnaître qu'en effet la seule permutation acceptable est

$$K_1 H_2 K_3 H_4 K_5 H_6 H_7.$$

Si $\mu = 6$, $m = n = 2$, la formule donne $N = 4$.

On vérifie très facilement qu'il y a quatre permutations et quatre seulement satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

103. **Probabilité pour que le jeu se termine dans un nombre donné de parties.** — Lorsque μ est un grand nombre, on peut, dans la formule

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \Pi_{\mu,m+2n,\infty} + \ldots,$$

remplacer les valeurs exactes des quantités Π par leur expression asymptotique (n° 72), on a ainsi

$$\Pi_{\mu,m,n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}}\left[me^{-\frac{m^2}{2\mu}} - (m+2n)e^{-\frac{(m+2n)^2}{2\mu}} + (3m+2n)e^{-\frac{(3m+2n)^2}{2\mu}} - \ldots\right].$$

Telle est l'expression asymptotique de la probabilité pour que le jeu se termine en μ parties par la ruine du joueur A.

104. La probabilité $P_{\mu,m,n}$ pour que le joueur A soit ruiné avant μ parties s'obtiendra en intégrant l'expression précédente entre les limites zéro et μ après l'avoir divisée par deux, puisque la perte ne peut avoir lieu que de deux en deux parties.

On aura ainsi

$$\begin{aligned} P_{\mu,m,n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Bigg[\int_0^{\mu} \frac{me^{-\frac{m^2}{2\mu}}}{\mu\sqrt{\mu}}\,d\mu - \int_0^{\mu} \frac{(m+2n)e^{-\frac{(m+2n)^2}{2\mu}}}{\mu\sqrt{\mu}}\,d\mu \\ + \int_0^{\mu} \frac{(3m+2n)e^{-\frac{(3m+2n)^2}{2\mu}}}{\mu\sqrt{\mu}}\,d\mu - \ldots\Bigg]. \end{aligned}$$

Posons, dans la première intégrale,

$$\frac{m^2}{2\mu} = \lambda^2;$$

dans la seconde, posons

$$\frac{(m+2n)^2}{2\mu} = \lambda^2.$$

Etc.

Remarquons, enfin, que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\gamma}{\sqrt{2\mu}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\gamma}{\sqrt{2\mu}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda;$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\mu,m,n} = {} & \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m}{\sqrt{2\mu}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda\right) - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{m+2n}{\sqrt{2\mu}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda\right) \\ & + \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{3m+2n}{\sqrt{2\mu}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda\right) - \ldots.\end{aligned}$$

Telle est l'expression de la probabilité pour que le jeu se termine avant μ parties par la ruine du joueur A.

La probabilité $\mathrm{P}_{\mu,n,m}$ pour que le jeu se termine, dans les mêmes conditions, par la ruine du joueur B s'obtiendrait en remplaçant dans la formule m par n et inversement.

La probabilité pour que le jeu se termine avant μ parties par la ruine de l'un quelconque des joueurs est

$$\mathrm{P}_{\mu,m,n} + \mathrm{P}_{\mu,n,m}.$$

La probabilité pour qu'aucun des joueurs ne soit ruiné en μ parties est

$$1 - \mathrm{P}_{\mu,m,n} - \mathrm{P}_{\mu,n,m}.$$

105. Si l'on désigne par $\mathrm{P}_{\mu,m,\infty}$ la probabilité pour que la ruine du joueur A ait lieu avant μ parties, probabilité calculée (n° 68), on a

$$\mathrm{P}_{\mu,m,n} = \mathrm{P}_{\mu,m,\infty} - \mathrm{P}_{\mu,m+2n,\infty} + \mathrm{P}_{\mu,3m+2n,\infty} - \mathrm{P}_{\mu,3m+4n,\infty} + \ldots$$

ou

$$\mathrm{P}_{\mu,m,n} = 1 - \Theta\left(\frac{m}{\sqrt{2\mu}}\right) - 1 + \Theta\left(\frac{m+2n}{\sqrt{2\mu}}\right) + 1 - \Theta\left(\frac{3m+2n}{\sqrt{2\mu}}\right) - \ldots.$$

Lorsque μ est très grand, on calcule $P_{\mu,m,n}$ par les formules (n° 93).

106. **Second écart probable.** — Je suppose deux joueurs devant jouer au maximum μ parties; il y a, pour chacun d'eux, une certaine fortune m que nous allons fixer de telle sorte que le jeu ait une chance sur deux pour être terminé avant la fin des μ parties.

La quantité m doit satisfaire à l'équation

$$P_{\mu,m,m} = \frac{1}{4},$$

d'où l'on déduit

$$m = 0,6\sqrt{\mu} \text{ environ.}$$

Le second écart probable est proportionnel à la racine carrée du nombre des parties; il est égal au premier écart probable multiplié par 1,7.

On comprend bien la différence entre les deux écarts probables : le premier a des chances égales d'être ou de ne pas être dépassé à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, tandis que le second a égale probabilité d'être ou de ne pas être dépassé pendant les μ parties.

107. **Second écart moyen.** — Le second écart moyen est la valeur moyenne du plus grand des écarts qui se sont produits pendant les μ parties; il a pour expression

$$\int_0^\infty m \frac{\partial}{\partial m}(1 - 2P_{\mu,m,m})\,dm$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{2}\,m}{\sqrt{\pi\mu}}\left(e^{-\frac{m^2}{2\mu}} - 3\,e^{-\frac{(3m)^2}{2\mu}} + 5\,e^{-\frac{(5m)^2}{2\mu}} - \ldots\right)dm.$$

Cette quantité est une somme d'intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\mu}}\,\alpha m\,e^{-\frac{(\alpha m)^2}{2\mu}}\,dm = \left|\frac{\sqrt{2}\sqrt{\mu}}{\alpha\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{\alpha^2 m^2}{2\mu}}\right|_0^\infty = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\mu}}{\alpha\sqrt{\pi}},$$

elle a donc pour valeur

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

Du développement classique

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

on déduit, en posant $x = 1$,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

Le second écart moyen a donc pour valeur

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\sqrt{\mu},$$

il est proportionnel à la racine carrée du nombre des parties et égal au premier écart moyen multiplié par $\frac{\pi}{2}$.

108. **Durée probable du jeu.** — Nous venons de résoudre deux problèmes en prenant le nombre des parties pour donnée et les fortunes pour inconnues. Nous allons maintenant étudier les problèmes inverses relatifs à la durée du jeu, en supposant les fortunes connues.

109. Le nombre μ qui correspond à la partie donnant la plus grande probabilité pour la ruine du joueur A est obtenu par la formule

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(P_{\mu,m,n}) = 0.$$

Le même nombre relatif au joueur B s'obtiendrait par la résolution de l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(P_{\mu,n,m}) = 0.$$

Le nombre de parties le plus probable pour la terminaison du jeu serait fourni par l'égalité

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(P_{\mu,m,n} + P_{\mu,n,m}) = 0.$$

110. La *durée moyenne* du jeu a déjà été calculée (n° 96), elle a pour valeur mn. La *durée probable* du jeu, autrement dit le nombre

probable de parties jouées, est donné par l'équation

$$P_{\mu,m,n} + P_{\mu,n,m} = \frac{1}{2}.$$

En particulier, si $n = m$, la durée probable du jeu est $\mu = 0,76m^2$; elle est plus petite que la durée moyenne, égale à m^2, et elle est environ trois fois plus faible qu'elle ne le serait si un des joueurs avait une fortune infinie (n° 78), l'autre possédant toujours la fortune m.

111. Nous pensons qu'un exemple ne sera pas inutile pour bien faire comprendre les questions étudiées dans ce Chapitre.

Supposons que le joueur A possède 50^{fr}, le joueur B, 100^{fr}, et que le jeu se compose au maximum de 20000 parties.

Cherchons d'abord la probabilité de ruine $P_{m,n}$ du joueur A; cette probabilité est exprimée par la formule

$$P_{m,2m} = 1 - \Theta\left(\frac{m}{\sqrt{2\mu}}\right) - 1 + \Theta\left(\frac{5m}{\sqrt{2\mu}}\right) + 1 - \Theta\left(\frac{7m}{\sqrt{2\mu}}\right) - \ldots,$$

dans laquelle $m = 50$, $\mu = 20000$ et $\frac{m}{\sqrt{2\mu}} = 0,25$. En employant les Tables de la fonction Θ qui se trouvent à la fin du Mémoire, on obtient

$$P_{m,n} = 0,6598.$$

On calculerait de même

$$P_{n,m} = 0,3265.$$

La probabilité pour qu'aucun des joueurs ne soit ruiné quand 20000 parties sont jouées est

$$1 - 0,6598 - 0,3265.$$

Si le jeu pouvait se continuer indéfiniment, les probabilités P auraient pour valeur (n° 93)

$$P_{m,n} = 0,6667, \qquad P_{n,m} = 0,3333.$$

Le nombre probable des parties jouées est 3357; le nombre moyen est 5000.

112. Problème général de la théorie de la spéculation. — Nous avons démontré ailleurs [1] que la théorie de la spéculation pouvait, sous de certaines réserves, être assimilée à la théorie du jeu; elle se propose de résoudre trois problèmes, de difficulté croissante, correspondant aux trois problèmes de la théorie du jeu.

113. Le premier problème consiste, étant donné le cours actuel, et en supposant les variations de cours dues au hasard, à déterminer la probabilité pour que le cours x de la rente soit *à une époque déterminée t* compris dans l'intervalle x et $x+dx$; cette probabilité a pour expression

$$p_x = \frac{1}{2\pi k\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\pi k^2 t}},$$

le cours actuel correspond à $x = 0$, c'est le cours considéré par le marché comme le plus probable. L'acheteur de rente à terme gagne proportionnellement à la hausse, c'est-à-dire proportionnellement aux valeurs positives de x, de même qu'il perd proportionnellement aux valeurs négatives de x; son espérance totale est nulle, son espérance positive $\int_0^\infty x p_x \, dx = k\sqrt{t}$; on la désigne par la lettre a.

La quantité k est le coefficient d'instabilité qu'admet actuellement le marché; l'écart moyen est égal à $2a$, l'écart probable à $1,668a$.

La probabilité pour que, à l'époque t, le cours soit compris entre c et ∞ est donnée par la formule suivante, analogue à celle du n° 57 :

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{c}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

Cette probabilité se calcule à l'aide de la Table de la fonction Θ; on a, en effet,

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{c}{2\sqrt{\pi}\,k\sqrt{t}}\right).$$

---

(1) *Théorie de la spéculation* (*Annales de l'École Normale*, p. 21; 1900).

114. Dans le cas actuel, il est plus simple de faire usage de la Table suivante qui donne directement la valeur de la probabilité $\mathcal{P}$ correspondant au cours c exprimé en prenant $a = k\sqrt{t}$ pour unité :

Écart.	Probabilité $\mathcal{P}$.	Écart.	Probabilité $\mathcal{P}$.
$0,0a$	0,500	$2,3a$	0,179
$0,1a$	0,484	$2,4a$	0,169
$0,2a$	0,469	$2,5a$	0,159
$0,3a$	0,453	$2,6a$	0,150
$0,4a$	0,437	$2,7a$	0,141
$0,5a$	0,422	$2,8a$	0,132
$0,6a$	0,404	$2,9a$	0,124
$0,7a$	0,390	$3,0a$	0,116
$0,8a$	0,374	$3,1a$	0,108
$0,9a$	0,360	$3,2a$	0,101
$1,0a$	0,345	$3,3a$	0,094
$1,1a$	0,331	$3,4a$	0,087
$1,2a$	0,316	$3,5a$	0,080
$1,3a$	0,302	$3,6a$	0,075
$1,4a$	0,289	$3,7a$	0,070
$1,5a$	0,275	$3,8a$	0,065
$1,6a$	0,262	$3,9a$	0,060
$1,7a$	0,249	$4a$	0,055
$1,8a$	0,237	$4,5a$	0,037
$1,9a$	0,225	$5a$	0,024
$2,0a$	0,214	$5,5a$	0,015
$2,1a$	0,202	$6a$	0,009
$2,2a$	0,190	$7a$	0,005

115. Cherchons, par exemple, la probabilité pour que le cours soit, dans vingt-cinq jours, supérieur au cours actuel de 36^c au moins. On suppose que, en prenant pour unité de temps le jour et pour unité de variation le centime, la quantité k qui est une donnée de la question est égale à 4, par exemple.

Dans ces conditions, $a = k\sqrt{t} = 4.5 = 20$; le cours considéré de $36^c = 20 \times 1,8 = 1,8a$. Le Tableau ci-dessus donne directement la probabilité cherchée : 0,237.

116. Le deuxième problème consiste dans la recherche de la probabilité pour que le cours c soit atteint ou dépassé dans l'*intervalle de temps* t.

Pour résoudre ce problème on suit le même raisonnement que dans le cas de la théorie du jeu, on calcule d'abord la probabilité Π pour que le cours c soit atteint à l'époque t, sans l'avoir été précédemment; cette probabilité a pour expression

$$\Pi = \frac{c\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}\,kt\sqrt{t}}\,e^{-\frac{c^2}{4\pi k^2 t}}\,dt.$$

On en déduit ensuite la probabilité pour que le cours c soit atteint dans l'intervalle de temps t :

$$\mathrm{P}_c = 2\,\mathfrak{P}_c = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{c}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda,$$

l'époque moyenne à laquelle le cours est atteint est infinie; l'époque probable est

$$t = \frac{c^2}{2,89\,k^2}.$$

117. Le problème général de la théorie de la spéculation se propose de résoudre la question suivante :

Quelle est la probabilité pour que le cours c (supposé positif pour fixer les idées) soit atteint ou dépassé dans l'intervalle de temps t, les variations en baisse n'ayant jamais atteint un cours donné b.

Nous croyons utile de présenter l'énoncé sous une forme plus explicite, en l'appliquant à un exemple.

J'achète de la rente (à terme) avec l'intention de la revendre avant un mois si, dans cet intervalle de temps, elle se trouve à un moment donné un franc au-dessus de son cours actuel. Voulant limiter mon risque à deux francs, je m'engage à revendre ma rente si, dans le courant du mois, il se produit une baisse de deux francs au-dessous du cours actuel.

On demande : La probabilité pour que, dans le courant du mois, j'aie pu revendre avec le bénéfice d'un franc; la probabilité pour que j'aie revendu avec deux francs de perte, et la probabilité pour que, au bout du mois, je n'aie pu faire aucune des reventes.

118. Comme dans la question qui précède nous résoudrons d'abord le problème suivant :

Quelle est la probabilité $\Pi_{c,b}$ *pour que le cours c soit atteint à l'époque t, sans l'avoir été auparavant et sans que la variation en baisse ait été supérieure à un cours donné b.*

Nous désignerons par $\Pi_{c,\infty}$ la probabilité déjà calculée n° 116 pour que le cours soit atteint en supposant b infini.

Une première approximation consiste à poser

$$\Pi_{c,b} = \Pi_{c,\infty},$$

il est évident qu'elle donne pour $\Pi_{c,b}$ une valeur trop forte. De toutes les séries d'alternatives de hausse et de baisse qui forment la probabilité $\Pi_{c,\infty}$, il faut, en effet, retrancher celles pour lesquelles le cours $-b$ aurait été franchi à un moment donné. Or, au moment où le cours $-b$ est atteint, le cours c n'est ni plus ni moins probable par suite de la symétrie de la probabilité que le cours symétrique $-(c+2b)$.

Donc, à chaque série d'alternatives de hausse et de baisse dépassant le cours $-b$ en baisse et revenant au cours c à l'époque t, correspond une série aboutissant en baisse au cours $-(c+2b)$. Et, comme aucune des premières n'a dépassé, par hypothèse, l'intervalle c en hausse, aucune des symétriques ne dépassera l'intervalle $-(c+2b)$ en baisse.

C'est ce qui nous incite à poser en seconde approximation

$$\Pi_{c,b} = \Pi_{c,\infty} - \Pi_{c+2b,\infty}.$$

En retranchant $\Pi_{c+2b,\infty}$ nous avons retranché à tort des séries qui ont abouti au cours $-(c+2b)$ en baisse ayant dépassé d'abord le cours c en hausse. Mais, lorsque le cours c est atteint en hausse, le cours $-(c+2b)$ n'est ni plus ni moins probable, par suite de la symétrie de la probabilité que le cours symétrique $3c+2b$, en hausse.

C'est ce qui nous incite à poser en troisième approximation

$$\Pi_{c,b} = \Pi_{c,\infty} - \Pi_{c+2b,\infty} + \Pi_{3c+2b,\infty}.$$

En continuant le même raisonnement, nous serons conduits à la série

$$\Pi_{c,b} = \Pi_{c,\infty} - \Pi_{c+2b,\infty} + \Pi_{3c+2b,\infty} - \Pi_{3c+4b,\infty} + \Pi_{5c+4b,\infty} - \ldots.$$

C'est la formule fondamentale de notre étude.

119. En remplaçant dans cette formule les quantités Π par leur valeur et en intégrant, on obtient finalement : *la probabilité $P_{c,b}$ pour que le cours c soit atteint ou dépassé dans l'intervalle de temps t, les variations en baisse n'ayant jamais atteint le cours $-b$.*

$$P_{c,b} = \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{c}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}} e^{-\lambda^2} d\lambda\right] - \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{c+2b}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}} e^{-\lambda^2} d\lambda\right]$$
$$+ \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{3c+2b}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}} e^{-\lambda^2} d\lambda\right] - \ldots,$$

ou bien

$$P_{c,b} = P_{c,\infty} - P_{c+2b,\infty} + P_{3c+2b,\infty} - P_{3c+4b,\infty} + \ldots,$$

ou encore (n° 116)

$$P_{c,b} = 2\mathfrak{P}_{c,\infty} - 2\mathfrak{P}_{c+2b,\infty} + 2\mathfrak{P}_{3c+2b,\infty} - 2\mathfrak{P}_{3c+4b,\infty} + \ldots,$$

ou enfin

$$P_{c,b} = \left[1 - \Theta\left(\frac{c}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}\right)\right] - \left[1 - \Theta\left(\frac{c+2b}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}\right)\right] + \left[1 - \Theta\left(\frac{3c+2b}{2\sqrt{\pi}k\sqrt{t}}\right)\right] - \ldots.$$

120. La probabilité pour que le cours $-b$ soit atteint dans l'intervalle de temps t, les variations en hausse n'ayant jamais atteint le cours c, s'obtiendra en remplaçant dans les formules précédentes b par c et c par b. La probabilité pour que, jusqu'à l'époque t, le cours ne soit pas sorti de l'intervalle $-b$, $+c$ est

$$1 - P_{c,b} - P_{b,c}.$$

121. Les probabilités P sont difficilement calculables lorsque t est très grand. Dans ce cas, on peut appliquer au problème actuel un rai-

sonnement connu (n° 11) qui conduit à la valeur asymptote de la probabilité

$$P_{c,b} = \frac{b}{b+c}, \qquad P_{b,c} = \frac{c}{b+c}.$$

122. Les formules qui précèdent sont susceptibles d'un grand nombre d'applications intéressantes :

1° Si on suppose $b = c = a = k\sqrt{t}$, P_{aa} est égal à $0,496$. La probabilité pour que le cours ne sorte pas de l'intervalle est très faible :

$$1 - 2 \times 0,496 = 0,008.$$

2° Lorsque $b = c = 2a$, $P_{2a,2a} = 0,410$; la probabilité pour que le cours reste compris dans l'intervalle $\pm\, 2a$ est

$$1 - 2 \times 0,41 = 0,18.$$

Si l'on achète une prime double avec l'idée préconçue de revendre ferme si l'écart $2a$ est atteint en hausse, ou de racheter ferme si l'écart $2a$ est atteint en baisse, la probabilité pour que l'une des deux opérations puisse s'effectuer est $0,82$. Remarquons que $P_{2a,2a} = 0,41$ alors que $P_{2a,\infty} = 0,428$. Quand l'écart en hausse et en baisse est supérieur à $2a$, la probabilité qu'un cours soit atteint dans un sens est à peu près la même que si les variations dans l'autre sens pouvaient être quelconques.

3° Supposons que $c = a$ et que $b = 2a$, la probabilité pour que le cours c soit atteint, $P_{c,b}$ est $0,652$ et la probabilité pour que le cours $b = -2a$ soit atteint est

$$P_{b,c} = 0,325;$$

la probabilité pour que le cours reste dans l'intervalle considéré est

$$1 - 0,652 - 0,325 = 0,023.$$

Si nous avions supposé *a priori* cette probabilité négligeable; nous aurions obtenu par les formules (n° 121) les valeurs très suffisamment approchées

$$P_{c,b} = 0,666 \qquad \text{et} \qquad P_{b,c} = 0,333.$$

123. Nous appellerons *second écart probable* l'intervalle $\pm\,\gamma$ tel que,

pendant le temps t, le cours ait autant de chances de rester compris dans cet intervalle qu'il a de chances de le dépasser. On doit avoir

$$P_{\gamma,\gamma} = \frac{1}{4}.$$

On en déduit

$$\gamma = 2,9a.$$

En posant $P_{\gamma,\infty} = \frac{1}{4}$, on avait également trouvé (*Théorie de la spéculation*, p. 77) (¹) :

$$\gamma = 2,9a;$$

comme on l'a déjà fait remarquer; $P_{\gamma,\gamma}$ est très voisin de $P_{\gamma,\infty}$ lorsque γ surpasse $2a$.

124. Nous appellerons *second écart moyen* la moyenne du plus grand écart existant entre le cours actuel et tous les cours cotés dans l'intervalle de temps t. Le second écart moyen a pour expression

$$\int_0^\infty c \frac{\partial}{\partial c}(1 - 2P_{cc})\,dc.$$

Une suite de calculs analogues à ceux du nº 107 démontrerait que la valeur du second écart moyen est πa. Ce résultat est remarquable par sa simplicité.

On pourrait imaginer de nouvelles sortes de prime : moyennant l'abandon d'une prime égale à $2a$, on gagnerait le plus grand écart entre le cours actuel et tous les cours cotés pendant l'intervalle t, en ne considérant que les écarts positifs ou que les écarts négatifs. Si l'on pouvait toucher la valeur du plus grand écart, qu'il soit positif ou négatif, la valeur de la prime devrait être πa.

125. Nous venons d'étudier deux problèmes dans lesquels nous avons considéré un intervalle de temps fixe et des écarts variables, nous allons maintenant supposer les écarts fixes et la durée de l'opération variable.

L'époque *la plus probable* à laquelle le cours sortira de l'intervalle

(¹) *Annales de l'École Normale*, 1900.

c, b) en cotant le cours c, sera donné par la formule

$$\frac{\partial^2 P_{c,b}}{\partial t^2} = 0.$$

L'époque la plus probable à laquelle le cours atteindra la limite $-b$ s'obtiendra en résolvant l'équation

$$\frac{\partial^2 P_{b,c}}{\partial t^2} = 0.$$

L'époque la plus probable à laquelle le cours sortira de l'intervalle (c, b) est donnée par l'égalité

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(P_{c,b} + P_{b,c}) = 0.$$

Supposons que $c = k\sqrt{t_1}$, $b = 2c = 2k\sqrt{t_1}$. En résolvant les équations ci-dessus, on voit que l'époque la plus probable à laquelle le cours atteindra la limite c est environ le sixième de t_1. L'époque la plus probable à laquelle le cours b sera dépassé est $\frac{2}{3}t_1$. Enfin, l'époque la plus probable à laquelle l'intervalle (c, b) sera dépassé est égale aux deux cinquièmes de t_1.

126. L'*époque probable* à laquelle le cours sort de l'intervalle c, $-b$ s'obtient par la résolution de l'équation

$$P_{c,b} + P_{b,c} = \frac{1}{2}.$$

Supposons d'abord que $b = c$, on devra avoir

$$t = \frac{c^2}{8,24\,k^2}.$$

Si, par exemple, $c = a = k\sqrt{t_1}$, on aura $t = \frac{t_1}{8,24}$; si $c = 2a = 2k\sqrt{t_1}$, on aura $t = \frac{t_1}{2,06}$.

Supposons maintenant que $b = 2c$, l'époque probable correspond à

$$t = \frac{c^2}{4,6\,k^2} = \frac{bc}{9,2\,k^2}.$$

Si, par exemple, $c = a = k\sqrt{t_1}$, $b = 2k\sqrt{t_1}$, on aura

$$t = \frac{t_1}{4,6}.$$

127. On a vu (nº 96) que le nombre moyen de parties jouées à un jeu équitable était donné par la formule $\frac{m.n}{\alpha.\beta}$; m et n étant les fortunes des joueurs; α, β étant les mises.

La spéculation est assimilable à un jeu, le temps t est égal au nombre de parties multiplié par $8\pi k^2$, et les quantités m et n ayant respectivement pour valeur $c\sqrt{2\pi}$ et $b\sqrt{2\pi}$ (¹).

Si l'on désigne par t l'*époque moyenne* à laquelle le cours sortira de l'intervalle $(c, -b)$, on aura

$$t = \frac{cb}{4k^2}.$$

Si $c = b = a = k\sqrt{t_1}$, on a $t = \frac{t_1}{4}$, lorsque $c = b = 2a$, t est égal à t_1; enfin, en supposant que $c = a$ et que $b = 2a$, on obtient $t = \frac{t_1}{2}$.

128. Reprenons à titre d'exemple le problème suivant :

On a acheté de la rente avec l'intention de la revendre avec le bénéfice $a = k\sqrt{t}$ ou avec la perte $2a$; on termine l'opération si, à l'époque t, la revente n'a pu avoir lieu. Quels sont les principaux résultats que fournit le calcul des probabilités sur cette opération?

La probabilité de revente avec le bénéfice a est 0,652.

La probabilité de revente avec la perte $2a$ est 0,325.

La probabilité pour que la revente n'ait pas lieu avant l'époque t est 0,023.

L'époque la plus probable de la revente avec le bénéfice a est $\frac{t}{6}$.

L'époque la plus probable de la revente avec la perte a est $\frac{2}{3}t$.

(¹) *Théorie de la spéculation* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, p. 41; 1900).

L'époque probable de la revente est $\frac{t}{4,6}$.

L'époque moyenne est $\frac{t}{2}$.

129. On peut conclure de ce qui précède que la théorie du jeu n'est pas seulement un exercice d'analyse; elle présente un grand intérêt par elle-même en nous faisant connaître une des lois les plus curieuses que la Science nous ait révélées : la loi du hasard.

TABLE

DES

VALEURS DE L'INTÉGRALE

$$\Theta(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-y^2}\,dy.$$

---

y.	Θ.	y.	Θ.	y.	Θ.
0,00.......	0,0000000	0,23.......	0,2550225	0,46.......	0,4846555
0,01.......	0,0112833	0,24.......	0,2657000	0,47.......	0,4937452
0,02.......	0,0225644	0,25.......	0,2763263	0,48.......	0,5027498
0,03.......	0,0338410	0,26.......	0,2868997	0,49.......	0,5116683
0,04.......	0,0451109	0,27.......	0,2974182	0,50.......	0,5204999
0,05.......	0,0563718	0,28.......	0,3078800	0,51.......	0,5292437
0,06.......	0,0676215	0,29.......	0,3182834	0,52.......	0,5378987
0,07.......	0,0788577	0,30.......	0,3286267	0,53.......	0,5464641
0,08.......	0,0900781	0,31.......	0,3389081	0,54.......	0,5549392
0,09.......	0,1012806	0,32.......	0,3491259	0,55.......	0,5633233
0,10.......	0,1124630	0,33.......	0,3592785	0,56.......	0,5716157
0,11.......	0,1236230	0,34.......	0,3693644	0,57.......	0,5798158
0,11.......	0,1347584	0,35.......	0,3793819	0,58.......	0,5879229
0,13.......	0,1458671	0,36.......	0,3893296	0,59.......	0,5959365
0,14.......	0,1569470	0,37.......	0,3992059	0,60.......	0,6038561
0,15.......	0,1679959	0,38.......	0,4090093	0,61.......	0,6116812
0,16.......	0,1790117	0,39.......	0,4187385	0,62.......	0,6194114
0,17.......	0,1899923	0,40.......	0,4283922	0,63.......	0,6270463
0,18.......	0,2009357	0,41.......	0,4379690	0,64.......	0,6345857
0,19.......	0,2118398	0,42.......	0,4474676	0,65.......	0,6420292
0,20.......	0,2227025	0,43.......	0,4568867	0,66.......	0,6493765
0,21.......	0,2335218	0,44.......	0,4662251	0,67.......	0,6566275
0.22.......	0,2442958	0,45.......	0,4754818	0,68.......	0,6637820

y.	θ.	y.	θ.	y.	θ.
0,69	0,6708399	1,15	0,8961238	1,61	0,9772069
0,70	0,6778010	1,16	0,8990962	1,62	0,9780381
0,71	0,6846654	1,17	0,9020004	1,63	0,9788429
0,72	0,6914330	1,18	0,9048374	1,64	0,9796218
0,73	0,6981038	1,19	0,9076083	1,65	0,9803756
0,74	0,7046780	1,20	0,9103140	1,66	0,9811049
0,75	0,7111556	1,21	0,9129555	1,67	0,9818104
0,76	0,7175367	1,22	0,9155339	1,68	0,9824928
0,77	0,7238216	1,23	0,9180501	1,69	0,9831526
0,78	0,7300104	1,24	0,9205052	1,70	0,9837904
0,79	0,7361035	1,25	0,9229001	1,71	0,9844070
0,80	0,7421010	1,26	0,9252359	1,72	0,9850028
0,81	0,7480033	1,27	0,9275136	1,73	0,9855785
0,82	0,7538108	1,28	0,9297342	1,74	0,9861346
0,83	0,7595238	1,29	0,9318987	1,75	0,9866717
0,84	0,7651427	1,30	0,9340080	1,76	0,9871903
0,85	0,7706680	1,31	0,9360632	1,77	0,9876910
0,86	0,7761002	1,32	0,9380652	1,78	0,9881742
0,87	0,7814398	1,33	0,9400150	1,79	0,9886406
0,88	0,7866873	1,34	0,9419137	1,80	0,9890905
0,89	0,7918432	1,35	0,9437622	1,81	0,9895245
0,90	0,7969082	1,36	0,9455614	1,82	0,9899431
0,91	0,8018828	1,37	0,9473124	1,83	0,9903467
0,92	0,8067677	1,38	0,9490160	1,84	0,9907359
0,93	0,8115635	1,39	0,9506733	1,85	0,9911110
0,94	0,8162710	1,40	0,9522851	1,86	0,9914725
0,95	0,8208908	1,41	0,9538524	1,87	0,9918207
0,96	0,8254236	1,42	0,9553762	1,88	0,9921562
0,97	0,8298703	1,43	0,9568573	1,89	0,9924793
0,98	0,8342315	1,44	0,9582966	1,90	0,9927904
0,99	0,8385081	1,45	0,9596950	1,91	0,9930899
1,00	0,8427008	1,46	0,9610535	1,92	0,9933782
1,01	0,8468105	1,47	0,9623729	1,93	0,9936557
1,02	0,8508380	1,48	0,9636541	1,94	0,9939229
1,03	0,8547842	1,49	0,9648979	1,95	0,9941794
1,04	0,8586499	1,50	0,9661052	1,96	0,9944263
1,05	0,8624360	1,51	0,9672768	1,97	0,9946637
1,06	0,8661435	1,52	0,9684135	1,98	0,9948920
1,07	0,8697732	1,53	0,9695162	1,99	0,9951114
1,08	0,8733261	1,54	0,9705857	2,00	0,9953223
1,09	0,8768030	1,55	0,9716227	2,01	0,9955248
1,10	0,8802050	1,56	0,9726281	2,02	0,9957195
1,11	0,8835330	1,57	0,9736026	2,03	0,9959063
1,12	0,8867879	1,58	0,9745470	2,04	0,9960858
1,13	0,8899707	1,59	0,9754620	2,05	0,9962581
1,14	0,8930823	1,60	0,9763484	2,06	0,9964235

y.	Θ.	y.	Θ.	y.	Θ.
2,07	0,9965822	2,53	0,9996537	2,99	0,9999765
2,08	0,9967344	2,54	0,9996720	3,00	0,9999779
2,09	0,9968805	2,55	0,9996893	3,01	0,9999793
2,10	0,9970205	2,56	0,9997058	3,02	0,9999805
2,11	0,9971548	2,57	0,9997215	3,03	0,9999817
2,12	0,9972836	2,58	0,9997364	3,04	0,9999829
2,13	0,9974070	2,59	0,9997505	3,05	0,9999839
2,14	0,9975253	2,60	0,9997640	3,06	0,9999849
2,15	0,9976386	2,61	0,9997767	3,07	0,9999859
2,16	0,9977472	2,62	0,9997888	3,08	0.9999867
2,17	0,9978511	2,63	0,9998003	3,09	0,9999876
2,18	0,9979505	2,64	0.9998112	3,10	0,9999884
2,19	0,9980459	2,65	0,9998215	3,11	0,9999891
2,20	0,9981372	2,66	0,9998313	3,12	0,9999898
2,21	0,9982244	2,67	0,9998406	3,13	0,9999904
2,22	0,9983079	2,68	0,9998494	3,14	0,9999910
2,23	0,9983878	2,69	0,9998578	3,15	0,9999916
2,24	0,9984642	2,70	0,9998657	3,16	0,9999921
2,25	0,9985373	2,71	0,9998732	3,17	0,9999926
2,26	0,9986071	2,72	0,9998803	3,18	0,9999931
2,27	0,9986739	2,73	0,9998870	3,19	0,9999936
2,28	0,9987377	2,74	0,9998933	3,20	0,9999940
2,29	0,9987986	2,75	0,9998994	3,21	0,9999944
2,30	0,9988568	2,76	0,9999051	3,22	0,9999947
2,31	0,9989124	2,77	0,9999105	3,23	0,9999951
2,32	0,9989655	2,78	0,9999156	3,24	0,9999954
2,33	0,9990162	2,79	0,9999204	3,25	0,9999957
2,34	0,9990646	2,80	0,9999250	3,26	0,9999960
2,35	0,9991107	2,81	0,9999293	3,27	0,9999962
2,36	0,9991548	2,82	0,9999334	3,28	0,9999965
2,37	0,9991968	2,83	0,9999372	3,29	0,9999967
2,38	0,9992369	2,84	0,9999409	3,30	0,9999969
2,39	0,9992751	2,85	0,9999443	3,31	0,9999971
2,40	0,9993115	2,86	0,9999476	3,32	0,9999973
2,41	0,9993462	2,87	0,9999507	3,33	0,9999975
2,42	0,9993793	2,88	0,9999536	3,34	0,9999977
2,43	0,9994108	2,89	0,9999563	3,35	0,9999978
2,44	0,9994408	2,90	0,9999589	3,36	0,9999980
2,45	0,9994694	2,91	0,9999613	3,37	0,9999981
2,46	0,9994966	2,92	0,9999636	3,38	0,9999982
2,47	0,9995226	2,93	0,9999658	3,39	0,9999984
2,48	0,9995472	2,94	0,9999679	3,40	0,9999985
2,49	0,9995707	2,95	0,9999698	3,41	0,9999986
2,50	0,9995930	2,96	0,9999716	3,42	0,9999987
2,51	0,9996143	2,97	0,9999733	3,43	0,9999988
2,52	0,9996345	2,98	0,9999750	3,44	0,9999989
				3,45	0,9999989