ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE COTTON

Sur quelques mouvements à plusieurs paramètres et sur la théorie des vis principales d'inertie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 17 (1900), p. 9-20

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__9_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR QUELQUES

MOUVEMENTS A PLUSIEURS PARAMÈTRES

ET SUR LA

THÉORIE DES VIS PRINCIPALES D'INERTIE,

PAR M. ÉMILE COTTON,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE TOULOUSE.

On trouvera, dans les pages suivantes : 1° la détermination des mouvements à n paramètres tels que le système des vis instantanées soit fixe par rapport au trièdre mobile; 2° la solution d'une question posée par M. Kœnigs (*Leçons de Cinématique*, p. 457) : Déterminer dans quelles conditions les vis principales d'inertie d'un corps solide sont fixes par rapport à ce corps.

1. Nous rappellerons d'abord quelques définitions.

Un *torseur* est l'ensemble d'un vecteur et d'un couple dont le plan est perpendiculaire au vecteur. Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, un torseur est bien défini par les projections $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, sur ces axes, de sa résultante générale, et par les projections $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sur ces axes, de son moment résultant par rapport à l'origine. Nous dirons que les six nombres $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sont les *coordonnées pluckériennes* du torseur.

On appelle *vis* [1] un torseur dont la résultante de translation a pour longueur l'unité. Les coordonnées pluckériennes d'une vis satisfont donc à la relation

$$\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = 1.$$

L'expression $\mathfrak{L}\mathfrak{X} + \mathfrak{M}\mathfrak{Y} + \mathfrak{N}\mathfrak{Z}$ représente le *paramètre* ou *pas* de la vis.

Tout torseur peut être considéré comme le produit d'une vis par un nombre. Il y a exception toutefois pour les torseurs dont la résultante de translation est nulle (couples), à moins que l'on ne considère des vis de paramètre infini.

On peut dire que les coordonnées pluckériennes d'un torseur sont les coordonnées pluckériennes homogènes de la vis portant ce torseur. Nous utiliserons cette représentation analytique des vis, qui est particulièrement avantageuse pour les vis de paramètre infini.

Considérons n torseurs $T_i(\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i, \mathfrak{Z}_i, \mathfrak{L}_i, \mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i)$. Supposons que les déterminants formés en prenant n colonnes dans le Tableau rectangulaire

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Z}_1 & \mathfrak{L}_1 & \mathfrak{M}_1 & \mathfrak{N}_1 \\ \mathfrak{X}_2 & \mathfrak{Y}_2 & \mathfrak{Z}_2 & \mathfrak{L}_2 & \mathfrak{M}_2 & \mathfrak{N}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{X}_n & \mathfrak{Y}_n & \mathfrak{Z}_n & \mathfrak{L}_n & \mathfrak{M}_n & \mathfrak{N}_n \end{vmatrix}$$

ne soient pas tous nuls. Nous dirons alors qu'*un torseur* T *appartient au* SYSTÈME DE TORSEURS A n TERMES [2] *défini par les torseurs* T_i, si les coordonnées pluckériennes de ce torseur sont données par des relations de la forme

$$\mathfrak{X} = \Sigma\lambda_i\mathfrak{X}_i, \qquad \mathfrak{Y} = \Sigma\lambda_i\mathfrak{Y}_i, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{N} = \Sigma\lambda_i\mathfrak{N}_i.$$

---

(1) M. Ball a montré l'utilité de la notion de vis dans la Mécanique du corps solide. On trouvera l'indication des nombreux travaux qu'il a consacrés à ce sujet dans le *Bulletin bibliographique* de Gino Loria. Une exposition complète de la théorie de Ball a été faite dans l'Ouvrage suivant : *Theoretische Mechanik Starrer Système*, par Gravelius (Berlin, G. Reimer). M. Kœnigs a exposé la théorie des vis principales d'inertie dans une Note de ses *Leçons de Cinématique*, p. 451, que nous supposons connue plus loin (n° 7).

(2) L'étude géométrique des systèmes de torseurs (ou de vis) à n termes est identique à l'étude des systèmes linéaires de complexes linéaires. *Voir*, à ce sujet, le Chapitre III du Mémoire de M. Kœnigs : *La Géométrie réglée* (*Annales de Toulouse*, 1892).

Les nombres λ_i sont les *coordonnées du torseur* T *rapporté aux n torseurs coordonnés* T_i.

On dit aussi que les vis portant les torseurs T forment un SYSTÈME DE VIS A n TERMES; la connaissance d'un système de torseurs à n termes entraîne donc la connaissance d'un système de vis à n termes, et réciproquement. Enfin, nous dirons que les λ_i sont les coordonnées homogènes de la vis portant le torseur T (par rapport aux torseurs coordonnés T_i).

2. On sait que la vitesse d'entraînement d'un point quelconque d'un corps solide en mouvement s'obtient en prenant le moment, par rapport à ce point, d'un certain torseur. On désigne habituellement par $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ les coordonnées pluckériennes de ce torseur rapporté à un trièdre invariablement lié au corps. Nous dirons que la vis qui correspond à ce torseur porte le mouvement hélicoïdal tangent.

Supposons, maintenant, le solide doué de n degrés de liberté. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$, les paramètres dont dépend sa position. Considérons un mouvement compatible avec les liaisons; les coordonnées $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$, du torseur correspondant à une position déterminée du solide en mouvement, sont données par les formules (¹)

$$p = \Sigma p_i u'_i, \qquad q = \Sigma q_i u'_i, \qquad \ldots, \qquad \zeta = \Sigma \zeta_i u'_i,$$

les u' désignant les dérivées des u par rapport au temps, les lettres p_i, q_i, r_i, ξ_i, η_i, ζ_i représentant $6n$ fonctions bien déterminées des paramètres u.

Considérons $p_i, q_i, \ldots, \zeta_i$, comme les coordonnées pluckériennes de n torseurs T_i; nous pouvons énoncer le résultat précédent sous la forme suivante :

A chaque position d'un corps solide doué de n degrés de liberté est attaché un système de vis à n termes. Tout mouvement infiniment petit du solide, à partir de la position considérée, est porté par l'une des vis du système.

Les coordonnées homogènes de cette vis, par rapport aux torseurs coordonnés T_i, sont évidemment $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$.

(¹) *Voir* KŒNIGS, *Leçons de Cinématique*, p. 225.

On voit aisément que, réciproquement, toute vis du système peut être considérée comme portant un pareil mouvement.

Nous donnerons au système précédent le nom de *système des vis instantanées*.

Nous utiliserons plus loin la forme quadratique suivante des variables u'

$$2\mathcal{H} = p\xi + q\eta + r\zeta = \Sigma_{ij}\mathcal{H}_{ij}u'_i u'_j, \tag{1}$$

donnant l'expression de l'automoment d'un torseur du système en fonction des coordonnées u' de ce torseur.

3. Les $6n$ fonctions p_i, q_i, r_i, ξ_i, η_i, ζ_i ne se réduisent pas, en général, à des constantes. Il arrive donc le plus souvent que les torseurs T_i varient par rapport au corps solide, et que le système des vis instantanées change aussi. Mais ces circonstances ne se présentent pas nécessairement, ainsi que nous allons le voir, en traitant le problème suivant :

Rechercher les mouvements à plusieurs paramètres pour lesquels le SYSTÈME *des vis instantanées est fixe par rapport au trièdre mobile.*

Supposons les conditions cherchées réalisées par un mouvement à n paramètres, et conservons les notations précédentes. Nous exprimerons que les torseurs T_i définissent un système de vis fixe par rapport au trièdre mobile $Oxyz$, en procédant de la façon suivante :

Soient α_h, β_h, γ_h, λ_h, μ_h, ν_h les coordonnées pluckériennes de n torseurs du système fixe auquel appartiennent, par hypothèse, les torseurs T_i. Les nombres α_h, β_h, ..., ν_h sont des constantes (dont le choix est, dans une certaine mesure, arbitraire). Nous supposerons seulement que les déterminants formés en prenant n colonnes dans le Tableau rectangulaire

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & \lambda_n & \mu_n & \nu_n \end{vmatrix}$$

ne sont pas tous nuls. Écrivons alors que p_i, q_i, r_i, ξ_i, η_i, ζ_i s'expriment linéairement, de la même façon, en fonction des α_h, β_h, γ_h, λ_h, μ_h, ν_h,

$$p_i = \Sigma_h \omega_{ih}\alpha_h, \qquad q_i = \Sigma_h \omega_{ih}\beta_h, \qquad \ldots, \qquad \zeta_i = \Sigma_h \omega_{ih}\nu_h.$$

Les n^2 coefficients ω_{ih} de ces relations linéaires sont des fonctions des paramètres u, fonctions que nous chercherons à déterminer. Une fois connues les expressions de p_i, q_i, ..., ζ_i, le mouvement est facile à trouver [1].

Considérons alors un mouvement compatible avec les liaisons. Les projections v_x, v_y, v_z de la vitesse d'entraînement d'un point x, y, z, invariablement lié au trièdre mobile $Oxyz$, sont données par les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} v_x\,dt = \Sigma_h(\lambda_h + z\beta_h - y\gamma_h)\,l_h(du), \\ v_y\,dt = \Sigma_h(\mu_h + x\gamma_h - z\alpha_h)\,l_h(du), \\ v_z\,dt = \Sigma_h(\nu_h + y\alpha_h - x\beta_h)\,l_h(du), \end{cases}$$

où dt désigne la différentielle du temps t, et où les expressions $l_h(du)$ sont n expressions de Pfaff

$$l_h(du) = \Sigma_i\omega_{ih}\,du_i.$$

Ces expressions sont linéairement indépendantes, si le mouvement est bien à n paramètres.

4. La condition nécessaire et suffisante pour que les formules (2) correspondent au mouvement d'un solide doué de n degrés de liberté est, comme on sait [1], que le système d'équations aux différentielles totales

$$(3)\qquad \begin{cases} dx - \Sigma_h(\lambda_h + z\beta_h - y\gamma_h)\,l_h(du) = 0, \\ dy - \Sigma_h(\mu_h + x\gamma_h - z\alpha_h)\,l_h(du) = 0, \\ dz - \Sigma_h(\nu_h + y\alpha_h - x\beta_h)\,l_h(du) = 0 \end{cases}$$

soit *complètement intégrable*. Les conditions d'intégrabilité vont nous indiquer les choix possibles pour les constantes α_h, β_h, γ_h, λ_h, μ_h, ν_h et les expressions de Pfaff $l_h(du)$.

Pour écrire ces conditions, nous remplacerons le système (3) par un système d'équations aux dérivées partielles équivalent. A cet effet, nous considérerons n symboles de transformations infinitésimales $A_i f$ *associés* [2] aux expressions de Pfaff $l_i(du)$, de telle façon que f dési-

---

[1] *Voir* Koenigs, *Leçons de Cinématique*, p. 226.

[2] J'ai montré, dans ma thèse (*Annales de Toulouse*, 2e série, t. I), l'utilité d'une pareille association, appliquée à d'autres problèmes.

gnant une fonction quelconque des variables u, on ait l'identité

$$(4)\qquad df = \Sigma_i A_i f\, l_i(du).$$

Remarquons que les coefficients des dérivées de f dans les $A_i f$ sont fonctions des seules variables u_k.

Ceci posé, soit $F(x, y, z, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une fonction des variables x, y, z, u_k qui se réduise à une constante, si l'on y remplace x, y, z par les intégrales du système (3). Remplaçons, dans la différentielle

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \Sigma_i \frac{\partial F}{\partial u_i}du_i,$$

dx, dy, dz par leurs valeurs tirées du système (3) et $\Sigma_i \frac{\partial F}{\partial u_i} du_i$ par $\Sigma_i A_i F\, l_i(du)$. Il vient

$$dF = \Sigma_i \left[(\lambda_i + \beta_i z - \gamma_i y)\frac{\partial F}{\partial x} + (\mu_i + \gamma_i x - \alpha_i z)\frac{\partial F}{\partial y} + (\nu_i + \alpha_i y - \beta_i x)\frac{\partial F}{\partial z} + A_i F \right] l_i(du).$$

Comme dF doit être nul, en vertu des substitutions faites, et que les $l_i(du)$ sont formes linéaires indépendantes des différentielles du_k, ceci montre que F doit vérifier le système de n équations aux dérivées partielles

$$(5)\qquad L_i F = \mathfrak{L}_i F + A_i F = 0,$$

où l'on pose

$$\mathfrak{L}_i F = (\lambda_i + \beta_i z - \gamma_i y)\frac{\partial F}{\partial x} + (\mu_i + \gamma_i x - \alpha_i z)\frac{\partial F}{\partial y} + (\nu_i + \alpha_i y - \beta_i x)\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Le système (3) et le système (5) sont équivalents.

5. Puisque le système (3) doit être complètement intégrable, le système (5) doit être un *système complet*. Or, il résulte de la forme des $L_i F$ que l'on a identiquement pour les parenthèses $(L_i L_k)$

$$(6)\qquad (L_i L_k) = (\mathfrak{L}_i \mathfrak{L}_k) + (A_i A_k).$$

Pour que (5) soit un système complet, il faut que l'on puisse déterminer n^3 expressions c_{iks} donnant lieu aux identités

$$(7)\qquad (L_i L_k) = \Sigma_s c_{iks} L_s F.$$

Remarquons que, si l'on prend pour F une fonction des x, y, z seuls, puis une fonction des u seuls, les identités (6) et (7) donnent les suivantes

$$(\xi_i\xi_k) = \Sigma_s c_{iks}\xi_s F, \tag{8}$$

$$(\Lambda_i\Lambda_k) = \Sigma_s c_{iks}\Lambda_s F, \tag{9}$$

équivalentes, dans leur ensemble, aux identités (7).

Les identités (9) et le fait que les $\Lambda_i F$ sont formes linéaires indépendantes des dérivées de F montrent que les c_{iks} ne peuvent dépendre que des variables u. Si l'on remarque maintenant que, dans le premier membre des identités (8), le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial x}$ ne dépend pas des variables u_j, on obtient sans peine les identités

$$\Sigma_s(\lambda_s + \beta_s z - \gamma_s y)\frac{\partial c_{iks}}{\partial u_j} = 0.$$

Les coefficients de $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ donnent des identités analogues, et l'on en conclut

$$\Sigma_s\lambda_s\frac{\partial c_{iks}}{\partial u_j} = \Sigma_s\mu_s\frac{\partial c_{iks}}{\partial u_j} = \ldots = \Sigma_s\gamma_s\frac{\partial c_{iks}}{\partial u_j} = 0.$$

En vertu de l'hypothèse faite au n° 3, sur le Tableau formé avec les lettres α_h, β_h, ..., ν_h, ces dernières identités montrent que l'on a

$$\frac{\partial c_{iks}}{\partial u_j} = 0,$$

quels que soient i, j, k, s. Par suite :

Les lettres c_{iks} représentent des constantes.

Observons maintenant que les $\xi_i F$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des transformations infinitésimales $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $y\frac{\partial F}{\partial z} - z\frac{\partial F}{\partial y}$, ..., du groupe des mouvements. Appliquons alors une proposition fondamentale de la théorie des groupes, nous interprétons de la façon suivante les identités (8) :

Les expressions $\xi_i F$ sont les symboles des transformations infinitésimales d'un sous-groupe du groupe des mouvements.

D'une façon analogue, nous pouvons dire, en vertu des identités (9) et en tenant compte de ce que les $A_i F$ ne sont liés par aucune relation linéaire :

Les expressions $A_i F$ *sont les symboles des transformations infinitésimales d'un groupe simplement transitif ayant même structure que le sous-groupe précédent.* (On peut considérer ce dernier groupe comme le groupe des paramètres du précédent.)

6. Si les conditions précédentes sont satisfaites, le système (5) est un système complet. Mais il appartient à un type étudié par M. Lie [1], et les résultats obtenus par ce géomètre nous donnent la solution du problème posé. Cette solution est la suivante :

Les mouvements à n paramètres, pour lesquels le système des vis instantanées est fixe par rapport au trièdre mobile, sont les sous-groupes du groupe des mouvements.

Ces sous-groupes ont été déterminés pour la première fois par M. Jordan [2]. Limitons-nous à ceux qui sont réels; nous les désignerons de la façon suivante :

a. Groupe des mouvements.
b. Groupe des rotations autour d'un point.
Groupes des translations :
c. Quelconques.
d. Parallèles à un plan.
e. Parallèles à une droite.
f. Groupe laissant invariable une direction de droites du système mobile (quatre paramètres).
g. Mouvement à deux paramètres laissant fixe un axe du système mobile (mouvement de verrou).
h. Groupe à trois paramètres formé par les mouvements autour d'une vis que l'on peut déplacer par une translation perpendiculaire

---

(1) *Voir* LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*, I Abs., p. 407.
(2) *Annali di Mathematica*, 1868. *Voir* aussi LIE-ENGEL, *Tranformationsgruppen*, III Abs., p. 385.

à son axe. (Cas particulier : un plan du système mobile glisse sur un plan fixe.)

i. Groupe à un paramètre du mouvement hélicoïdal.

On déterminera, sans peine, les systèmes de vis instantanées correspondant à ces divers mouvements, et l'on vérifiera la proposition suivante :

Si le système des vis instantanées est fixe dans le corps, il est aussi fixe dans l'espace.

7. Passons maintenant à la question posée par M. Kœnigs.

On appelle VIS PRINCIPALE D'INERTIE d'un corps solide une vis telle que si l'on imprime brusquement au corps en repos un dyname porté par cette vis, le mouvement hélicoïdal tangent est, au départ, porté par cette même vis.

Les vis principales d'inertie dépendent de la distribution des masses dans le corps solide, et de la nature géométrique des liaisons imposées au corps. Nous supposons ces liaisons sans frottement.

Rappelons maintenant comment on détermine les vis principales. La force vive $2T$ du solide est une forme quadratique des variables u'_k coordonnées du torseur instantané. Considérons, en outre, la forme quadratique $\mathcal{K}$ des mêmes variables, définie au n° 2. Égalons à zéro le discriminant de $\lambda T + \mathcal{K}$, nous obtenons une équation en λ, dont le degré est n (nombre des variables u'_k); car T est une forme définie positive.

Soit λ_i l'une des racines de cette équation. Égalons à zéro les dérivées (par rapport aux u') de $\lambda_i T + \mathcal{K}$. Tout système de solutions : $u_1, u'_2, \ldots, u'_n$ des équations linéaires et homogènes ainsi obtenues donne les coordonnées homogènes (n° 2) d'une vis principale d'inertie.

Nous renverrons, pour la démonstration, à l'Ouvrage cité de M. Kœnigs. Toutefois nous observerons que le raisonnement de M. Kœnigs suppose essentiellement la racine λ_i différente de zéro. Nous conviendrons alors d'appeler vis principale d'inertie toute vis obtenue par le calcul précédent, en désignant par vis principales *singulières* celles qui correspondent aux racines nulles de l'équation en λ. Les coordonnées homogènes d'une vis principale singulière annulent évidemment la forme $\mathcal{H}$; d'où il résulte que cette vis a un paramètre nul ou infini. En d'autres termes, le mouvement correspondant se réduit à une *translation* ou à une *rotation*. A une vis principale non singulière correspond toujours un mouvement hélicoïdal proprement dit.

Observons, en passant, que si les liaisons sont de nature telle que $\mathcal{H}$ soit identiquement nulle, toute vis instantanée est vis principale singulière.

Avec la convention précédente, la recherche des vis principales singulières revient exactement à la décomposition simultanée en carrés des deux formes T et $\mathcal{H}$. L'une de ces formes étant définie positive, on voit qu'*un corps solide doué de n degrés de liberté possède au moins n vis principales d'inertie, et que, s'il en existe plus de n, il en existe une infinité.*

Les valeurs de $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ correspondant aux diverses vis principales ne peuvent satisfaire simultanément à aucune relation linéaire homogène identique. Donc, *les vis principales d'inertie peuvent servir à définir le système à n termes des vis instantanées.*

8. La remarque précédente montre que, si les vis principales sont fixes par rapport au solide, il en est de même du système des vis instantanées. Donc :

Pour que les vis principales d'inertie soient fixes par rapport au corps, il faut que le mouvement à n paramètres soit un sous-groupe du groupe des mouvements.

La condition précédente est aussi *suffisante*, ainsi que le montre l'examen suivant des divers cas possibles.

a. Dans le cas du solide libre (1), on a, en désignant par M la masse du corps, par a, b, c les rayons de gyration correspondant aux axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité, par p, q, r, ξ, η, ζ les coordonnées pluckériennes d'un torseur quel-

(1) Ce résultat est indiqué dans l'Ouvrage cité de Gravelius, p. 175.

conque rapporté aux axes principaux précédents

$$2T = M(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + a^2p^2 + b^2q^2 = c^2r^2),$$
$$2\mathcal{H} = p\xi + q\eta + r\zeta.$$

On voit alors, de suite, que si a, b, c sont différents il existe six vis principales d'inertie, que l'on peut ranger par couples. Deux vis d'un même couple sont portées par l'un des axes principaux précédents; leur pas commun est le rayon de gyration correspondant à cet axe; leurs sens sont opposés. Si l'ellipsoïde d'inertie est de révolution, ou s'il se réduit à une sphère, le solide a une infinité de vis principales.

b. Dans le cas d'un *solide ayant un point fixe,* la forme $\mathcal{H}$ est identiquement nulle. Toute vis de paramètre nul, dont l'axe passe par le point fixe, est vis principale singulière.

c. d, e. La forme $\mathcal{H}$ s'annule identiquement dans le cas où *les mouvements possibles sont des translations.* Chaque direction de translation possible donne la direction de l'axe d'un couple représentant une vis principale singulière de paramètre infini.

f. Étudions maintenant le *mouvement à quatre paramètres laissant invariable une direction de droites.* Prenons pour trièdre $Oxyz$ lié au corps un trièdre trirectangle dont l'axe Oz soit la parallèle à la direction fixe, menée par le centre de gravité O. Désignons par ξ, η, ζ les projections sur les axes de la vitesse de translation, par v la vitesse angulaire de rotation, par M la masse du corps, par c le rayon de gyration correspondant à Oz. Il vient alors

$$2T = M(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + c^2v^2), \qquad 2\mathcal{H} = v\zeta.$$

La décomposition simultanée en carrés des formes précédentes donne deux vis principales proprement dites, de coordonnées Pluckériennes o, o, 1, o, o, $\pm c$ (c'est-à-dire deux vis de sens opposé, ayant toutes deux pour axe la parallèle à la direction fixe, menée par le centre de gravité, pour pas le rayon de gyration correspondant). Elle donne aussi une infinité de vis principales singulières (o, o, o, ξ, η, o), représentées par les couples correspondant aux translations perpendiculaires à la direction fixe.

Les calculs relatifs aux cas restants ne présentent aucune difficulté. On trouve ainsi :

g. Dans le cas du *mouvement de verrou,* deux vis principales proprement dites, de sens opposé, ayant pour axe l'axe du verrou, pour pas le rayon de gyration correspondant.

h. Dans le cas du *mouvement hélicoïdal combiné à des translations perpendiculaires à son axe :* une vis principale proprement dite (la vis portant le mouvement hélicoïdal, menée par le centre de gravité), et une infinité de vis principales singulières, représentées par les couples correspondant aux translations. Comme cas particulier remarquable, on a le cas d'*un corps dont un plan glisse sur un plan fixe.* Alors $\mathcal{H}$ est identiquement nulle, et les vis de paramètre nul dont l'axe est perpendiculaire au plan fixe sont les seules vis principales. Elles sont toutes singulières.

i. Il est enfin bien évident que la vis portant le mouvement, dans le cas du *mouvement hélicoïdal,* est vis principale.