W. KAPTEYN

Sur quelques cas particuliers de l'équation différentielle de Monge

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 17 (1900), p. 245-282

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__245_0>

SUR QUELQUES CAS PARTICULIERS
DE
L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE MONGE,

PAR M. W. KAPTEYN.

1. L'équation de Monge s'écrit

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0,$$

où H, K, L, M sont des fonctions de x, y, z, p, q et p, q, r, s, t représentent les dérivées partielles du premier et du second ordre d'une fonction z de deux variables indépendantes x et y. Cette équation ne possède pas toujours deux intégrales intermédiaires; il faut pour cela que certaines relations soient satisfaites. Je me propose, dans les pages suivantes, d'abord de déterminer ces relations pour les deux cas particuliers où l'équation de Monge se réduit à

$$2Ks + Lt + M = 0$$

ou à

$$Hr + Lt = 0.$$

De ces relations je déduirai ensuite la forme la plus générale de ces équations et les intégrales intermédiaires elles-mêmes.

En réduisant un des coefficients à l'unité, nous écrirons les deux cas dont nous parlerons

$$s + \lambda t + \mu = 0,$$
$$r - \lambda^2 t = 0.$$

Premier cas : $s + \lambda t + \mu = 0$.

2. Les deux systèmes de caractéristiques, toujours distincts dans ce cas, s'écrivent

$$\begin{aligned} dz - p\,dx - q\,dy &= 0, & dz - p\,dx - q\,dy &= 0,\\ dx &= 0, & dy - \lambda\,dx &= 0,\\ \mu\,dy + dp + \lambda\,dq &= 0, & \mu\,dx + dq &= 0. \end{aligned}$$

Les combinaisons intégrables de ces systèmes correspondent, comme on sait, avec les intégrales communes des deux systèmes linéaires

$$\begin{aligned} A(V) &= \frac{\partial V}{\partial q} - \lambda\frac{\partial V}{\partial p} = 0,\\ B(V) &= \mu\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial V}{\partial y} - q\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_1(V) &= \frac{\partial V}{\partial p} = 0,\\ B_1(V) &= \mu\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial x} - \lambda\frac{\partial V}{\partial y} - (p + \lambda q)\frac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que l'équation donnée possède deux intégrales intermédiaires. Dans ce cas il faut et il suffit que chacun des deux systèmes de caractéristiques admette deux combinaisons intégrables, ou que chacun des systèmes linéaires équivalents admette deux intégrales communes. Or, on sait que toute intégrale commune du système $A(V) = 0$, $B(V) = 0$, satisfait aussi aux équations

$$\begin{aligned} C(V) &= AB(V) - BA(V) = 0,\\ E(V) &= AC(V) - CA(V) = 0,\\ F(V) &= BC(V) - CB(V) = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Le système $A(V) = 0$, $B(V) = 0$, $C(V) = 0$, $E(V) = 0$, $F(V) = 0 \ldots$ se réduisant à trois équations indépendantes, on aura, d'après un théorème connu, deux intégrales distinctes.

Il faut et il suffit donc que le système $A(V) = 0$, $B(V) = 0$,

$C(V) = 0$ soit un système complet et que, par conséquent, les équations $E(V) = 0$, $F(V) = 0$, ... soient linéairement dépendantes des trois premières. Cette dernière condition sera évidemment remplie quand les deux équations $E(V) = 0$, $F(V) = 0$ dépendent linéairement des trois premières. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de deux intégrales intermédiaires peuvent donc s'écrire

$$E(V) = h\,A(V) + k\,B(V) + l\,C(V),$$
$$F(V) = h'A(V) + k'B(V) + l'C(V)$$

et

$$E_1(V) = h_1\,A_1(V) + k_1\,B_1(V) + l_1\,C_1(V),$$
$$F_1(V) = h'_1\,A_1(V) + k'_1\,B_1(V) + l'_1\,C_1(V),$$

en représentant par h, k, l, h', k', l', h_1, k_1, l_1, h'_1, k'_1, l'_1 des fonctions inconnues de x, y, z, p, q et par $C_1(V)$, $E_1(V)$, $F_1(V)$ les formes analogues à $C(V)$, $E(V)$, $F(V)$ correspondant au second système linéaire.

Du premier système linéaire on déduira aisément

$$C(V) = [A(\mu) + B(\lambda)]\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$
$$E(V) = [AA(\mu) + AB(\lambda) + C(\lambda)]\frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$
$$F(V) = [BA(\mu) + BB(\lambda) - C(\mu)]\frac{\partial V}{\partial p} = 0;$$

par suite

$$h = k = l = 0 \qquad \text{et} \qquad AA(\mu) + AB(\lambda) + C(\lambda) = 0,$$
$$h' = k' = l' = 0 \qquad \text{et} \qquad BA(\mu) + BB(\lambda) - C(\mu) = 0.$$

De même, le second système linéaire donne

$$C_1(V) = A_1(\mu)\frac{\partial V}{\partial q} - A_1(\lambda)\frac{\partial V}{\partial y} - A_1(p + \lambda q)\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$
$$E_1(V) = A_1A_1(\mu)\frac{\partial V}{\partial q} - A_1A_1(\lambda)\frac{\partial V}{\partial y} - A_1A_1(p + \lambda q)\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$
$$F_1(V) = [B_1A_1(\mu) - C_1(\mu)]\frac{\partial V}{\partial q} - [B_1A_1(\lambda) - C_1(\lambda)]\frac{\partial V}{\partial y}$$
$$- [B_1A_1(p + \lambda q) - C_1(p + \lambda q)]\frac{\partial V}{\partial z} = 0;$$

d'où

$$h_1 = k_1 = 0, \qquad l_1 = \frac{A_1 A_1(\lambda)}{A_1(\lambda)} = \frac{A_1 A_1(p+\lambda q)}{A_1(p+\lambda q)} = \frac{A_1 A_1(\mu)}{A_1(\mu)},$$

$$h'_1 = k'_1 = 0, \qquad l'_1 = \frac{B_1 A_1(\lambda) - C_1(\lambda)}{A_1(\lambda)}$$
$$= \frac{B_1 A_1(p+\lambda q) - C_1(p+\lambda q)}{A_1(p+\lambda q)} = \frac{B_1 A_1(\mu) - C_1(\mu)}{A_1(\mu)}.$$

Les deux fonctions inconnues λ et μ doivent donc satisfaire aux six relations suivantes, qu'on obtient après une légère réduction,

$$AA(\mu) + AB(\lambda) + C(\lambda) = 0,$$
$$BA(\mu) + BB(\lambda) - C(\mu) = 0,$$

$$A_1 A_1(\lambda) = 0,$$
$$A_1 A_1(\mu) = 0,$$

$$A_1(\mu)[\mu A_1(\lambda) - \lambda A_1(\mu)] = B_1 A_1(\mu) - C_1(\mu),$$
$$A_1(\lambda)[\mu A_1(\lambda) - \lambda A_1(\mu)] = B_1 A_1(\lambda) - C_1(\lambda).$$

3. Pour déterminer la solution la plus générale de ces six équations différentielles, je considère d'abord la troisième et la quatrième, ou

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} = 0.$$

De ces équations on conclut immédiatement

$$\lambda = p\,\varphi(x, y, z, q) + \psi(x, y, z, q),$$
$$\mu = p\,\theta(x, y, z, q) + \omega(x, y, z, q),$$

φ, ψ, θ, ω étant des fonctions arbitraires de x, y, z, q. En substituant ces valeurs dans les autres équations différentielles, celles-ci se réduiront à la forme

$$Mp + N = 0,$$

M et N étant des fonctions de x, y, z, q. Il faut donc qu'on ait séparément $M = 0$ et $N = 0$. Or, dans les deux dernières, le coefficient M se réduit identiquement à zéro. On obtiendra, par suite, six équations différentielles entre les quatre fonctions inconnues φ, ψ, θ, ω. Après quelques réductions, ces six équations prendront les formes suivantes :

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial q^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial q}-q\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial q}-2\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial q}-q\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial q}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}+2\frac{\partial}{\partial q}(\theta\psi-\omega\varphi),$$

$$(3)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}+q^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial q}-q\frac{\partial^2\theta}{\partial z\,\partial q}+\frac{\partial\theta}{\partial z}=0,$$

$$(4)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial q}+q\frac{\partial^2\omega}{\partial z\,\partial q}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-2q\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z}-q^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=2\left(\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}\right)(\theta\psi-\omega\varphi)+\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

$$(5)\qquad \varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+q\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial z}-\theta\frac{\partial\psi}{\partial q}-\varphi(\omega\varphi-\theta\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\psi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)-\omega\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$

$$(6)\qquad \varphi\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}+q\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)+\frac{\partial\omega}{\partial z}-\theta\frac{\partial\omega}{\partial q}-\theta(\omega\varphi-\theta\psi)=\frac{\partial\theta}{\partial x}+\psi\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}+q\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)-\omega\frac{\partial\theta}{\partial q}.$$

4. Pour intégrer ce système, posons

$$\mathrm{H}=\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}$$

et remarquons que

$$\mathrm{H}\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\mathrm{H}(u)-\frac{\partial u}{\partial z},$$

u étant une fonction quelconque de x, y, z, q.

En introduisant cette notation, les équations (1) et (3) s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial\theta}{\partial q}-\mathrm{H}(\varphi)\right]=\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\mathrm{H}\left[\frac{\partial\theta}{\partial q}-\mathrm{H}(\varphi)\right]=\frac{\partial\theta}{\partial z}.$$

Si donc on pose

$$\varphi=\frac{\partial\tau}{\partial q},$$

on aura

$$\frac{\partial\theta}{\partial q}-\mathrm{H}(\varphi)=\frac{\partial\tau}{\partial z},$$

d'après la première de ces équations. Avec cette valeur la seconde équation s'écrit

$$\mathrm{H}\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)=\frac{\partial\theta}{\partial z},$$

d'où

$$\theta = \mathrm{H}(\tau) + f(x, y, q),$$

f étant une fonction arbitraire de x, y et q.

En introduisant cette valeur dans l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial q} - \mathrm{H}(\varphi) = \frac{\partial \tau}{\partial z},$$

on obtient

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial \tau}{\partial z};$$

on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

et par suite

$$\theta = \mathrm{H}(\tau) + f(x, y),$$

ou, en posant $f(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + q\frac{\partial f_1}{\partial z} = \mathrm{H}(f_1)$,

$$\theta = \mathrm{H}(\tau + f_1) \qquad \text{et} \qquad \varphi = \frac{\partial \tau}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(\tau + f_1).$$

Si maintenant on écrit

$$\tau + f_1 = \log k,$$

on voit qu'on satisfera de la manière la plus générale aux équations (1) et (3), k étant une fonction arbitraire de x, y, z, q, en choisissant

$$\varphi = \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial q}, \qquad \theta = \frac{1}{k}\mathrm{H}(k).$$

5. Avec ces valeurs les équations (2) et (4) se réduiront aisément à

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial \omega}{\partial q} - \mathrm{H}(\psi) - \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x} + 2(\omega\varphi + \theta\psi)\right] = 0,$$
$$\mathrm{H}\left[\frac{\partial \omega}{\partial q} - \mathrm{H}(\psi) - \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x} + 2(\omega\varphi - \theta\psi)\right] = 0.$$

La première donne

$$\frac{\partial \omega}{\partial q} - \mathrm{H}(\psi) - \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x} + 2(\omega\varphi - \theta\psi) = \mathrm{F}(x, y, z),$$

et la seconde montre que la fonction F doit satisfaire à la condition

$$\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

On aura donc séparément

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

et par conséquent

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial \omega}{\partial q} - H(\psi) - \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x} + 2(\omega\varphi - \theta\psi) = g(x),$$

$g(x)$ étant une fonction de la seule variable x.

6. Pour réduire les équations (5) et (6)

$$\varphi H(\psi) + \frac{\partial \psi}{\partial z} - \theta\frac{\partial \psi}{\partial q} - \varphi(\omega\varphi - \theta\psi) - \psi H(\varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0,$$

$$\varphi H(\omega) + \frac{\partial \omega}{\partial z} - \theta\frac{\partial \omega}{\partial q} - \theta(\omega\varphi - \theta\psi) - \psi H(\theta) - \frac{\partial \theta}{\partial x} + \omega\frac{\partial \theta}{\partial q} = 0,$$

j'introduis dans la première

$$H(\psi) = \frac{\partial \omega}{\partial q} - \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x} + 2(\omega\varphi - \theta\psi) - g,$$

d'après l'équation (A) et

$$H(\varphi) = \frac{\partial \theta}{\partial q} - \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial z}.$$

Avec ces valeurs, la première équation se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial q}(\omega\varphi - \theta\psi) + \varphi(\omega\varphi - \theta\psi) = -\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\psi}{k}\frac{\partial k}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varphi}{k}\frac{\partial k}{\partial x} + g\varphi,$$

ou, en multipliant avec k et en introduisant $\varphi = \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial q}$, à

$$\frac{\partial}{\partial q}[k(\omega\varphi - \theta\psi)] = -\frac{\partial}{\partial z}(k\psi) + \frac{\partial}{\partial x}(k\varphi) + gk\varphi.$$

Or, comme on a

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\varphi) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right) \quad \text{et} \quad gk\varphi = \frac{\partial}{\partial q}(gk),$$

cette équation se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[k(\omega\varphi-\theta\psi)-\frac{\partial k}{\partial x}-gk\right]=-\frac{\partial}{\partial z}(k\psi),$$

ou, en faisant attention à l'équation (A), à

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial}{\partial q}(k\omega)-\mathrm{H}(k\psi)\right]=\frac{\partial}{\partial z}(k\psi).$$

De la même manière, on réduira la seconde équation à la forme

$$\mathrm{H}\left[\frac{\partial}{\partial q}(k\omega)-\mathrm{H}(k\psi)\right]=\frac{\partial}{\partial z}(k\omega).$$

En comparant les deux dernières équations avec les équations du n° 4, on conclut qu'on satisfera à ces équations, de la manière la plus générale, en choisissant

$$k\psi=\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial q}\qquad\text{et}\qquad k\omega=\frac{1}{\sigma}\mathrm{H}(\sigma),$$

σ étant une fonction arbitraire de x, y, z, q.

7. En résumant, on voit qu'on aura

$$\varphi=\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial q},\qquad \theta=\frac{1}{k}\mathrm{H}(k),$$
$$\psi=\frac{1}{k\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial q},\qquad \omega=\frac{1}{k\sigma}\mathrm{H}(\sigma),$$

et il est évident que les fonctions k et σ ne sont pas entièrement indépendantes, parce qu'elles doivent encore satisfaire à la condition (A), que nous écrivons

$$k(\omega\varphi-\theta\psi)-\frac{\partial k}{\partial x}-gk=\mathrm{H}(k\psi)-\frac{\partial}{\partial q}(k\omega).$$

En introduisant dans cette équation les valeurs de $k\psi$ et de $k\omega$, on obtiendra

$$\varphi\mathrm{H}(\sigma)+\frac{\partial\sigma}{\partial z}-\theta\frac{\partial\sigma}{\partial q}=\sigma\left(\frac{\partial k}{\partial x}+gk\right),$$

ou, en posant $g=\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x}$,

$$\varphi\mathrm{H}(\sigma)+\frac{\partial\sigma}{\partial z}-\theta\frac{\partial\sigma}{\partial q}=\frac{\sigma}{h}\frac{\partial}{\partial x}(hk).$$

Soient encore

$$k = \frac{\rho}{h}, \qquad \sigma = e^{\frac{\upsilon}{h}};$$

alors la dernière équation prendra la forme

$$\varphi \mathrm{H}(\upsilon) + \frac{\partial \upsilon}{\partial z} - \theta \frac{\partial \upsilon}{\partial q} = \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

et les quatre fonctions se réduiront à

$$\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial q}, \qquad \theta = \frac{1}{\rho}\mathrm{H}(\rho),$$
$$\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \upsilon}{\partial q}, \qquad \omega = \frac{1}{\rho}\mathrm{H}(\upsilon).$$

Il faut donc, pour que l'équation différentielle de la forme

$$s + \lambda t + \mu = 0$$

soit la plus générale, admettant deux intégrales intermédiaires, qu'on ait

$$\lambda = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial q}(p\rho + \upsilon), \tag{7}$$

$$\mu = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{H}\,(p\rho + \upsilon), \tag{8}$$

où ρ représente une fonction arbitraire de x, y, z, q, et υ la solution la plus générale de l'équation linéaire

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial q}\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \left(1 + \frac{q}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial q}\right)\frac{\partial \upsilon}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial y} + q\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\frac{\partial \upsilon}{\partial q} = \frac{\partial \rho}{\partial x}. \tag{9}$$

8. Pour déterminer à présent les intégrales intermédiaires, je remarque qu'en introduisant les valeurs (7) et (8) dans l'équation différentielle, celle-ci se réduit à

$$\rho s + \frac{\partial}{\partial q}(p\rho + \upsilon)t + \mathrm{H}(p\rho + \upsilon) = 0,$$

ou à

$$\frac{d}{dy}(p\rho + \upsilon) = 0.$$

Une première intégrale intermédiaire sera donc

$$p\rho + \upsilon = f(x),$$

ce qui aurait encore lieu si υ était parfaitement arbitraire.

Quant à la seconde intégrale intermédiaire, elle se déduira des deux intégrales communes du système complet

$$\begin{aligned}
&A_1(V) = \frac{\partial V}{\partial p} = 0,\\
&B_1(V) = \mu\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial x} - \lambda\frac{\partial V}{\partial y} - (p+\lambda q)\frac{\partial V}{\partial z} = 0,\\
&C_1(V) = A_1(\mu)\frac{\partial V}{\partial q} - A_1(\lambda)\frac{\partial V}{\partial y} - A_1(p+\lambda q)\frac{\partial V}{\partial z} = 0,
\end{aligned}$$

où

$$A_1(\mu) = \frac{1}{\rho}H(\rho), \qquad A_1(\lambda) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q}, \qquad A_1(p+\lambda q) = 1 + \frac{q}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q}.$$

D'après la première de ces trois équations, on aura

$$V = f(x, y, z, q).$$

Les deux intégrales communes de

$$B_1(V) = \frac{1}{\rho}H(p\rho+\upsilon)\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial q}(p\rho+\upsilon)\frac{\partial f}{\partial y} - \left[p + \frac{q}{\rho}\frac{\partial}{\partial q}(p\rho+\upsilon)\right]\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$C_1(V) = \frac{1}{\rho}H(\rho)\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y} - \left(1 + \frac{q}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

ou des deux équations équivalentes

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}H(\upsilon)\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\upsilon}{\partial q}H(f) = 0,\\
&\frac{1}{\rho}H(\rho)\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q}H(f) = 0,
\end{aligned}\right.$$

donneront la seconde intégrale intermédiaire.

Appliquons maintenant ces considérations générales aux deux cas spéciaux où l'équation différentielle se réduit à $s + \mu = 0$ ou à $s + \lambda t = 0$.

9. Quand l'équation différentielle se réduit à

$$s + \mu = 0,$$

on aura

$$\lambda = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial q}(p\rho + \upsilon) = 0.$$

Il faut donc satisfaire aux conditions

$$\frac{\partial \rho}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial \upsilon}{\partial q} = 0,$$

et à l'équation différentielle (9) qui prend la forme simple

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Ces conditions seront remplies, de la manière la plus générale, en choisissant

$$\rho = \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \qquad \upsilon = \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

σ étant une fonction arbitraire de x, y, z.

Avec ces valeurs de ρ et υ, on obtient aisément

$$\mu = \frac{1}{\frac{\partial \sigma}{\partial z}} \mathrm{H}\left(p \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\right).$$

L'équation la plus générale de la forme $s + \mu = 0$, admettant deux intégrales intermédiaires, s'écrit donc

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} s + \left[p\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y\, \partial z} + q \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x\, \partial y} + q \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x\, \partial z}\right] = 0,$$

ou, simplement,

$$\frac{d^2 \sigma}{dx\, dy} = 0.$$

On aura donc immédiatement les intégrales intermédiaires

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + p \frac{\partial \sigma}{\partial z} = f(x),$$

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} + q \frac{\partial \sigma}{\partial z} = f(y),$$

f représentant une fonction arbitraire.

10. L'équation différentielle étant de la forme

$$s+\lambda t=0,$$

il faut que

$$\mu=\frac{1}{\rho}\mathrm{H}(p\rho+\upsilon)=0.$$

Les fonctions ρ et υ doivent donc satisfaire aux conditions

$$\mathrm{H}(\rho)=0, \qquad \mathrm{H}(\upsilon)=0,$$

et à l'équation différentielle (9) qui se réduit à

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

Or, l'équation $\mathrm{H}(\rho)=\frac{\partial\rho}{\partial y}+q\frac{\partial\rho}{\partial x}=0$ exige que

$$\rho=\varphi(x, q, u),$$

φ étant une fonction arbitraire et $u=z-qy$.

De même, on aura

$$\upsilon=\psi(x, q, u),$$

les fonctions φ et ψ étant soumises à la condition

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

On satisfera, de la manière la plus générale, à cette condition en choisissant

$$\rho=\varphi=\frac{\partial\sigma}{\partial u}, \qquad \upsilon=\psi=\frac{\partial\sigma}{\partial x},$$

σ étant une fonction arbitraire de x, q, u.

L'équation la plus générale de la forme $s+\lambda t=0$ admettant deux intégrales intermédiaires, se réduit donc à la forme

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}s+\left[p\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial q}-y\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}\right)+\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial q}-y\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial u}\right]t=0,$$

ou à

$$\frac{d}{dy}\left(p\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)=0.$$

La première intégrale intermédiaire sera donc

$$p\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\frac{\partial\sigma}{\partial x}=f(x),$$

f étant une fonction arbitraire.

La seconde se déduit du système complet

$$\mathrm{P}(f)=\frac{d\rho}{dq}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y}+\left(\rho+q\frac{d\rho}{dq}\right)\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z}=0,$$

$$\mathrm{Q}(f)=\rho\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x}+\frac{d\upsilon}{dq}\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y}+q\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z}\right)=0.$$

De la première, on tire

$$\frac{dy}{\frac{d\rho}{dq}}=\frac{dz}{\rho+q\frac{d\rho}{dq}}=\frac{dx}{0}=\frac{dq}{0},$$

d'où

$$\frac{dz-q\,dy}{\rho}=\frac{dy}{\frac{d\rho}{dq}}.$$

Une première intégrale se déduira de l'équation

$$\frac{dy}{du}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}y=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q};$$

en effet

$$\frac{d\rho}{dq}=\frac{\partial\rho}{\partial q}-y\frac{\partial\rho}{\partial u}.$$

On aura donc, pour l'intégrale la plus générale de la première équation différentielle,

$$\mathrm{F}=\mathrm{F}_1(x,q,\omega),$$

où

$$\omega=y\frac{\partial\sigma}{\partial u}-\frac{\partial\sigma}{\partial q}.$$

En substituant $\mathrm{F}=\mathrm{F}_1$ dans la seconde équation, on obtient

$$\rho\frac{\partial f_1}{\partial x}+\mathrm{Q}(\omega)\frac{\partial f_1}{\partial\omega}=0.$$

Or

$$\mathrm{Q}(\omega)=0,$$

par suite

$$F_1 = F_2(q, \omega).$$

La seconde intégrale intermédiaire sera, par conséquent,

$$y\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \frac{\partial\sigma}{\partial q} = f(q),$$

f représentant une fonction arbitraire.

Second cas : $r - \lambda^2 t = 0.$

11. Les deux systèmes de caractéristiques, toujours distincts, sont respectivement

$$\begin{aligned} dz - p\,dx - q\,dy &= 0, & \qquad dz - p\,dx - q\,dy &= 0,\\ dy + \lambda\,dx &= 0, & dy - \lambda\,dx &= 0,\\ dp + \lambda\,dq &= 0, & dp - \lambda\,dq &= 0, \end{aligned}$$

et les systèmes linéaires correspondants

$$\begin{aligned} A(V) &= \frac{\partial V}{\partial q} - \lambda\frac{\partial V}{\partial p} = 0,\\ A_1(V) &= \frac{\partial V}{\partial q} + \lambda\frac{\partial V}{\partial p} = 0,\\ B(V) &= \frac{\partial V}{\partial x} - \lambda\frac{\partial V}{\partial y} + (p - \lambda q)\frac{\partial V}{\partial z} = 0,\\ B_1(V) &= \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda\frac{\partial V}{\partial y} + (p + \lambda q)\frac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Du premier système, je déduis, comme dans le premier cas, les trois équations

$$\begin{aligned} C(V) &= -A(\lambda)\frac{\partial V}{\partial y} + A(p - \lambda q)\frac{\partial V}{\partial z} + B(\lambda)\frac{\partial V}{\partial p} = 0,\\ E(V) &= -AA(\lambda)\frac{\partial V}{\partial y} + AA(p - \lambda q)\frac{\partial V}{\partial z} + [AB(\lambda) + C(\lambda)]\frac{\partial V}{\partial p} = 0,\\ F(V) &= [C(\lambda) - BA(\lambda)]\frac{\partial V}{\partial y} + [BA(p - \lambda q) - C(p - \lambda q)]\frac{\partial V}{\partial z} + BB(\lambda)\frac{\partial V}{\partial p} = 0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $E(V) = 0$ et $F(V) = 0$ dépendent linéairement de $A(V)=0$, $B(V)=0$, $C(V)=0$. Dans ce cas, on aura

$$\frac{AA(\lambda)}{A(\lambda)} = \frac{AA(p-\lambda q)}{A(p-\lambda q)} = \frac{AB(\lambda)+C(\lambda)}{B(\lambda)},$$
$$\frac{BA(\lambda)-C(\lambda)}{A(\lambda)} = \frac{BA(p-\lambda q)-C(p-\lambda q)}{A(p-\lambda q)} = \frac{BB(\lambda)}{B(\lambda)}.$$

Ces conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois équations $A(V)=0$, $B(V)=0$, $C(V)=0$ forment un système complet, se réduisent aisément aux suivantes :

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\lambda\,AA(\lambda)-3A^2(\lambda)&=0,\\ 2\lambda\,AB(\lambda)-3A(\lambda)B(\lambda)&=0,\\ C(\lambda)&=0,\\ 2\lambda\,BB(\lambda)-3B^2(\lambda)&=0.\end{aligned}\right.$$

De la même manière, le second système linéaire $A_1(V)=0$, $B_1(V)=0$ conduit aux quatre conditions correspondantes

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\lambda A_1A_1(\lambda)-3A_1^2(\lambda)=0,\\ &2\lambda A_1B_1(\lambda)-3A_1(\lambda)B_1(\lambda)=0,\\ &C_1(\lambda)=0,\\ &2\lambda B_1B_1(\lambda)-3B_1^2(\lambda)=0.\end{aligned}\right.$$

12. Cherchons maintenant la solution la plus générale des équations (11) et (12). Pour y arriver, considérons d'abord la première équation du système (11) et la première du système (12). En introduisant les valeurs de $A(\lambda)$ et $AA(\lambda)$, la première prend la forme

$$2\lambda\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial q^2}-2\lambda\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial q}+\lambda^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial p^2}\right)-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial q}-\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)\left(3\frac{\partial\lambda}{\partial q}-\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)=0.$$

La première équation du système (12) se déduit de celle-ci en remplaçant λ par $-\lambda$; on aura donc

$$2\lambda\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial q^2}+2\lambda\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial q}+\lambda^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial p^2}\right)-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial q}+\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)\left(3\frac{\partial\lambda}{\partial q}+\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)=0.$$

Par addition et soustraction de ces deux équations, on obtient

$$2\lambda\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial q^2}+\lambda^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial p^2}\right)-3\left(\frac{\partial\lambda}{\partial q}\right)^2-\lambda^2\left(\frac{\partial\lambda}{\partial q}\right)^2=0,\qquad \lambda\frac{\partial^2\lambda}{\partial p\,\partial q}-\frac{\partial\lambda}{\partial p}\frac{\partial\lambda}{\partial q}=0.$$

L'intégrale générale de la dernière équation s'écrit

$$\lambda = \varphi(x, y, z, p) . \psi(x, y, z, q),$$

les fonctions φ et ψ étant arbitraires.

En substituant ce produit dans la première, celle-ci prend la forme

$$2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2 = - \frac{2\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} - 3\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)^2}{\psi^4}.$$

Le premier membre de cette équation étant indépendant de q, le second indépendant de p, on aura

$$2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2 = \mathrm{K}(x, y, z),$$

$$\frac{2\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} - 3\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right)^2}{\psi^4} = - \mathrm{K}(x, y, z),$$

K étant une fonction arbitraire de x, y, z.

Or, la dernière de ces équations se réduit à

$$2\psi_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial q}\right)^2 = \mathrm{K}(x, y, z),$$

par la substitution

$$\psi = \frac{1}{\psi_1}.$$

Pour satisfaire de la manière la plus générale à ces équations, je pose

$$\varphi = a + 2bp + cp^2,$$
$$\psi = f + 2gq + hq^2,$$

a, b, c, f, g, h représentant des fonctions arbitraires de x, x, z; en substituant ces valeurs, on aura les intégrales les plus générales en soumettant les fonctions arbitraires aux conditions

$$4(ac - b^2) = \mathrm{K}(x, y, z),$$
$$4(fh - g^2) = \mathrm{K}(x, y, z).$$

Il en résulte

$$\lambda = \frac{a + 2bp + cp^2}{f + 2gq + hq^2}, \tag{13}$$

avec la relation

$$b^2 - ac = g^2 - fh = \alpha^2. \tag{14}$$

13. Considérons, en second lieu, la troisième équation du système (11) et du système (12) et proposons-nous de choisir les fonctions a, b, c, f, g, h de l'expression (13), de telle sorte que cette valeur de λ satisfasse à ces équations. Ces deux équations sont identiques et se réduisent à

$$2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial z} = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} + p\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p} - \left(\frac{\partial\lambda}{dy} + q\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial q}.$$

En substituant dans cette équation

$$\lambda = \frac{P}{Q} = \frac{a + 2bp + cp^2}{f + 2gp + hq^2},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\left(Q\frac{\partial P}{\partial x} - P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)Q\frac{\partial P}{\partial p} &+ \left(Q\frac{\partial P}{\partial y} - P\frac{\partial Q}{\partial y}\right)P\frac{\partial Q}{\partial q}\\ &= \left(Q\frac{\partial P}{\partial z} - P\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\left(2PQ - pQ\frac{\partial P}{\partial p} - qP\frac{\partial Q}{\partial q}\right),\end{aligned}$$

où

$$2PQ - pQ\frac{\partial P}{\partial p} - qP\frac{\partial Q}{\partial q} = 2af + 2bfp + 2agq - 2bhpq^2 - 2cgp^2q - 2chp^2q^2.$$

Si maintenant on désigne les dérivées d'une fonction par rapport à x, y, z par les indices 1, 2 ou 3, l'équation suivante doit être satisfaite identiquement :

$$\begin{aligned}(b + cp)(f + 2gq + hq^2)[(f + 2gq + hq^2)(a_1 + 2b_1p + c_1p^2)&\\ - (a + 2bp + cp^2)(f_1 + 2g_1q + h_1q^2)]&\\ + (g + hq)(a + 2bp + cp^2)[(f + 2gq + hq^2)(a_2 + 2b_2p + c_2p^2)&\\ - (a + 2bp + cp^2)(f_2 + 2g_2q + h_2q^2)]&\\ = (af + bfp + agq - bhpq^2 - cgp^2q - chp^2q^2)[(f + 2gq + hq^2)(a_3 + 2b_3p + c_3p^2)&\\ - (a + 2bp + cp^2)(f_3 + 2g_3q + h_3q^2)]&.\end{aligned}$$

En développant cette équation l'égalisation des coefficients des mêmes puissances de p et q dans les deux membres donne vingt-cinq relations. Comme nous n'aurons pas besoin de toutes ces relations, nous nous contenterons d'écrire seulement les sept suivantes où nous avons introduit la notation

$$(h_i k) = h_i k - k_i h,$$

et mis en évidence les puissances de p et q :

$$\begin{aligned}
p^4 q^4 &: \quad 0 = -\, ch(c_3 h),\\
p^3 q^4 &: \quad ch(c_1 h) = -\, bh(c_3 h) - 2\, ch(b_3 h),\\
p^2 q^4 &: \quad bh(c_1 h) + 2\, ch(b_1 h) = -\, 2\, bh(b_3 h) - ch(a_3 h),\\
q^4 &: \quad bh(a_1 h) = 0,\\
q^3 &: \quad 2\, bg(a_1 h) + 2\, bh(a_1 g) + ah(a_2 h) = ag(a_3 h),\\
p^4 q^3 &: \quad ch(c_2 h) = -\, cg(c_3 h) - 2\, ch(c_3 g),\\
p^4 &: \quad cg(c_2 f) = 0.
\end{aligned}$$

14. Les quatre premières relations se réduiront aisément à

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c}{h}\right) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{h}\right) = -\, 2\, \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b}{h}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{h}\right) = -\, 2\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{h}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{h}\right) = 0,
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{b}{h}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{b}{h}\right) = 0.$$

On a donc d'abord

$$\frac{b}{h} = \gamma x z + \zeta x + \eta z + \theta,$$

et ensuite

$$\frac{a}{h} = -\, \gamma z^2 - 2\, \zeta z - \beta,$$

$$\frac{c}{h} = -\, \gamma x^2 - 2\, \eta x - \alpha,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta, \theta$ représentant des fonctions arbitraires de la seule variable y.

15. Considérons, en second lieu, pour déterminer $\frac{g}{h}$ les équations correspondantes à q^3 et $p^1 q^3$ ou

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{h}\right)+\frac{h}{2b}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{h}\right)\frac{g}{h}=\frac{h}{2b}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{h}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g}{h}\right)=\frac{h}{2c}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{h}\right).$$

La première, dans laquelle $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{h}\right)=u$, $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{h}\right)=v$ sont indépendantes de x, est une équation linéaire dont on tire

$$\frac{g}{h}=\frac{u}{v}+\frac{b}{h}\psi(y, z),$$

$\psi(y, z)$ étant une fonction arbitraire de y et z. En substituant cette valeur dans la seconde équation, on obtient l'équation linéaire

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{h}{b}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b}{h}\right)\psi=\frac{h^2}{2bc}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{h}\right)-\frac{h}{b}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{v}\right),$$

d'où

$$\psi=\frac{h}{b}\left[\frac{hz}{2c}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{h}\right)-\frac{u}{v}+\chi(y)\right],$$

$\chi(y)$ représentant une fonction arbitraire de la seule variable y.

Or, le premier membre étant une fonction de y et z, il est évident qu'on ne saurait satisfaire à cette équation qu'en égalant à zéro la partie entre parenthèses, ce qui donne

$$z\frac{\gamma' x^2+2\eta' x+\alpha'}{\gamma x^2+2\eta x+\alpha}-\frac{\gamma' z^2+2\zeta' z+\beta'}{\gamma z+\zeta}=-2\chi.$$

En comparant les coefficients des mêmes puissances de x et z dans cette équation, on obtient aisément

$$(15)\qquad \frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\eta'}{\eta}=\frac{\gamma'}{\gamma}=\mu \qquad \text{et} \qquad \zeta^2\gamma'-2\gamma\zeta\zeta'+\gamma^2\beta'=0,$$

d'où

$$\gamma' z^2 + 2\zeta' z + \beta' = \gamma' z^2 + \left(\frac{\zeta\gamma'}{\gamma} + \frac{\gamma\beta'}{\zeta}\right) z + \beta' = (\gamma z + \zeta)\left(\frac{\gamma'}{\gamma} z + \frac{\beta'}{\zeta}\right),$$

et, par suite,

$$\frac{g}{h} = \frac{\mu}{2} z + \frac{\beta'}{2\zeta}.$$

16. Pour déterminer enfin $\frac{f}{h}$ je me sers de l'équation correspondante à p^4, qui s'écrit aussi

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{h}\right) = \frac{f}{h}\,\frac{h}{c}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{h}\right) = \mu \frac{f}{h},$$

et de la relation

$$\frac{f}{h} = \frac{g^2}{h^2} - \frac{b^2 - ac}{h^2}.$$

En introduisant dans la dernière équation les valeurs précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{f}{h} = \frac{1}{4}\left(\mu z + \frac{\beta'}{\zeta}\right)^2 - [(\zeta^2 - \beta\gamma) x^2 + 2(\gamma\theta - \zeta\eta) xz + (\eta^2 - \alpha\gamma) z^2 \\ + 2(\zeta\theta - \beta\eta) x + 2(\eta\theta - \alpha\zeta) z + \theta^2 - \alpha\beta].\end{aligned}$$

D'après la première équation, on aura donc

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}(\zeta^2 - \beta\gamma) = \mu(\zeta^2 - \beta\gamma),\\
&\frac{\partial}{\partial y}(\gamma\theta - \zeta\eta) = \mu(\gamma\theta - \zeta\eta),\\
&\frac{\partial}{\partial y}(\eta^2 - \alpha\gamma) - \tfrac{1}{2}\mu\mu' = \rho(\eta^2 - \alpha\gamma) - \tfrac{1}{4}\mu^3,\\
&\frac{\partial}{\partial y}(\zeta\theta - \beta\eta) = \mu(\zeta\theta - \beta\eta),\\
&\frac{\partial}{\partial y}(\eta\theta - \alpha\zeta) - \tfrac{1}{4}\left[\mu' \frac{\beta'}{\zeta} + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta'}{\zeta}\right)\right] = \mu(\eta\theta - \alpha\zeta) - \tfrac{1}{4}\mu^2 \frac{\beta'}{\zeta},\\
&\frac{\partial}{\partial y}(\theta^2 - \alpha\beta) - \frac{1}{2}\,\frac{\beta'}{\zeta}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta'}{\zeta}\right) = \mu(\theta^2 - \alpha\beta) - \tfrac{1}{4}\mu \frac{\beta'^2}{\zeta^2}.
\end{aligned}$$

Or, d'après les relations (15), la première de ces six équations est identiquement satisfaite; quant aux autres, elles se réduiront aisément aux suivantes :

$$\begin{aligned}
&\gamma\theta' - \eta\zeta' = 0,\\
&\eta^2 - \alpha\gamma = \tfrac{1}{2}\mu' - \tfrac{1}{4}\mu^2,\\
&\zeta\theta' + \theta\zeta' - \eta\beta' = \mu\zeta\theta,\\
&\frac{\zeta'}{\gamma}(\eta^2 - \alpha\gamma) = \tfrac{1}{4}(\mu' - \mu^2)\frac{\beta'}{\zeta} + \tfrac{1}{4}\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta'}{\zeta}\right),\\
&2\theta\theta' - \alpha\beta' - \mu\theta^2 = \frac{1}{2}\frac{\beta'}{\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta'}{\zeta}\right) - \tfrac{1}{4}\mu\frac{\beta'^2}{\zeta^2},
\end{aligned}$$

dont on tire

$$\begin{aligned}
&\beta' = \frac{\mu\zeta^2}{\gamma},\\
&\zeta' = \mu\zeta,\\
&\theta' = \frac{\mu\zeta\eta}{\gamma} = \mu\theta,\\
&\mu'' - 3\mu\mu' + \mu^3 = 0,\\
&\gamma\theta - \eta\zeta = 0.
\end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned}
-\frac{f}{h} = (\zeta^2 - \beta\gamma)x^2 + 2(\zeta\theta - \beta\eta)x + (\eta^2 - \alpha\gamma - \tfrac{1}{4}\mu^2)z^2\\
+ 2\left(\eta\theta - \alpha\zeta - \tfrac{1}{4}\mu\frac{\beta'}{\zeta}\right)z + \left(\theta^2 - \alpha\beta - \tfrac{1}{4}\frac{\beta'^2}{\zeta^2}\right).
\end{aligned}$$

Pour simplifier ce résultat, remarquons d'abord qu'on a

$$\begin{aligned}
&\eta^2 - \alpha\gamma - \tfrac{1}{4}\mu^2 = \tfrac{1}{2}(\mu' - \mu^2),\\
&\eta\theta - \alpha\zeta - \tfrac{1}{4}\mu\frac{\beta'}{\zeta} = \tfrac{1}{2}(\mu' - \mu^2)\frac{\zeta}{\gamma},\\
&\theta^2 - \alpha\beta - \frac{1}{4}\frac{\beta'^2}{\zeta^2} = \frac{\alpha}{\gamma}(\zeta^2 - \beta\gamma) + \tfrac{1}{2}(\mu' - \mu^2)\frac{\zeta^2}{\gamma^2},
\end{aligned}$$

par suite,

$$-\frac{f}{h} = (\zeta^2 - \beta\gamma)x^2 + 2(\zeta\theta - \beta\eta)x + \frac{\alpha}{\gamma}(\zeta^2 - \beta\gamma) + \tfrac{1}{2}(\mu' - \mu^2)\left(z + \frac{\zeta}{\gamma}\right)^2.$$

Déduisons ensuite des équations

$$\mu'' - 3\mu\mu' + \mu^3 = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\zeta^2 - \beta\gamma) = \mu(\zeta^2 - \beta\gamma),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\zeta\theta - \beta\eta) = \mu(\zeta\theta - \beta\eta),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\zeta}{\gamma}\right) = 0,$$

les valeurs

$$\mu = -\frac{2k(ky + B)}{(ky + B)^2 - \sigma^2},$$
$$\zeta^2 - \beta\gamma = \frac{k^3\tau}{(ky + B)^2 - \sigma^2},$$
$$\zeta\theta - \beta\eta = \frac{k^2\tau A}{(ky + B)^2 - \sigma^2},$$
$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{A^2 - \rho^2}{k^2},$$
$$\frac{\zeta}{\gamma} = \frac{C}{k},$$

où A, B, C, k, ρ, σ, τ représentent des constantes.

Avec ces valeurs, on obtient

$$\frac{f}{h} = \frac{(kz + C)^2 - k\tau(kx + A)^2 + k\tau\rho^2}{(ky + B)^2 - \sigma^2}$$

ou, en introduisant, pour abréger,

$$kx + A = X, \qquad ky + B = Y, \qquad kz + C = Z,$$
$$\frac{f}{h} = \frac{Z^2 - k\tau(X^2 - \rho^2)}{Y^2 - \sigma^2}.$$

17. En revenant aux autres proportions, il nous faut déduire des équations précédentes les valeurs des fonctions α, β, γ, ζ, η, θ. Choisissons pour cela

$$\alpha = \frac{k(A^2 - \rho^2)}{Y^2 - \sigma^2},$$

alors on trouve

$$\gamma = \frac{k^3}{Y^2 - \sigma^2},$$

$$\zeta = \frac{k^2 C}{Y^2 - \sigma^2},$$

$$\beta = \frac{k C^2}{Y^2 - \sigma^2} - \tau,$$

$$\theta = \frac{k A C}{Y^2 - \sigma^2},$$

$$\eta = \frac{k^2 A}{Y^2 - \sigma^2}.$$

Remarquons que les sept constantes ne sont pas entièrement indépendantes; en effet, on a

$$\eta^2 - \alpha\gamma = \frac{k^2\sigma^2}{(Y^2 - \sigma^2)^2} = \frac{k^4\rho^2}{(Y^2 - \sigma^2)^2},$$

ou

$$\sigma^2 = k^2\rho^2.$$

L'introduction des valeurs précédentes nous donne enfin

$$\frac{g}{h} = -\frac{YZ}{Y^2 - \sigma^2},$$

$$\frac{c}{h} = -\frac{k(X^2 - \rho^2)}{Y^2 - \sigma^2},$$

$$\frac{a}{h} = \tau - \frac{kZ^2}{Y^2 - \sigma^2},$$

$$\frac{b}{h} = \frac{kXZ}{Y^2 - \sigma^2},$$

d'où, après une légère réduction,

$$(16) \qquad \lambda = \frac{-\rho\tau(\sigma^2 - Y^2) + \rho^2\sigma p^2 - \sigma(Z - pX)^2}{\sigma\tau(\rho^2 - X^2) - \rho\sigma^2 q^2 + \rho(Z - qY)^2}\ [1].$$

18. Démontrons maintenant que cette valeur de λ satisfait à l'équa-

---

[1] Nous devons cette forme symétrique à une observation de G. Darboux; voir le même résultat sous une autre forme dans les *Comptes rendus de l'Académie royale des Sciences d'Amsterdam*, séance du 25 novembre 1899.

tion différentielle

$$2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial z}=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+p\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p}-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}+q\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial q},$$

ou, en introduisant

$$X=kx+A,\qquad Y=ky+B,\qquad Z=kz+C,$$

à l'équation

$$2\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial Z}=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial X}+p\frac{\partial\lambda}{\partial Z}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial p}-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial Y}+q\frac{\partial\lambda}{\partial Z}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial q}.$$

Posons, pour y arriver,

$$G=\frac{\partial}{\partial X}+p\frac{\partial}{\partial Z},\qquad H=\frac{\partial}{\partial Y}+q\frac{\partial}{\partial Z},$$

$$\lambda=\frac{P}{Q},$$

et

$$\begin{aligned}P&=-\rho\tau(\sigma^2-Y^2)+\rho^2\sigma p^2-\sigma(Z-pX)^2,\\ Q&=\quad\sigma\tau(\rho^2-X^2)-\rho\sigma^2q^2+\rho(Z-qY)^2,\end{aligned}$$

alors on aura

$$\begin{aligned}G(P)&=0,\\ G(Q)&=-2\sigma\tau X+2\rho p(Z-qY),\\ H(P)&=\quad 2\rho\tau Y-2\sigma q(Z-pX),\\ H(Q)&=0,\\ G(\lambda)&=-\lambda\frac{G(Q)}{Q},\\ H(\lambda)&=\quad\lambda\frac{H(P)}{P}.\end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs et

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p}=\frac{\lambda}{P}\frac{\partial P}{\partial p},\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial q}=-\frac{\lambda}{Q}\frac{\partial Q}{\partial q},$$

il reste à faire voir qu'on a l'identité

$$2Q^2\frac{\partial\lambda}{\partial Z}=2\left(Q\frac{\partial P}{\partial Z}-P\frac{\partial Q}{\partial Z}\right)=-G(Q)\frac{\partial P}{\partial p}+H(P)\frac{\partial Q}{\partial q}.$$

Or, cette identité se vérifie aisément.

19. Revenons maintenant aux équations restantes des systèmes (11) et (12)

$$(17)\qquad \begin{cases} 2\lambda A\ B\ (\lambda) - 3A\ (\lambda)B\ (\lambda) = 0, \\ 2\lambda A_1 B_1(\lambda) - 3A_1(\lambda)B_1(\lambda) = 0, \end{cases}$$

et

$$(18)\qquad \begin{cases} 2\lambda B\ B\ (\lambda) - 3B^2(\lambda) = 0, \\ 2\lambda B_1 B_1(\lambda) - 3B_1^2(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Par addition et soustraction le système (17) se réduit à

$$(19)\qquad \begin{cases} 2\lambda \dfrac{\partial}{\partial q} G(\lambda) + 2\lambda^3 \dfrac{\partial}{\partial p} H(\lambda) = \lambda^2 H(\lambda) \dfrac{\partial \lambda}{\partial p} + 3G(\lambda) \dfrac{\partial \lambda}{\partial q}, \\ 2\lambda \dfrac{\partial}{\partial p} G(\lambda) + 2\lambda \dfrac{\partial}{\partial q} H(\lambda) = 3G(\lambda) \dfrac{\partial \lambda}{\partial p} + H(\lambda) \dfrac{\partial \lambda}{\partial q}, \end{cases}$$

et le système (18) à

$$(20)\qquad \begin{cases} 2\lambda[GG(\lambda) + \lambda^2 HH(\lambda)] = 3G^2(\lambda) + \lambda^2 H^2(\lambda) \\ \lambda HG(\lambda) = \lambda GH(\lambda) = G(\lambda)H(\lambda). \end{cases}$$

On vérifiera aisément que la valeur (16) trouvée pour λ satisfait aussi à ces deux systèmes. En effet, en posant

$$\lambda = \frac{P}{Q}$$

on aura

$$\frac{\partial}{\partial p} G(\lambda) = -\frac{\partial \lambda}{\partial p} \frac{G(Q)}{Q} - \frac{\lambda}{Q} \frac{\partial}{\partial p} G(Q),$$

$$\frac{\partial}{\partial q} G(\lambda) = -\frac{\partial \lambda}{\partial q} \frac{G(Q)}{Q} - \lambda \frac{Q \dfrac{\partial}{\partial q} G(Q) - G(Q) \dfrac{\partial Q}{\partial q}}{Q^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial p} H(\lambda) = \frac{\partial \lambda}{\partial p} \frac{H(P)}{P} - \lambda \frac{P \dfrac{\partial}{\partial p} H(P) - H(P) \dfrac{\partial P}{\partial p}}{P^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial q} H(\lambda) = \frac{\partial \lambda}{\partial q} \frac{H(P)}{P} + \frac{\lambda}{P} \frac{\partial}{\partial q} H(P),$$

$$GG(\lambda) = \lambda \frac{2G^2(Q) - QGG(Q)}{Q^2},$$

$$GH(\lambda) = HG(\lambda) = -\frac{H(P)G(Q)}{Q^2},$$

$$HH(\lambda) = \frac{HH(P)}{Q}.$$

En introduisant ces valeurs, les deux systèmes (19) et (20) se réduiront aux suivantes :

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &2Q\frac{\partial}{\partial q}G(Q)-2P\frac{\partial}{\partial p}H(P)=G(Q)\frac{\partial Q}{\partial q}-H(P)\frac{\partial P}{\partial p},\\ &2P\frac{\partial}{\partial p}G(Q)-2Q\frac{\partial}{\partial q}H(P)=G(Q)\frac{\partial P}{\partial p}-H(P)\frac{\partial Q}{\partial q},\end{aligned}\right.$$

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} 2QGG(Q)-G^2(Q)&=2PHH(P)-H^2(P),\\ G(Q)H(P)&=G(Q)H(P),\end{aligned}\right.$$

qu'on vérifiera aisément.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Pour que l'équation différentielle $r-\lambda^2 t=0$ possède deux intégrales intermédiaires, il faut que λ ait la forme (16).

20. Considérons, pour déterminer les intégrales intermédiaires, le système complet

$$\begin{aligned} A(V)&=\frac{\partial V}{\partial q}-\lambda\frac{\partial V}{\partial p}=0,\\ B(V)&=\frac{\partial V}{\partial x}-\lambda\frac{\partial V}{\partial y}+(p-\lambda q\frac{\partial V}{\partial z}=0,\\ C(V)&=-A(\lambda)\frac{\partial V}{\partial y}-[2\lambda+qA(\lambda)]\frac{\partial V}{\partial z}+B(\lambda)\frac{\partial V}{\partial p}=0,\end{aligned}$$

ou le système Jacobien équivalent

$$\begin{aligned} A^{(1)}(V)&=\frac{\partial V}{\partial q}-\lambda\frac{\partial V}{\partial p}=0,\\ B^{(1)}(V)&=\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{2\lambda^2+pA(\lambda)}{A(\lambda)}\,\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\lambda B(\lambda)}{A(\lambda)}\,\frac{\partial V}{\partial p}=0=B(V)-\lambda\frac{C(V)}{A(\lambda)},\\ C^{(1)}(V)&=\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{2\lambda+qA(\lambda)}{A(\lambda)}\,\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}\,\frac{\partial V}{\partial p}=0=-\frac{C(V)}{A(\lambda)}.\end{aligned}$$

D'après la condition $C(\lambda)=0$, on sait que la valeur (16) de λ est une intégrale de $C(V)=0$ ou de $C^{(1)}(V)=0$. Pour déduire de cette intégrale une intégrale commune de $B^{(1)}(V)=0$ et $C^{(1)}(V)=0$, posons

$$\lambda=\varphi_1,\qquad B^{(1)}(\lambda)=\varphi_2,\qquad B^{(1)}B^{(1)}(\lambda)=\varphi_3;$$

alors on tire de la relation connue

$$2\lambda BB(\lambda) - 3B^2(\lambda) = 0,$$

$$\varphi_3 = \frac{3\varphi_2^2}{2\varphi_1}.$$

Cherchons maintenant à déterminer une fonction

$$V = \theta_1(\varphi_1, \varphi_2, x, q)$$

satisfaisant à l'équation $B^{(1)}(V) = 0$; on devra avoir

$$\varphi_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi_1} + \varphi_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial \theta_1}{\partial q} = 0$$

et l'on sera ramené à trouver une intégrale du système

$$\frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{\varphi_3} = \frac{dq}{1}$$

qui peut être remplacé par l'équation unique

$$\frac{d^2\varphi_1}{dq^2} = \varphi_3 = \frac{3}{2\varphi_1^2}\left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right)^2.$$

L'intégrale première de cette équation

$$\frac{1}{\varphi_1^3}\left(\frac{d\varphi_1}{dq}\right)^2 = \text{const.}$$

donne alors l'intégrale commune cherchée

$$\theta_1 = \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^3} = \frac{B^2(\lambda)}{\lambda^3}.$$

Cette intégrale commune satisfait aussi à l'équation $A^{(1)}(V) = 0$. En effet, on aura

$$A^{(1)}\left[\frac{B^2(\lambda)}{\lambda^3}\right] = A\left[\frac{B^2(\lambda)}{\lambda^3}\right] = \frac{B(\lambda)}{\lambda^4}[2\lambda AB(\lambda) - 3A(\lambda)B(\lambda)] = 0.$$

Pour trouver la seconde intégrale commune, nous écrirons le système complet sous la forme

$$A^{(2)}(V) = \frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\lambda A(\lambda)}{B(\lambda)} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2\lambda^2 + q\lambda A(\lambda)}{B(\lambda)} \frac{\partial V}{\partial z} = 0 = A(V) + \lambda \frac{C(V)}{B(\lambda)},$$

$$B^{(2)}(V) = \frac{\partial V}{\partial x} - \lambda \frac{\partial V}{\partial y} + (p - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial z} = 0 = B(V),$$

$$C^{(2)}(V) = \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2\lambda + qA(\lambda)}{B(\lambda)} \frac{\partial V}{\partial z} = 0 = \frac{C(V)}{B(\lambda)}.$$

La seconde de ces équations admet l'intégrale

$$V = z - px - qy = \psi_1.$$

Pour en déduire une intégrale commune de $B^{(2)}(V) = 0$ et $C^{(2)}(V) = 0$, je pose

$$C^{(2)}(\psi_1) = \psi_2, \qquad C^{(2)}C^{(2)}(\psi_1) = \psi_3.$$

On trouve alors

$$C^{(2)}(\psi_1) = \psi_2 = -x - \frac{2\lambda}{B(\lambda)}$$

et

$$C^{(2)}C^{(2)}(\psi_1) = \psi_3 = -\frac{1}{B(\lambda)} C\left[x + \frac{2\lambda}{B(\lambda)}\right] = -\frac{2}{B(\lambda)} C\left[\frac{\lambda}{B(\lambda)}\right],$$

où

$$C\left[\frac{\lambda}{B(\lambda)}\right] = \frac{B(\lambda)\,C(\lambda) - \lambda\,CB(\lambda)}{B^2(\lambda)} = -\frac{\lambda\,CB(\lambda)}{B^2(\lambda)},$$

parce que $C(\lambda) = 0$.

Or, on sait que

$$CB(\lambda) - BC(\lambda) = F(\lambda) = 0,$$

par suite,

$$CB(\lambda) = 0$$

et

$$\psi_3 = 0.$$

La fonction

$$\psi_2 = -x - \frac{2\lambda}{B(\lambda)}$$

sera donc l'intégrale cherchée.

Posons maintenant, pour trouver une intégrale commune des trois équations de notre système complet,

$$\chi_1 = -x - \frac{2\lambda}{B(\lambda)}, \qquad A^{(2)}(\chi_1) = \chi_2, \qquad A^{(2)}A^{(2)}(\chi_1) = \chi_3;$$

alors on aura

$$A^{(2)}(\chi_1) = A(\chi_1) + \lambda \frac{C(\chi_1)}{B(\lambda)},$$

dans laquelle

$$A(\chi_1) = -2A\left[\frac{\lambda}{B(\lambda)}\right] = -2\frac{B(\lambda)A(\lambda) - \lambda AB(\lambda)}{B^2(\lambda)} = \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$$

et

$$C(\chi_1) = -2C\left[\frac{\lambda}{B(\lambda)}\right] = -2\frac{B(\lambda)C(\lambda) - \lambda CB(\lambda)}{B^2(\lambda)} = 0.$$

Par suite,

$$A^{(2)}(\chi_1) = \chi_2 = \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$$

et

$$A^{(2)}A^{(2)}(\chi_1) = A^{(2)}(\chi_2) = A(\chi_2) + \frac{\lambda}{B(\lambda)}C(\chi_2),$$

où

$$A(\chi_2) = A\left[\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}\right] = \frac{B(\lambda)AA(\lambda) - A(\lambda)AB(\lambda)}{B^2(\lambda)} = 0$$

et

$$C(\chi_2) = C\left[\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}\right] = \frac{B(\lambda)CA(\lambda) - A(\lambda)CB(\lambda)}{B^2(\lambda)} = 0,$$

parce qu'on a d'abord $CB(\lambda) = 0$ et ensuite $CA(\lambda) - AC(\lambda) = E(\lambda) = 0$.

On voit donc que la fonction

$$\chi_2 = \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$$

satisfait au système considéré.

L'intégrale intermédiaire prend donc la forme

$$\frac{B^2(\lambda)}{\lambda^3} = f\left[\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}\right],$$

où f représente une fonction arbitraire. En remarquant que

$$\frac{B^2(\lambda)}{\lambda^3} = \frac{B^2(\lambda)}{A^2(\lambda)}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^3},$$

il est évident que l'intégrale intermédiaire se met aussi sous la forme, f étant encore une fonction arbitraire,

$$\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^3} = f\left[\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}\right].$$

Nous avons donc trouvé une intégrale intermédiaire, parce que les deux intégrales $\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^3}$ et $\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}$ du système complet sont indépendantes, comme on le démontrerait facilement.

La discussion du second système complet $A_1(V) = 0$, $B_1(V) = 0$, $C_1(V) = 0$ conduirait, de la même manière, à la seconde intégrale intermédiaire,

$$\frac{A_1^2(\lambda)}{\lambda^3} = f\left[\frac{B_1(\lambda)}{A_1(\lambda)}\right],$$

où f représente de nouveau une fonction arbitraire.

21. Considérons encore les deux cas spéciaux où λ est indépendant de x, y, z, et celui où λ est indépendant de p et q.

Dans le premier cas, l'équation différentielle aura la forme

$$r - \left(\frac{a + 2bp + cp^2}{f + 2gq + hq^2}\right)^2 t = 0,$$

où a, b, c, f, g, h sont maintenant des constantes satisfaisant à la condition

$$b^2 - ac = g^2 - fh = \alpha^2.$$

L'intégration ne saurait se faire comme dans le cas général parce qu'on a ici $B(\lambda) = 0$.

Pour intégrer dans ce cas le système complet

$$A(V) = \frac{\partial V}{\partial q} - \lambda \frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$

$$B(V) = \frac{\partial V}{\partial x} - \lambda \frac{\partial V}{\partial y} + (p - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

$$-C(V) = A(\lambda) \frac{\partial V}{\partial y} + [2\lambda + qA(\lambda)] \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

je déduis de la dernière équation

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{A(\lambda)} = \frac{dz}{2\lambda + qA(\lambda)} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0},$$

dont l'intégrale générale s'écrit, φ étant une fonction arbitraire,

$$V = \varphi(x, p, q, u),$$

où

$$u = \frac{y}{A(\lambda)} - \frac{z}{2\lambda + qA(\lambda)}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation $B(V) = 0$, on obtient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + B(u)\frac{\partial\varphi}{\partial u} = 0,$$

où

$$B(u) = -\frac{\lambda}{A(\lambda)} - \frac{p - \lambda q}{2\lambda + qA(\lambda)} = -\frac{2\lambda^2 + pA(\lambda)}{A(\lambda)[2\lambda + qA(\lambda)]}.$$

De cette équation je tire le système

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{B(u)} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0},$$

dont l'intégrale générale sera

$$\varphi = \psi(p, q, \upsilon),$$

dans laquelle ψ est une fonction arbitraire et

$$\upsilon = (px + qy - z)A(\lambda) + 2\lambda^2 x + 2\lambda y.$$

La substitution de cette intégrale dans l'équation $A(V) = 0$ donne

$$\frac{\partial\psi}{\partial q} - \lambda\frac{\partial\psi}{\partial p} + A(\upsilon)\frac{\partial\psi}{\partial\upsilon} = 0,$$

$$A(\upsilon) = (px + qy - z)AA(\lambda) + (y - \lambda x)A(\lambda) + 4\lambda x A(\lambda) + 2yA(\lambda),$$

ou, parce que

$$2\lambda AA(\lambda) - 3A^2(\lambda) = 0,$$

$$A(\upsilon) = \frac{3}{2\lambda}(px + qy - z)A^2(\lambda) + 3(\lambda x + y)A(\lambda) = \frac{3\upsilon}{2\lambda}A(\lambda).$$

Pour intégrer, on a donc le système

$$\frac{dq}{1} = -\frac{dp}{\lambda} = \frac{2\lambda\, d\upsilon}{3\upsilon\, A(\lambda)},$$

qui admettra les deux intégrales cherchées.

En comparant les deux premières fractions on obtient

$$\frac{dp}{a + 2bp + cp^2} + \frac{dq}{f + 2gq + hq^2} = 0,$$

dont l'intégrale

$$\frac{b + cp - \alpha}{b + cp + \alpha}\,\frac{g + hq - \alpha}{g + hq + \alpha} = w_1 = \text{const.}$$

Remarquons que cette intégrale prendrait une autre forme quand $\alpha = 0$.

Pour déterminer la seconde intégrale on pourra réduire le système à la forme

$$\frac{\dfrac{h\,dq}{g + hq - \alpha}}{g + hq - \alpha} = \frac{-\dfrac{c\,dp}{b + cp + \alpha}}{b + cp - \alpha} = \frac{\dfrac{d\upsilon}{3\upsilon}}{-(b + cp + g + hq)}.$$

En ajoutant les numérateurs et les dénominateurs, on obtiendra

$$\frac{h\,dq}{g + hq - \alpha} - \frac{c\,dp}{b + cp + \alpha} + \frac{d\upsilon}{3\upsilon} = 0,$$

d'où

$$\left(\frac{g + hq - \alpha}{b + cp + \alpha}\right)^3 \upsilon = w_2 = \text{const.}$$

On aura donc une intégrale intermédiaire, f étant une fonction arbitraire,

$$w_2 = f(w_1),$$

où

$$w_1 = \frac{b + cp - \alpha}{b + cp + \alpha}\,\frac{g + hq - \alpha}{g + hq + \alpha},$$

$$w_2 = \left(\frac{g + hq - \alpha}{b + cp + \alpha}\right)^3 [(px + qy - z)\,A(\lambda) + 2\lambda^2 x + 2\lambda y].$$

Une discussion analogue du second système complet donne la seconde intégrale intermédiaire

$$w'_2 = f(w'_1),$$

dans laquelle

$$w' = \frac{b + cp - \alpha}{b + cp + \alpha}\,\frac{g + hq + \alpha}{g + hq - \alpha},$$

$$w'_2 = \left(\frac{g + hq - \alpha}{b + cp - \alpha}\right)^3 [(z - px - qy)A_1(\lambda) + 2\lambda^2 x - 2\lambda y].$$

22. Supposons maintenant que λ soit indépendant de p et q. Dans ce cas, les systèmes (11) et (12) se réduiront aux équations

$$C(\lambda) = 0,$$
$$2\lambda B\,B(\lambda) - 3B^2(\lambda) = 0,$$
$$2\lambda B_1 B_1(\lambda) - 3B_1^2(\lambda) = 0,$$

qui sont équivalentes aux trois suivantes :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0,$$

$$2\lambda\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + \lambda^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}\right) = 3\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2,$$

$$\lambda\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\,\frac{\partial\lambda}{\partial y}.$$

La première de ces conditions fait voir que λ doit être indépendant de z, la troisième que λ aura la forme

$$\lambda = \varphi(y)\psi(x)$$

et la seconde que les fonctions φ et ψ doivent être liées par l'équation

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - 2\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{2\psi\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - 3\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2}{\psi^4}.$$

On en conclut, comme dans le cas traité dans le n° 12,

$$\lambda = \frac{a + 2by + cy^2}{f + 2gx + hx^2},$$

où les constantes sont soumises à la condition

$$b^2 - ac = g^2 - fh = \alpha^2.$$

Le premier système complet se réduit ici à

$$A(V) = \frac{\partial V}{\partial q} - \lambda \frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$

$$B(V) = \frac{\partial V}{\partial x} - \lambda \frac{\partial V}{\partial y} + (p - \lambda q) \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

$$C(V) = -2\lambda \frac{\partial V}{\partial z} + B(\lambda) \frac{\partial V}{\partial p} = 0.$$

Pour intégrer ce système, je déduis de la dernière, en remarquant que l'on a

$$B(\lambda) = -2\lambda \frac{b + cy + g + hx}{f + 2gx + hx^2},$$

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{f + 2gx + hx^2} = \frac{dp}{b + cy + g + hx} = \frac{dq}{0}.$$

L'intégrale la plus générale de $C(V) = 0$ sera donc, en représentant par φ une fonction arbitraire,

$$V = \varphi(x, y, q, u)$$

où

$$u = \frac{z}{f + 2gx + hx^2} - \frac{p}{b + cy + g + hx} = \frac{z}{Q} - \frac{p}{K}.$$

Avec cette valeur, $B(V) = 0$ devient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + B(u) \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0.$$

Or, on aura

$$\begin{aligned}
B(u) &= \frac{QB(z) - zB(Q)}{Q^2} - \frac{KB(p) - pB(K)}{K^2} \\
&= \frac{Q(p - \lambda q) - 2(g + hx)z}{Q^2} + \frac{p(h - \lambda c)}{K^2} \\
&= \frac{p}{QK^2}[(h - \lambda c)Q + K^2] - \frac{2(g + hx)z}{Q^2} - \frac{\lambda q}{Q} \\
&= -\frac{2(g + hx)}{Q}\left(\frac{z}{Q} - \frac{p}{K}\right) - \frac{\lambda q}{Q} \\
&= -\frac{2(g + hx)u}{Q} - \frac{\lambda q}{Q}.
\end{aligned}$$

En introduisant cette valeur, on obtient le système

$$\frac{dx}{f+2gx+hx^2} = -\frac{dy}{a+2by+cy^2} = -\frac{du}{2(g+hx)u+\lambda q} = \frac{dq}{0}.$$

La comparaison des deux premières fractions donne l'intégrale

$$\upsilon = \frac{g+hx-\alpha}{g+hx+\alpha}\,\frac{b+cy-\alpha}{b+cy+\alpha} = \text{const.}$$

De cette intégrale on tire, en posant

$$b+cy=m, \qquad g+hx=n,$$

$$m = -\frac{\upsilon(n+\alpha)+n-\alpha}{\upsilon(n+\alpha)-(n-\alpha)}\alpha,$$

$$c(a+2by+cy^2) = \frac{4\alpha^2(n^2-\alpha^2)\upsilon}{[\upsilon(n+\alpha)-(n-\alpha)]^2},$$

$$h(f+2gx+hx^2) = n^2-\alpha^2.$$

Si, maintenant, on substitue ces valeurs dans l'équation qu'on obtient en comparant la première et la troisième fraction du système simultané, on aura

$$h\,dx = -\frac{(n^2-\alpha^2)\,du}{2nu+\dfrac{4\alpha^2 qh\upsilon}{c[\upsilon(n+\alpha)-(n-\alpha)]^2}},$$

ou, en remarquant que $dn = h\,dx$,

$$2nu\,dn + (n^2-\alpha^2)\,du = -\frac{4\alpha^2 qh\upsilon}{c}\,\frac{dn}{[\upsilon(n+\alpha)-(n-\alpha)]^2},$$

dont l'intégration donne

$$(n^2-\alpha^2)u - \frac{4\alpha^2 qh\upsilon}{(\upsilon-1)c}\,\frac{1}{\upsilon(n+\alpha)-(n-\alpha)} = \text{const.}$$

En remplaçant υ par sa valeur, on trouve

$$(n^2-\alpha^2)u - \frac{hq}{c}\,\frac{m^2-\alpha^2}{m-n} = \text{const.},$$

ou

$$z - \frac{f + 2gx + hx^2}{b + cy + g + hx}(p + \lambda q) = \text{const.},$$

ce qui se réduit encore à

$$w = z + \frac{2\lambda}{B(\lambda)}(p + \lambda q).$$

Introduisons enfin, ψ étant une fonction arbitraire,

$$\varphi = \psi(q, \upsilon, w)$$

dans l'équation $A(V) = 0$, alors celle-ci s'écrit

$$A(w)\frac{\partial\psi}{\partial w} + \frac{\partial\psi}{\partial q} = 0.$$

Or,

$$A(w) = \frac{2\lambda}{B(\lambda)} A(p + \lambda q) = 0;$$

par suite,

$$\frac{\partial\psi}{\partial q} = 0.$$

On conclut de cette discussion que les deux intégrales communes du système complet seront υ et w et que l'intégrale intermédiaire correspondante sera

$$w = f(\upsilon),$$

où f représente une fonction arbitraire

$$\upsilon = \frac{g + hx - \alpha}{g + hx + \alpha}\,\frac{b + cy - \alpha}{b + cy + \alpha},$$

$$w = z + \frac{2\lambda}{B(\lambda)}(p + \lambda q).$$

Le second système complet conduit de la même manière à la seconde intégrale intermédiaire

$$w' = f(\upsilon'),$$

où

$$v' = \frac{g + hx + \alpha}{g + hx - \alpha} \, \frac{b + cy - \alpha}{b + cy + \alpha},$$

$$w' = z + \frac{2\lambda}{B_1(\lambda)}(p - \lambda q)$$

et

$$B_1(\lambda) = -2\lambda \frac{g + hx - b - cy}{f + 2gx + hx^2}.$$

23. En considérant tous les cas possibles où l'équation de Monge se réduit à deux termes, on obtient six cas qu'on pourra écrire

$$r + \lambda s = 0, \qquad r + \lambda t = 0, \qquad r + \lambda = 0,$$
$$s + \lambda t = 0, \qquad s + \lambda \;= 0, \qquad t + \lambda = 0.$$

Le premier et le quatrième de ces cas, comme aussi le troisième et le sixième, se ramènent les uns aux autres par un changement de notation. Dans ce qui précède, nous avons traité trois des quatre cas restants. Pour compléter, nous allons ajouter encore quelques lignes sur le dernier cas $t + \lambda = 0$. Dans ce cas, les deux systèmes de caractéristiques sont confondus :

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$
$$dx = 0,$$
$$dq + \lambda\,dy = 0.$$

Le système linéaire équivalent

$$A(V) = \frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$
$$B(V) = \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} - \lambda\frac{\partial V}{\partial q} = 0$$

devra donc admettre trois intégrales communes pour que l'équation différentielle admette deux intégrales intermédiaires. Il faut donc que le système $A(V) = 0$, $B(V) = 0$ soit un système complet, ce qui donne la seule condition

$$A(\lambda) = \frac{\partial \lambda}{\partial p} = 0.$$

Il en résulte qu'on peut choisir pour la fonction λ toute fonction indépendante de p. Pour obtenir les deux intégrales, on aura à déterminer les trois intégrales du système

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{q} = \frac{dq}{\lambda(x, y, z, q)}.$$