ÉMILE BOREL

Mémoire sur les séries divergentes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 16 (1899), p. 9-131

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1899_3_16__9_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

MÉMOIRE
SUR
LES SÉRIES DIVERGENTES,

PAR M. ÉMILE BOREL.

INTRODUCTION.

L'étude de la question proposée par l'Académie [1] m'a conduit rapidement à penser que, pour traiter le sujet d'une manière un peu complète, il était nécessaire de résoudre tout d'abord des problèmes très divers d'Analyse et, en particulier, de Théorie des fonctions, problèmes qui paraissent tout d'abord n'avoir que de lointains rapports avec les séries divergentes. Malheureusement, il aurait fallu beaucoup plus de temps et de talent que je n'en ai eus à ma disposition pour le faire avec toute l'ampleur qui m'aurait paru désirable.

J'ai dû me borner à une esquisse dans laquelle bien des parties ne sont même pas ébauchées; on trouvera, dans ce Mémoire, plus de

(1) Cette question était la suivante : *Chercher à étendre le rôle que peuvent jouer en Analyse les séries divergentes.* Le texte imprimé ici est la reproduction du manuscrit couronné par l'Académie des Sciences (grand prix des Sciences mathématiques, 1898), sauf quelques modifications de pure forme qui avaient été rendues nécessaires par l'obligation imposée aux concurrents de rester anonymes.

problèmes posés que de questions résolues. Mais il m'a paru nécessaire de laisser subsister ces parties à peine ébauchées; c'était le seul moyen de ne pas renoncer complètement à l'unité que j'aurais rêvé de mettre dans ce Travail.

J'espère néanmoins avoir obtenu quelques résultats nouveaux, qui paraîtront peut-être dignes d'attention. On trouvera les principaux dans les paragraphes IV et VII du Chapitre I, dans le paragraphe III du Chapitre II, dans les paragraphes IV et V du Chapitre III.

Dans ces derniers paragraphes je prouve notamment que, si une série divergente vérifie formellement une équation différentielle algébrique et *si elle est sommable,* elle définit une solution de l'équation (c'est-à-dire fournit le moyen de calculer numériquement cette solution). D'ailleurs le mot *sommable* n'a pas un sens absolu; je veux dire : il y a une infinité de procédés de *sommation* tels que le théorème soit vrai. J'indique quelques-uns de ces procédés : lorsqu'on choisit arbitrairement l'un d'eux, le théorème prend un sens tout à fait précis.

Il semble que l'étude, par cette méthode, des équations différentielles doit être concomitante de l'étude de leurs singularités au point de vue indiqué dans les paragraphes cités du Chapitre I.

Quelques mots, pour terminer, sur le plan de ce Travail.

L'étude des séries divergentes m'a conduit à quelques réflexions générales sur la convergence et la divergence; et ces réflexions, à leur tour, m'ont rendu de grands services dans la suite de mes recherches. Il m'a paru naturel de commencer par les exposer : tel est le but du Chapitre I, dont la lecture peut d'ailleurs être omise sans inconvénient.

Dans le Chapitre II, je m'occupe de la sommation des séries divergentes en général, et en particulier des séries de puissances dont le rayon de convergence est fini. Le Chapitre III est consacré au cas où ce rayon est nul; il se termine par l'étude et l'interprétation, à mon point de vue, de résultats obtenus par Stieltjes sur une classe particulière de telles séries. J'ai terminé par quelques pages de conclusion.

CHAPITRE I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LA CONVERGENCE ET LA DIVERGENCE.

I. — Les séries à termes positifs.

Les règles de convergence des séries à termes positifs

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

peuvent être rangées dans deux grandes classes. Les unes ont un énoncé déterminé, telle la règle de Cauchy relative à la limite de $\sqrt[n]{u_n}$; dans l'énoncé des autres, au contraire, interviennent une infinité de nombres arbitraires, assujettis seulement à croître indéfiniment avec leur indice : le premier type de cette deuxième catégorie est dû à Kummer. Au point de vue auquel nous nous placerons dans ce Chapitre, ces dernières règles sont entièrement dépourvues d'intérêt [1]. Si l'on se propose, en effet, d'approfondir la notion de limite, c'est-à-dire de rechercher quels sont les modes divers par lesquels une quantité variable peut tendre vers sa limite, ces règles ne peuvent rendre aucun service.

Elles font intervenir, avons-nous dit, une suite indéfinie de quantités positives

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{2}$$

augmentant indéfiniment avec leur indice n. C'est là une notion précisément aussi complexe que celle qu'il s'agit d'éclaircir. Il y a autant de modes par lesquels la suite (2) peut augmenter indéfiniment que de modes par lesquels la série (1) peut converger.

Il est donc entendu que nous parlerons seulement des critères de convergence de la première catégorie.

---

[1] Ces règles sont, au contraire, fort intéressantes, si on les regarde comme des moyens d'obtenir, par un choix convenable des indéterminées, un grand nombre de règles de la première catégorie.

On pourrait nous objecter que ces critères, tel le critère de Cauchy rappelé il y a un instant, font aussi intervenir la notion de limite, et, par suite, ne peuvent pas non plus servir à l'éclaircir. Il est aisé de réfuter cette objection, et ce nous sera une occasion d'observer un phénomène des plus importants et que nous retrouverons souvent dans la suite.

La règle de Cauchy nous enseigne que la série (1) est convergente si $\sqrt[n]{u_n}$ a une limite inférieure à *un*; ou bien si $\sqrt[n]{u_n}$ n'ayant pas de limite unique, la plus grande de ses limites est inférieure à *un*. Mais on peut énoncer cette règle sans faire intervenir la notion de limite; il suffit de dire, qu'à partir d'une certaine valeur de n, $\sqrt[n]{u_n}$ est inférieur à un nombre fixe inférieur à *un*. De même pour la divergence. Le seul cas où intervienne réellement la notion de limite est celui où cette limite est précisément *un*. Or, on sait que, dans ce cas, la question n'est pas résolue; *on est ramené à une difficulté aussi grande que celle d'où l'on est parti*. Nous conviendrons de dire dans ce cas que la règle de Cauchy est *en défaut;* nous dirons, au contraire, qu'elle est *inapplicable*, si $\sqrt[n]{u_n}$ n'a pas de limite unique, mais tend vers plusieurs limites, dont les unes sont plus grandes, les autres plus petites que *un*.

On voit que c'est seulement dans le cas où la règle est *en défaut* que la notion de limite y intervient effectivement et l'on pourrait, en effet, remplacer alors l'étude de la série par l'étude de la manière dont $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers sa limite.

Les règles de convergence dont nous nous occupons ici s'obtiennent par la comparaison de la série donnée avec une série déterminée, ou avec une intégrale définie (il est inutile de rappeler le lien établi par Cauchy entre la convergence des séries à termes positifs et des intégrales de fonctions positives *décroissantes*). Les plus étendues de ces règles (c'est-à-dire celles qui, dans la pratique, paraissent pouvoir s'appliquer le plus souvent) sont dues à M. Bertrand [1]; elles reposent sur la considération des intégrales définies de la forme

$$\int^{\infty} d\log^{(\alpha)} x; \quad \int^{\infty} d\left(\frac{1}{\log^{(\alpha)} x}\right)^{\varepsilon},$$

---

(1) *Journal de Liouville*, 1re série, t. VII; 1842.

où ε est une constante positive, α un entier positif, et où l'on a posé

$$\log^{(0)} x = x, \qquad \log^{(\alpha)} x = \log[\log^{(\alpha-1)} x] \qquad (\alpha > 0).$$

Pour les critères de M. Bertrand, comme pour celui de Cauchy, nous distinguerons les cas où ils sont *inapplicables* de ceux où ils sont *en défaut*. Par exemple, le premier de ces critères, déjà connu d'Abel et de Cauchy, est relatif au produit nu_n; si ce produit a pour limite *un*, le critère est *en défaut;* s'il prend une infinité de valeurs supérieures à $1 + \varepsilon$ et une infinité de valeurs inférieures à $1 - \varepsilon$, le critère est *inapplicable*.

Beaucoup de géomètres, parmi lesquels on peut citer O. Bonnet, ont omis de considérer les cas où ces critères sont *inapplicables;* cette erreur a été relevée, parfois très vivement, et a donné lieu à de nombreuses discussions. Il n'est pas douteux que ces cas n'existent; et il très aisé d'en *fabriquer;* ce qui est moins aisé, c'est d'en fournir des exemples *réels*, c'est-à-dire s'étant présentés naturellement aux géomètres. De plus, dans tous les cas indiqués jusqu'ici, à ma connaissance, où ces critères sont *inapplicables*, la série proposée se décompose naturellement en plusieurs séries partielles, à chacune desquelles ils sont applicables ([1]). Aussi, tout en reconnaissant l'importance théorique des remarques faites à ce sujet, on doit avouer que, dans la pratique, O. Bonnet se trouvait avoir raison : *les critères ne sont jamais inapplicables aux séries que l'on rencontre; on peut aisément les rendre applicables aux séries que l'on forme.*

Une autre question, plus importante à mon avis que la précédente, est celle-ci : les critères de M. Bertrand peuvent-ils être *tous* en défaut ? Cette question paraît avoir été pour la première fois ([2]) posée et résolue par Paul du Bois-Reymond, dans un Mémoire absolument fondamental ([3]). Par une méthode des plus originales et dont il a tiré

([1]) Voyez, par exemple, les séries formées par M. Pringsheim (*Math. Annalen*, t. 35, p. 345. *Cf.* le premier cahier de l'Encyclopédie Burkhardt-Meyer).

([2]) Dans son Mémoire (*loc. cit.*, p. 48), M. Bertrand dit à ce sujet, après avoir parlé des cas où les critères sont *inapplicables*, d'après nos définitions : « ... Il faut y joindre le cas, infiniment peu probable, où toutes ces expressions jusqu'à l'infini auraient l'unité pour limite. » C'est le cas où les critères sont tous en défaut qui est ainsi à la fois prévu et écarté.

([3]) *Journal de Crelle*, t. 76.

d'autres résultats sur lesquels nous reviendrons [1], il forme une série pour laquelle les critères de M. Bertrand sont tous *en défaut*, sans être jamais *inapplicables*. Mais le sens de la réalité ne l'abandonne pas au milieu de ces spéculations et il s'inquiète de l'approximation que peut fournir la série qu'il vient de former. Le résultat de son calcul est le suivant : pour atteindre la *moitié* de la somme totale, il faut prendre un nombre de termes égal au volume de la Terre exprimé en millimètres cubes. Après cette constatation, il laisse au lecteur le soin de conclure ; pour ma part, l'analyse admirable de Paul du Bois-Reymond ne fait que confirmer l'idée émise par O. Bonnet : les critères de M. Bertrand *suffisent*. Seulement, ce dernier mot n'a pas le sens absolu que lui ont attribué certains critiques, mais un sens relatif : ces critères suffisent pour décider de la convergence de toutes les séries qu'un géomètre peut actuellement rencontrer (à condition que l'on *sache* les appliquer, bien entendu, c'est-à-dire que l'on sache reconnaître, par exemple, que nu_n reste inférieur à $1 - \varepsilon$, dans le cas où il en est ainsi). Or, il est bien probable que c'est uniquement à ce sens *relatif* que s'attachait O. Bonnet.

Nous venons de constater, par un premier exemple, l'importance particulière de la fonction exponentielle (ou de la fonction inverse) et de leurs itérations successives : les intégrales (3) suffisent, dans la pratique, à fournir des fonctions de comparaison pour l'étude de *toutes* les séries à termes positifs et des intégrales de fonctions décroissantes [2].

II. — Les séries alternées.

Nous appelons, dans ce paragraphe, série *alternée*, une série dont les termes sont (au moins à partir d'un certain rang) alternativement positifs et négatifs, *leur valeur absolue variant constamment dans le même sens*. Une série alternée converge si son terme général tend vers zéro : c'est une règle bien classique, qu'on trouve dans tous les

[1] Page 18.

[2] Les termes des séries sont aussi décroissants ; sur cette restriction apparente, on pourrait faire les mêmes remarques que dans le cas des séries alternées dont nous allons parler.

Traités et qui est d'une application fréquente. Si nous la rappelons, c'est afin de remarquer une fois de plus quel rôle important joue en Mathématiques l'observation des faits analytiques et combien on risquerait d'errer en construisant l'Analyse *a priori*, sans tenir compte de ces faits. Assurément, *a priori*, la probabilité pour qu'une série soit alternée est manifestement *nulle;* l'idée de consacrer une règle spéciale à ces séries ne peut donc venir que de l'observation des faits, qui montre combien elles se présentent souvent dans la pratique.

Si les termes d'une série alternée tendent vers une limite finie a, la somme de la série converge alternativement vers deux nombres s et $s+a$; nous verrons que dans ce cas la série rentre dans la catégorie de celles que nous nommons *sommables* et a pour *somme* $s+\frac{a}{2}$.

Enfin, si les termes de la série alternée augmentent indéfiniment, la série est divergente. Elle est d'ailleurs, en général, *sommable,* si l'on a soin de prendre les mots *en général* dans un sens *pratique* et non *théorique*.

On voit que la notion de limite intervient directement dans l'étude de la convergence des séries alternées; cette étude ne peut donc permettre d'approfondir cette notion, comme l'étude de la convergence des séries à termes positifs.

Nous tenons à signaler un autre point important pour la suite : nous avons rappelé les liens étroits qu'il y a entre les séries à termes positifs décroissants et les fonctions décroissantes; à une première approximation (*voir* le paragraphe suivant pour le sens de ces mots), l'étude de la convergence des séries se confond avec celle de la convergence des intégrales. Il y a de plus grandes différences entre les séries alternées et ce que l'on peut appeler les fonctions *oscillantes,* qui tendent vers une limite a en prenant une infinité de fois la valeur a. Si, pour fixer les idées, nous considérons une fonction qui tend vers zéro lorsque la variable x augmente indéfiniment, on aura à considérer *deux* fonctions croissantes pour avoir une première idée du mode d'oscillation : 1° la fréquence des zéros; 2° l'inverse du maximum [1]

---

[1] Nous supposons implicitement cette dernière fonction croissante; c'est ce qui a lieu *en général* (*voir* le paragraphe V, p. 41).

dans l'intervalle de deux zéros; tandis que pour la série alternée, comme pour la série à termes positifs, il n'y a qu'*une* fonction à considérer.

III. — Les ordres d'infinitude.

On sait quel rôle important joue en Algèbre et en Analyse la considération des différents ordres d'infiniment petits; l'importance de ce rôle en Algèbre est due surtout à la proposition fondamentale suivante : les équations algébriques définissent toujours des infiniment petits d'un ordre infinitésimal *déterminé* (¹). En d'autres termes, pour connaître les divers modes suivant lesquels une fonction algébrique d'une variable peut tendre vers une limite, lorsque la variable tend elle-même vers une limite, il suffit d'étudier la manière dont x^a tend vers zéro lorsque x tend vers zéro (ou l'infini).

Bien que, dans ce paragraphe, il doive être exclusivement question de variables réelles, nous pouvons remarquer en passant que l'étude de ces modes est intimement liée à l'étude des singularités, en sorte que l'existence d'un ordre infinitésimal déterminé entraîne cette conséquence : les singularités des fonctions algébriques sont toutes de même nature que celles de la fonction x^a.

En effectuant sur la variable et sur la fonction (séparément) une substitution linéaire, nous pouvons nous borner au cas où, la variable tendant vers l'infini par valeurs positives, la fonction tend vers l'infini. *Nous supposerons d'abord que la fonction n'est pas oscillante* (c'est-à-dire ne prend pas une infinité de fois sa valeur limite) et nous admettrons qu'elle croît lorsque x croît (au moins à partir d'une certaine valeur de x).

Nous allons tout d'abord définir divers ordres d'infinitude, c'est-à-dire faire quelques conventions de langage (²).

Deux fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ auront le même ordre d'infinitude si

---

(¹) On sait, de plus, que cet ordre est commensurable.

(²) *Cf.* les travaux cités de Paul du Bois-Reymond et aussi ceux de M. Pincherle sur le même sujet; notre but n'est pas ici d'étudier la question générale de la classification des modes de croissance, mais seulement de donner quelques définitions qui nous seront commodes.

le rapport $\varphi : \varphi_1$ tend vers une limite finie lorsque x augmente indéfiniment. Dans ce qui suit, nous désignerons par a, b, c des nombres positifs, par α un nombre réel, par m un entier positif, par μ un entier réel.

Nous résumerons nos définitions dans le Tableau suivant; on remarquera qu'une difficulté résulte de ce que les fonctions considérées ne sont pas *permutables* entre elles; il y aurait peut-être lieu de compliquer les notations si l'on voulait approfondir la théorie; mais nous ne nous servirons que des définitions qui sont en tête du Tableau et, pour elles, nos notations suffisent.

Définitions.

Fonctions.	Ordre d'infinitude ($x = +\infty$).
x^a	a
$\varphi_1(x) = e^x$	ω
e^{ax}	$a\omega$
e^{x^a}	ωa
$\varphi_2(x) = e^{e^x}$	ω^2
$\varphi_m(x) = e^{\varphi_{m-1}(x)}$	ω^m
$\log x$	$\frac{1}{\omega} = \omega^{-1}$
$\log[\log x] = \log^{(2)} x$	ω^{-2}
$\varphi_{-m}(x) = \log^{(m)}(x) = \log[\log^{(m-1)} x]$	ω^{-m}
$e^x \log x$	$\omega + \omega^{-1}$
$x^a \varphi_\mu(x) \varphi_\nu(x)$	$a + \omega^\mu + \omega^\nu$
$x^a [\varphi_\mu(x)]^b$	$a + b\omega^\mu$
$x^a (\log x)^\alpha$	$a + \alpha\omega^{-1}$
$e^{ae^{bx^c}}$	$a\omega b\omega c$
$x^a e^{(\log x)^b}$	$a + \omega b \omega^{-1}$

Ces deux derniers exemples sont donnés pour mémoire seulement, car nous ne nous proposons pas ici d'étudier complètement le calcul de ces symboles, mais seulement d'adopter un langage abrégé dans des cas simples.

Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$ aura même ordre d'infinitude que l'une des fonctions de notre Tableau, nous dirons qu'elle a un ordre d'infinitude *déterminé*. Cette définition est évidemment arbitraire (de même d'ailleurs que la définition d'un ordre infinitésimal déterminé); mais l'expérience prouve que les fonctions qui ont un ordre d'infinitude déterminé jouent un rôle prépondérant en Analyse; l'un des buts de nos recherches est même de montrer que, dans des cas très étendus, on peut se borner à considérer de telles fonctions; mais nous ne ferons, dans ce Mémoire, qu'effleurer cette question (1), dont l'importance nous paraît très grande.

Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$ n'a pas un ordre d'infinitude déterminé, diverses circonstances peuvent se présenter. Nous conviendrons de dire que l'ordre d'infinitude de $\varphi(x)$ est *supérieur* à celui de $\varphi_1(x)$ si le rapport $\varphi : \varphi_1$ augmente indéfiniment avec x; l'ordre d'infinitude de φ_1 est *inférieur* à celui de φ : cette définition ne suppose pas déterminés les ordres de φ et de φ_1.

1° Il peut arriver que l'ordre de $\varphi(x)$ soit supérieur à ω^m, quel que soit m; nous conviendrons alors de dire, pour abréger le langage, que l'ordre de $\varphi(x)$ est *supérieur* à ω^ω; de même si l'ordre de $\varphi(x)$ est inférieur à ω^{-m}, quel que soit m, cette ordre sera dit *inférieur* à $\omega^{-\omega}$. Ces fonctions ont été respectivement appelées fonctions à croissance *très rapide* et *très lente* [Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX)]. On les forme aisément par une méthode dont le principe est dû à du Bois-Reymond et que nous avons déjà citée. Mais, jusqu'ici, *jamais de telles fonctions ne se sont présentées naturellement aux géomètres;* nous reviendrons sur ce point dans les derniers paragraphes de ce Chapitre.

2° Il peut arriver que la fonction $\varphi(x)$ prenne, quel que soit m, pour une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment, des valeurs supérieures (2) à $\varphi_m(x)$; en d'autres termes le rapport $\varphi : \varphi_m$ ne croit pas indéfiniment avec x, mais il ne reste pas non plus limité. Dans ce cas nous dirons que l'ordre de $\varphi(x)$ est *irrégulièrement supérieur* à ω^ω; on définirait de même un ordre *irrégulièrement inférieur* à $\omega^{-\omega}$. Au sujet de ces fonctions vaut l'observation qui termine le 1°; il semble même qu'elles soient encore plus artificielles que les précédentes.

3° Lorsque l'on ne se trouve dans aucun des cas jusqu'ici examinés, il existe certainement dans le Tableau des fonctions F dont l'ordre

(1) Dans les paragraphes IV et VII de ce Chapitre.

(2) Rappelons que l'on a posé $\varphi_1(x) = e^x$; $\varphi_m(x) = e^{\varphi_{m-1}(x)}$.

d'infinitude est supérieur à celui de $\varphi(x)$ et des fonctions G dont l'ordre d'infinitude est inférieur à celui de $\varphi(x)$. La connaissance de ces deux catégories de fonctions apprend évidemment quelque chose sur la manière dont croît $\varphi(x)$: cette fonction n'échappe pas complètement à nos définitions comme dans les cas précédents.

Mais deux cas sont à distinguer : il peut arriver que l'ensemble des fonctions F et G *épuise* ou *n'épuise pas* l'ensemble des fonctions de notre Tableau. Dans le premier cas la fonction $\varphi(x)$ est telle, que son ordre d'infinitude est supérieur ou inférieur à l'ordre de toute fonction *d'ordre déterminé :* nous dirons que la croissance de $\varphi(x)$ est *régulière*. Dans le second cas il existe des fonctions $\varphi(x)$ d'ordre d'infinitude déterminé et telles que le rapport $\varphi : \psi$ ne tend vers aucune limite (ni vers l'infini) lorsque x augmente indéfiniment : nous dirons alors que la fonction $\varphi(x)$ est à *croissance irrégulière* (¹).

En résumé, les fonctions croissantes dont l'ordre d'infinitude n'est pas déterminé appartiennent à l'une des catégories suivantes : fonctions dont l'ordre est (régulièrement ou irrégulièrement) supérieur à ω^ω (ou inférieur à $\omega^{-\omega}$); fonctions à croissance régulière; fonctions à croissance irrégulière.

Donnons un exemple de cette dernière catégorie. Définissons les a et les b par les identités

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$
$$e^{x^2} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \qquad (b_1 = b_3 = \ldots = 0).$$

Posons, d'autre part, m étant un entier,

$$F(0) = 0; \qquad F(m) = 10^{10^m} \qquad (m > 0).$$

Si l'on a

$$F(2m) \leqq n < F(2m+1) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

nous poserons

$$c_n = a_n,$$

(¹) On peut rapprocher ces considérations de celles que j'ai développées dans une Note des *Comptes rendus : Sur les types de croissance et sur les fonctions entières*, janvier 1898.

et si l'on a

$$F(2m+1) \leqq n < F(2m+2) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

nous poserons

$$c_n = b_n.$$

Les c étant ainsi définis pour toute valeur de n, la fonction à croissance irrégulière que nous voulions former est la suivante :

$$\varpi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots.$$

On prouvera aisément (x étant réel et positif) que cette fonction a les propriétés suivantes :

On peut déterminer une suite de valeurs de x croissant indéfiniment : $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$, et telles que l'on ait

$$\lim_{m=\infty} \frac{\varpi(x_m)}{e^{x_m}} = 1.$$

On peut déterminer aussi une suite de valeurs de x croissant indéfiniment $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots$ et telles que l'on ait

$$\lim_{m=\infty} \frac{\varpi(\xi_m)}{e^{\xi_m^2}} = 1.$$

En d'autres termes, la fonction $\varpi(x)$ est, pour une infinité de valeurs de x, très voisine de e^x et, pour une infinité de valeurs de x, très voisine de e^{x^2}. On pourrait même montrer qu'il en est ainsi dans des intervalles d'étendue très considérable [1]. *Les dérivées d'ordre quelconque de $\varpi(x)$ sont croissantes et ont des propriétés semblables.*

On pourra dire que l'ordre d'infinitude de $\varpi(x)$ est compris entre ω et $\omega 2$, mais il n'a aucune valeur déterminée entre ces deux ordres; nous ne nous étendrons pas sur les propriétés de la fonction $\varpi(x)$ (intéressante aussi à étudier dans tout le plan); mais nous avons tenu à construire cet exemple afin de pouvoir donner une forme plus concrète aux observations qui vont suivre, dans lesquelles nous utiliserons

---

[1] En désignant par ε un nombre positif arbitrairement petit, mais fixe, on peut prendre

$$F(2m+\varepsilon) < x_m < F(2m+1-\varepsilon), \qquad F(2m+1+\varepsilon) < \xi_m < F(2m+2-\varepsilon),$$

la fonction $\varpi(x)$ simplement comme exemple de fonction à croissance irrégulière, sans qu'il soit besoin d'en connaître d'autres propriétés que celles que nous avons indiquées.

Comme nous l'avons déjà remarqué, une fonction algébrique y, qui devient infiniment petite avec la variable x, possède un ordre infinitésimal déterminé, c'est-à-dire qu'il existe un nombre a (d'ailleurs rationnel et positif, mais ceci nous importe peu actuellement), tel que l'on ait

$$y = x^a(c + \varepsilon), \tag{1}$$

c étant une constante et ε un infiniment petit. Mais il y a plus. Il résulte de l'égalité (1) que ε est aussi une fonction algébrique de x; il possède donc un ordre infinitésimal déterminé; et si l'on pose

$$\varepsilon = x^b(c' + \varepsilon'), \tag{2}$$

on pourra raisonner de même sur ε', etc.

Si l'on considère une fonction y satisfaisant à une égalité telle que (1), sans qu'on la suppose algébrique, cette fonction aura, au voisinage de $x = 0$, bien des propriétés communes avec une fonction algébrique : elle ne s'en distinguera pas à un premier examen. Mais, si l'on y regarde de plus près et si l'on étudie l'infiniment petit ε, des circonstances très diverses pourront se présenter, et, par exemple, l'ordre infinitésimal de ε pourra ne pas être déterminé. Dans ce cas, l'étude de ε suffira pour distinguer nettement y d'une fonction algébrique.

Supposons, au contraire, que l'on ait l'égalité (2); l'analogie entre y et une fonction algébrique, au voisinage de zéro, sera plus grande que lorsqu'on supposait seulement l'égalité (1); on pourra dire que la fonction y a l'apparence algébrique à *la deuxième approximation*, et non plus seulement à *la première;* elle ne se distingue d'une fonction algébrique que par les propriétés de ε'. Il est clair que, de même que beaucoup de propriétés d'une courbe et d'une surface en un point ne dépendent que de leurs éléments infinitésimaux d'un ordre déterminé, de même pour beaucoup de propriétés des fonctions, il importera peu que la fonction y soit algébrique ou ait seulement l'apparence algébrique, avec une approximation d'ordre déterminé. Mais, par contre, la différence apparaîtra à un moment donné.

Des remarques analogues pourraient être faites sur les dérivées des divers ordres des fonctions algébriques; mais nous n'y insistons pas, car nous aurons tout à l'heure l'occasion de les faire à propos des ordres d'infinitude, dont l'étude est notre véritable but.

Considérons une fonction $\varphi(x)$ ayant un ordre d'infinitude déterminé, par exemple $\omega + 1$; cela signifie que l'on a

$$\psi(x) = (c + \varepsilon) x e^x,$$

c étant une constante et ε infiniment petit pour x infini. Il peut arriver que ε soit *oscillant*, c'est-à-dire prenne une infinité de fois la valeur zéro; dans le cas contraire, ε sera, à partir d'une certaine valeur de x, ou positif ou négatif; nous poserons, suivant le cas

$$\frac{\pm 1}{\varepsilon} = \psi_1(x),$$

la fonction $\psi_1(x)$ étant positive. Si cette fonction est constamment croissante et a un *ordre d'infinitude déterminé*, nous pourrons opérer sur elle de la même manière que sur $\psi(x)$, c'est-à-dire poser, par exemple,

$$\psi_1(x) = (c' + \varepsilon') \log x,$$

et, s'il y a lieu, c'est-à-dire si ε' n'est pas oscillant,

$$\frac{\pm 1}{\varepsilon'} = \psi_2(x).$$

Dans le cas où nous pourrons continuer ainsi m fois [1], nous dirons que la fonction proposée a un ordre d'infinitude déterminé *jusqu'à la* $m^{\text{ième}}$ *approximation;* si l'on peut continuer quel que soit m (ou si, pour quelque valeur de m, ε devient nul), on dira que la fonction a un ordre d'infinitude *absolument* déterminé; on peut en obtenir des expressions asymptotiques de plus en plus approchées en combinant seulement *et en nombre limité*, les fonctions qui figurent à notre Tableau.

Il est très aisé de former des fonctions ayant un ordre d'infinitude

(1) On voit très bien que ce procédé, indiqué ici à titre d'exemple, pourrait être remplacé par d'autres analogues.

déterminé, *seulement à la* PREMIÈRE *approximation*, par exemple. Il suffit d'utiliser la fonction $\varpi(x)$ définie tout à l'heure. Posons

$$\psi(x) = e^x[x + \varpi(\log^{(2)} x)];$$

on voit immédiatement que la fonction $\psi(x)$ est d'ordre $\omega + 1$, tandis que $\psi_1(x)$ n'a pas d'ordre déterminé, mais est compris entre $\frac{x}{\log x}$ et $\frac{x}{(\log x)^{\log^{(2)} x}}$; la première de ces fonctions est d'ordre $1 - \omega^{-1}$; pour indiquer l'ordre de la seconde, il serait nécessaire d'étendre les conventions déjà faites, ce qui est tout à fait inutile pour l'instant.

On peut présenter les remarques qui précèdent à un point de vue un peu différent. Soit $\psi(x)$ une fonction ayant un ordre d'infinitude déterminé, $\theta(x)$ une fonction de notre Tableau (on aurait pu supposer seulement que $\theta(x)$ a un ordre déterminé); les fonctions $\psi(x) \pm \theta(x)$, la fonction $\psi[\theta(x)]$, la fonction $\theta[\psi(x)]$, etc., ont, *en général*, un ordre d'infinitude déterminé. Il peut y avoir exception si l'ordre de $\psi(x)$ est déterminé à la première approximation seulement. Par exemple, pour la fonction $\psi(x)$ considérée il y a un instant, l'ordre de $\psi(x) - xe^x$ n'est pas déterminé. Si l'on considérait une fonction $\psi(x)$ s'exprimant au moyen de fonctions de notre Tableau, combinées en nombre limité, il est clair que des combinaisons simples avec des fonctions du Tableau lui conserveraient le même caractère; le même phénomène se produira pour une fonction telle que $\psi(x)$, avec des exceptions possibles dépendant précisément de l'approximation à laquelle l'ordre d'infinitude est déterminé. Mais nous voulions seulement signaler ce point de vue, qu'il est inutile de développer.

Il nous suffit, pour ce qui va suivre, de la remarque suivante : si l'ordre d'infinitude de $\psi(x)$ est déterminé, il en est de même, *en général* (1), de celui de $e^{\psi(x)}$. Grâce à cette remarque, nous voyons que l'on peut, sans altérer beaucoup la généralité, supposer que l'ordre de la fonction à étudier est supérieur à ω, c'est-à-dire à celui

---

(1) Voici un exemple où il n'en est pas ainsi; il suffit de prendre

$$\psi(x) = e^{x^2} + \varpi(x).$$

de e^x. Cette hypothèse nous sera commode pour l'étude des dérivées, bien qu'elle ne soit pas indispensable ([1]).

Considérons donc une fonction y ayant un ordre d'infinitude déterminé, supérieur à ω. On a

$$y = \mathrm{Y}(c+\varepsilon), \tag{1}$$

Y étant une fonction déterminée du Tableau (par exemple e^{x^2} pour fixer les idées), c une constante et ε un infiniment petit. On déduit de (1)

$$y' = \mathrm{Y}'(c+\varepsilon) + \varepsilon'\mathrm{Y} = \mathrm{Y}'\left(c+\varepsilon+\varepsilon'\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Y}'}\right). \tag{2}$$

Le rapport $\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Y}'}$ est infiniment petit (grâce à l'hypothèse que l'ordre de Y est supérieur à ω); si donc ε' est infiniment petit, l'ordre de y' est égal à celui de Y'. On sait déjà que, si le rapport $\frac{y'}{\mathrm{Y}'}$ a une limite pour $x=\infty$, cette limite est la même que celle du rapport $\frac{y}{\mathrm{Y}}$; ce qu'on peut énoncer en disant que si y' a un ordre déterminé, c'est précisément l'ordre de Y'. Mais nous venons de donner une condition *suffisante* pour qu'il en soit ainsi : ε' doit être infiniment petit ([2]). On voit aisément que, si ε' n'est pas infiniment petit, c'est grâce à un terme oscillant; mais ce terme peut être placé aussi loin que l'on veut, de sorte que l'on ne peut donner de règle précise. Par exemple, on peut avoir

$$\varepsilon = \frac{1}{e^{x^2}+e^x+x+\log(2+\sin e^{x^3})}.$$

([1]) Il y aurait encore beaucoup à dire sur le sujet que nous venons d'effleurer. Par exemple, il faudrait classer dans notre Tableau fondamental toutes les fonctions qu'on obtient en regardant celles qui y figurent déjà comme fonction les unes des autres : par exemple, en regardant xe^{x^2} comme fonction de $e^{(\log x)^3}$. Cela amènerait à étendre la notation des ordres d'infinitude et à préciser les règles de leur calcul, nécessairement compliqué à cause de la non-commutabilité des opérations. Mais il nous paraît de beaucoup préférable d'indiquer ici quelques applications de ces considérations; il sera temps de les développer si le besoin des applications l'exige.

([2]) Comparez avec les recherches de du Bois-Reymond sur la différentiation des égalités infinitaires et de M. Poincaré sur la différentiation des égalités asymptotiques.

Nous étudions plus loin les fonctions oscillantes; c'est, en réalité, l'extension à de telles fonctions de la notion de limite qui permet d'utiliser des séries ou des intégrales divergentes.

Pour le moment, nous dirons simplement que, *en général*, l'ordre des dérivées successives d'une fonction s'obtient simplement en différentiant l'ordre de la fonction.

On voit amplement par ce qui précède combien il serait important, étant donnée une fonction, définie par exemple au moyen d'une équation différentielle, de savoir reconnaître si cette fonction rentre ou non dans les mots *en général*. Si l'on en était assuré, en effet, bien des problèmes difficiles se résoudraient immédiatement, par une méthode analogue à celle de Puiseux pour l'étude des racines infiniment petites d'une équation algébrique. Soit, par exemple, l'équation

$$y'' = y[a^2 + \varphi(x)] \qquad (a > 0),$$

dans laquelle $\varphi(x)$ est infiniment petit pour x infini; recherchons si cette équation a une intégrale d'un ordre d'infinitude déterminé pour $x = +\infty$. Les termes d'ordre maximum seront nécessairement $y'' - a^2 y$, d'où l'on conclut immédiatement que y est de l'ordre de e^{ax}. C'est là un résultat bien connu, dû à M. Poincaré; notre procédé s'appliquerait tout aussi aisément à des équations bien plus compliquées.

Mais il est inutile d'insister pour le moment sur ce point, car il est clair que ce procédé ne peut être appliqué *rigoureusement* (il peut toujours servir comme moyen de recherche) que si l'on précise les cas dans lesquels les fonctions inconnues et leurs dérivées jusqu'à un ordre convenable ont un ordre d'infinitude déterminé. La détermination tout à fait générale de ces cas serait des plus importantes; nous pourrons seulement donner quelques propositions sur ce sujet : elles font l'objet du paragraphe suivant, dans lequel nous nous occuperons d'équations différentielles *rationnelles* (en $x, y, y', \ldots$), et de leurs intégrales, *supposées augmenter indéfiniment* avec x, ainsi que leurs dérivées. Ensuite, nous dirons quelques mots des fonctions oscillantes dont l'étude est bien plus difficile.

Un mot cependant sur notre limitation aux équations différentielles *rationnelles* en x. Bien des résultats que nous obtiendrons pourraient s'étendre aux équations rationnelles en $y, y', \ldots$, dont les coefficients seraient des fonctions de x *d'ordres d'infinitude déterminés*. A une approximation déterminée (nous savons ce qu'on doit entendre par là), il n'y aura pas de difficulté, et tout se passera aussi régulièrement que si les coefficients étaient rationnels. Mais si ces coefficients ont un ordre d'infinitude déterminé seulement jusqu'à une certaine approximation : en d'autres termes, s'ils n'appartiennent pas à notre Tableau, mais sont seulement liés aux fonctions de ce Tableau par des inégalités plus ou moins étroites, alors ils renferment en germe toutes les difficultés que Paul du Bois-Reymond a reconnues à l'étude générale des ordres d'infinitude, difficultés que notre but est précisément d'écarter, vu qu'elles paraissent actuellement insurmontables et le seront sans doute tant que la notion du transfini ne sera pas pour nous aussi claire que celle de l'indéfini.

Il n'en résulte pas qu'il faille s'interdire de considérer des équations non rationnelles; dans bien des cas, les premières approximations suffisent pour le but que l'on a en vue, et il est alors indifférent que les coefficients soient rationnels ou simplement assujettis à des inégalités d'infinitude convenables.

IV. — Application aux équations différentielles.

Dans ce paragraphe, comme dans le précédent, *nous nous occupons exclusivement de variables réelles* (*positives*), le dernier paragraphe de ce Chapitre (p. 44) est consacré à l'extension aux variables complexes.

Nous nous proposons d'étudier l'ordre d'infinitude des intégrales qui augmentent indéfiniment par valeurs positives, lorsque x tend vers $+\infty$. Bien des problèmes peuvent être ramenés à celui-là par des changements de variable simples. Nous étudierons plus loin (§ VI, p. 41) le cas des fonctions oscillantes.

Nous supposons, pour plus de netteté, l'équation rationnelle (en $x, y, y', \ldots$) (*voir* la fin du paragraphe précédent); considérons d'abord une équation du premier ordre

$$f(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

dont le premier membre est un polynome en x, y, y'. Nous allons démontrer un premier théorème : *l'ordre d'infinitude de y est inférieur à ω^2.* En d'autres termes, y étant une intégrale quelconque de (1), on a certainement, à partir d'une certaine valeur de x,

$$y < e^{e^x} \tag{2}$$

Je vais montrer d'abord que si l'on n'a pas l'inégalité (2) on peut affirmer que, pour une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment, on a à la fois

$$y > e^{e^x}, \qquad y' > \frac{1}{2} e^x y. \tag{3}$$

En effet, nier l'existence de sinégalités (3), c'est affirmer que, pour toute valeur de x, on a, *ou bien*

$$y < e^{e^x}, \tag{2}$$

ou bien

$$y' < \frac{1}{2} e^x y. \tag{4}$$

Nous en conclurons aisément que l'on a l'inégalité (2) pour *toutes* les valeurs de x qui dépassent une certaine limite, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Remarquons d'abord que si l'inégalité (4) *a lieu pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0*, on en conclut immédiatement, pour $x > x_0$,

$$\log y(x) - \log y(x_0) < \frac{1}{2}(e^x - e^{x_0}),$$

$$y(x) < \frac{y(x_0)}{e^{\frac{1}{2}e^{x_0}}} e^{\frac{1}{2}e^x},$$

ce qui entraîne nécessairement l'inégalité (2) pour les valeurs de x qui dépassent une certaine limite.

Nous devons donc admettre que l'inégalité (2) a lieu pour certaines valeurs de x [puisque l'inégalité (4) ne peut avoir lieu pour toute valeur de x]. Nous allons montrer que, si l'inégalité (2) est vérifiée pour $x = x_0$, elle l'est aussi pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0.

En effet, supposons qu'elle cesse d'être vérifiée pour $x = \xi$; on aura

$$(5) \qquad y(\xi) = e^{e^{\xi}},$$

et il y aura des valeurs de x, différant de ξ aussi peu que l'on veut et telles que l'on ait

$$(5') \qquad y(x) > e^{e^{x}}.$$

Pour ces valeurs de x, on aura, par hypothèse,

$$(4) \qquad y' < \frac{1}{2} e^{x} y.$$

On en conclut que l'on a sûrement, dans un petit intervalle consécutif à ξ (en vertu de la continuité des fonctions considérées)

$$(6) \qquad y' < \frac{2}{3} e^{x} y, \quad \text{pour } \xi < x < \xi_1,$$

Des équations (5) et (6), on déduit

$$y < \left(e^{\frac{2}{3} e^{x} - \frac{2}{3} e^{\xi_1}}\right) e^{e^{\xi_1}},$$

c'est-à-dire

$$y < e^{\frac{2}{3} e^{x} + \frac{1}{3} e^{\xi_1}} < e^{e^{x}} \quad \text{pour } \xi < x < \xi_1,$$

ce qui est contradictoire avec (5').

Nous sommes donc assurés qu'il existe une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment et telles que l'on ait simultanément

$$(3) \qquad y > e^{e^{x}}, \qquad y' > \frac{1}{2} e^{x} y.$$

Désignons maintenant par ε un nombre positif *fixe*, mais que nous pouvons choisir aussi petit que nous voulons (il ne doit dépendre que de l'équation différentielle proposée, ou plus exactement de son degré total en y, y'). Ne considérons que des valeurs de x telles que l'on ait

$$\frac{1}{2} e^{x} e^{e^{x}} < (e^{e^{x}})^{1+\varepsilon},$$

ce qui a lieu évidemment à partir d'une certaine valeur de x. Cela posé, je dis que si les inégalités (3) sont vérifiées pour $x = x_1$, et si l'on a, pour $x = x_1$,

$$y' > y^{1+\varepsilon}, \tag{7}$$

on peut trouver un nombre $\xi_1 > x_1$ *tel que pour* $x = \xi_1$ *on ait, non seulement les inégalités* (3), *mais encore*

$$y' = y^{1+\varepsilon}. \tag{8}$$

En effet, il est clair d'abord que l'inégalité (7) ne saurait subsister pour toute valeur de x, car on en tirerait

$$dx < \frac{dy}{y^{1+\varepsilon}},$$

$$x - x_1 < \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{y_1^{\varepsilon}} - \frac{1}{y^{\varepsilon}}\right) < \frac{1}{\varepsilon y_1^{\varepsilon}}.$$

Ainsi, il existe certainement une valeur ξ_1 de x, supérieure à x_1, telle que pour $x_1 < x < \xi_1$ on ait l'inégalité (7), mais que pour $x = \xi_1$ on ait l'égalité (8); *nous allons montrer que les inégalités* (3) *ne cessent pas d'être vérifiées pour* $x_1 < x \leqq \xi_1$.

L'une d'elles

$$y' > \frac{1}{2} e^x y$$

est une conséquence de l'inégalité (7) et du fait que l'on considère seulement des valeurs de x telles que l'on ait

$$\frac{1}{2} e^x e^{e^x} < (e^{e^x})^{1+\varepsilon}.$$

Or il est évident que si l'on a pour $x = x_1$,

$$y > e^{e^x},$$

et pour $x_1 < x \leqq \xi_1$,

$$y' > y e^x,$$

on a, pour $x_1 < x \leqq \xi_1$,

$$y > e^{e^x}.$$

Donc si, en même temps que les inégalités (3) on n'a pas, pour $x = x_1$,

$$y' \leqq y^{1+\varepsilon},$$

on pourra trouver un nombre $\xi_1 > x_1$, tel que l'on ait pour $x = \xi_1$ les inégalités (3) et l'égalité (8).

De toute façon, il existe un nombre ξ_1 (pouvant être x_1 lui-même, et tel que l'on ait à la fois

$$(3') \qquad y > e^{e^x}, \qquad y' > e^x y, \qquad y' \leqq y^{1+\varepsilon}.$$

Comme il existe une infinité de nombres supérieurs à ξ_1 et donnant lieu aux inégalités (3), on peut raisonner sur l'un d'eux comme sur x_1. On trouvera ainsi une infinité de nombres ξ, croissant indéfiniment et tels que, pour chacun d'eux, on ait les inégalités (3′). Or ceci est manifestement impossible; en effet, écrivons

$$f(x, y, y') = \Sigma A_{\alpha,\beta,\gamma}\, x^\alpha y^\beta y'^\gamma,$$

et considérons le terme pour lequel la somme

$$(\beta + \gamma) g^2 + \gamma g + \alpha$$

est la plus grande, lorsque g est une constante positive assez grande, c'est-à-dire supérieure [1] à la plus grande des sommes $\alpha + \beta + \gamma$.

Il est clair que pour des valeurs de x suffisamment grandes donnant lieu aux inégalités (3′) (et nous savons qu'il en existe d'aussi grandes que l'on veut), ce terme sera supérieur à la somme des valeurs absolues de tous les autres, ce qui est contradictoire.

Nous avons donc démontré la proposition énoncée.

On pourrait la compléter en comparant y à e^{x^a}, ce qui exigerait une étude plus approfondie de l'équation différentielle; pour une équation donnée, on trouverait aisément un nombre a tel que l'on puisse affirmer que y est certainement d'ordre inférieur à celui de e^{x^a} (c'est-à-dire à ωa). Mais nous préférons nous attacher aux propositions les plus générales.

On peut induire de ce qui précède que, si l'on considère une équation d'ordre m,

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0,$$

---

(1) Il suffit de prendre l'arbitraire ε, de manière que $\frac{1}{\varepsilon}$ soit aussi supérieur à toutes ces sommes.

dont le premier membre est un polynome, l'ordre de l'intégrale est sûrement inférieur à ω^{m+1}, et par suite que, par des équations différentielles algébriques, il est impossible de définir des fonctions dont l'ordre soit (régulièrement ou irrégulièrement) supérieur à ω^ω.

Mais, bien que cette proposition ne me paraisse pas douteuse, je n'ai pu en trouver encore de démonstration simple; et j'ai craint la longueur fastidieuse des raisonnements auxquels on se trouve conduit, si l'on veut chercher à généraliser ceux que nous allons faire pour l'équation du second ordre

$$f(x, y, y', y'') = 0. \tag{10}$$

Nous nous proposons de démontrer que toute intégrale y de cette équation est d'ordre inférieur à ω^3. En d'autres termes, soit y une intégrale de (10); nous supposons que, lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives, y ne devient pas infini pour une infinité de valeurs de x. Dès lors *nous pourrons affirmer que à partir d'une certaine valeur de x, on a constamment*

$$y < e^{e^{e^x}}.$$

En d'autres termes, il n'est pas possible que l'on ait, *pour une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment*,

$$y > e^{e^{e^x}}. \tag{11}$$

Nous allons supposer d'abord que le nombre ε étant pris arbitrairement petit [1], mais fixe, l'on a, à partir d'une certaine valeur de x.

$$y' < y^{1+\varepsilon}, \qquad y'' < y'^{1+\varepsilon}. \tag{12}$$

Dès lors, écrivons l'équation (10) sous la forme

$$\varphi(y, y', y'', x) + \psi(y, y', y'', x) = 0,$$

en désignant par φ l'ensemble *homogène en y, y', y''* des termes de

---

[1] Il suffit que l'on ait

$$(1 + \varepsilon)^2 < 1 + \frac{1}{n},$$

n étant le degré total en y, y', y'' de l'équation proposée (10).

degré le plus élevé n par rapport à ces trois lettres. Si nous divisons par y^n nous obtenons

$$(13) \qquad \varphi\left(1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, x\right) + \frac{1}{y^n}\psi(y, y', y'', x) = 0.$$

Le second terme, en vertu des hypothèses faites, tend vers zéro lorsque x augmente indéfiniment ([1]).

Si nous posons

$$\frac{y'}{y} = z, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{y''}{y} = z' + z^2,$$

l'équation (13) s'écrira

$$(14) \qquad \varphi(1, z, z' + z^2, x) + \eta = 0,$$

η tendant vers zéro lorsque x augmente indéfiniment. D'ailleurs, y désignant une intégrale *déterminée* de (10), nous pouvons regarder η comme une fonction de x.

Or l'impossibilité de l'équation (14) résulte de l'étude que nous avons faite dans le cas du premier ordre. En effet, si l'on a, pour une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment

$$y > e^{e^{e^x}},$$

on aura, de même, pour une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment

$$\frac{y'}{y} = z > e^{e^x};$$

([1]) Pour que cette conclusion soit tout à fait légitime, il est nécessaire de supposer que, p étant le degré le plus élevé en x de l'équation (10), on a, à partir d'une certaine valeur de x,

$$y > x^{p+1}.$$

Or, *a priori*, il pourrait arriver que *bien que l'on ait, pour une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment*

$$y > e^{e^{e^x}},$$

on ait aussi pour une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment

$$y < x^{p+1}.$$

Il est aisé de fabriquer de telles fonctions y; nous omettons la discussion qui montre qu'elles ne peuvent vérifier une équation telle que (10). (*Voir* p. 33).

dans ces conditions, nous savons que l'équation (14) est impossible.

Nous avons ainsi démontré la proposition de la page 31 dans le cas où les conditions (12) sont vérifiées, c'est-à-dire dans le cas où il n'y a pas des valeurs de x croissant indéfiniment et donnant lieu à l'une des inégalités

$$y' > y^{1+\varepsilon}, \tag{15}$$

$$y'' > y'^{1+\varepsilon}. \tag{15'}$$

Nous allons maintenant faire voir que notre démonstration subsiste, même si l'inégalité (15), par exemple, est vérifiée par une infinité de valeurs de x [un raisonnement analogue pourrait être fait dans le cas de l'inégalité (15)' et dans le cas où l'on aurait les deux].

Le principe de notre démonstration va être le suivant : l'inégalité (15), si elle est vérifiée, ne peut l'être que dans de *très petits* intervalles, que l'on peut négliger dans la démonstration de l'*impossibilité* de l'équation (14).

Il importe d'abord de se reporter au raisonnement fait dans le cas du premier ordre, raisonnement d'où nous avons déduit l'impossibilité de l'équation (14). Il repose essentiellement sur la considération d'une infinité de nombres $\xi_1, \xi_2, \ldots$ croissant indéfiniment, et pour lesquels on a

$$z > e^{e^x}, \qquad e^x z < z' < z^{1+\varepsilon}. \tag{16}$$

Il est nécessaire, pour la démonstration, que, pour $x = \xi_1, \xi_2, \ldots,$ η tende vers zéro (ou du moins soit inférieur à un nombre fixe). *Tout revient donc à faire voir que l'on peut s'arranger de manière que les nombres ξ soient extérieurs aux intervalles dans lesquels est vérifiée l'inégalité* (15).

Or supposons que, pour $x = \xi$, cette inégalité soit vérifiée, et qu'elle reste vérifiée lorsque x varie dans l'intervalle ξ, $\xi + h$. On a

$$\frac{dy}{y^{1+\varepsilon}} > dx,$$

d'où (*Cf.*, p. 29)

$$h < \frac{1}{\varepsilon y^{\varepsilon}}.$$

Supposons d'abord que, pour $x = \xi$, nous ayons

$$y > e^{e^{e^{\xi}}},$$

nous en conclurons

$$h < \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon e^{e^{\xi}}};$$

et cette limite supérieure de h permet de montrer aisément que, pourvu que ξ soit assez grand (par rapport à ε, qui peut être petit, mais qui est fixe), les inégalités (16), vérifiées pour $x = \xi$, peuvent être remplacées pour $x = \xi + h$ par des inégalités en différant assez peu [1] pour que l'impossibilité de l'équation (14) en résulte [car, pour $x = \xi + h$, η est devenu inférieur à un nombre fixe, puisque l'inégalité (15) cesse alors d'être vérifiée].

Il reste à examiner le cas où, pour $x = \xi$, on aurait

$$y < e^{e^{e^{\xi}}};$$

mais cela ne peut avoir lieu pour toute valeur ξ telle que l'on a

$$\frac{y'}{y} > e^{e^{\xi}};$$

car, si pour toute valeur de ξ, on avait

$$\text{ou bien} \quad y < e^{e^{e^{\xi}}},$$
$$\text{ou bien} \quad \frac{y'}{y} < e^{e^{\xi}},$$

(1) On a, par exemple,

$$z(\xi + h) > z(\xi) > e^{e^{\xi}},$$

si l'on suppose z croissant. Or

$$e^{e^{\xi+h}} - e^{e^{\xi}} < h e^{\xi} e^{e^{\xi+h}} < \frac{1}{\varepsilon} e^{\xi} e^{e^{\xi+h}} e^{-\varepsilon e^{e^{\xi}}} < \eta_1,$$

η_1 pouvant être pris aussi petit que l'on veut, pourvu que ξ soit assez grand. On a donc

$$z(\xi + h) > e^{e^{\xi+h}} - \eta_1.$$

Dans le cas où z serait décroissant, on pourrait remplacer h par $-h$, etc. Enfin, si l'on n'est dans aucun de ces cas, il faut, pour être absolument rigoureux, examiner la question d'un peu plus près.

on en conclurait, comme à la page 27, que l'on a $y < e^{e^{e^x}}$ pour toute valeur de x.

On voit aisément sur quels principes sont basés nos raisonnements, qu'il nous a paru inutile de toujours détailler complètement : ils prendraient des proportions encore plus considérables dans le cas des équations d'ordre supérieur au second, à cause de la multiplicité des cas exceptionnels à examiner. C'est là une circonstance assez étrange, car, si l'on y réfléchit un peu, on se rend compte aisément que ces cas exceptionnels (par exemple, celui que nous avons signalé au bas de la page 32) sont, si l'on peut ainsi dire, *plus impossibles* que les cas simples, où la croissance est *assez régulière*, et qui se traitent immédiatement. D'une manière plus précise, les fonctions à croissance aussi irrégulière satisfont à des équations différentielles dont l'ordre est *plus élevé* que celui des équations dont les intégrales ne croissent pas plus vite, mais ont une croissance assez régulière.

Par exemple, il résulte de ce qui précède, et il est d'ailleurs évident que la fonction

$$y = e^{e^{e^{x^2}}}$$

ne satisfait pas à une équation différentielle algébrique du *second* ordre, mais elle satisfait à une équation du *troisième* ordre aisée à former; au contraire, la fonction

$$y = x^p + e^{e^{e^{x \sin x}}},$$

ou même la fonction plus simple $y - x^p$ ne satisfont qu'à des équations algébriques d'ordre supérieur à *trois*.

Bien que je n'aie pas eu le temps d'étudier cette question en détail, il semble que ce soit là une loi générale. Par exemple, on démontrera aisément qu'une fonction $\varpi(x)$, telle que l'on ait, pour une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment,

$$\varpi(x) < e^x,$$

et aussi, pour une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment

$$\varpi(x) > e^{x^2}$$

ne peut pas satisfaire à une équation algébrique du premier ordre. Mais ces recherches sont intimement liées à l'étude des fonctions oscillantes, qui est, comme nous le verrons dans le prochain paragraphe, plus difficile que celle des fonctions croissantes, et sur lesquelles nous ne donnerons que d'assez rapides indications. Pour étendre au cas de ces fonctions les recherches précédentes, il serait sans doute nécessaire de prendre pour base les beaux résultats et les méthodes profondes de M. Painlevé, en utilisant la généralisation de la notion de limite, telle qu'elle résulte des Chapitres suivants de ce Mémoire.

Nous allons terminer ce paragraphe en indiquant la relation qu'il y a entre les résultats qui y sont obtenus et les considérations sur les caractères de convergence des séries que nous avons développées plus haut. Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

une série de Taylor à coefficients *positifs* ayant pour rayon de convergence *un*. Supposons de plus que, pour $z = 1$, la série soit divergente.

Le point $z = 1$ est alors un point singulier en lequel la fonction devient infinie (nous supposons z toujours réel). Nous voulons montrer qu'il y a une relation étroite entre l'ordre d'infinitude de la fonction $f(z)$ au point *un* et la nature de la divergence (¹) de la série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots.$$

D'une manière plus précise nous établirons que, cet ordre étant donné (supérieur à $\omega^{-\omega}$ et inférieur à ω^{ω}), on peut reconnaître la divergence de la série (1) par l'un des critères de M. Bertrand (²). Rappelons que l'ordre de $f(z)$ (supposé infini pour $z = 1$) est supérieur à $\omega^{-\omega}$ si $f(z)$ est, pour quelque valeur de n, supérieur à $\log^{(n)} \frac{1}{1-z}$, au moins pour les valeurs de $1 - z$ inférieures à quelque nombre positif. On a posé

$$\log^{(n)} z = \log(\log^{(n-1)} z), \qquad \log^{(0)} z = z.$$

(¹) Des observations analogues s'appliqueraient au cas où cette série serait *convergente*.

(²) Nous supposerons la série telle que ces critères ne soient pas *inapplicables;* pour éviter cette hypothèse, il faudrait supposer l'ordre d'infinitude de $f(1 - z)$ *déterminé*.

Soit

$$1 - z = \varepsilon;$$

on a par hypothèse, sous la condition $0 < \varepsilon < \eta$,

$$f(1-\varepsilon) > \log^{(n)} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Posons

$$(1-\varepsilon)^p = \frac{1}{2};$$

d'où

$$p = \frac{\log 2}{\log\left(\dfrac{1}{1-\varepsilon}\right)} = \frac{\log 2}{\dfrac{\varepsilon}{1} + \dfrac{\varepsilon^2}{2} + \dfrac{\varepsilon^3}{3} + \ldots},$$

on a évidemment [1]

$$f(1-\varepsilon) < a_0 + a_1(1-\varepsilon) + \ldots + a_p(1-\varepsilon)^p < S_p(1-\varepsilon)^p = \frac{S_p}{2};$$

en posant

$$S_p = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p,$$

On a donc

$$\frac{S_p}{2} > \log^{(n)} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Or on a

$$p = \frac{\log 2}{\dfrac{\varepsilon}{1} + \dfrac{\varepsilon^2}{2} + \ldots},$$

et par suite, pour ε assez petit,

$$p < \frac{1}{\varepsilon};$$

donc enfin

$$S_p > 2\log^{(n)} p.$$

La divergence de la série (1) est donc supérieure à celle de la série

$$(2) \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{p \log p \log^{(2)} p \ldots \log^{(n-1)} p}.$$

---

[1] Nous supposons p entier; cela n'a aucune importance.

Donc, si ces deux séries sont comparables (c'est-à-dire si le rapport de leurs termes généraux n'est pas oscillant), le rapport

$$a_p : \frac{1}{p \log p \log^{(2)} p \ldots \log^{(n-1)} p}$$

augmente indéfiniment avec p, c'est-à-dire que la divergence de la série (1) se prouve à l'aide du $n^{\text{ième}}$ critère de M. Bertrand.

Nous avons tenu à donner cette application pour montrer le lien étroit qu'il y a entre divers paragraphes de ce Chapitre, qui paraissent au premier abord sans rapport entre eux. Par exemple, si une série *telle que* $f(z)$ est obtenue au moyen d'une équation différentielle algébrique du premier ou du second ordre, on pourra affirmer que, *si le produit*

$$a_p p \log p \log^{(2)} p$$

a pour limite zéro, la série (1) *est convergente.* Car, si la série diverge et si ce produit n'est pas oscillant, sa limite ne peut être que l'infini.

Pour compléter ce résultat il resterait à faire voir que, dans le cas où nous sommes, ce produit ne peut être oscillant.

V. — Les fonctions oscillantes.

Lorsque la variable x tend (¹) vers une limite α, il peut arriver que la fonction y, au moins pour les valeurs de x assez voisines de α, *tende, en variant toujours dans le même sens, vers la limite* β. Nous avons étudié cette circonstance dans les paragraphes précédents; lorsqu'elle ne se présente pas, la fonction y sera dite *oscillante*. Mais ce cas se subdivise en plusieurs autres. Nous en distinguerons tout d'abord deux principaux, qui s'excluent mutuellement : y peut avoir *ou non*

(¹) Nous supposons, bien entendu, que $x - \alpha$ a un signe déterminé et varie toujours dans le même sens. C'est seulement alors que l'on peut dire, au sens propre du mot, que x *tend vers* α; nous parlerons plus loin du cas où x est imaginaire, et, là encore, nous supposerons toujours que la variable *tend* vers sa limite en suivant un chemin déterminé.

une limite unique [1]. Dans le cas où la fonction y, supposée continue, possède une infinité de limites, ces limites remplissent tout un intervalle β_1, β_2 (qui peut être en particulier $-\infty$, $+\infty$). [Dans le cas où $\beta_1 > \beta_2$, nous entendons par intervalle β_1, β_2 les deux intervalles β_1, $+\infty$ et $-\infty$, β_2]. La fonction y est alors indéterminée pour $x = \alpha$ et son champ d'indétermination est l'intervalle β_1, β_2.

La question de savoir s'il convient d'attribuer particulièrement à y l'une des valeurs β de son champ d'indétermination est en relation étroite avec l'étude des séries divergentes (et des intégrales définies dépourvues de sens); à ce point de vue, nous pouvons dire que le Chapitre II est consacré entièrement à cette question. Nous nous contenterons de faire ici quelques remarques, relativement aux racines de l'équation $y = \beta$, β étant une valeur du champ d'indétermination.

D'après ce qui précède, cette équation a une infinité de racines lorsque x tend vers α; soit α_1 un nombre quelconque inférieur à α; posons $\frac{1}{|x-\alpha|} = z$ et désignons par $\theta(z)$ le nombre des racines de l'équation $y = \beta$, comprises entre α_1 et x. La fonction $\theta(z)$ est une fonction positive croissante; elle est discontinue; on peut de bien des manières la remplacer par une fonction continue, ainsi que ses dérivées (jusqu'à un ordre quelconque ou même de tout ordre); mais cela n'a pas d'importance actuellement. Nous dirons que cette fonction $\theta(z)$ mesure la fréquence des racines de l'équation $y = \beta$; si deux fonctions $\theta(z)$ ont le même ordre d'infinitude, les racines des équations correspondantes seront dites *avoir la même fréquence*.

Cela étant, une distinction importante s'introduit entre les fonctions indéterminées; nous dirons que l'indétermination est *régulière*, si, β étant un nombre quelconque de l'intervalle d'indétermination (sauf peut-être l'une des limites de cet intervalle), toutes les équations $y = \beta$ ont des racines *de même fréquence;* l'indétermination sera irrégulière dans le cas contraire; on pourrait distinguer bien des cas dans ce dernier, définir une indétermination semi-régulière, mais nous ne pou-

---

(1) La valeur *infinie* de y n'est pas distinguée des autres; dans ce qui suit, y est dit continu, si, soit y, soit $\frac{1}{y}$ est continu, au sens strict du mot

vons nous étendre trop longtemps sur ces questions, qui nous entraînerait trop loin de notre sujet.

Ainsi, à une fonction d'indétermination régulière correspond une fréquence déterminée qui caractérise dans une certaine mesure la singularité du point $x = \alpha$. Il y a une relation étroite entre cette question, la fréquence des racines de l'équation $y' = 0$ et la variation des valeurs de y, lorsque x est égal à l'une de ces racines.

Occupons-nous maintenant des fonctions y qui sont déterminées pour $x = \alpha$; nous supposerons, pour simplifier le langage, que l'on a $\alpha = \beta = 0$ et que x tend vers zéro par valeurs positives. Alors y a pour limite zéro, mais prend une infinité de fois cette valeur, c'est-à-dire passe une infinité de fois du positif au négatif. Nous pourrons définir, comme précédemment, la fréquence $\theta(z)$ des racines de l'équation $y = 0$. C'est l'un des éléments qui permettent de définir la singularité, mais c'est loin d'être le seul. Considérons l'équation

$$y' = 0;$$

nous pouvons ranger ses racines en quatre catégories (¹), auxquelles correspondent respectivement pour y des maxima positifs, des minima négatifs, des maxima négatifs, des minima positifs. Désignons respectivement par $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$, $\theta_4(z)$, $\theta_3(z)$ la fréquence de ces quatre espèces de racines.

On a évidemment (à une unité près)

$$\tfrac{1}{2}\theta(z) = \theta_1(z) - \theta_3(z) = \theta_2(z) - \theta_4(z).$$

La fonction y sera dite *à type sinusoïdal simple* si les fonctions θ_3 et θ_4 restent finies lorsque z croît indéfiniment, c'est-à-dire si le nombre des maxima positifs et des minima négatifs est limité. On peut alors le supposer nul, en ne considérant la fonction que pour des valeurs de x assez petites, et l'on a alors, à une ou deux unités près,

$$\theta(z) = \theta_1(z) + \theta_2(z) = 2\theta_1(z) = 2\theta_2(z). \tag{1}$$

La fonction y serait *approximativement* à type sinusoïdal simple si

---

(¹) Pour simplifier, nous excluons le cas des maxima ou des minima nuls, c'est-à-dire des racines multiples, qui compliqueraient encore la classification.

les équations (1) n'avaient pas lieu exactement, mais seulement asymptotiquement.

Considérons une fonction y à type sinusoïdal simple; à chaque racine x de la dérivée correspond une certaine valeur y de la fonction; posons

$$z = \frac{1}{|x|} \qquad \text{et} \qquad \psi(z) = \frac{1}{|y|}.$$

$\psi(z)$ croît indéfiniment avec z; si la fonction $\psi(z)$ est *constamment* croissante, le *type sinusoïdal simple* sera dit en outre *régulier*. On voit qu'un type sinusoïdal simple régulier conduit à définir deux fonctions croissantes $\theta(z)$ et $\psi(z)$, qui le caractérisent (à une première approximation). On aura des types particuliers fort importants en supposant ces deux fonctions en relation simple; et, d'une manière générale, on étudiera et l'on classera ces fonctions croissantes par les méthodes du § III.

Il pourrait y avoir lieu de considérer aussi les dérivées d'ordre supérieur au premier; nous avons tenu simplement à montrer dans quel ordre d'idées on pouvait entreprendre une classification des fonctions oscillantes, mais nous ne pouvons que répéter ici ce que nous avons déjà dit plus haut : cette classification ne peut avoir quelque importance que si elle correspond à quelque chose de réel, c'est-à-dire si une étude approfondie des divers problèmes où s'introduisent naturellement des fonctions oscillantes montre que la classification adoptée suffit à étudier les fonctions ainsi obtenues; sinon, il est bien clair que, si on laisse à l'idée de fonction toute sa généralité *a priori*, toute classification, quelque étendue qu'elle soit, sera absolument incomplète et ne s'appliquera qu'à des cas *infiniment* particuliers.

VI. — Application aux équations différentielles.

Nous allons, pour donner au moins une application de ce qui précède, dire quelques mots des fonctions oscillantes définies par des équations différentielles.

Nous prendrons l'équation du premier ordre

$$f(y, y', x) = 0 \qquad (f \text{ polynome en } x, y, y'),$$

et nous supposerons que lorsque x augmente indéfiniment, par valeurs positives, une intégrale y prend une infinité de fois la valeur zéro. Pour le moment nous ne distinguons pas si, pour $x = +\infty$, y a la valeur déterminée *zéro* ou est indéterminé. Il y aura lieu, dès lors, d'étudier la fréquence des racines de l'équation $y = 0$.

Comme nous nous proposons surtout de trouver une limite supérieure de cette fréquence, nous supposerons qu'elle est supérieure à x, ce qui revient à dire que la distance de deux racines consécutives devient infiniment petite avec $\frac{1}{x}$.

Lorsque x est très grand (d'une manière précise, lorsque x surpasse notablement les racines des divers polynomes en x, coefficients des produits $y^\alpha y'^\beta$ dans l'équation proposée), on peut, dans l'intervalle de deux racines consécutives de l'équation $y = 0$, regarder x comme constant, et l'on commettra une erreur d'autant moindre que x sera plus grand. Dès lors l'intervalle entre ces deux racines apparaît comme étant une période déterminée d'une certaine intégrale abélienne, relative à une fonction algébrique définie par une équation dont les coefficients dépendent algébriquement de x. On suppose cette période infiniment petite en même temps que $\frac{1}{x}$. Dans des cas étendus, on prouvera qu'elle a un ordre infinitésimal déterminé, ou tout au moins un ordre d'infinitude déterminé.

Occupons-nous maintenant de l'allure générale de la fonction y. Le fait que l'équation considérée est du premier ordre va rendre cette étude très aisée; et des modifications notables à la méthode et aux résultats s'introduiraient pour les ordres supérieurs; il y a là un champ considérable de recherches; nous indiquons à la fin de ce paragraphe le principe qui semble devoir les guider.

L'équation du premier ordre proposée étant algébrique, il est clair que, *en* y *supposant* $y = 0$, on en déduit pour y' et pour y'' des fonctions algébriques de x; de plus y'' est alors une fonction rationnelle de y' et de x. De même en supposant $y' = 0$, on trouve pour y une fonction algébrique de x et pour y'' une fonction rationnelle de y et de x.

On en conclut que la fonction y, *dans le cas où elle tend vers zéro*, appartient au type sinusoïdal simple et régulier, les maxima et minima étant d'ailleurs régis par une fonction *d'ordre fini* (c'est la fonction ψ

de la page 41). Dans le cas où y ne tend pas vers zéro la même conclusion subsiste pour les maxima et minima (mais, au lieu d'être *infiniment petits*, ou bien ils sont infiniment grands d'ordre fini, ou bien ils sont égaux à une constante, plus ou moins un infiniment petit d'ordre fini); en tout cas l'indétermination de y est *régulière*.

Indiquons, en terminant, l'idée qui nous a guidé, dans ce paragraphe et le paragraphe IV, et qui nous paraît susceptible de conduire à de nouveaux résultats.

Étant donnée une combinaison de fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires, par exemple la suivante

$$y = e^x + \cos x \, e^{x^2} + e^{(1+\sin x) e^x}, \tag{1}$$

on peut former une infinité d'équations différentielles algébriques vérifiées par y; désignons par n l'ordre minimum de ces équations.

D'autre part, étudions la croissance de la fonction y; elle pourra être de nature assez compliquée, comme c'est le cas pour l'expression (1), mais cette complication n'est pas illimitée et peut être assez rapidement définie (ne serait-ce que par l'équation (1) elle-même); nous savons qu'une croissance de cette nature peut être obtenue par une équation différentielle d'ordre n; nous devrons nous attacher à démontrer qu'elle ne peut pas l'être par une équation différentielle d'ordre moindre, et ce sera là une propriété des équations d'ordre $n-1$. La seule difficulté dans l'application de cette méthode de recherches consiste dans le choix convenable des caractères qui définissent la *complication* du mode de croissance.

C'est ainsi qu'ayant reconnu que la fonction $y = e^{e^{e^x}}$ vérifie une équation du *troisième* ordre nous avons été conduit à démontrer que l'ordre d'infinitude d'une intégrale croissante d'une équation du second ordre est inférieur à celui de y.

VII. — Les fonctions de variable complexe.

En appliquant à l'étude des fonctions de variable complexe les principes et les résultats précédents, on se trouve naturellement conduit à une classification nouvelle des singularités de ces fonctions, classification d'ailleurs destinée à *compléter* et non à *remplacer* la classification usuelle.

Dans celle-ci, le rôle essentiel est joué par les valeurs (déterminées ou indéterminées) que prend la fonction au point singulier et dans son voisinage (points singuliers essentiels, transcendants, algébriques, logarithmiques, etc.); nous nous préoccuperons, au contraire, surtout de la *manière* dont la fonction tend vers la ou les valeurs qu'elle prend au point singulier. Ceci demande quelques explications.

Un point singulier essentiel est caractérisé par le fait que la fonction est uniforme dans son voisinage et complètement indéterminée en ce point. D'une manière plus précise, l'équation $f(z) = a$ possède une *infinité* de racines au voisinage du point singulier (sauf peut-être pour *deux* valeurs exceptionnelles de a, dont l'une peut être infinie). Mais, de la nature de cette infinité, il n'est pas question.

Laguerre a, le premier, vu le rôle important que jouait le *genre* dans la théorie des fonctions entières. De ses recherches mémorables sur ce sujet, et des compléments qu'y ont apportés les travaux de MM. Poincaré, Hadamard, Borel, il résulte que la connaissance du genre d'une fonction entière nous renseigne à la fois sur l'ordre d'infinitude de la fonction et sur l'ordre d'infinitude du nombre des racines de l'équation $f(z) = a$ (sauf dans le cas d'exception de M. Picard). Parfois, il y a d'ailleurs avantage à considérer, au lieu du genre, un nombre que j'ai appelé *ordre apparent* [1] et qu'on peut appeler simplement *ordre* dans les recherches où n'intervient pas le cas d'exception de M. Picard. Par exemple, si l'on pose

$$f(z) = \sin\frac{1}{z} + z^2 e^{\frac{1}{z}},$$

---

[1] *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX). Rappelons que lorsque l'ordre n'est pas entier, le genre de Laguerre est égal à sa partie entière; lorsqu'il est entier, le genre de Laguerre peut lui être égal ou inférieur d'une unité. L'un des avantages de la nouvelle dénomination est que l'ordre de la dérivée est toujours égal à l'ordre de la fonction, alors que la question est en suspens pour le genre de Laguerre (bien que probablement on doive la résoudre par l'affirmative); de plus, dans le cas où l'ordre n'est pas entier, il est préférable de le connaître exactement que de connaître seulement sa partie entière. D'ailleurs, pour l'*exemple actuel*, on pourrait remplacer *ordre* par *genre* de Laguerre sans que rien soit changé.

le point singulier essentiel $z = 0$ est d'ordre *un;* il en est de même d'ailleurs pour $f'(z)$. Dès lors, on voit aisément que si la variable z tend vers zéro en suivant un chemin rectiligne (ou même *algébrique*) et si l'on regarde le module de $f(z)$ comme fonction du module de $\frac{1}{z}$ (ou de l'inverse de l'*arc* compris entre le point z et l'origine), cette fonction de variable réelle est inférieure ([1]) à $e^{x^{1+\varepsilon}}$, quelque petit que soit le nombre positif ε, et peut prendre, si le chemin est convenablement choisi, une infinité de valeurs supérieures à $e^{x^{1-\varepsilon}}$. Ces propriétés, dans le cas d'un point singulier essentiel pour lequel l'*infini* est une valeur exceptionnelle, suffisent pour que ce point soit d'ordre *un :* on peut en déduire d'autres, qui peuvent les remplacer lorsqu'il n'y a pas de valeurs exceptionnelles.

Considérons maintenant un point singulier d'une nature quelconque et, issues de ce point, deux droites faisant un angle quelconque [dans le cas où la fonction n'est pas uniforme au voisinage du point singulier considéré, chacune de ces droites doit être regardée comme tracée sur un feuillet déterminé de la surface de Riemann ; l'angle des deux droites peut alors être supérieur à 2π; il pourrait même être infini, l'une des droites (ou les deux) ayant disparu après avoir tourné indéfiniment dans un sens déterminé].

Supposons que dans l'espace angulaire, A, compris entre les deux droites et au voisinage du point (c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle assez petit), la fonction ne prenne pas la valeur a, mais prenne des valeurs aussi voisines que l'on veut de a. Nous étudierons l'ordre d'infinitude de $\left|\frac{1}{f(z)-a}\right|$ par rapport ([2]) à $\frac{1}{|z|}$ lorsque z tend vers zéro par des chemins C d'une nature déterminée (chemins rectilignes, chemins algébriques, etc.), restant dans l'espace angulaire considéré. Si cet ordre d'infinitude est constamment inférieur à $(1+\varepsilon)\omega$ [c'est-à-dire si le module considéré est inférieur à $e^{(1+\varepsilon)x}$, x étant la variable réelle introduite], et, d'autre part si, pour une infinité de chemins,

---

([1]) Dans le cas particulier considéré, on pourrait préciser davantage; nous donnons des limites s'appliquant à toutes les fonctions d'*ordre un* (*voir* la note de la page précédente).

([2]) Ou par rapport à l'inverse de l'*arc* lorsque le chemin n'est pas rectiligne.

cet ordre d'infinitude n'est pas inférieur à $(1-\varepsilon)\omega$ [c'est-à-dire si le module considéré prend une infinité de valeurs supérieures à $e^{(1-\varepsilon)x}$], nous dirons que la fonction *est d'ordre un relativement à l'angle* A, *aux chemins* C, *et à la valeur d'exception a*. Supposons maintenant que l'équation $f(z) = a$ ait une infinité de racines dans l'espace A; si cette infinité est du même ordre d'infinitude que pour un point singulier essentiel d'ordre égal à un, nous dirons que la fonction *est d'ordre un relativement à l'angle* A *et à la valeur ordinaire a*. On pourrait aussi, dans ce cas, considérer des chemins C [sur lesquels la fonction serait de nature oscillante (¹)], mais comme toute cette théorie, qui ne peut être développée ici, n'y joue qu'un rôle accessoire, nous laisserons ce point de côté.

Nous ne nous occuperons pas non plus de la question de savoir si, comme pour les fonctions uniformes au voisinage d'un point essentiel, on peut, au lieu de parler d'un ordre *relatif* (à certains chemins, à certains angles, à certaines valeurs), on peut définir un ordre absolu en quelque sorte, auquel les divers ordres relatifs seront inférieurs; il y aurait là un grand nombre de questions à étudier.

Faisons cependant une remarque au sujet des chemins C; il ne paraît pas douteux qu'il ne faille absolument introduire certaines restrictions au sujet de ces chemins (si l'on veut étudier des fonctions de variable réelle sur ces chemins; en effet, si l'on prend pour variable $\frac{1}{|z|}$, ou toute autre quantité *indépendante de* C, ce chemin *n'intervient pas en réalité* et l'on conçoit que son choix, tout à fait arbitraire ne joue qu'un rôle accessoire). Cette remarque sera, nous l'espérons, rendue très claire par les applications qui terminent ce paragraphe et qui sont relatives aux points singuliers des intégrales d'équations différentielles algébriques.

Précisons d'abord le sens de quelques termes. Les fonctions e^x, e^{x^2}, e^{x^3}, ... dont l'ordre d'infinitude a été désigné par ω, $\omega.2$, $\omega.3$, ..., ont pour ordre respectivement 1, 2, 3, ... De même la fonction e^{e^x} dont l'ordre d'infinitude est $\omega^2 = \omega.\omega$ pourra être dite d'ordre ω, la

(¹) On envisagerait séparément sa partie réelle et sa partie imaginaire, pour plus de netteté.

fonction $e^{e^{e^x}}$ d'ordre ω^2, ... Les fonctions qui croissent plus vite [1] qu'un nombre quelconque d'exponentielles superposées seront dites avoir un ordre supérieur à ω^ω. [On pourra définir d'une manière analogue l'ordre des fonctions de variables réelles oscillantes, par exemple, $\sin(e^x)$ est d'ordre ω pour x réel et relativement aux valeurs comprises entre -1 et $+1$; relativement à la valeur zéro, et toujours pour x réel, $\sin x(2+\sin e^x)$ est seulement d'ordre un, car ses zéros sont ceux de $\sin x$.]

Si l'on admettait un résultat énoncé précédemment, on serait conduit au théorème fort important qui suit : *Une fonction $z = y + it$ étant définie par une équation différentielle algébrique, y considéré comme fonction de la variable réelle et positive x est d'ordre inférieur à ω^ω.*

En effet, soit

$$f[x, z, z', z'', \ldots, z^{(n)}] = 0$$

l'équation proposée; si l'on pose $z = y + it$ et que, supposant x réel, l'on sépare la partie réelle de la partie imaginaire, on obtient deux équations à coefficients réels

$$g[x, y, y', \ldots, y^{(n)}, t, t', \ldots, t^{(n)}] = 0,$$
$$h[x, y, y', \ldots, y^{(n)}, t, t', \ldots, t^{(n)}] = 0,$$

d'où, par élimination de t, l'équation réelle

$$F[x, y, y', \ldots, y^{(2n)}] = 0.$$

Le résultat rappelé consiste précisément en ce que toute intégrale y de cette équation est d'ordre inférieur [2] à ω^ω.

---

(1) Il s'agit ici de fonctions de variables réelles; pour les fonctions transcendantes entières, il suffirait de considérer le module maximum pour $|z| = x$; les mêmes définitions s'appliqueraient. On remarquera que ce que nous appelons *l'ordre* est précisément *l'ordre d'infinitude de la fréquence des zéros.*

(2) Une remarque importante est nécessaire ici. Considérons, pour fixer les idées, une fonction elliptique φ admettant pour pôles tous les points $z = x + iy$, pour lesquels x et y sont entiers. Supposons que z s'éloigne indéfiniment sur la droite $y = \alpha x$; il est manifeste que la manière dont varie sur cette droite le module ρ de la fonction φ dépend essentiellement de la valeur arithmétique de α. Réduisons α en fraction continue et soit $a_n = \psi(n)$ le $n^{\text{ième}}$ quotient incomplet. Si, par exemple, la fonction $\psi(n)$ est d'ordre supé-

D'ailleurs, la proposition énoncée est susceptible de généralisations très étendues sur lesquelles nous ne nous étendrions pas, si ce n'était une occasion d'expliquer ce que nous avons dit au sujet des courbes C.

Il est clair d'abord que, si, au lieu de poser $z = y + it$, on posait $z = \rho e^{i\alpha}$, ρ et α vérifieraient aussi des équations différentielles algébriques aisées à former (d'ordre $2n$ pour ρ et $2n+1$ pour α); la même proposition pourrait donc s'appliquer à ρ et α considérés comme fonctions de x.

Mais une généralisation plus importante est la suivante; supposons que x, au lieu de croître par valeurs positives, tende vers une valeur x_0 en suivant un certain chemin C; si ce chemin C est algébrique, on est ramené aisément au cas qui précède. Il en est de même si ce chemin n'est pas algébrique, mais est défini par une équation différentielle algébrique (entre la partie réelle et la partie imaginaire de x); il y a seulement à introduire explicitement cette équation différentielle, ce qui augmente l'ordre de l'équation finale.

D'autre part, si le chemin C, non algébrique ni défini par une équation différentielle algébrique, était, dans le voisinage de x_0, *approximativement* algébrique [1], une étude spéciale à chaque cas pourrait permettre de constater que, *aux premières approximations*, les fonctions considérées satisfont aux mêmes conditions que si le chemin était rectiligne. *Mais il n'est pas douteux que si, dans la définition du chemin, entre d'une manière quelconque une fonction d'ordre supérieur à ω^ω, cette complication arbitrairement introduite ne pourra plus être*

---

rieur à ω^ω, ρ *considéré comme fonction de x sera aussi d'ordre* (irrégulièrement) *supérieur à* ω^ω. Ici ρ est une fonction oscillante (non toujours croissante), que l'on peut aisément définir par une équation du second ordre. Mais les coefficients de cette équation dépendent de la constante α, et c'est avec cette constante que s'introduisent toutes les difficultés de Du Bois-Reymond. Dans les recherches dont nous venons de parler, il semble donc nécessaire de tenir compte de la nature arithmétique des coefficients; c'est une grande source de difficultés. D'ailleurs cette étude, une fois faite, conduirait à des conclusions importantes relativement à la nature arithmétique des constantes qui peuvent être définies par des équations différentielles algébriques à coefficients entiers; pour ces constantes, on doit pouvoir limiter l'ordre d'infinitude de la fonction arithmétique $\psi(n)$; peut-être même peut-on la rattacher à des types croissants ou oscillants assez simples.

[1] Ou si l'une des coordonnées considérée comme fonction de l'autre était approximativement d'un ordre d'infinitude déterminé.

éliminée et se retrouvera dans les résultats, si on les examine avec assez d'attention. Par exemple, désignons par $\theta(x)$ une fonction positive croissante, d'ordre supérieur à ω^ω; posant $x = \xi + i\eta$, considérons le chemin C défini par l'équation

$$\xi = \frac{1}{\theta\left(\frac{1}{\eta}\right)},$$

l'équation différentielle $\frac{dz}{dx} = z$ et l'intégrale $z = e^x$ de cette équation, lorsque x tend vers zéro en suivant le chemin considéré. On a

$$e^x = e^\xi(\cos\eta + i\sin\eta).$$

On en conclut que le module ρ de z considéré comme fonction de l'arc du chemin C (lequel diffère infiniment peu de η) tend vers *un* avec une rapidité d'ordre supérieur à ω^ω; en d'autres termes, $\frac{1}{\rho - 1}$ (qui satisfait, considéré comme fonction de x, à une équation différentielle aisée à former) est d'ordre supérieur à ω^ω par rapport à l'inverse de cet arc.

On a cependant affaire ici à un chemin qui admet une tangente déterminée; aussi la partie réelle $e^\xi\cos\eta$ de z est d'*ordre* un sur le chemin considéré : *il y a donc certaines propriétés simples, mais la nature du chemin fait, à un moment donné, apparaître les difficultés.*

Quittons ces généralités pour démontrer au moins un résultat précis, mais bien particulier. Nous n'avons, en effet, étudié d'une manière approfondie que l'équation du second ordre à variables réelles (et encore en laissant de côté les cas oscillants); nous devrons donc nous borner à l'équation algébrique du premier ordre à variables complexes. Soit

$$(1) \qquad f(x, z, z') = 0 \qquad (f \text{ polynome en } x, z, z'),$$

cette équation; en posant $z = y + it$, et procédant comme plus haut on obtiendra, x étant réel, l'équation réelle en y

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Nous pouvons affirmer que, si y ne devient pas une infinité de fois infini, et est constamment croissant, on a, à partir d'une certaine valeur de x,

$$y < e^{e^{e^x}}.$$

On pourrait d'ailleurs énoncer un résultat analogue, en remplaçant l'axe réel par une courbe algébrique quelconque.

CHAPITRE II.

LES SÉRIES SOMMABLES ET LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

I. — Les séries sommables.

Pendant longtemps les géomètres ont utilisé les séries (et les intégrales définies) sans se préoccuper de leur convergence; ils y étaient encouragés par les résultats souvent importants et *certains* qui étaient ainsi obtenus. Abel et Cauchy ont remarqué que l'on pouvait être conduit, en procédant ainsi sans précaution, à des résultats manifestement faux, et ils ont proscrit absolument l'usage des séries divergentes. Il semble cependant que ce ne fut pas sans regret : dans la Préface de son *Analyse algébrique* (²) (1821), Cauchy dit expressément que le souci de la rigueur l'a *forcé à admettre* diverses propositions qui *paraîtront peut-être un peu dures :* par exemple, qu'une série divergente n'a pas de somme; il ajoute ensuite que les avantages de cette manière de procéder (à savoir la rigueur) lui paraissent en surpasser les *in-*

(¹) Nous n'écrivons pas $z = \rho e^{i\alpha}$, parce que l'on aurait pour α une équation du troisième ordre. D'ailleurs, des propriétés de $\lambda = \tang \frac{\alpha}{2}$ on déduit aisément celles de α.

(²) *OEuvres de Cauchy,* série II, t. III.

convénients. D'ailleurs, Cauchy a souvent fait usage de séries divergentes dans des conditions déterminées ([1]), et sa théorie des *valeurs principales* des intégrales définies, sur laquelle nous reviendrons plus loin, lui a souvent permis d'utiliser avec profit des intégrales dépourvues de sens, sans jamais se départir de la plus parfaite rigueur.

Abel, de son côté, n'était pas sans avoir remarqué que l'usage des séries divergentes conduisait *le plus souvent* à des résultats exacts et il se proposait, comme nous l'apprend sa Correspondance, d'en *rechercher la raison*. Il est malheureusement mort sans avoir rien publié sur ce sujet.

Il est certainement paradoxal à première vue que l'emploi de séries divergentes conduise, en général, quand on ne le fait pas exprès, à des résultats exacts, alors que rien n'est plus aisé que de démontrer ainsi une égalité inexacte quelconque. Le paradoxe disparaît si l'on songe à la différence profonde, sur laquelle nous avons insisté plus haut, entre les séries naturelles, auxquelles conduisent des problèmes simples, et les séries fabriquées artificiellement. Ces dernières, lorsqu'elles sont convergentes, ont sans doute une valeur numérique (il y aurait beaucoup à dire sur ce point et sur les complications analytiques que peuvent renfermer en germe de tels nombres); lorsqu'elles sont divergentes, on n'en peut absolument rien dire. On conçoit qu'il puisse en être tout autrement des séries naturelles.

Parmi les recherches déjà faites sur ce sujet, certaines se rapportent aux séries de Taylor à rayon de convergence nul et à leurs relations avec des fractions continues convergentes ; nous en parlerons en détail plus loin ([2]). Il ne reste alors à citer ici qu'une Note fort intéressante de M. Cesaro *Sur la multiplication des séries* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1890). Dans cette Note, M. Cesaro définit ce qu'il appelle une série simplement, doublement, ..., r fois indéterminée. Lorsque la somme s_n des n premiers termes n'a pas de limite, il remplace les quantités s_n par les suivantes

$$s_n^{(1)} = \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n).$$

([1]) *Voir*, par exemple, *Comptes rendus*, 1851-1852.

([2]) Dans le troisième Chapitre de ce Mémoire.

Dans le cas où $s_n^{(1)}$ a une limite s, la série est simplement indéterminée et sa somme est s. Sinon on opérera sur $s_n^{(1)}$ comme sur s_n, c'est-à-dire que l'on posera

$$s_n^{(2)} = \frac{1}{n}(s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \ldots + s_n^{(1)}),$$

et, si $s_n^{(2)}$ a pour limite s, la série sera doublement indéterminée, et aura pour somme s; sinon, on continuera de même.

Le résultat capital obtenu par M. Cesaro est le suivant : on peut multiplier entre elles des séries indéterminées (par la règle donnée par Cauchy pour les séries convergentes); le produit est une série indéterminée (qui, comme cas particulier, pourrait être convergente) dont la *somme* est le produit des *sommes* des deux séries et dont l'ordre d'indétermination ne dépasse pas la somme, augmentée de *un*, des ordres d'indétermination des deux séries facteurs. Ce théorème montre que les définitions de M. Cesaro (que l'auteur justifie en invoquant le Calcul des probabilités) ne sont pas sans fondement : on voit des raisons bien nettes pour attribuer à une série divergente *numérique* une valeur *déterminée*, à l'exclusion de toute autre. Malheureusement, les séries auxquelles s'appliquent les méthodes de M. Cesaro sont bien particulières ; par exemple, la série, pourtant bien simple,

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots$$

leur échappe complètement.

Une généralisation aisée permet d'étendre beaucoup la portée de la méthode. Lorsque s_n n'a pas de limite, mais oscille constamment, il est naturel de considérer comme *limite généralisée* de s_n une *valeur moyenne* entre les diverses valeurs de s_n. Dans la recherche de cette *valeur moyenne*, on doit faire jouer un rôle prépondérant aux valeurs de s_n qui correspondent aux plus grandes valeurs de n. Il faudra concilier cette nécessité avec le fait que, dans les cas les plus intéressants, s_n augmente indéfiniment avec n (mais est tantôt positif et tantôt négatif). Voici l'un des procédés que l'on peut employer. Désignons par a un nombre positif : la suite des quantités

$$c_n = \frac{a^n}{n!}$$

va d'abord en croissant avec n, puis décroît indéfiniment. Nous attribuerons ces quantités comme *poids* aux quantités s_n dont nous cherchons la valeur moyenne : c'est-à-dire que nous considérerons le rapport

$$\varphi(a) = \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + c_2 s_2 + \ldots + c_n s_n + \ldots}{c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots}.$$

Nous supposons la série écrite au numérateur convergente, quel que soit a. Dès lors, pour chaque valeur de a ce rapport a une valeur déterminée. C'est cette valeur qui remplace pour nous l'expression

$$\frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n)$$

de M. Cesaro. En effet, la série numérateur étant convergente, on peut, avec une erreur inférieure à ε, *la limiter*. Mais, *si nous augmentons* a, le rapport $\varphi(a)$ dépend des s d'indices de plus en plus grands; et ces indices, qui jouent un rôle prépondérant, augmentent indéfiniment avec a. Dans le cas où $\varphi(a)$ a une limite s pour a infini, nous dirons que la série proposée est sommable et que s est sa somme. On peut dire aussi que s est *la limite généralisée* de la suite

$$s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots.$$

Si l'on pose

$$s(a) = \sum c_n s_n = \sum \frac{s_n a^n}{n!},$$

on a

$$s = \lim_{a=\infty} e^{-a} s(a).$$

Dans le cas où le produit $e^{-a}s(a)$ augmente indéfiniment avec a, *par valeurs de même signe*, la méthode de sommation est *inapplicable*. Elle est simplement *en défaut* si $e^{-a}s(a)$ est oscillant : on peut alors se proposer de rechercher si cette expression a une *limite généralisée;* ou plus exactement, la limite généralisée n'ayant été définie que dans le cas d'une variable discontinue, si la suite

$$e^{-1}s(1), \quad e^{-2}s(2), \quad \ldots, \quad e^{-n}s(n), \quad \ldots$$

possède une telle limite, etc.

On voit très aisément que notre définition de la somme comprend comme cas particuliers celle de M. Cesaro et, par suite, évidemment, celle des séries convergentes.

On pourrait la généraliser beaucoup : introduire, au lieu des quantités $c_n = \frac{a^n}{n!}$, d'autres quantités positives ayant les mêmes propriétés générales [1]

$$\left(\lim_{n=\infty} c_n = 0, \quad \text{quel que soit } a, \text{ et} \quad \lim_{a=\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \infty, \quad \text{quel que soit } n \text{ fixe}\right).$$

Mais nous ne nous attarderons pas à ces généralisations et nous nous bornerons à employer e^a (et, rarement, des fonctions qui s'y rattachent intimement). Nous avons, en effet, constaté l'importance particulière des modes de croissance exponentiels; dans la pratique, ils se présentent seuls, ou à peu près. De plus, les propriétés particulières de la fonction exponentielle permettront des transformations analytiques parfois utiles. En supposant que l'étude du cas général s'imposât un jour, l'étude approfondie de ce cas particulier serait certainement d'un grand secours.

Écrivons la série donnée sous la forme

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

de sorte que l'on a

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Si l'on pose, comme nous l'avons fait,

$$s(a) = s_0 + \frac{s_1 a}{1} + \frac{s_2 a^2}{1.2} + \ldots + \frac{s_n a^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

on obtient immédiatement

$$(1) \qquad \frac{d}{da}[e^{-a} s(a)] = e^{-a}[s'(a) - s(a)] = e^{-a} u_1(a),$$

en posant

$$u_1(a) = s'(a) - s(a) = u_1 + \frac{u_2 a}{1} + \frac{u_3 a^2}{1.2} + \frac{u_4 a^3}{1.2.3} + \ldots.$$

---

[1] *Voir* mes Notes des *Comptes rendus*, notamment du 30 décembre 1895 et du 13 janvier 1896. *Voir* aussi la note qui termine mon Mémoire sur les séries de Taylor (*Journal de Jordan*, 1896, p. 451).

Or l'égalité (1) donne, si l'on suppose que $e^{-a}s(a)$ ait la limite s pour a infini,

$$\int_0^\infty e^{-a} u_1(a)\, da = [e^{-a} s(a)]_0^\infty = s - u_0.$$

D'où, en intégrant par parties, et supposant $\lim\limits_{a=\infty} e^{-a} u(a) = 0$,

$$(2) \qquad s = \int_0^\infty u(a)\, e^{-a}\, da,$$

en posant

$$u(a) = u_0 + \int_0^a u_1(a)\, da = u_0 + \frac{u_1 a}{1} + \frac{u_2 a^2}{1.2} + \frac{u_3 a^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Dans le cas où $e^{-a}s(a)$ n'a pas de limite pour a infini, l'intégrale (2) n'a pas de sens. Mais si cette intégrale est oscillante, on pourra parfois lui attribuer un sens, *qui sera encore la valeur de s*. C'est ce qui a lieu, par exemple, si les expressions $e^{-n}s(n)$ ont *une limite généralisée*.

L'intégrale (2) ayant un sens, il peut arriver que l'intégrale

$$(2)' \qquad \mathrm{J} = \int_0^\infty |u(a)|\, e^{-a}\, da$$

n'ait pas de sens; la convergence de l'intégrale (2) est alors due aux changements de signe de la fonction $u(a)$. Dans ce cas la série s sera dite *sommable*, mais non *absolument sommable*; elle est, au contraire, *absolument sommable*, lorsque l'intégrale J a un sens. Nous nous bornerons [1] ici à l'étude des séries *absolument sommables*; elles se ma-

---

[1] Dans les Mémoires que j'ai publiés sur les séries divergentes, j'ai, en fait, pris toujours le mot *sommable* dans le sens que je donne ici aux mots *absolument sommable*; mais j'ai négligé de le faire remarquer. Au lieu d'écrire les conditions pour que l'intégrale (2) ait un sens, j'ai écrit les conditions pour que l'intégrale (2)′ en ait un (*Journal de Jordan*, 1896, p. 106). Cette erreur m'a été signalée, à peu près simultanément, par MM. Hurwitz, Osgood et Pringsheim; je tiens à les remercier ici de la marque d'intérêt qu'ils m'ont ainsi donnée. J'indique, dans le texte, une autre méthode pour étendre, à des cas plus généraux, la définition de la sommabilité; mais, pour les applications que nous avons ici en vue, le plus simple est de s'en tenir aux séries *absolument sommables*.

Je profite de cette occasion pour signaler, dans le Mémoire que je viens de citer, une erreur de rédaction dont je dois aussi la connaissance à l'obligeance de M. Osgood. Dans la définition de la sommabilité uniforme (p. 113), je n'ai pas eu soin de préciser que l'uniformité a lieu, non seulement par rapport à la variable a, mais aussi par rapport à la variable z. J'avais d'ailleurs donné la définition correcte dans ma Note des *Comptes rendus* du 30 décembre 1895.

nient beaucoup plus aisément, de même que les séries *absolument convergentes*. Les séries non absolument sommables interviendraient sans doute si l'on cherchait, par l'emploi de fonctions sommatrices convenables, à sommer des séries de Taylor au delà d'une ligne singulière essentielle, fermée ou non; on pourrait sans doute obtenir ainsi une généralisation de la notion de fonction analytique, qu'il y aurait lieu de critiquer au moyen de principes que j'ai indiqués dans ma Thèse et sur lesquels je suis revenu dans mes *Leçons sur la Théorie des fonctions*.

On démontrera très aisément que la limite généralisée d'une suite de quantités possède la plupart des propriétés fondamentales de la limite ordinaire. Par exemple, si s_n et t_n ont pour limites généralisées s et t, $as_n + bt_n$ a pour limite généralisée $as + bt$. Mais $s_n t_n$ n'a pas nécessairement st pour limite généralisée. Pour avoir ici une vraie généralisation de la propriété de limite ordinaire il faudrait poser $u_{m,n} = s_m t_n$ et l'ensemble des quantités à deux indices $u_{m,n}$ admettrait st comme limite généralisée. Pour définir les limites généralisées des quantités à deux indices, il suffirait de faire intervenir des fonctions entières à deux variables et des intégrales doubles, mais nous ne pouvons nous étendre ici sur ce sujet.

Indiquons enfin que l'on n'altère pas la limite généralisée d'une suite de quantités en *remplaçant par zéro* un nombre limité de ces quantités. Plus généralement on peut modifier l'ordre ou la valeur d'*un nombre limité* de ces quantités, mais sans changer le rang de celles dont le rang est assez élevé. Si l'on *supprime* un certain nombre de quantités dans la suite, on peut obtenir une nouvelle suite n'ayant pas de limite généralisée; on peut alors *convenir* qu'elle a même limite que la suite donnée. En tous cas, s'il y a une limite généralisée, elle reste la même.

En effet, l'égalité (1) (p. 54) nous montre que l'on a

$$e^{-a} s'(a) = e^{-a} s(a) + e^{-a} u_1(a).$$

si l'intégrale $\int_0^\infty e^{-a} |u_1(a)| \, da$ a un sens, $e^{-a} u_1(a)$ a pour limite zéro. On a donc

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} s'(a) = \lim_{a=\infty} e^{-a} s(a), \tag{3}$$

Or $s'(a)$ correspond à la suite

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots. \tag{4}$$

de la même manière que $s(a)$ correspond à la suite

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots, \tag{5}$$

On en conclut que *la limite généralisée de la suite* (4) *est égale à la limite généralisée de la suite* (5).

Nous venons de supposer que la limite généralisée de la suite (4) existait *absolument*, car $u_1(a)$ correspond à (4) comme $u(a)$ à (5). Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, il peut arriver que, la suite (4) ayant une limite, la suite (5) n'en ait pas d'après nos définitions. Dans ce cas, on pourra convenir que la suite (5) a la même limite que la suite (4) puisque sa limite n'a pas été encore définie. A un autre point de vue, dans l'égalité (3) on peut regarder l'abréviation *lim* comme mise pour *limite généralisée*, car, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-a} u_1(a)\,da$ ayant un sens, il est naturel de convenir que $e^{-a}u_1(a)$ a zéro pour limite généralisée.

Mais nous ne nous étendrons pas sur ces généralités, ni sur l'application générale de la théorie aux séries de fonctions. Contentons-nous d'indiquer que l'on peut donner une définition de la *sommabilité* uniforme (¹) tout à fait analogue à celle de la convergence uniforme et qu'on a dès lors le théorème suivant, généralisation d'un théorème célèbre de Weierstrass :

Si une série de fonctions, uniformes dans un domaine D *d'un seul tenant, est uniformément sommable dans ce domaine, sa somme est dans ce domaine une fonction analytique uniforme* F; *si dans une portion* D′ *de* D *la série est uniformément convergente, elle définit, comme on sait, une fonction analytique* F′, *laquelle ne peut différer de* F. *Dès lors,* F *est le prolongement analytique de* F′.

Le domaine D′ peut n'être pas d'un seul tenant; s'il se compose de deux parties séparées, D′ et D″, l'uniformité de la convergence dans ces deux parties ne permettrait pas d'assurer que la somme de la série est la même fonction dans D′ et dans D″; on en est certain si la série est uniformément sommable dans le domaine d'un seul tenant D, qui renferme à son intérieur D′ et D″.

(¹) Voir *loc. cit.*, en tenant compte de la note de la page 55.

Nous allons nous occuper particulièrement du cas des séries de Taylor, dont l'importance en Analyse est si considérable. La fin de ce Chapitre est consacrée aux séries dont le rayon de convergence n'est pas nul; le Chapitre III aux séries dont le rayon de convergence est nul.

II. — Les séries de puissances.

Nous allons appliquer la méthode de sommation, indiquée dans le paragraphe précédent, aux séries ordonnées suivant les puissances positives ([1]) d'une variable complexe

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots. \tag{1}$$

Nous supposerons, d'ailleurs, essentiellement que le rayon de convergence de $f(z)$ n'est ni nul, ni infini. Dans le cas où il est infini, la série est convergente dans tout le plan et nos méthodes sont inutiles; le cas où il est nul sera étudié dans le Chapitre suivant. Nous pourrons dès lors supposer, si nous le voulons, par la substitution (z, kz), le rayon de convergence égal à l'unité : cela nous épargnera la peine d'employer un caractère spécial pour le désigner, et rien ne sera plus aisé (par la substitution inverse) que de rendre les résultats applicables au cas général.

Nous supposons donc que la plus grande des limites de la suite

$$|a_1|, \quad |\sqrt{a_2}|, \quad |\sqrt[3]{a_3}|, \quad \ldots, \quad |\sqrt[n]{a_n}|, \quad \ldots$$

est égale à *un*. En fait, cette suite aura, en général, pour limite *un* (sauf qu'elle pourra renfermer des termes nuls à distribution généralement régulière).

Au sujet de la série (1), une remarque importante paraît avoir été énoncée pour la première fois ([2]) par M. Pringsheim : *en général, son cercle de convergence est une coupure*. En dépouillant la démonstration de M. Pringsheim d'un appareil analytique qui nous semble inutile,

---

([1]) Rien n'empêcherait d'étendre ces résultats aux séries $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$.

([2]) *Math. Annalen*, t. XLIV.

elle revient à ceci : on connaît des fonctions admettant leur cercle de convergence comme coupure ; soit $g(x)$ l'une d'elles; posons

$$f(x) - g(x) = f_1(x).$$

Si la fonction $f(x)$ est *quelconque*, il en est de même de $f_1(x)$; il n'y a, dès lors, aucune raison pour que la somme $f_1 + g = f$ n'admette pas les singularités de g, car il faut des relations particulières entre les coefficients de f_1 et ceux de g pour que, dans la somme $f_1 + g$, les singularités de g soient détruites par celles de f_1.

J'ai retrouvé la proposition de M. Pringsheim, et j'en ai donné une démonstration basée sur un principe tout à fait différent (¹); M. Fabry en a donné, très peu de temps après, une démonstration nouvelle (²). La démonstration de M. Fabry, comme la mienne, se distingue de celle de M. Pringsheim en ce que le fait que les coefficients sont quelconques intervient d'une manière tout à fait précise, et non pas seulement pour servir de base à un raisonnement reposant, au fond, sur le principe de raison suffisante. On définit une suite d'entiers croissants $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ et l'on considère séparément les termes de la série dont l'indice est compris entre n_p et n_{p+1}. On montre que la considération *exclusive* de ce groupe (³) de termes permet de définir un argument θ_p; dès lors les arguments θ_p devront être regardés comme indépendants les uns des autres, si l'on suppose les coefficients *quelconques*, c'est-à-dire les groupes successifs de coefficients sans lien nécessaire entre eux. Or, si l'on marque sur la circonférence de convergence tous les points $e^{i\theta_p}$, on prouve que l'ensemble *dérivé* de leur ensemble est formé de points singuliers de la fonction. Dans le cas général cet ensemble dérivé se compose de toute la circonférence,

---

(¹) *Comptes rendus*, 14 décembre 1896; *Acta mathematica*, t. XXI.

(²) *Comptes rendus*, 18 janvier 1897; *Acta mathematica*, t. XXII.

(³) La considération de groupes successifs de termes et leur étude, indépendamment les uns des autres, permettent de déterminer les singularités des séries de Taylor dans des cas très étendus. C'est là un fait que je crois avoir signalé le premier, dans les Notes qui viennent d'être citées et dans mon Mémoire *Sur les séries de Taylor* (*Journal de M. Jordan*, p. 448-449; 1896).

Dans une Note récente, M. Leau (*Comptes rendus*, octobre 1898) a contribué a en montrer l'importance, en même temps qu'il l'énonçait, pour la première fois sans doute, sous une forme très générale.

c'est-à-dire que l'ensemble des points $e^{i\theta_p}$ est dense sur tout arc de la circonférence. La démonstration de M. Fabry et la mienne diffèrent par la manière dont sont obtenus les nombres n_p et les arguments θ_p.

Si nous avons tenu à en rappeler le principe commun, c'est pour insister sur la conséquence qui en découle immédiatement : il est clair que si l'on considère comme donnée la fonction analytique $f(z)$ et si l'on forme le développement de Taylor relatif à un point quelconque du plan, le cercle de convergence passera, *en général*, par *un seul* point singulier. Pour qu'il n'en fût point ainsi, en effet, il faudrait que son centre satisfît à des conditions déterminées; donc, dans ce cas, *les arguments* θ_p *ont une limite*. Cette limite pourra être appelée l'*argument singulier* de la série, et l'on voit que ce qui distingue la série *générale a priori* de la série déduite de la *fonction générale*, c'est que cette dernière a un *argument singulier*, tandis que la première est *isotrope*, c'est-à-dire indifférente à la direction : *tous les arguments sont singuliers*.

Cet exemple suffit pour nous montrer quels résultats on peut espérer d'une étude des séries divergentes. Si nous donnons à z une valeur dont le module surpasse très peu l'unité, la série

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

est divergente. Il semble naturel, *si l'on convient de lui attribuer un sens*, d'exiger que sa somme soit égale à la valeur au point z de la fonction $f(z)$ (cette valeur est déterminée si $|z|$ est assez voisin de *un* : on suit le rayon du cercle). Or ceci n'est possible que si le cercle de convergence *n'est pas* une coupure; et s'il y a sur ce cercle *un seul* point singulier, le seul cas à exclure sera celui où l'argument de z sera précisément égal à l'argument de ce point. Bien que la série (1) soit une série divergente très particulière, nous constatons ici un fait qui doit être fort général : si l'on considère la série divergente comme arbitraire *a priori*, il n'y a rien à en espérer [1]. Si, au contraire, ses

---

[1] Nous avons laissé ici de côté la question de savoir si, le cercle de convergence étant une coupure, il ne serait pas possible, en généralisant la notion de fonction analytique, de définir *un prolongement* au delà du cercle. Mais il est bien probable que, si cela est possible, ce sera encore dans des cas très particuliers par rapport à la série *quelconque* donnée *a priori*.

termes sont obtenus par une loi analytique, il y a bien des chances pour qu'elle ait une somme.

Nous nous sommes ainsi trouvé conduit à envisager le problème de la sommation des séries divergentes à un point de vue plus restreint que celui qui est développé dans le paragraphe précédent; le problème que nous nous proposons ici pourrait même être énoncé sans qu'il fallût parler de séries divergentes. Néanmoins les principes posés dans le paragraphe précédent nous seront de la plus grande utilité pour son étude.

Notre problème actuel peut s'énoncer ainsi : étant donnée la série (1) supposée divergente pour $z = z_0$, trouver la valeur au point z_0 de la fonction analytique définie par cette série dans son cercle de convergence [1]. Il est d'abord clair que l'existence de fonctions non uniformes rend ce problème indéterminé : ainsi certaines séries divergentes [2] auront des périodes, *tout comme les intégrales définies;* mais c'est là un point que nous ne développerons pas pour le moment. Nous rendrons le problème déterminé en traçant des coupures rectilignes allant de chaque point singulier de $f(z)$ à l'infini, ces coupures étant d'ailleurs, pour fixer les idées, les prolongements des rayons du cercle de convergence. D'ailleurs, nous nous attacherons surtout à l'étude de la fonction dans le voisinage immédiat de son cercle de convergence : c'est la seule étude indispensable pour connaître le nombre et la nature des points singuliers situés sur ce cercle.

En dehors de la méthode du prolongement analytique qui fournit, à l'aide de calculs théoriquement simples et malheureusement fort longs en pratique, une solution satisfaisante de la question, une autre méthode a été proposée récemment par M. Ernst Lindelöf. Elle repose sur la théorie de la représentation conforme et paraît excellente, dans certains cas, au point de vue de la pratique; mais le Mémoire de

---

(1) On voit que ce problème étant résolu, on pourra définir la somme de toute série divergente qui devient absolument convergente lorsqu'on divise ses termes successifs par les termes d'une progression géométrique convenablement choisie : c'est ce que Cauchy appelait une série de *module* fini.

(2) Les séries convergentes aussi, bien entendu.

M. Lindelöf vient à peine de paraître ([1]) et nous n'avons pas eu le temps de l'étudier en détail, ni de rechercher s'il y a quelque relation entre sa méthode et la nôtre.

Nous ferons jouer un rôle essentiel à l'intégrale de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(u)\,du}{u-z},$$

dans laquelle C désigne un contour quelconque à l'intérieur duquel $f(z)$ est régulière.

On voit que $f(z)$ se présente comme la somme d'une infinité d'éléments de la forme $\frac{A}{a-z}$; d'où plusieurs remarques importantes.

On a

$$\frac{A}{a-z} = \frac{A}{a}\left(1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \frac{z^3}{a^3} + \ldots\right).$$

Donc la série $f(z)$ se présente comme la somme d'une infinité de progressions géométriques. La partie principale des coefficients sera fournie par celles de ces progressions dont la raison a le plus grand module, et cette remarque a donné lieu à des travaux bien connus ([2]). Mais on ne doit pas perdre de vue une circonstance remarquable : soit a le point du contour C dont le module est le plus petit (nous le supposons unique, pour fixer les idées); si le point a n'est pas un point singulier pour $f(z)$, on peut *agrandir* C en ce point, et dans la nouvelle expression de $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{f(u)\,du}{u-z}$$

le *module maximum* des raisons des diverses progressions géométriques aura diminué. Ainsi le fait que, dans la formule de Cauchy, les valeurs de $f(u)$ sont précisément celles d'une fonction analytique

---

([1]) *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXIV.

Un cas particulier de sa méthode avait été signalé par M. Lindelöf, dans les *Comptes rendus* du 28 février 1898.

([2]) *Voir* notamment : DARBOUX, *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (*Journal de Mathématiques*, 1878). — HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions, etc.* (*Ibid.*, 1892).

sur le contour, amène cette conséquence que les termes *d'ordre maximum* se détruisent d'eux-mêmes : la valeur principale de a_n est inférieure à ce qu'elle devrait être en général si $f(u)$ était quelconque.

D'après cela, deux cas principaux seraient à distinguer : le point *singulier le plus rapproché* de l'origine étant a (nous le supposons toujours unique, pour simplifier), il est, *ou non*, possible de tracer un contour C passant par a, *extérieur* au cercle de convergence, et relativement auquel la formule de Cauchy soit applicable. Suivant que l'on se trouve dans l'un ou l'autre cas, des circonstances différentes se présentent relativement aux valeurs principales des coefficients, et ceci peut servir pour définir en quelque mesure la nature du point singulier a.

Mais cela n'est pas notre but actuel et la seconde remarque que nous avons à faire au sujet de la formule de Cauchy nous sera plus directement utile.

Nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(u)\,du}{u-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(u)}{u}\left(1+\frac{z}{u}+\frac{z^2}{u^2}+\ldots\right)du.$$

La série de Taylor apparaît ainsi comme la somme d'une infinité de progressions géométriques. Supposons maintenant que, *par un procédé quelconque*, nous ayons défini la *somme* d'une série divergente

$$u_0+u_1+u_2+\ldots.$$

Supposons, de plus, que ce procédé soit tel que, si les séries ayant respectivement u_n et v_n pour terme général ont pour sommes U et V, la série de terme général au_n+bv_n ait pour somme $a\mathrm{U}+b\mathrm{V}$.

Supposons enfin que le procédé, appliqué à la progression géométrique

$$1+x+x^2+\ldots,$$

donne le résultat *exact* $\frac{1}{1-x}$, *au moins pour certaines valeurs de* x *de module supérieur à un :* d'une manière plus précise, lorsque x se trouve dans un certain domaine A.

Dès lors (sous réserve d'une étude rigoureuse à cause de la substitution d'une intégrale définie à la somme d'un nombre limité de termes), *le procédé en question permettra de sommer la série de Taylor dans une région en général plus étendue que son cercle de convergence.* En effet, la progression géométrique

$$1 + \frac{z}{u} + \frac{z^2}{u^2} + \dots$$

est sommable lorsque $\frac{z}{u}$ se trouve dans la région A et, par suite, lorsque z se trouve dans une région que nous pouvons désigner par uA, et qui s'obtient en multipliant par u chaque point de la région A. Supposons maintenant que u parcoure tout le contour C; l'ensemble des régions uA aura, en général, une partie commune dans laquelle la série de Taylor proposée sera sommable.

Une remarque importante est la suivante : nous supposons que le procédé de sommation s'applique toujours aux séries convergentes; par suite, la région A comprend à son intérieur le cercle de rayon *un* (ou, du moins, un cercle intérieur en différant aussi peu que l'on veut; nous négligerons cette distinction lorsqu'elle sera sans importance). Par suite, la région uA comprend à son intérieur le cercle de rayon $|u|$. Supposons maintenant que nous voulions étudier la fonction $f(z)$ seulement dans le voisinage de son cercle de convergence; les points de C extérieurs à un cercle de rayon $1 + \varepsilon$ fourniront des régions uA extérieures à ce même cercle. On n'aura donc à se préoccuper, pour limiter la *région de sommabilité*, que des points de C *intérieurs* à ce cercle de rayon $1 + \varepsilon$ [1].

Pour éclaircir ce qui précède, nous allons indiquer *un* procédé de sommation qui satisfait aux conditions de la page précédente; c'est précisément celui que nous avons étudié dans le premier paragraphe de ce Chapitre; nous en indiquerons ensuite d'autres; on pourrait évidemment en imaginer une infinité.

Étant donnée la progression géométrique

$$1 + x + x^2 + \dots,$$

---

[1] On comparera ces remarques avec celles qui terminent la Note de M. Leau, citée tout à l'heure, et publiée après l'envoi de ce Mémoire à l'Académie, mais avant son impression. M. Leau ne suppose d'ailleurs pas que la région que, comme nous, il appelle A comprenne nécessairement le cercle de convergence.

multiplions le terme de rang $n+1$ par $\frac{a^n}{n!}$; nous obtenons

$$1+\frac{ax}{1}+\frac{a^2x^2}{2!}+\ldots=e^{ax}.$$

Multiplions le résultat par $e^{-a}da$ et intégrons de zéro à l'infini; nous aurons

$$\int_0^\infty e^{ax}.e^{-a}\,da=\int_0^\infty e^{a(x-1)}\,da=\frac{1}{1-x},$$

à condition que la partie réelle de $x-1$ soit négative. L'aire A est donc ici formée de la partie du plan qui satisfait à la condition

$$\text{partie réelle de } x \leqq 1-\varepsilon,$$

ε étant un nombre *positif quelconque*. De plus, si nous supposons ε FIXE, l'intégrale

$$\int_0^{a} e^{a(x-1)}\,da$$

convergera *uniformément* vers $\frac{1}{1-x}$ lorsque a augmentera indéfiniment par valeurs positives. Cette remarque est importante pour l'extension du résultat à l'intégrale définie, somme d'une infinité de progressions géométriques. On remarquera de plus que la sommabilité est *absolue*, d'après les définitions données dans le paragraphe précédent. Nous négligerons de renouveler cette remarque.

Considérons un contour C; soit u un point quelconque de ce contour; nous supposerons z intérieur à toutes les régions uA, c'est-à-dire que nous aurons, quel que soit u sur C,

$$\text{partie réelle de } \frac{z}{u} \leqq 1-\varepsilon.$$

Nous avons

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

avec

$$2i\pi a_n=\int_C\frac{f(u)\,du}{u^{n+1}}.$$

Nous multiplierons le terme général de la série $f(z)$ par $\frac{a^n}{n!}$; et nous poserons

$$\varphi(a) = a_0 + a_1 z a + \frac{a_2 z^2 a^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n z^n a^n}{n!} + \ldots.$$

Nous aurons

$$2i\pi\,\varphi(a) = \int_C f(u)\left(\frac{1}{u} + \frac{a^2}{u^2} + \frac{a_2 z^2}{2u^3} + \ldots\right) du = \int_C \frac{f(u)}{u} e^{\frac{az}{u}}\, du.$$

Il est à peine besoin de dire que l'intégrale du second membre a sûrement un sens, si la fonction $f(u)$ est régulière dans un contour C' extérieur à C et sans point commun avec C.

Nous aurons ensuite

$$(\alpha) \qquad e^{-a}\varphi(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(u)}{u} e^{a\left(\frac{z}{u}-1\right)} du,$$

$$\int_0^a e^{-a}\varphi(a)\, da = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(u)}{u}\left[\int_0^a e^{a\left(\frac{z}{u}-1\right)} da\right] du.$$

Faisons maintenant augmenter a indéfiniment; grâce à l'hypothèse

$$\text{partie réelle de } \left(\frac{z}{u} - 1\right) \leqq -\varepsilon,$$

l'intégrale

$$\int_0^a e^{a\left(\frac{z}{u}-1\right)} da$$

tend *uniformément* vers sa limite

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{u}}.$$

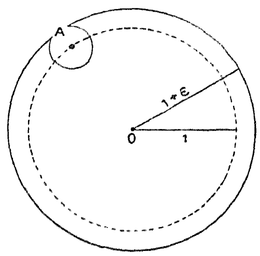
Par suite, le second membre tend vers une limite et, par suite, aussi le premier; et l'on a

$$\int_0^\infty e^{-a}\varphi(a)\, da = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(u)\, du}{u\left(1 - \frac{z}{u}\right)} = f(z).$$

Ainsi, la méthode de sommation est applicable à une série de Taylor dans une région obtenue comme il suit : on joint l'origine O à chaque point M du contour C, on mène en M la perpendiculaire à OM et l'on supprime la portion du plan qui, par rapport à cette perpendiculaire, n'est pas du même côté que O. Cette région est ainsi limitée par une *podaire négative* de C.

Dans le cas où la fonction possède un seul point singulier sur son cercle de convergence, nous pouvons appliquer la remarque de la

Fig. 1.



page 64; nous prendrons un contour C formé d'un arc, très voisin de 2π, d'un cercle de rayon $1+\varepsilon$, et d'un petit cercle entourant le point singulier A. Nous verrons alors que la région de sommabilité dépasse partout le cercle de convergence, excepté au voisinage du point singulier. D'ailleurs, il est aisé de montrer, en général, qu'en un point non singulier la région de sommabilité s'étend d'une quantité finie au delà du cercle.

Cette théorie établit une relation étroite entre la fonction

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

et une fonction entière que l'on peut appeler *fonction entière associée* (¹) :

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \frac{a_3 z^3}{3!} + \ldots.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\varphi(a) = F(az).$$

Il résulte de l'égalité (α) (p. 66) que, z étant intérieur à la région

(¹) J'ai introduit la *fonction entière associée* dans le Mémoire déjà cité du *Journal de M. Jordan*, et ai proposé de la désigner ainsi dans une Note des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, le 14 décembre 1896.

de sommabilité, le produit $e^{-a}\varphi(a)$ tend vers zéro lorsque a augmente indéfiniment. Il en est d'ailleurs de même du produit $a^k e^{-a}\varphi(a)$, k étant un nombre positif quelconque, puisque l'on a

$$a^k e^{-a}\varphi(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(u)}{u}\, a^k e^{a\left(\frac{z}{u}-1\right)}\, du$$

avec

$$\text{partie réelle de } \frac{z}{u} < 1 - \varepsilon;$$

ε étant indépendant de u. Il en résulte que dans une région *intérieure* à la région de sommabilité, la sommabilité est *absolue* et *uniforme*.

Supposons maintenant que l'on ait [1], pour $z = z_1$,

$$\lim_{a_1=\infty} e^{-a_1}\mathrm{F}(a_1 z_1) = 0.$$

Donnons à z une valeur de même argument que z_1, mais de module moindre et posons $az = a_1 z_1$; a sera réel et positif comme a_1, mais le rapport $\frac{a_1}{a}$ sera inférieur à l'unité; nous poserons $a = a_1(1+k)$; k est un nombre positif déterminé. Cela posé, on a

$$e^{-a}\mathrm{F}(az) = e^{-a_1(1+k)}\mathrm{F}(a_1 z_1) = e^{-a_1 k}[e^{-a_1}\mathrm{F}(a_1 z_1)]$$

et

$$\int_0^\infty e^{-a}\mathrm{F}(az)\,da = (1+k)\int_0^\infty e^{-a_1 k}[e^{-a_1}\mathrm{F}(a_1 z_1)]\,da_1. \tag{1}$$

Il est, en effet, manifeste que, grâce au facteur $e^{-a_1 k}$, l'intégrale du second membre a un sens, puisque le facteur entre crochets tend vers zéro par hypothèse. Elle conserverait d'ailleurs un sens si l'on remplaçait la quantité à intégrer par son module.

L'égalité (1) exprime alors que la série $f(z)$ est *sommable* pour les valeurs de z *de même argument que* z_1 et de module moindre. Désignons par z' l'une de ces valeurs supposée fixe et posons $z_1 = z'(1+k')$; si l'on suppose $|z| < |z'|$ (les arguments étant toujours égaux), on

---

[1] On pourrait supposer aussi $\lim a^k e^{-a}\mathrm{F}(az) = 0$, k étant positif ou négatif; on pourrait, enfin, dans ce qui va suivre, introduire pour la variable a d'autres chemins d'intégration allant à l'infini; mais nous devons nous borner.

aura $k > k'$ et l'on voit que l'intégrale

$$\int_0^{a_1} e^{-a_1 k}[e^{-a_1} F(a_1 z_1)]\, da_1$$

tend *uniformément* vers sa limite lorsque a_1 tend vers l'infini. C'est ce que nous exprimerons en disant que *la sommabilité de $f(z)$ est* ABSOLUE ET UNIFORME *pour*

$$|z| \leqq |z'| < |z_1|,$$

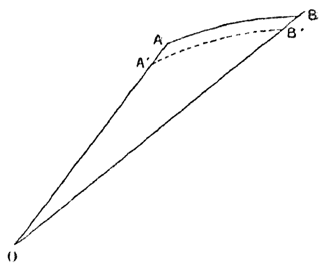
z, z', z_1 ayant même argument, z' étant fixe, et z_1 étant tel que l'on ait

$$\lim_{a_1 = \infty} e^{-a_1} F(a_1 z_1) = 0. \tag{2}$$

C'est la généralisation d'une proposition célèbre d'Abel sur les séries entières.

Supposons maintenant que la condition (2) soit vérifiée *uniformément* pour les points d'un petit arc AB (*fig.* 2).

Fig. 2.



La série $f(z)$ sera *absolument et uniformément sommable* à l'intérieur du secteur OA'B' infiniment voisin du secteur OAB, c'est-à-dire que les intégrales

$$\int_0^{a} e^{-a} F(az)\, da \tag{3}$$

$$\int_0^{a} e^{-a} |F(az)|\, da \tag{4}$$

tendront uniformément vers une limite lorsque a augmentera indéfiniment. On a, d'ailleurs,

$$\int_0^{\infty} e^{-a}\,\mathrm{F}(az)\,da = \int_0^{\infty z} e^{-\frac{\lambda}{z}}\,\mathrm{F}(\lambda)\,\frac{d\lambda}{z},$$

en se servant de la notation ∞z pour indiquer que le chemin d'intégration rectiligne a l'argument de z. On peut différentier maintenant aisément par rapport à z; il n'y a aucune difficulté si l'on suppose l'argument de z constant; sinon il faut se servir de ce que les intégrales (3) et (4) sont uniformément convergentes dans le secteur O A′B′. On obtient, à un facteur constant près, pour les dérivées successives de l'intégrale (3), des intégrales que l'on peut ramener à la forme

$$\int_0^{\infty} a^n e^{-a}\,\mathrm{F}(az)\,da,$$

et l'on voit, comme précédemment, ce qui complète le théorème d'Abel généralisé, que les intégrales

$$\int_0^{a} a^n e^{-a}\,\mathrm{F}(az)\,da = \mathrm{K}\int_0^{a_1} a_1^n\, e^{-a_1 k}[e^{-a_1}\,\mathrm{F}(a_1 z_1)]\,da_1$$

tendent toutes (n nombre positif *fixe*) *uniformément* vers leur limite lorsque a augmente indéfiniment, z étant toujours dans la même région. Il en serait de même si, dans ces intégrales, on remplaçait la quantité à intégrer par son module.

La condition (2) étant supposée vérifiée uniformément sur l'arc AB, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-a}\,\mathrm{F}(az)\,da$$

définit dans le secteur O A′B′ une fonction analytique uniforme, laquelle, étant évidemment égale à $f(z)$ à l'intérieur du cercle de convergence, n'en saurait différer à l'extérieur. Ainsi, dans ce cas, la fonction $f(z)$ est uniforme dans le secteur O A′B′.

Il résulte de ce qui précède que *la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(z)$ puisse être prolongée au delà d'un arc $\alpha\beta$ du cercle de convergence, c'est qu'il existe un nombre positif ρ supérieur à* UN *et tel que,* le module de z étant égal à ρ, et son argument pouvant être égal à celui des divers points d'un arc $\alpha'\beta'$ (intérieur à $\alpha\beta$, mais en différant aussi peu que l'on veut), *le produit*

$$e^{-a}\,\mathrm{F}(az)$$

tende uniformément vers zéro lorsque a augmente indéfiniment (1).

Posons

$$z = \rho e^{i\theta}; \qquad a\rho = r; \qquad \frac{1}{\rho} = 1 - \varepsilon,$$

il vient

$$e^{-a}\,\mathrm{F}(az) = e^{-r(1-\varepsilon)}\,\mathrm{F}(re^{i\theta}).$$

Si nous posons

$$|\,\mathrm{F}(re^{i\theta})\,| = \Phi_0(r),$$

nous définissons sur chaque demi-droite $z = re^{i\theta}$ une fonction positive de la variable réelle positive r. Dire que le produit

$$e^{-r(1-\varepsilon)}\Phi_0(r)$$

tend vers zéro pour $r = \infty$, c'est dire que l'ordre d'infinitude de $\Phi_0(r)$ est inférieur à celui de $e^{r(1-\varepsilon)}$, c'est-à-dire à $(1-\varepsilon)\omega$.

Or la fonction $\mathrm{F}(z)$ est définie par l'égalité

$$\mathrm{F}(z) = \sum \frac{a_n z^n}{n\,!},$$

et les a_n sont les coefficients d'une série de Taylor dont le rayon de convergence est *un*. On en conclut aisément que si l'on désigne par $\mathrm{M}(r)$ le maximum du module de $\mathrm{F}(z)$ pour $|\,z\,| = r$ [ou, si l'on veut, le maximum de toutes les fonctions $\Phi_0(r)$ pour r constant et θ variable], on a

$$\lim e^{-r(1+\varepsilon)}\,\mathrm{M}(r) = 0,$$

quelque petit que soit le nombre positif ε; tandis que le produit $e^{-r(1-\varepsilon)}\mathrm{M}(r)$ prend pour des valeurs de r croissant indéfiniment une infinité de valeurs aussi grandes que l'on veut (2). Ce dernier point résulte d'ailleurs de ce que la région de sommabilité uniforme ne saurait dépasser partout le cercle.

---

(1) Nous laissons ici de côté la question suivante : le point α appartenant à un arc singulier du cercle de convergence, la série peut-elle être *sommable* sur le rayon $O\alpha$, au delà de α? Mais la sommabilité n'est certainement pas absolue et uniforme.

(2) *Journal de M. Jordan*, p. 446; 1896.

On voit que la recherche des points singuliers de $f(z)$ sur son cercle de convergence revient à l'étude de la question suivante : Comparer les fonctions $\Phi_0(r)$ avec la fonction $M(r)$, c'est-à-dire la variation du module de $F(z)$ sur une demi-droite avec la variation du maximum de son module.

Attachons-nous au cas particulier où $f(z)$ n'admet qu'*un* point singulier sur son cercle de convergence; alors *une* seule fonction $\Phi_0(r)$ sera du même ordre de grandeur que $M(r)$; les autres seront inférieures. En d'autres termes, la fonction entière $F(z)$ a *un argument singulier*, c'est-à-dire une direction dans laquelle elle augmente bien plus rapidement que dans les autres. Ce sera le cas *général*, si l'on regarde la série $f(z)$ comme formée à l'aide d'une *fonction analytique* donnée *a priori*.

III. — Applications.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier particulièrement le cas où la fonction $f(z)$ n'admet qu'*un* point singulier sur son cercle de convergence; nous supposerons que c'est le point $z = 1$, et *nous nous proposerons d'étudier la fonction $f(z)$ au voisinage de ce point*, et, en particulier, de la définir dans une portion de plus en plus étendue de ce voisinage. Nous utiliserons pour cela un procédé de sommation très voisin [1] de celui que nous avons indiqué dans le paragraphe précédent et que nous allons appliquer tout d'abord à la progression géométrique

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

Nous grouperons les termes p à et p multiplierons le $(n+1)^{\text{ième}}$ groupe par $\frac{a^n}{n!}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\psi(a) = {} & 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} \\ & + \frac{a}{1!}(x^p + \ldots + x^{2p-1}) + \frac{a^2}{2!}(x^{2p} + \ldots + x^{3p-1}) + \ldots\end{aligned}$$

---

[1] J'ai indiqué l'intérêt que présentait l'étude de cette généralisation et d'une autre généralisation analogue, dans le *Journal de M. Jordan*, 1896, p. 121, et dans les *Comptes rendus*, 7 avril 1896.

ou bien

$$\psi(a) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1})\left(1 + \frac{ax^p}{1!} + \frac{a^2x^{2p}}{2!} + \frac{a^3x^{3p}}{3!} + \ldots\right) = \frac{1 - x^p}{1 - x} e^{ax^p}.$$

Multiplions maintenant par $e^{-a}\,da$ et intégrons entre les limites 0, ∞; nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{1 - x^p}{1 - x} e^{ax^p} e^{-a}\,da = \frac{1}{1 - x},$$

à condition que l'intégrale ait un sens, ce qui exige

partie réelle de $(1 - x^p)$, *positive*.

Posons $x = \rho(\cos\omega + i \sin\omega)$; on devra avoir

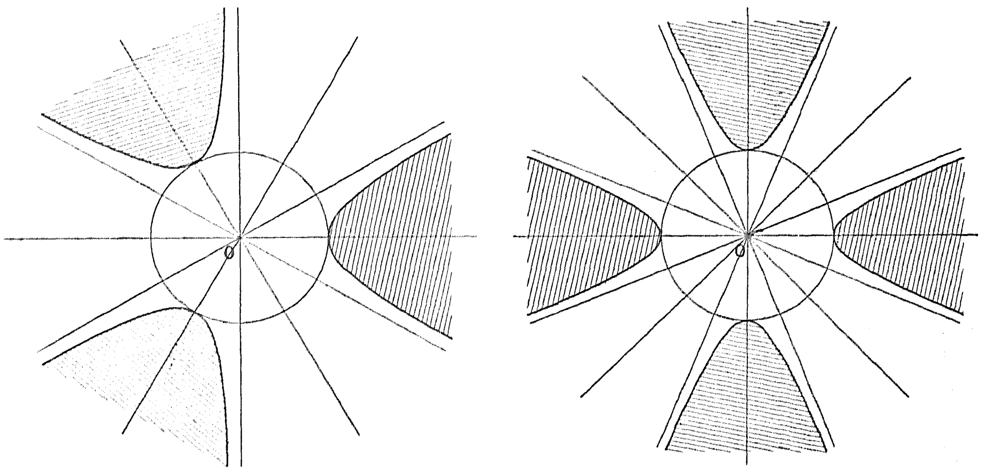
$$\rho^p \cos p\omega < 1.$$

Pour interpréter cette inégalité, il suffira de construire la courbe

$$\rho^p \cos p\omega = 1;$$

dans le cas déjà étudié où $p = 1$, c'est la tangente au cercle de convergence au point *un*; si $p > 1$, la courbe admet pour asymptotes les droites $\omega = \frac{(2k+1)\pi}{2p}$ et est aisée à construire; la voici (*fig.* 3) pour

Fig. 3.



$p = 3$ $\qquad$ $p = 4$

$p = 3$, et pour $p = 4$ (pour $p = 2$, c'est une hyperbole).

La progression géométrique est sommable dans la portion du plan non couverte de hachures : c'est cette portion du plan qui constitue l'aire appelée plus haut A. En particulier, elle est sommable dans l'angle compris entre les demi-droites $\omega = \frac{\pi}{2p}$, $\omega = \frac{3\pi}{2p}$ et dans l'angle compris entre les demi-droites $\omega = \frac{-\pi}{2p}$, $\omega = \frac{-3\pi}{2p}$ (ainsi que sur les côtés de ces angles).

Considérons maintenant la fonction analytique $f(z)$; l'emploi de l'intégrale de Cauchy permettra, en raisonnant comme plus haut, de la sommer comme la progression géométrique; on posera

$$\begin{aligned}\psi_p(a) &= a_0 + a_1 z + \ldots + a_{p-1} z^{p-1} \\ &\quad + \frac{a}{1}(a_p z^p + \ldots + a_{2p-1} z^{2p-1}) + \frac{a^2}{2!}(a_{2p} z^{2p} + \ldots + a_{3p-1} z^{3p-1}) + \ldots,\end{aligned}$$

et l'on aura, dans la région de sommabilité (formée des parties communes aux régions uA),

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-a} \psi_p(a)\, da.$$

D'ailleurs, dans cette région de sommabilité, le produit $e^{-a}\psi_p(a)$ tend vers zéro. La sommabilité est absolue et uniforme, pour $f(z)$ et ses dérivées d'ordre quelconque, dans toute région finie *intérieure* à la région de sommabilité.

Notre but actuel est, supposant que le point $z = 1$ est le *seul* point singulier situé sur le cercle de convergence, d'étudier la fonction au voisinage de ce point. Nous diviserons cette étude en deux parties :

1° Nous rechercherons si la fonction admet des points singuliers infiniment voisins de 1 et non situés sur l'axe réel, et nous indiquerons le moyen théorique de les déterminer;

2° Supposant que la fonction $f(z)$ n'admet pas de point singulier en dehors de l'axe réel (au moins dans un certain voisinage de $x = 1$), nous désignerons par x un nombre supérieur à l'unité, par ε une quantité positive, et nous poserons

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon = 0} [f(xe^{i\varepsilon}) - f(xe^{-i\varepsilon})].$$

Dans cette formule, la valeur de $f(xe^{i\varepsilon})$ est bien déterminée; c'est celle que l'on obtient en allant au point $xe^{i\varepsilon}$ en suivant la droite $\omega = \varepsilon$.

Nous donnerons une expression analytique de la fonction $\theta(x)$. Cette fonction peut être indéterminée pour les valeurs [1] de x supérieure à *un* et voisines de *un*; le segment de droite correspondant est alors une ligne singulière essentielle de $f(z)$. Nous supposerons la fonction $\theta(x)$ *déterminée* au moins pour les valeurs d'un petit intervalle $1 < x \leqq x_0$. Ce segment est encore une ligne singulière essentielle de $f(z)$ si la fonction $\theta(x)$ n'est analytique pour aucune valeur de x. Enfin, si la fonction $\theta(x)$ est analytique dans cet intervalle, la fonction $f(z)$ est simplement *non uniforme* au voisinage de $z = 1$ et la fonction $\theta(x)$ donne la *mesure* de sa non-uniformité, par rapport au segment $1 < x \leqq x_0$: c'est la différence des deux valeurs que prend $f(z)$ en un point x de ce segment suivant que, pour arriver à ce point, on passe d'un côté ou de l'autre du point $z = 1$; la fonction est uniforme en ce point si $\theta(x)$ est identiquement nul.

Occupons-nous maintenant de notre premier problème : reconnaître si la fonction $f(z)$ a des points singuliers infiniment voisins de *un* en dehors de l'axe réel. Si elle n'en a pas, il existe un nombre positif α tel que le module de tous les points singuliers *non réels et positifs* de $f(z)$ soit supérieur à $1 + \alpha$. Dès lors, on voit immédiatement que la région de sommabilité comprend, quel que soit p, tous les points

$$(1) \qquad z = (1 + \alpha)\, e^{i\omega}; \qquad \frac{\pi}{2p} < \omega < \frac{3\pi}{2p}, \qquad \frac{-3\pi}{2p} < \omega < \frac{-\pi}{2p}.$$

En d'autres termes, le produit

$$e^{-a}\psi_p(a)$$

tend vers zéro pour toutes les valeurs (1) de z. Si l'on peut trouver un nombre α assez petit pour que cette condition soit vérifiée *pour toute valeur de* p, alors la fonction $f(z)$ n'admet pas de points singuliers (non réels positifs), de module inférieur à $1 + \alpha$. Si, au contraire, quel

---

(1) Ces valeurs peuvent être les valeurs de tout l'intervalle $1 < x < x_0$ ou être *denses* en tout point de cet intervalle; ou y former un ensemble parfait qui ne soit *dense* dans aucun intervalle; il y correspond des singularités spéciales pour $f(z)$. Nous n'insistons pas là-dessus.

que soit α, la condition cesse d'être vérifiée pour quelque valeur de p, l'étude de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-a}\psi_p(a)\,da$$

fera connaître des singularités de la fonction de module inférieur à $1+\alpha$. On se contentera souvent d'avoir signalé l'existence de telles singularités pour toute valeur de α. Sinon, la multiplicité des hypothèses possibles nécessitera des recherches parfois longues. Indiquons, parmi les cas faciles à examiner, celui où le point $z=1$ appartient à une ligne singulière ayant en ce point et dans son voisinage un rayon de courbure déterminé. Dans ce cas, si l'on prend $p=1$ et que l'on cherche le rayon de courbure de la courbe qui limite la région de sommabilité au voisinage du point $z=1$, on trouve aisément une relation simple entre ces deux rayons de courbure (l'une des courbes est la podaire de l'autre). Mais il pourrait arriver que la région de sommabilité réelle dépasse la région de sommabilité théorique (région commune à tous les domaines uA); de sorte que l'on obtiendrait seulement un maximum de rayon de courbure. On peut avoir sa valeur exacte en donnant à p des valeurs entières assez grandes; on constate alors, par un calcul facile (en prenant l'enveloppe des courbes analogues à $\rho^p=\cos p\omega$), que la région théorique de sommabilité se rapproche indéfiniment, lorsque p augmente, de la région limitée par la courbe singulière. D'une manière précise, le rayon de courbure au point $z=1$ de la région *théorique* de sommabilité a pour limite le rayon de courbure de la ligne singulière. La courbe qui limite la région *pratique* de sommabilité étant comprise entre deux courbes telles que le rayon de courbure de l'une a pour limite le rayon de courbure de l'autre, son rayon de courbure a lui-même même limite.

Nous allons nous occuper maintenant du second problème que nous avions posé : supposons que la fonction proposée n'ait pas de point singulier non réel et positif de module inférieur à $1+\alpha$; nous nous proposons de l'étudier pour les valeurs réelles de z comprises entre 1 et $1+\alpha$. Désignons par x un nombre réel compris entre ces limites. Nous calculerons $f(xe^{i\varepsilon})$ et $f(xe^{-i\varepsilon})$, ε étant une constante positive, et nous ferons tendre ε vers zéro.

Si chacune de ces expressions tend vers une limite, nous pourrons définir la fonction $\theta(x)$ considérée plus haut; sinon x sera un point singulier de la fonction $f(z)$. La fonction $\theta(x)$ étant construite, x sera encore un point singulier si $\theta(x)$ n'est pas analytique en ce point [dans ce cas on ne peut pas affirmer que $f(z)$ tende vers une limite lorsque z tend vers x par un chemin différent de l'arc de cercle considéré : $z = xe^{i\varepsilon}$].

Nous donnerons d'abord à ε des valeurs de la forme $\frac{\pi}{2p}$; il est clair que si $f\left(xe^{\frac{i\pi}{2p}}\right)$ a une limite pour $p = \infty$, on n'en peut conclure toujours que $f(xe^{i\varepsilon})$ en a une pour $\varepsilon = 0$; néanmoins, dans la plupart des cas, la première étude suffira. Nous avons posé

$$\psi_p(a) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{p-1} z^{p-1} + \frac{a}{1}(a_p z^p + \ldots) + \frac{a^2}{1\,.\,2}(a_{2p} z^{2p} + \ldots) + \ldots.$$

Si nous introduisons la notation

$$\frac{a^n}{n!} = a^{|n|}$$

et désignons par $\mathrm{E}(y)$ la partie entière de y, nous pourrons écrire

$$\psi_p(a) = \sum a_n z^n a^{\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\right]}.$$

Si nous posons $z = xe^{\frac{i\pi}{2p}}$, valeur pour laquelle la série est sommable, comme nous le savons, il vient

$$\psi_p(a) = \sum a_n x^n e^{\frac{ni\pi}{2p}} a^{\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\right]}$$

et [1]

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-a}\left(\sum a_n x^n e^{\frac{ni\pi}{p}} a^{\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\right]}\right) da.$$

---

[1] Il serait intéressant de rechercher si, comme il est probable, cette expression vaut encore pour les valeurs non entières de p et aussi si l'on ne pourrait remplacer $a^{\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\right]}$ par $\dfrac{a^{\frac{n}{p}}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}$. Mais nous devons nous contenter d'indiquer ici ces sujets de recherches.

Il s'agira tout d'abord de rechercher si cette expression tend vers une limite lorsque p augmente indéfiniment; s'il en est ainsi il faudra, pour une rigueur absolue, s'assurer que l'on obtient la même limite en remplaçant π par $k\pi$, k étant un nombre pouvant varier d'une manière quelconque entre 1 et 3 [cela revient à donner à z les valeurs (1) de la page 75]. On fera ensuite la même recherche en remplaçant i par $-i$. Dans le cas où ces limites existent, on peut définir la fonction $\theta(x)$; on a

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon=0} [f(xe^{i\varepsilon}) - f(xe^{-i\varepsilon})],$$

d'où

$$\theta(x) = \lim_{p=\infty} 2i \int_0^\infty e^{-a} \left(\sum a_n x^n \sin \frac{n\pi}{p} a^{\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\right]} \right) da.$$

Il est évidemment aisé de mettre $\theta(x)$ sous forme d'une série, en vertu de l'identité

$$\lim u_n = \sum_1^\infty (u_n - u_{n-1}), \qquad u_0 = 0.$$

Dans le cas où, par une méthode quelconque, on sait que le point singulier $z = 1$ est *isolé*, on peut, sans autre préparation, écrire la formule qui donne $\theta(x)$; on est assuré que le second membre a bien une limite; l'intégrale qui y figure a, d'ailleurs, sûrement un sens, à condition que x soit inférieur au plus petit module des points singuliers de $f(z)$ (le point $z = 1$, excepté).

On peut remarquer que, si l'on donne à p des valeurs positives quelconques, la fonction sous le signe $\int$ est discontinue, à cause des facteurs discontinus $a^{\left[\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)\right]}$; mais l'intégrale *peut* rester continue, car on a, quel que soit n,

$$\int_0^\infty e^{-a} a^{(n)}\, da = 1;$$

cette intégrale ne dépend pas de n, bien que la quantité à intégrer en dépende. Mais il n'est pas possible d'intégrer terme à terme la série sous le signe $\int$; car on retrouverait la série, divergente pour $x > 1$,

$$\sum a_n x^n \sin \frac{n\pi}{p}.$$

Malgré sa complication, il nous a paru curieux d'écrire l'expression générale de $\theta(x)$; elle pourra peut-être rendre des services entre les mains d'habiles calculateurs.

CHAPITRE III.

LES SÉRIES DE TAYLOR A RAYON DE CONVERGENCE NUL.

I. — Historique et généralités.

La question qui fait l'objet de ce Chapitre nous paraît à la fois plus importante et plus difficile que celle dont nous nous sommes occupé à la fin du Chapitre précédent. Il s'agissait alors d'une série de Taylor ayant un rayon de convergence fini, et de son étude en des points où elle est divergente. La difficulté se trouvait ainsi diminuée par la connaissance précise du résultat à obtenir; d'autre part, ce résultat pouvait être souvent obtenu par d'autres méthodes (prolongement analytique, procédé de M. Lindelöf) de sorte que notre procédé n'apparaissait pas comme le seul moyen de résoudre la question.

Lorsqu'il s'agit, au contraire, d'une série de Taylor *à rayon de convergence nul*, nous n'avons *a priori* aucune indication, *tirée de la série elle-même*, sur ce qu'on doit entendre par sa valeur en un point déterminé; par suite, si nous arrivons à calculer de telles séries, l'importance de ce résultat sera accrue par le fait que les autres procédés, mentionnés il y a un instant, ne sont pas applicables ici.

Dans les travaux faits jusqu'ici sur ces séries, nous devons mentionner tout d'abord ceux qui sont en relation avec la théorie des fractions continues. C'est Laguerre, croyons-nous, qui a remarqué le premier le fait suivant : une série divergente ayant été obtenue comme solution d'un problème déterminé, il peut arriver que cette série soit formellement égale à une fraction continue convergente, et que la valeur de la fraction continue fournisse la solution cherchée. Il est dès lors légitime de regarder la valeur de la série comme égale à celle de la fraction continue. Citons aussi un travail de M. Padé (*Acta mathematica*, t. XVIII), dans lequel il montre que l'on peut appliquer les règles ordinaires du calcul élémentaire aux séries divergentes qui correspondent à des fractions continues convergentes. Mais, sur cette question des fractions continues et de leur relation avec les séries divergentes, le Mémoire le plus important est sans contredit celui que Stieltjes a présenté à l'Académie des Sciences, il y a quelques années, et qui a paru depuis dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1894-1895). Le paragraphe V de ce Chapitre est spécialement consacré à l'étude de ce Mémoire, ce qui nous dispense d'en parler plus longuement ici.

Les séries divergentes dont nous nous occupons ont été considérées à un autre point de vue : comme *séries asymptotiques*. Ce n'est point ici le lieu de rappeler les beaux travaux de M. Poincaré sur ce sujet, car notre point de vue est très différent. Nous chercherons essentiellement dans quelles conditions une série peut être regardée comme représentant *une fonction déterminée*, tandis qu'une même série asymptotique, pour un même argument de x, *représente toujours une infinité de fonctions*. Remarquons cependant que l'étude des séries asymptotiques conduit à la notion d'arguments *singuliers*, ou arguments pour lesquels la série cesse de représenter asymptotiquement la même fonction analytique, ou, si l'on veut, la même intégrale de l'équation différentielle que l'on étudie. Cette notion d'arguments singuliers est pour nous fort importante, comme il est aisé de s'en rendre compte.

Étant donnée une série de Taylor

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

nous avons déjà dit que, lorsque le rayon de convergence est *fini*, le cercle de convergence est, en général, une coupure, si la série est regardée comme donnée *a priori* : tous les arguments sont singuliers. Au contraire, si la série provient, par exemple, d'une équation différentielle *arbitraire*, il y aura, en général, un seul point singulier sur le cercle de convergence. On sait d'ailleurs que, dans des cas assez généraux (Darboux, Hadamard, *loc. cit.*), l'affixe du point singulier est donné par la limite du rapport $\frac{a_n}{a_{n+1}}$. L'argument limite de ce rapport est l'argument singulier.

Supposons maintenant que le rayon de convergence de la série proposée soit nul; alors le rapport $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ ne peut avoir d'autre limite que zéro (il peut n'avoir pas de limite); mais sa limite peut être zéro avec un argument déterminé ou indéterminé. Si la série est donnée arbitrairement *a priori*, on peut induire avec beaucoup de vraisemblance qu'elle ne peut être définie en dehors de son cercle de convergence (ici de *rayon nul*); tous les arguments sont singuliers et il n'y a rien à tirer d'une telle série. Mais si, au contraire, la série est obtenue par un procédé analytique déterminé, il arrivera, en général, qu'elle possédera un seul argument singulier, c'est-à-dire une direction suivant laquelle elle divergera *plus vite* que suivant toute autre; cet argument singulier sera égal à la limite de l'argument de $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, lorsque cette limite sera déterminée.

Remarquons cependant qu'il pourra se présenter ici une circonstance nouvelle. Dans le cas, en effet, où le rayon de convergence est fini, en dehors du point singulier unique situé sur le cercle de convergence, il peut y avoir des points singuliers d'arguments différents, situés sur des cercles plus grands. Ces autres arguments sont, en quelque sorte, moins singuliers que le premier, puisque, correspondant à de plus grands modules, ils fournissent des séries qui convergent dans une région plus grande que la série proposée; on peut les négliger dans une première étude. Au contraire, dans le cas où le rayon de convergence est nul, deux séries, dont l'une diverge bien plus rapidement que l'autre, peuvent avoir toutes deux le *même* rayon de convergence : à savoir *zéro*. Si on les ajoute, on obtiendra une série dont l'argument singulier *unique*, qui apparaîtra tout d'abord, sera l'argument singulier de la série la plus divergente; mais l'argument singulier de la seconde série ne pourra pas être négligé puisque le rayon de convergence de cette seconde série est aussi égal à zéro; on sera obligé d'en tenir compte.

II. — Le problème de l'interpolation.

Donner une série (convergente ou divergente), c'est donner une suite dénombrable de quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots. \tag{1}$$

Nous nous attacherons particulièrement aux séries de la forme

$$f = \sum a_n \varphi_n,$$

où les φ_n sont des fonctions *déterminées* d'une ou plusieurs variables réelles ou complexes. Dès lors, on pourra dire que la suite (1) *définit* la fonction f pour un certain champ de ces variables, si la connaissance de cette suite permet de calculer f pour les valeurs de ce champ. D'ailleurs cette définition sera surtout commode dans le cas où, une fonction g étant définie dans le même champ par une suite

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n, \quad \ldots, \tag{2}$$

on sait former aisément la suite

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \ldots \tag{3}$$

qui correspond à une combinaison simple déterminée de f et de g. D'ailleurs, suivant les cas, le champ des combinaisons regardées comme *simples* sera plus ou moins étendu; souvent la *division* présentera des difficultés particulières; c'est ce qui a lieu, par exemple, dans le cas des séries trigonométriques.

On voit que, dans cette manière d'envisager les séries, la convergence ou la divergence ne joue aucun rôle; on pourrait même se dispenser de connaître les fonctions φ_n et d'écrire $f = \sum a_n \varphi_n$. Tout revient à ceci : *la fonction f est, dans un champ déterminé, complètement définie par la suite* (1). Définir une fonction dans un champ, c'est définir une correspondance Γ entre deux ensembles non dénombrables :

l'ensemble des valeurs de la variable (ou des variables) et l'ensemble des valeurs de la fonction; donner la suite (1), c'est donner une correspondance C entre l'ensemble dénombrable 1, 2, ..., n, ... et l'ensemble (non dénombrable) des valeurs possibles des a (donner cette correspondance revient à définir l'ensemble dénombrable $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$). Le problème consiste, étant donnée la correspondance C, d'en conclure la correspondance Γ. C'est ce que nous appellerons *un problème d'interpolation*, en étendant légèrement le sens de ce mot, qu'on réserve généralement au cas où les quantités a_n sont les valeurs de la fonction f pour des points donnés M_n du champ considéré. Le but de ce paragraphe est de présenter, sur le problème de l'interpolation, quelques remarques générales qui nous seront utiles dans la suite; mais, auparavant, nous allons, pour plus de netteté, étudier avec quelque détail un problème d'interpolation particulier.

PROBLÈME. — *Déterminer une fonction* entière $f(z)$ *prenant les valeurs données* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *pour les valeurs données de* $z : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, dont le module est supposé croître indéfiniment.

Pour fixer les idées, nous supposerons que les valeurs α sont égales à 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ... et les valeurs correspondantes données seront alors

$$a_0, \quad \begin{matrix} a_{+1} \\ a_{-1} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} a_{+2} \\ a_{-2} \end{matrix}, \quad \ldots, \quad \begin{matrix} a_{n} \\ a_{-n} \end{matrix}, \quad \ldots.$$

Si l'on remarque que la fonction $\sin \pi z$ s'évanouit pour les valeurs données [1] de α, la formule d'interpolation de Lagrange donne immédiatement

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin \pi z}{z - n} (-1)^n a_n \right].$$

Mais ce résultat appelle plusieurs remarques.

---

(1) Dans le cas général, la méthode de Weierstrass permet de former une fonction s'annulant pour $z = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$. Le cas où cette fonction est d'ordre *infini* est un peu plus compliqué que celui où elle est d'ordre fini, comme dans l'exemple choisi.

Si la série

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left|\frac{a_n}{n}\right|$$

$\left(\text{le signe } \sum' \text{ indique l'exclusion de la valeur } n = 0\right)$ est convergente, l'expression trouvée pour $f(z)$ est une série convergente pour toute valeur de z. On a donc sans peine *une* solution du problème proposé. Il est clair que la solution la plus générale est donnée par la formule

$$F(z) = f(z) + \sin\pi z\, \theta(z),$$

$\theta(z)$ étant une fonction entière *arbitraire*. Le problème proposé est donc indéterminé. Mais si l'on écrit

$$\frac{F(z)}{\sin\pi z} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\pi(z-n)} + \theta(z),$$

on prouvera aisément que la solution particulière $f(z)$ se distingue *de toutes les autres* par la propriété suivante : *lorsque z s'éloigne indéfiniment avec un argument déterminé différent de* o *et de* π, *le rapport* $\frac{f(z)}{\sin\pi z}$ *tend vers zéro*. Ainsi, si l'on impose cette condition supplémentaire à la fonction cherchée, *le problème de l'interpolation devient déterminé*.

Mais nous avons supposé la série

$$\sum \left|\frac{a_n}{n}\right|$$

convergente.

Dans le cas où elle est divergente, la série $f(z)$ est aussi divergente et ne convient plus. Plusieurs méthodes pourraient être employées pour trouver une solution; par exemple, on peut rendre absolument convergente la série

$$\sum \frac{a_n(-1)^n}{z-n}$$

en retranchant de chacun de ses termes un polynome convenablement choisi, suivant le procédé général de Weierstrass et de M. Mittag-

Leffler. Il nous paraît préférable de procéder comme il suit. Désignons par $g(z)$ une fonction entière [1] telle que la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left| \frac{a_n}{n g(n)} \right|$$

soit convergente. Nous prendrons

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{g(z) \sin \pi z (-1)^n a_n}{g(n)(z-n)}.$$

Seulement, ici, il est aisé de montrer que cette solution, à cause du facteur $g(z)$, ne se distingue plus par une propriété simple de la solution générale. Examinons, pour le voir nettement, le cas très simple où l'on peut prendre

$$g(z) = z^p,$$

p étant un nombre entier [2], c'est-à-dire où la série

$$\sum{}' \left| \frac{a_n}{n^{p+1}} \right|$$

est convergente. On a alors

$$f(z) = \frac{z^p \sin \pi z}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n^p (z-n)}$$

et la solution la plus générale est toujours

$$F(z) = f(z) + \theta(z) \sin \pi z.$$

---

(1) Pour démontrer l'existence de cette fonction il suffit de prouver, ce qui est facile, que, étant données deux séries de nombres dont le module croît indéfiniment : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, ces derniers réels et positifs, on peut trouver une fonction entière $g(z)$ telle que

$$|g(\alpha_n)| > A_n.$$

Cette proposition est distincte d'un théorème dû à M. Poincaré et d'après lequel on peut toujours trouver une fonction entière croissant, pour les valeurs réelles de z, plus vite qu'une fonction réelle quelconque; mais elle peut se démontrer par une méthode analogue.

(2) Dans ce cas, la solution que nous indiquons est identique à celle qu'aurait fournie la méthode de M. Mittag-Leffler.

Mais, ici, le rapport $\frac{1}{\sin \pi z} f(z)$ ne tend plus vers zéro dans les conditions indiquées plus haut; il en est seulement ainsi du rapport $\frac{1}{z^p \sin \pi z} f(z)$; on en conclut que, *si l'on prend pour* $\theta(z)$ *un polynome arbitraire de degré* $p-1$, la fonction $F(z)$ aura la même propriété. Ainsi nous trouvons une solution dépendant de p constantes; le nombre p deviendrait infini dans le cas où $g(z)$ serait une véritable fonction entière.

Notre but n'est pas d'approfondir ici cette question de l'interpolation; il y aurait lieu de rechercher quelles conditions supplémentaires il faudrait introduire dans le cas où la fonction $\sin \pi z$ serait remplacée par une autre fonction entière. Mais, dans tous les cas, on arrivera à la même conclusion fondamentale, qui résume notre étude :

Le problème général de l'interpolation est indéterminé; on peut, dans des cas très étendus, le rendre déterminé au moyen de conditions supplémentaires (qui sont des conditions d'inégalité); *mais cela n'est possible que si les données vérifient elles-mêmes des inégalités convenables* (exprimées plus haut par le fait que la série $\sum \left|\frac{a_n}{n}\right|$ est convergente). On peut rapprocher ce résultat d'une remarque importante due à M. Poincaré, à propos des équations linéaires en nombre infini : lorsque les égalités et les inégalités sont en nombre infini, elles jouent souvent le même rôle et, par exemple, des inégalités peuvent *déterminer* une solution.

Il est aisé, sans multiplier outre mesure les exemples [1], de voir la relation qu'il y a entre ces remarques générales et la théorie des séries de Taylor. Lorsqu'on écrit

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1} f'(0) + \frac{z^2}{1.2} f''(0) + \ldots, \tag{1}$$

on se propose de déterminer la valeur de $f(z)$ par la connaissance des valeurs de $f(0), f'(0), f''(0), \ldots$. [Pour donner ces valeurs, il suffi-

---

[1] Une application de nos théories peut être faite à l'étude des *séries trigonométriques;* nous aurons sans doute l'occasion d'y revenir un jour.

rait de donner $f(z)$ pour toutes les valeurs $z = \frac{1}{n}$, par exemple; mais ces valeurs de $f(z)$ ne pourraient être prises arbitrairement.]

Si l'on impose à la fonction de variable complexe $f(z)$ la condition supplémentaire d'avoir le point $z = 0$ comme point ordinaire (c'est-à-dire d'être *monogène* dans son voisinage); ou, à la fonction de variable *réelle*, des conditions d'inégalité faciles à écrire et relatives aux valeurs des dérivées d'ordre quelconque dans le voisinage de $z = 0$, *on pourra affirmer que la série* (1) *donne la seule valeur possible pour* $f(z)$; le problème qui consiste à calculer $f(z)$ au moyen des conditions données est donc *déterminé*. Mais ceci exige essentiellement la convergence de la série (1).

D'autre part si, la série (1) étant convergente, on ne s'impose aucune condition supplémentaire, on sait que l'on peut ajouter à $f(z)$ une expression de la forme e^{z^α}, α étant un nombre *négatif* quelconque, sans que les dérivées cessent d'avoir les mêmes valeurs (lorsque z est imaginaire, cela n'a lieu que dans un angle égal à $\frac{\pi}{-\alpha}$, mais en prenant $|\alpha|$ assez petit, cet angle est aussi grand que l'on veut).

Supposons maintenant qu'une fonction de variable complexe soit telle que, *dans un angle déterminé*, la fonction et ses dérivées d'ordre quelconque aient des valeurs *finies* lorsqu'on s'approche de $z = 0$ par un chemin quelconque. Supposons de plus ces valeurs telles que la série (1) soit divergente.

Peut-on *déterminer* la fonction dont il est question par la connaissance de cette série? Ce n'est sûrement pas possible d'une manière absolue (quel que soit d'ailleurs l'angle considéré), puisque l'on peut toujours ajouter une fonction de la forme e^{z^α}, sans que les valeurs de la fonction et de ses dérivées soient modifiées dans cet angle. (Bien entendu, z ne sort pas de l'angle, de sorte que la fonction e^{z^α} ne prend pas *toutes* ses valeurs lorsque α n'est pas entier; par exemple, si l'angle proposé est égal à $\frac{3\pi}{2}$, nous prendrons $\alpha = \frac{-1}{4}$ et nous choisirons convenablement la détermination initiale de $\sqrt[4]{z}$, de manière que, dans tout l'angle, la partie réelle de cette expression soit négative, ce qui est évidemment possible.)

Il est donc nécessaire, pour rendre *déterminé* le problème du calcul de $f(z)$ au moyen de la série divergente, d'ajouter une *condition supplémentaire convenable* relativement à l'espèce du point singulier $z = 0$. Et alors le problème pourra être rendu déterminé, *à condition que les valeurs des dérivées ne soient pas quelconques*, mais vérifient elles-mêmes des conditions convenables (qui sont remplacées par la *condition de convergence*, dans le cas où l'hypothèse faite sur le point $z = 0$ est qu'*il ne doit pas être singulier*).

On voit aussi quelle marche on devra suivre dans cet ordre d'idées, lorsque la fonction proposée sera déterminée par une équation différentielle et que les dérivées seront calculées au moyen de l'équation. On remarquera tout d'abord que, s'il y a une intégrale de l'équation satisfaisant (dans un certain angle tout au moins) à des conditions *initiales* données [c'est-à-dire telle que $f(0), f'(0), \ldots, f^{(k)}(0)$ aient des valeurs données lorsque z tend vers zéro dans cet angle], toutes les dérivées de $f(z)$ sont déterminées. Dès lors, si l'on ajoute la condition supplémentaire relative à l'espèce du point singulier, on pourra trouver ou non une intégrale (de même que l'on peut trouver, ou non, une intégrale holomorphe, suivant que la série est, ou non, convergente). Il faudra, d'ailleurs, montrer que la valeur ainsi trouvée pour la série divergente vérifie effectivement l'équation. Et il restera à rechercher s'il y a d'autres intégrales que celle-là (de même que l'on recherche s'il y a d'autres intégrales que l'intégrale holomorphe).

On prévoit que nous ne pourrons réaliser que très partiellement ce plan de recherches; nous avons tenu cependant à l'indiquer, car il nous semble que cette méthode pourra rendre d'importants services pour l'étude de certaines singularités des intégrales des équations différentielles. Indiquons que notre point de vue est bien différent de celui qui inspire les belles recherches de M. Painlevé : ici, nous nous plaçons au point singulier et nous supposons que la fonction y est déterminée, au moins dans un angle : bien entendu, on pourra faire auparavant sur l'équation une transformation simple, comme nous en verrons des exemples plus loin. Dans les cas d'indétermination complète sur lesquels M. Painlevé a attiré l'attention, il y aurait lieu de chercher à utiliser quelque généralisation de la notion de limite afin de pouvoir toujours, ce qui est essentiel pour notre méthode, définir l'intégrale *en partant* du point singulier.

III. — La méthode de sommation exponentielle.

Nous allons, dans ce paragraphe, appliquer à la série divergente $f(z)$ la méthode de sommation qui nous a réussi pour la progression géométrique et pour la série dont le rayon de convergence était l'unité. Nous justifions ainsi complètement le point de vue auquel nous nous sommes placé pour exposer cette méthode. Si nous l'avions considérée simplement comme un moyen de prolongement analytique, nous n'aurions pas été naturellement conduit à l'extension actuelle. *D'ailleurs, pour ne pas allonger démesurément, nous laisserons de côté les généralisations analogues à celles qui terminent le Chapitre précédent, et aussi la transformation homographique effectuée sur* z $\left(z, \frac{z-a}{z-b}\right)$, *qui permettrait de ne plus faire jouer au point à l'infini un rôle spécial.*

Étant donnée la série divergente

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

nous multiplierons les termes successifs par $\frac{a^n}{n!}$; nous obtenons

$$\varphi(a) = a_0 + \frac{a_1 z a}{1} + \frac{a_2 z^2 a^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n z^n a^n}{n!} + \ldots.$$

Nous supposons essentiellement la série proposée telle que la série $\varphi(a)$ *ne soit pas toujours divergente* (¹); la série $\varphi(a)$ peut être une fonction *entière* de a (c'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque l'on a $a_n = \sqrt{n!}$); dans le cas où $\varphi(a)$ n'est pas une fonction entière, nous supposerons que son domaine d'existence *s'étend jusqu'à l'infini* (il est clair que cela ne dépend pas de la valeur de z); nous supposerons même, pour plus de netteté, bien que ce ne soit pas indispensable, que la fonction $\varphi(a)$ existe dans un *angle* A formé de deux demi-droites issues de $a = 0$ et allant à l'infini. La direction de ces deux demi-droites dépend de l'argument de z; nous choisirons cet argument dans une région telle que cet angle comprenne les valeurs *réelles positives* de a (cela

(¹) Sinon, il faudrait utiliser quelque généralisation de la méthode.

donne pour z, autour de l'origine, un angle *égal* à A). Enfin, nous supposerons que le produit $e^{-a}\varphi(a)$ tend uniformément vers zéro pour certaines valeurs de z formant un arc AB ; il en sera de même dans le secteur OAB et, dans toute aire intérieure à ce secteur, l'intégrale

$$\int_0^\infty \varphi(a)\, e^{-a}\, da$$

aura un sens et définira une fonction analytique de z. Lorsque z tendra vers zéro par un chemin intérieur au secteur OAB, cette fonction analytique tendra vers a_0 et sa dérivée $n^{\text{ième}}$ vers $1.2\ldots na_n$. C'est *une solution* du problème d'interpolation que l'on pose en écrivant la série divergente.

Nous allons maintenant rechercher quels caractères distinguent cette solution de toutes les autres.

On a

$$\varphi(a) = \mathrm{F}(az),$$

si l'on pose

$$\mathrm{F}(u) = a_0 + \frac{a_1 u}{1} + \frac{a_2 u^2}{2\,!} + \frac{a_3 u^3}{3\,!} + \ldots .$$

La fonction $\mathrm{F}(u)$ est analytique dans un certain angle A ; par la substitution $(z, e^{i\alpha}z)$, nous pouvons faire tourner cet angle comme nous le voulons; nous supposerons qu'il comprend les valeurs réelles et positives de u (cela revient à dire que nous choisissons α de manière que, après la substitution, la région de sommabilité AOB comprenne les valeurs réelles et positives de z). Nous avons alors, z étant réel et positif,

$$f(z) = \int_0^\infty \varphi(a)\, e^{-a}\, da = \int_0^\infty \mathrm{F}(u)\, e^{-\frac{u}{z}} \frac{du}{z},$$

le chemin d'intégration étant toujours réel. Il est aisé d'étendre cette formule au cas où z est imaginaire, mais toujours dans la région OAB. Il faudrait prendre un chemin d'intégration rectiligne faisant avec l'axe réel un angle égal à l'argument de z; mais la substitution d'un chemin d'intégration à l'autre, dans le plan de la variable u, est indifférente, parce que le long d'un arc de cercle compris entre ces deux chemins et de rayon croissant, l'intégrale tend manifestement vers zéro [puisque $e^{-a}\varphi(a)$ tend uniformément vers zéro pour les valeurs de z situées sur AB].

Ainsi, la fonction $f(z)$ peut être représentée sous la forme

$$f(z) = \int_0^\infty F(u)\, e^{-\frac{u}{z}}\frac{du}{z},$$

$F(u)$ étant une fonction *analytique* pour toutes les valeurs réelles de u. Nous supposons de plus la fonction $F(u)$ régulière dans un angle fini comprenant l'axe réel; enfin, nous admettrons qu'il existe un nombre positif k tel que le produit $F^{(p)}(u)e^{-ku}$ tende *uniformément* (1) vers zéro lorsque le module de u augmente indéfiniment *dans cet angle* (l'indice de dérivation p étant un nombre fini quelconque).

Nous résumerons ces hypothèses en disant que le point $z = 0$ est pour $f(z)$ un point singulier *d'espèce* (A) (2); autour de ce point se trouve pour z un certain *angle de régularité*, c'est-à-dire un angle (ou plus exactement un secteur) tel que $f(z)$ et ses dérivées soient régulières à leur intérieur et tendent vers a_0, a_1, $1.2a_2$, ... lorsque z tend vers zéro. Lorsqu'il ne pourra pas en résulter de confusion nous dirons pour abréger que *la fonction $f(z)$ est d'espèce* (A) au lieu de dire qu'*elle admet l'origine comme point singulier d'espèce* (A). La région de régularité de $f(z)$ comprend toujours à son intérieur les valeurs réelles et positives (assez petites) de z; lorsque nous parlerons de la valeur de $f(z)$ pour $z = 0$ nous supposerons que z tend vers zéro par valeurs réelles et positives; de même pour ses dérivées. Les valeurs seraient d'ailleurs les mêmes pour tout chemin intérieur à la région de régularité. Il n'y a pas d'inconvénient à conserver la même dénomination dans le cas où la région de régularité ne comprend pas les valeurs réelles et positives de z; mais, lorsque l'on considère simultanément plusieurs fonctions d'espèce (A), on devra supposer que leurs régions de régularité ont une partie commune et, dès lors, l'emploi de la substitution

(1) C'est-à-dire indépendamment de l'*argument* de u.

(2) Nous proposons provisoirement cette expression; après une étude sérieuse d'autres singularités, on pourra peut-être adopter des dénominations plus rationnelles, constituant une classification.

$(z, e^{i\alpha}z)$ amène aisément cette partie commune à comprendre les valeurs réelles et positives de z.

Cela posé, on a immédiatement le théorème suivant : *Une fonction d'espèce* (A) *nulle au point $z = 0$ ainsi que toutes ses dérivées, est identiquement nulle.* Car la fonction *analytique* $F(u)$ est nulle pour $z = 0$ ainsi que toutes ses dérivées; elle est donc identiquement nulle.

On voit l'importance de l'hypothèse que $F(u)$ est analytique; il est aisé de se rendre compte qu'elle est indispensable à notre point de vue; en effet, remplaçons $F(u)$ par $F(u) + G(u)$, $G(u)$ étant une fonction (nécessairement non analytique) nulle pour les valeurs de u extérieures à l'intervalle a, b. L'intégrale devient

$$\int_0^\infty F(u)e^{-\frac{u}{z}}\frac{du}{z} + \int_a^b G(u)e^{-\frac{u}{z}}\frac{du}{z};$$

il est aisé de voir que le second terme a des dérivées toutes nulles pour $z = 0$; si l'on suppose $G(u) = \frac{1}{b-a}$ et ensuite $b = a$, il se réduit à $\frac{1}{z}e^{-\frac{a}{z}}$. En supposant $F(u)$ *analytique*, on évite l'introduction de termes de ce genre.

On peut exprimer le résultat fondamental qui précède en disant que deux fonctions d'espèce A, égales pour $z = 0$ ainsi que toutes leurs dérivées, sont *identiques;* ou encore qu'*un développement divergent ne peut représenter* (dans un angle déterminé) *qu'une seule fonction d'espèce* (A).

Il n'est pas inutile de remarquer que les fonctions régulières pour $z = 0$ peuvent être regardées comme des fonctions d'espèce (A); la fonction $F(u)$ est alors holomorphe dans tout le plan.

Il est clair que si l'on ajoute ou retranche un nombre fini de séries d'espèce (A), multipliées par des facteurs constants quelconques, on obtient une série qui est encore d'espèce (A), c'est-à-dire qui représente une fonction d'espèce (A), combinaison linéaire déterminée des fonctions représentées par les séries que l'on a ajoutées.

Nous allons voir qu'il en est de même pour la multiplication. Mais il est nécessaire de prouver tout d'abord que le produit de deux fonctions d'espèce (A) est une fonction d'espèce (A). Soit donc

$$f(z)=\int_0^\infty F(u)e^{-\frac{u}{z}}\frac{du}{z},$$

$$g(z)=\int_0^\infty G(u)e^{-\frac{u}{z}}\frac{du}{z}.$$

Nous rappelons que les fonctions F et G sont analytiques dans un angle fini comprenant l'axe réel et que les produits $F(u)e^{-ku}$, $G(u)e^{-ku}$ tendent uniformément vers zéro dans cet angle. Il est clair que l'on a

$$f(z)g(z)=\int_0^\infty\int_0^\infty F(u)G(v)e^{-\frac{u+v}{z}}\frac{du\,dv}{z^2}.$$

Nous transformerons l'intégrale double en posant

$$u+v=x,$$

$$u-v=y.$$

Il vient

$$f(z)g(z)=\int_0^\infty\left[\int_{-x}^{x}F\left(\frac{x+y}{2}\right)G\left(\frac{x-y}{2}\right)\frac{dy}{2}\right]e^{-\frac{x}{z}}\frac{dx}{z^2}.$$

Si l'on pose

$$H(x)=\int_{-x}^{x}F\left(\frac{x+y}{2}\right)G\left(\frac{x-y}{2}\right)\frac{dy}{2},$$

on a

$$f(z)g(z)=\int_0^\infty H(u)e^{-\frac{u}{z}}\frac{du}{z^2};\qquad H(0)=0.$$

Il suffit de montrer que la fonction $H(u)$ satisfait aux conditions requises [1] pour que le produit $f(z)\,g(z)$ soit d'espèce (A). En posant $y=2t-x$, dans l'intégrale qui définit $H(x)$, on a

$$H(x)=\int_0^x F(t)G(x-t)\,dt.$$

---

[1] Grâce à la condition $H(0)=0$ le facteur $\frac{1}{z^2}$ s'élimine aisément; *voir* page suivante

Si nous figurons l'espace angulaire indéfini dans lequel $F(u)$ et $G(u)$ sont holomorphes, il est clair que $H(u)$ est aussi holomorphe dans cet angle (les fonctions F et G sont régulières au point $u = 0$, comme on l'a vu). De plus, en vertu de nos hypothèses, il existe un nombre k tel que l'on ait pour tout point intérieur à l'angle

$$|F(u)| < |e^{ku}|, \qquad |G(u)| < |e^{ku}|.$$

On en conclut

$$|H(u)| < |ue^{ku}| < |e^{k'u}|,$$

en désignant par k' un nombre convenablement choisi; dès lors, si $k_1 < k'$, $e^{-k_1 u}H(u)$ tendra uniformément vers zéro lorsque $|u|$ augmentera indéfiniment dans l'angle considéré. Il en est de même pour

$$H'(u) = F(u)G(o) + \int_0^x F(t)G'(x-t)\,dt.$$

Il est clair que le produit $f(z)g(z)$ s'obtient en faisant le produit des deux séries correspondantes.

Montrons enfin que la dérivée d'une fonction d'espèce (A) est aussi d'espèce (A) et s'obtient en dérivant la série divergente correspondante. Rappelons que nous avons supposé que les dérivées de la fonction $F(u)$ ont les mêmes propriétés que F (leur produit par e^{-ku} tend vers zéro); c'est d'ailleurs, en général, une conséquence de l'hypothèse faite sur F; dans le cas où il n'en serait pas ainsi, les séries obtenues en dérivant la série proposée ne seraient pas d'espèce (A); il suffirait de faire une convention simple pour éviter cette difficulté (*voir* p. 57).

L'on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^\infty e^{-\frac{u}{z}} F(u)\frac{du}{z} \\ &= -\int_0^\infty F(u)\,de^{-\frac{u}{z}} \\ &= -\left[F(u)e^{-\frac{u}{z}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{u}{z}}F'(u)\,du \\ &= a_0 + \int_0^\infty e^{-\frac{u}{z}}F'(u)\,du. \end{aligned}$$

Ensuite

$$f'(z) = \int_0^\infty \frac{u}{z^2} e^{-\frac{u}{z}} F'(u)\, du$$
$$= -\int_0^\infty \frac{u}{z} F'(u)\, de^{-\frac{u}{z}}$$
$$= \int_0^\infty e^{-\frac{u}{z}} [F'(u) + u F''(u)] \frac{du}{z}.$$

Or on voit immédiatement que la série

$$F'(u) + u F''(u) = a_1 + \frac{2 a_2 u}{1} + \frac{3 a_3 u^2}{2!} + \frac{4 a_4 u^3}{3!} + \ldots$$

se forme avec la série

$$F'(z) = a_1 + 2 a_2 z + 3 a_3 z^2 + \ldots$$

de la même manière que $F(u)$ avec $f(z)$. Notre proposition est donc démontrée.

Un calcul analogue au précédent aurait donné (page 93)

$$f(z) g(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{u}{z}} H'(u) \frac{du}{z}.$$

Il y aurait d'ailleurs à répéter ici les remarques de la page précédente.

En combinant les résultats obtenus, on voit que si l'on a un polynome par rapport à plusieurs fonctions [1] d'espèce (A) et à leurs dérivées, *la valeur de ce polynome est une fonction d'espèce* (A) *représentée par une série que l'on peut obtenir en appliquant aux séries les règles ordinaires du calcul*. Le polynome ne peut être *identiquement nul* que si *la série ainsi obtenue est identiquement nulle*.

IV. — Application aux équations différentielles.

Soit

(1) $$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

---

[1] Rappelons que les fonctions régulières pour $z = 0$ sont comprises comme cas particulier parmi les fonctions d'espèce (A).

une équation différentielle d'ordre n, algébrique en $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. Nous supposerons que f est un polynome par rapport à ces $n+2$ lettres [1]. Enfin, admettons que l'on ait

$$f(0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}) = 0.$$

On sait alors que, sous certaines conditions inutiles à rappeler, il existe une intégrale y de (1), holomorphe au voisinage de $x = 0$, et telle que, pour $x = 0$, on ait

$$y = y_0, \qquad y' = y'_0, \qquad \ldots, \qquad y^{(n)} = y_0^{(n)};$$

cette intégrale holomorphe est d'ailleurs parfaitement déterminée; on obtient son développement en série en calculant, à l'aide de (1), les dérivées successives de y pour $x = 0$.

D'ailleurs une intégrale de (1), telle que $y, y' \ldots, y^{(n)}$ tendent vers $y_0, y'_0, \ldots, y_n^{(0)}$, quel que soit le chemin suivant lequel x tend vers zéro, coïncide nécessairement avec l'intégrale holomorphe.

Mais il peut arriver que les équations déduites de (1) par différentiation

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y' + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} y' + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial y} y'' + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}} y^{(n+2)} = 0 \end{cases}$$

permettent de calculer les dérivées successives de y pour $x = 0$, sans que la série de Taylor ainsi obtenue soit convergente. Il n'existe pas alors d'intégrale holomorphe et les recherches déjà faites sur ce sujet donnent à penser que l'étude générale de ces cas est très difficile, car il peut se présenter des circonstances fort diverses. Nous nous proposons d'apporter une contribution à cette étude; nous nous plaçons, pour cela, à un point de vue que nous croyons nouveau et qui a déjà été brièvement indiqué plus haut. D'ailleurs, nous ne prétendons point que ce point de vue soit *meilleur* que ceux auxquels on s'est

---

[1] On verra aisément que les considérations qui suivent s'appliqueraient au cas où f serait un polynome en $y, y', \ldots, y^{(n)}$, les coefficients étant des fonctions de x, holomorphes pour $x = 0$.

placé jusqu'ici; mais la question est assez difficile pour qu'on ne puisse espérer la résoudre un jour qu'en l'abordant avec des méthodes variées.

Nous supposons essentiellement que les valeurs initiales données, pour $x = 0$, sont telles que les équations (2) *permettent de calculer successivement* [1] *toutes les dérivées de y pour $x = 0$*. A l'aide de ces dérivées, on peut former une série *divergente*

$$(3) \qquad y = y_0 + \frac{y'_0}{1}x + \frac{y''_0}{1.2}x^2 + \ldots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

qui satisfait *formellement* à l'équation proposée. En employant le langage défini dans le paragraphe précédent, nous démontrerons tout d'abord le théorème suivant :

Si la série (3) *est d'espèce* (A), *elle définit une fonction d'espèce* (A) *qui satisfait à l'équation proposée et qui, dans son angle de régularité, vérifie les conditions initiales données.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du résultat obtenu page 95 et du fait que la série (3) vérifie *formellement* l'équation proposée. En effet, si l'on a [2]

$$y = \int_0^{\infty} \mathrm{F}(u)\, e^{-\frac{u}{x}} \frac{du}{x},$$

on en conclut

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \int_0^{\infty} \Phi(u)\, e^{-\frac{u}{x}} \frac{du}{x},$$

car les coefficients de f, regardé comme polynome en $y, y', \ldots, y^{(n)}$, sont des polynomes en x ou des fonctions holomorphes pour $x = 0$, et nous

(1) *Voir* la remarque faite plus loin, p. 99.

(2) Rappelons (p. 91) que la fonction $\mathrm{F}(u)$ est supposée telle que, dans un secteur fini comprenant l'axe réel, le produit $e^{-ku}\frac{d^p \mathrm{F}}{du^p}$ tend uniformément vers zéro (p nombre *fini* quelconque). Il suffirait d'ailleurs de considérer les valeurs de p ne dépassant pas l'ordre de l'équation différentielle.

avons observé qu'on pouvait les regarder comme des fonctions d'espèce (A) [1].

D'ailleurs, pour obtenir $\Phi(u)$, il suffit de développer, suivant les puissances croissantes de x, l'expression $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, en y remplaçant y par sa valeur (3); dans ce développement, on remplace x^n par $\frac{u^n}{n!}$. *Mais ce développement est identiquement nul,* donc $\Phi(u)$ est identiquement nul, c'est-à-dire que y est une intégrale de (1). Il est évident, d'ailleurs, que si x tend vers zéro par un chemin intérieur à l'angle de régularité, $y, y', \ldots, y^{(n)}$ tendent respectivement vers y_0, $y'_0, \ldots, y_0^{(n)}$.

Enfin il résulte de ce qui précède que, si l'on se propose de rechercher une fonction d'espèce (A) satisfaisant à l'équation (1) et satisfaisant aux conditions initiales données *lorsque x tend vers zéro suivant un chemin déterminé,* cette intégrale est nécessairement unique et s'obtient, au moyen de la série (3), par notre procédé. Mais la série (3) peut représenter plusieurs fonctions d'espèce (A) dans des angles différents; c'est ce qui se passe lorsque la fonction analytique $F(u)$ est telle qu'il existe plusieurs angles finis distincts tels que $e^{-k|u|}F^{(p)}(u)$ tende uniformément vers zéro lorsque u tend vers l'infini. Dans ce cas, la substitution $(x, \lambda x)$ ramène aisément l'un quelconque de ces angles à renfermer les valeurs réelles et positives de x et l'on a ainsi plusieurs fonctions d'espèce (A), qui peuvent être distinctes.

Il resterait à résoudre une question importante : en dehors de l'intégrale d'espèce (A), supposée calculée, y en a-t-il d'autres satisfaisant, dans le même angle, aux mêmes conditions initiales? La question paraît fort ardue dans le cas le plus général; on peut la résoudre par la négative dans le cas particulier où, l'équation proposée étant linéaire et homogène, c'est-à-dire sans second membre, on a calculé un nombre total d'intégrales indépendantes, holomorphes ou d'espèce A (dans une même direction), égal à l'ordre de l'équation.

Ajoutons, enfin, que ce qui précède s'applique évidemment au cas

---

[1] Si l'on a une fonction holomorphe dont le rayon de convergence est r, la fonction associée $F(u)$ est telle que le produit $e^{-ku}F(u)$ tend vers zéro dans un secteur fini, si l'on a soin de prendre pour k un nombre *supérieur* à r.

où l'équation différentielle proposée, au lieu d'être algébrique en x, renferme des fonctions de x définies par des équations différentielles algébriques : une simple élimination ramène au cas étudié. De même, si l'intégrale y est égale au produit d'une expression de la forme $e^{Q\left(\frac{1}{x}\right)} x^{\rho}$ (Q polynome, ρ nombre quelconque) par une fonction d'espèce (A) : une substitution simple suffit pour ramener au cas précédent.

Nous allons, comme application de ce qui précède, dire quelques mots de l'équation

$$x^2 \frac{dy}{dx} = P(x, y),$$

P étant, pour plus de netteté, un polynome en x et y (on pourrait en x le supposer simplement holomorphe).

En changeant y en $y + ax + b$, puis y en ky et x en $k'x$, on ramène immédiatement cette équation à la forme

$$(1) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} + y = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \ldots = \varpi(x, y),$$

ϖ étant un polynome dans lequel les termes du moindre degré sont du *second* degré.

Nous nous proposons de rechercher si l'équation (1) a une intégrale telle que pour $x = 0$ l'on ait $y = 0$, $y' = 0$, x tendant *vers zéro par valeurs réelles et positives*. Nous exigeons de plus que les autres dérivées de y ne soient pas infinies dans ces conditions. On a alors, en différentiant (1),

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2xy' + y' = \frac{d\varpi}{dx} = \frac{\partial \varpi}{\partial x} + y' \frac{\partial \varpi}{\partial y},$$

d'où, en faisant $y = x = 0$,

$$y' = 0.$$

On voit que l'on n'aurait pu, pour notre but, choisir une autre valeur initiale de y', qui eût cependant vérifié l'équation (1).

D'ailleurs, si l'on différentie $n + 1$ fois l'équation (1), on obtient

$$x^2 \frac{d^{n+2} y}{dx^{n+2}} + 2(n+1)x \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} + n(n+1) \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \frac{d^{n+1} \varpi}{dx^{n+1}},$$

d'où

$$y_0^{(n+1)} = -n(n+1)\,y_0^{(n)} + \left(\frac{d^{n+1}\varpi}{dx^{n+1}}\right)_0. \tag{2}$$

Remarquons que le dernier terme, après qu'on a fait $x=y=0$, ne renferme les dérivées de y que jusqu'à l'ordre n, à cause de $\left(\frac{\partial\varpi}{\partial y}\right)_0 = 0$.

Nous nous proposons d'étudier la série

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1}\,x + \frac{y''_0}{1.2}\,x^2 + \frac{y'''_0}{1.2.3}\,x^3 + \ldots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

nous y parviendrons par un emploi convenable de la méthode des fonctions majorantes.

Notre but est de faire voir que *la série*

$$F(u) = a_0 + \frac{a_1 u}{1} + \frac{a_2 u^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n u^n}{n!} + \ldots$$

a un rayon de convergence différent de zéro. C'est une condition *nécessaire*, mais non suffisante, pour que la série y soit d'espèce (A).

Un raisonnement approximatif, fait sur l'équation (2), peut nous permettre d'avoir une idée du résultat et aussi nous indiquer la voie à suivre pour le démontrer en toute rigueur. D'après (2), $y_0^{(n+1)}$ est la somme *des deux termes* $-n(n+1)y_0^{(n)}$ et $\left(\frac{d^{n+1}\varpi}{dx^{n+1}}\right)_0$; *or, si ce second terme existait seul*, les valeurs de $y_0^{(n+1)}$ définiraient une série de Taylor convergente, car ce seraient les dérivées de la fonction y définie par l'équation

$$y = \varpi(x, y);$$

d'autre part, si le premier terme $-n(n+1)y_0^{(n)}$ existait seul, on aurait

$$y_0^{(n+1)} = (-1)^n (n!)^2 (n+1)A,$$

valeurs qui définissent une série de Taylor *divergente;* on peut donc induire que c'est ce terme qui a *la plus grande influence* (à moins que la série de Taylor ne soit convergente, cas singulier que nous écartons; elle pourrait même se réduire à un polynome); si l'on tient compte seulement de ce terme, on trouve pour $\frac{a_n}{n!} = \frac{y_0^{(n)}}{(n!)^2}$ la valeur asymptotique $\frac{(-1)^n}{n}$ A, de sorte que, non seulement la série $F(u)$ a un rayon de convergence non nul, mais encore la limite du rapport de deux coefficients consécutifs est -1.

Nous ne chercherons point à établir en toute rigueur un résultat aussi précis; il nous serait d'ailleurs inutile. Nous allons montrer simplement comment la méthode des fonctions majorantes permet de compléter ce que le raisonnement que nous venons de faire a de défectueux : à savoir, que nous n'avons pas tenu compte de ce que le terme $\left(\frac{d^{n+1}\varpi}{dx^{n+1}}\right)_0$ renferme les dérivées de y jusqu'à l'ordre n, lesquelles, quand on emploie la formule de récurrence (2), dépendent du premier terme de cette formule. Nous prouverons que la série $F(u)$ a un rayon de convergence *fini*, ce qui, pour notre but, est plus utile que de savoir la valeur exacte de ce rayon. Nous nous bornerons, d'ailleurs, simplement, au cas où ϖ est un polynome, comme nous l'avons dit au début du paragraphe; le raisonnement serait plus long si ϖ était seulement holomorphe en x.

Notre but est d'avoir une limite supérieure du module de $\left(\frac{d^{n+1}\varpi}{dx^{n+1}}\right)_0$, lorsqu'on y remplace (¹) $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}$ par des valeurs déterminées; nous avons posé $y_0^{(n)} = \frac{a_n}{n!}$; nous écrirons

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{d^{n+1}\varpi}{dx^{n+1}}\right)_0 = \varphi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$

l'hypothèse que ϖ est un polynome en x entraîne, au moins à partir d'une certaine valeur de n, l'absence de terme constant dans φ_n; comme on a $\left(\frac{\partial\varpi}{\partial y}\right)_0 = 0$, il n'y a pas de terme en $y_0^{(n+1)}$; enfin on voit immédiatement que, dans chaque terme $A a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}$ du polynome φ_n, le *poids* $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n$ est *au plus* égal à n. Remarquons aussi que, si l'on remplace ϖ par un polynome *majorant* Π (²), φ est remplacé aussi par un polynome *majorant* Φ.

(¹) On a ici $y_0 = y'_0 = 0$; c'est-à-dire $a_0 = a_1 = 0$; cela n'a pas d'importance.

(²) C'est-à-dire à coefficients *positifs* et de modules respectivement supérieurs.

Considérons maintenant un polynome Π à coefficients positifs et l'équation

$$y = \Pi(x, y).$$

Il y a une racine *simple* de cette équation qui, pour $x = 0$, se réduit à $y = 0$; elle est développable en série convergente, le rayon de convergence étant égal au module de la plus petite racine de l'équation en x obtenue en éliminant y entre

$$y = \Pi, \qquad 1 = \frac{\partial \Pi}{\partial y}.$$

De plus, les singularités de la fonction y sur *son cercle de convergence sont algébriques;* on en conclut que, dans le développement en série

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots,$$

le coefficient α_n a pour valeur principale (¹) $n^k c^n$, k étant un nombre fixe, ne dépendant que de la nature de la singularité. (On peut fixer un maximum pour k, connaissant le degré de Π en x et y.) Or il est clair que l'on peut calculer les coefficients α_n au moyen de la formule

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{d^{n+1}\Pi}{dx^{n+1}}\right)_0 = \Phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n);$$

ou, en remplaçant les α par leur valeur principale,

$$(n+1)^k c^{n+1} = \Phi_n[c, 2^k c^2, 3^k c^3, \ldots, n^k c^n](1 + \varepsilon).$$

Désignons maintenant par a un nombre supérieur à c et rappelons-nous l'observation faite à la page précédente sur le *poids* des termes de Φ_n; nous aurons l'inégalité fondamentale

$$(3) \qquad (n+1)^k a^{n+1} > \Phi_n(a, 2^k a^2, \ldots, n^k a^n).$$

Enfin si, au lieu du polynome majorant Π, nous considérons un polynome quelconque ϖ auquel correspondent des polynomes φ_n, pour les-

(¹) *Voir* DARBOUX, HADAMARD, Mémoires cités. Nous nous contentons de l'approximation qui suffit pour notre but. Il est clair que les α sont positifs.

quels les polynomes Φ_n sont respectivement majorants, nous aurons *a fortiori*

$$|\varphi_n(a, 2^k a^2, \ldots, n^k a^n)| < (n+1)^k a^{n+1},$$

à condition que a et k dépassent des nombres fixes *indépendants de n*.

Reprenons le polynome Π à *coefficients positifs;* rappelons-nous la remarque faite sur le *poids* des termes des Φ_n, et tenons compte de l'inégalité évidente

$$k!(n+1-k)! \leqq n!, \qquad k(n-k) \neq 0;$$

nous aurons, quels que soient les b positifs,

$$(3)' \qquad \Phi_n(b_1, b_2 2!, b_3 3!, \ldots, b_n n!) < n!\,\Phi_n(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

On en conclut, *a fortiori*,

$$|\varphi_n(a, 2!\,2^k a^2, 3!\,3^k a^3, \ldots, n!\,n^k a^n)| < n!\,(n+1)^k a^{n+1}.$$

Nous sommes maintenant en état de démontrer l'existence d'un rayon de convergence fini pour la fonction

$$F(u) = a_0 + \frac{a_1 u}{1} + \frac{a_2 u^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n u^n}{n!} + \ldots.$$

En effet, on a évidemment, quel que soit k, pourvu que a soit convenablement choisi,

$$(4) \qquad \left|\frac{a_n}{n!}\right| < n^k a^n,$$

pour les valeurs de n inférieures à une certaine limite. Nous prendrons d'ailleurs a assez grand, ce qui est toujours possible, pour que l'on puisse écrire l'inégalité (3). Nous allons montrer que l'inégalité (4) subsiste *pour toute valeur de n*. On a, en effet,

$$y_0^{(n+1)} = -n(n+1)y_0^{(n)} + \left(\frac{d^{n+1}\varpi}{dx^{n+1}}\right)_0$$

ou, en divisant par $(n+1)!$,

$$a_{n+1} = -n a_n + \varphi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$|a_{n+1}| \leqq n|a_n| + |\varphi_n|.$$

Or les inégalités (4) entraînent [1],

$$|\varphi_n| < n!(n+1)^k a^{n+1};$$

on a donc, en supposant, ce qui est permis, $a > 1$,

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leqq n.n^k a^n n! + n!(n+1)^k a^{n+1} \\ &< n.(n+1)^k a^{n+1} n! + (n+1)^k a^{n+1} n! \\ &< (n+1)(n+1)^k a^{n+1} n! = (n+1)!(n+1)^k a^{n+1}. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Ainsi les équations de la forme

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = \varpi(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x^3 + \ldots$$

sont au nombre de celles pour lesquelles notre méthode semble pouvoir réussir.

La série $F(u)$ a un rayon de convergence fini; nous pouvons même induire des remarques faites plus haut que, en général, le point $u = -1$ sera le point singulier le plus voisin de l'origine. Il pourra donc arriver que $F(u)$ puisse être prolongée analytiquement jusqu'à l'infini. Il paraît assez malaisé de déterminer, *en général*, dans quels cas il en est ainsi; on pourra parfois y réussir, lorsqu'on connaîtra la loi des coefficients.

Pour l'étude numérique d'équations particulières simples, il pourra être très utile d'employer la transformation d'Euler [2], c'est-à-dire de développer $F(u)$ suivant les puissances de $\frac{u}{1+u} = t$; si ce développement a pour rayon de convergence *un*, on sera assuré que $F(u)$ n'a pas de point singulier dans la région du plan où la partie réelle de u est positive et l'on sera dans des conditions très avantageuses pour l'application de la méthode. La série obtenue sera d'ailleurs commode pour le calcul de l'intégrale

$$\int_0^\infty F(u) e^{-\frac{u}{z}} \frac{du}{z}.$$

---

(1) En effet, lorsque φ_n a ses coefficients positifs, il diminue lorsqu'on remplace les a_i positifs par des quantités de moindre module.

(2) *Voir* LINDELÖF, *Comptes rendus, loc. cit.*

Pour avoir une idée de la convergence que l'on peut espérer, j'ai calculé les coefficients du développement de $F(u)$ suivant les puissances de $t = \frac{u}{1+u}$, en prenant $\varpi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, c'est-à-dire en partant de l'équation

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

On trouve, en désignant par θ des nombres (¹) plus petits que 1,

$$F(u) = \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{3+\theta_1}{8} t^4 + \frac{4+\theta_2}{15} t^5 + \frac{10+\theta_3}{24} t^6 + \frac{55+\theta_4}{120} t^7$$
$$+ \frac{341+\theta}{720} t^8 + \frac{2447+\theta}{5040} t^9 + \ldots,$$
$$t = \frac{u}{1+u}.$$

Il est extrêmement vraisemblable que le rayon de convergence de cette série est égal à l'unité et que, lorsque t tend vers *un*, c'est-à-dire u vers l'infini positif, les produits $e^{-ku} F(u)$, $e^{-ku} F'(u)$ tendent vers zéro, quel que soit k. On se trouve donc dans les conditions requises pour pouvoir affirmer que l'équation proposée a l'intégrale suivante, d'espèce (A) :

$$y = \int_0^{\infty} F(u) e^{-\frac{u}{x}} \frac{du}{x},$$

se réduisant à zéro, ainsi que sa dérivée, pour $x = +0$.

Empruntons enfin au *Traité d'Analyse* de M. Picard un exemple très simple, où les calculs peuvent être poussés jusqu'au bout. Il s'agit de l'équation

$$x_1^2 \frac{dz}{dx_1} = a x_1 + b z.$$

En posant $x_1 = -bx$, on trouve

$$x^2 \frac{dz}{dx} + z = ax.$$

(¹) $\theta_1 = \frac{1}{24}$, $\theta_2 = \frac{15}{64}$, $\theta_3 = \frac{1}{4} + \frac{7}{30} + \frac{1}{480}$, $\theta_4 = \frac{4}{21} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}$, ...

On pourrait changer $\frac{z}{a}$ en z; nous obtiendrons la forme canonique employée plus haut en posant

$$z = ax - ay;$$

d'où

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = x^2.$$

On a successivement

$$\begin{array}{ll}
x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2x \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dy}{dx} = 2x, & x = 0, \\
 & y_0 = 0, \\
x^2 \dfrac{d^3 y}{dx^3} + 4x \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2 \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{d^2 y}{dx^2} = 2, & y'_0 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots + 2.3 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + \dfrac{d^3 y}{dx^3} = 0, & y''_0 = 2, \\
 & y'''_0 = -2^2.3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots + 3.4 \dfrac{d^3 y}{dx^3} + \dfrac{d^4 y}{dx^4} = 0, & y^{\mathrm{IV}}_0 = +2^2.3^2.4, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

On obtient ainsi le développement formel

$$y = x^2 - 2x^3 + 2.3.x^4 - 2.3.4x^5 + 2.3.4.5x^6 - \ldots,$$

$$\frac{y}{x} = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} n!\, x^n.$$

La fonction $F(u)$ correspondant à $\frac{y}{x}$ est

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} u^n = \frac{u}{1+u}.$$

Elle satisfait bien aux conditions exigées [1]. On a donc

$$\frac{y}{x} = \int_0^\infty \frac{u}{1+u} e^{-\frac{u}{x}} \frac{du}{x},$$

c'est-à-dire

$$y = \int_0^\infty \frac{u}{1+u} e^{-\frac{u}{x}} du.$$

---

(1) On voit que cet exemple simple suggère naturellement l'idée de la transformation d'Euler.

L'intégrale générale de l'équation

$$x^2\frac{dy}{dx}+y=x^2$$

est évidemment

$$y=e^{\frac{1}{x}}\int_\alpha^x e^{-\frac{1}{x}}\,dx,\qquad \alpha \text{ constante arbitraire.}$$

Notre intégrale ne peut correspondre qu'à $\alpha=0$; et, en effet, on vérifie aisément l'identité ([1])

$$e^{\frac{1}{x}}\int_0^x e^{-\frac{1}{x}}\,dx=\int_0^\infty \frac{u}{1+u}\,e^{-\frac{u}{x}}\,du.$$

V. — Les séries de Stieltjes.

Nous allons tout d'abord résumer quelques résultats obtenus par Stieltjes dans le beau Mémoire : *Sur les fractions continues* ([2]), qu'il a présenté à l'Académie peu de temps avant sa mort prématurée. Une généralisation aisée de ces résultats nous conduira à définir une classe étendue de séries divergentes, auxquelles nous donnerons le nom de *séries de Stieltjes*.

([1]) Le premier membre s'écrit

$$\int_0^x e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{z}}\,dz,$$

en posant

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=-\frac{u}{x},$$

il devient

$$\int_\infty^0 e^{-\frac{u}{x}}\frac{-x\,du}{(u+1)^2};$$

il suffit alors d'intégrer par parties en remarquant que l'on a

$$\frac{du}{(u+1)^2}=d\left(\frac{u}{u+1}\right),$$

pour retrouver la formule donnée.

([2]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 1894-1895.

Soit la série

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \frac{c_4}{z^5} - \ldots.$$

Stieltjes pose

$$A_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad A_0 = B_0 = 1.$$

Il suppose essentiellement les déterminants A_n et B_n tous *réels et positifs*. Il est dès lors aisé de démontrer directement, et il résulte d'ailleurs de l'analyse de Stieltjes, bien qu'il ne formule pas explicitement cette remarque, que *le déterminant*

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} & \ldots & c_{p+n-1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \ldots & c_{p+n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p+n-1} & \ldots & \ldots & c_{p+2n-2} \end{vmatrix}$$

est aussi réel et positif, quels que soient n et p. (Pour $p = 0$ il se réduit à A_n et pour $p = 1$ à B_n.) En particulier, en supposant $n = 1$, on voit que les c_p sont *tous réels et positifs ;* pour $n = 2$, on a

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} \end{vmatrix} > 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{c_p}{c_{p+1}} > \frac{c_{p+1}}{c_{p+2}}.$$

Il n'était pas inutile d'indiquer dès maintenant ces conséquences de notre hypothèse fondamentale : *les* A_n *et les* B_n *sont tous réels positifs*.

En posant

$$a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}, \qquad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}},$$

Stieltjes montre que la série proposée peut s'obtenir en développant, suivant les puissances descendantes de z, la fraction continue

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \ldots + \cfrac{1}{a_{2n} z + \cfrac{1}{a_{2n+1} + \ldots}}}}}}$$

D'ailleurs l'hypothèse fondamentale revient à ceci : les a_n sont tous réels et positifs.

La fraction continue n'est convergente que dans le cas où la série

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

est *divergente*. Ajoutons cette hypothèse à celles que nous avons déjà faites sur les c; elle n'est pas incompatible avec celle-ci : *la série proposée est divergente, quel que soit z*. On peut alors attribuer un sens précis à cette série divergente, à savoir la valeur de la fraction continue, laquelle converge pour toute valeur de z, sauf les valeurs réelles négatives. Cette fraction continue représente une fonction holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être sur la partie négative de l'axe réel, qu'elle peut avoir comme ligne singulière essentielle. On peut représenter cette fonction analytique par l'intégrale définie

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}.$$

$\psi(u)$ est une fonction *positive croissante*, qui peut être *discontinue* et que Stieltjes donne le moyen de calculer; en un point de discontinuité de $\psi(u)$ il s'introduit un terme de la forme $\frac{A_n}{z+u_n}$, u_n étant la valeur de u correspondante et A_n la valeur de la discontinuité

$$A_n = \lim_{\varepsilon=0} [\psi(u_n+\varepsilon) - \psi(u_n - \varepsilon)].$$

On a d'ailleurs

$$c_k = \int_0^\infty u^k d\psi(u),$$

et ces égalités achèvent de nous faire connaître le triple lien qui unit la série, la fraction continue et l'intégrale définie.

Bien qu'il n'y ait pas de difficulté spéciale [1] à étendre nos remarques au cas général, nous supposerons [2], pour plus de netteté et pour éviter des longueurs de discussion, la fonction $\psi(u)$ pourvue de dérivées des deux premiers ordres (ces dérivées pourraient devenir infinies pour $u = 0$, pourvu que l'intégrale conserve un sens); et nous écrirons

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u}. \tag{1}$$

Il est à peine besoin de faire observer que la relation ainsi établie entre $f(u)$ et $F(z)$ est univoque. Les hypothèses que nous avons faites sur $\psi(u)$ reviennent à supposer que $f(u)$ admet une dérivée du premier ordre.

Supposons maintenant que l'on se donne *a priori* l'intégrale (1) et que l'on pose

$$c_k = \int_0^\infty u^k f(u)\,du,$$

la fonction $f(u)$ étant telle que toutes ces intégrales aient un sens. Si la fonction $f(u)$ est positive, Stieltjes montre que les déterminants A_n et B_n sont positifs; mais il faut, pour que la série

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{a}$$

soit divergente, que $f(u)$ satisfasse à une condition que nous appellerons, pour abréger, *condition* S, et sur laquelle nous reviendrons.

---

(1) Il faut simplement introduire, en même temps que les intégrales du texte, des intégrales où le facteur $\frac{1}{z+u}$ est élevé à une puissance positive.

(2) Stieltjes fait observer que le cas où $\psi(u)$ admet des discontinuités dans tout intervalle *doit être regardé comme le cas général;* cela ne paraît pas douteux si l'on regarde les a et les c comme *arbitraires* (sauf les inégalités fondamentales); mais si l'on suppose, comme il est naturel, les a ou les c donnés par une *loi* analytique, il pourra n'en être plus de même et les deux cas *généraux* paraissent être alors celui du texte et celui où la fonction $F(z)$ étant méromorphe, la fonction $\psi(u)$ est constante en dehors des points de discontinuité, qui sont isolés et en nombre infini.

Lorsque la fonction $f(u)$ satisfait à la condition S, c'est-à-dire lorsque la série (a) est divergente, Stieltjes démontre qu'il ne peut exister une autre fonction *positive* $f_1(u)$, telle que l'on ait

$$c_k = \int_0^\infty u^k f_1(u)\,du.$$

Par conséquent, la relation entre la série divergente et l'intégrale définie est *univoque*. Stieltjes exprime ce résultat fondamental en disant que *le problème des moments est déterminé*. Il appelle *problème des moments* la recherche de la fonction *positive* $f(u)$ donnant lieu aux égalités

$$c_k = \int_0^\infty u^k f(u)\,du,$$

les c_k étant des *nombres positifs donnés*.

En résumé, dans l'ensemble des séries divergentes de la forme

$$F(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots, \tag{2}$$

Stieltjes distingue celles qui satisfont à des conditions déterminées (les A_n et B_n positifs; la série Σa_n divergente); elles ont la propriété fondamentale de pouvoir se mettre *d'une seule manière* sous la forme

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u}, \tag{1}$$

$f(u)$ étant une fonction positive. On entend par là que l'on a

$$c_k = \int_0^\infty u^k f(u)\,du.$$

Réciproquement, si l'on développe une intégrale telle que (1) en une série de la forme (2), cette série ne pourra tenir lieu de l'intégrale que si $f(u)$ satisfait à la condition S, c'est-à-dire si les c sont tels que la série Σa_n soit divergente; c'est en effet dans ce cas seulement que la série permettra de remonter à l'intégrale, d'une manière univoque. L'intermédiaire de la fraction continue permet d'ailleurs à Stieltjes de résoudre fort élégamment le difficile problème de déterminer $f(u)$, la série étant donnée; mais c'est là un point qui ne nous intéresse pas pour le moment.

Notre but est de montrer que l'étude de la condition S, étude dans laquelle nous aurons encore à nous appuyer sur des résultats dus à Stieltjes, permet de remplacer la condition $f(u) > 0$ par une autre condition moins restrictive et, par suite, d'élargir la classe des séries (2) qui pourront être regardées comme *sommables* (¹), c'est-à-dire comme définissant une fonction analytique *déterminée*.

En réalité, il importerait assez peu que la classe des *séries de Stieltjes* soit un peu plus ou un peu moins étendue; mais notre généralisation paraît indispensable pour que la *somme*, la *différence*, le *produit* de deux séries de Stieltjes soit encore une série de Stieltjes. Or c'est ce qui visiblement n'a pas lieu pour la différence et pour le produit, si l'on se borne aux séries qui se rattachent aux fractions continues de Stieltjes. On a vu, dans les paragraphes précédents, l'importance de cette propriété, que l'on pourrait rattacher à la notion de groupe.

Le problème que nous nous proposons peut être énoncé de la manière suivante :

Les c_k étant des constantes réelles données (²), *on pose*

$$c_k = \int_0^{\infty} u^k f(u)\,du; \tag{3}$$

et l'on demande de déterminer, à l'aide de ces égalités, la fonction $f(u)$, en ajoutant des conditions supplémentaires telles que cette détermination soit univoque. On peut d'ailleurs prévoir que, quelles que soient ces conditions supplémentaires, le problème ne sera possible que si les c_k satisfont eux-mêmes à des conditions convenables.

(¹) Il est bien clair que le mot *sommable* n'a pas ici le même sens que dans le Chapitre précédent. Mais le procédé de sommation satisfait aux conditions fondamentales de la page 63.

(²) Dans le cas où $c_k = c'_k + i c''_k$, il suffit de poser

$$f(u) = f_1(u) + i f_2(u);$$

on a à résoudre *deux* problèmes de la nature de celui du texte.

La solution de Stieltjes consiste à ajouter la condition

$$f(u) > 0; \tag{4}$$

cette condition *détermine* le problème dans le cas où les c_k sont tels que l'on ait

$$A_n > 0, \qquad B_n > 0, \qquad \Sigma a_n \text{ divergente};$$

ce que nous exprimons aussi en disant que la fonction positive $f(u)$ satisfait à la condition S.

Notre but est de trouver une solution plus large, c'est-à-dire de remplacer la condition supplémentaire (4) par une autre qui soit moins restrictive et surtout qui satisfasse aux conditions fondamentales que nous avons énoncées il y a un instant.

Désignons par $\psi(u)$ une fonction réelle finie (¹) pour $u = 0$, et telle que l'on ait, quel que soit k,

$$0 = \int_0^\infty u^k \psi(u)\, du.$$

On peut prendre par exemple, d'après Stieltjes,

$$\psi(u) = e^{-\sqrt[4]{u}} \sin(\sqrt[4]{u}).$$

Soit, d'autre part, $f(u)$ *une fonction satisfaisant à la condition* S; nous allons démontrer que *le rapport*

$$\frac{|\psi(u)|}{f(u)}$$

ne reste pas fini lorsque u *augmente indéfiniment par valeurs positives.* En effet, si ce rapport restait fini pour u infini, la fonction $f(u)$ étant toujours positive (²) et continue, ce rapport serait, pour toute valeur positive de u, inférieur à un nombre fixe $\frac{1}{\lambda}$; on aurait, l'égalité étant

(¹) Cette restriction est aisée à lever.

(²) Le cas où la fonction $f(u)$ serait nulle pour certaines valeurs de u se traiterait aisément; on peut l'écarter en remplaçant $f(u)$ par $f(u) + f_1(u)$, f_1 étant convenablement choisi (par exemple $f_1 = e^{-u^h}$, h assez grand).

exclue,

$$\frac{|\psi(u)|}{f(u)} < \frac{1}{\lambda}, \qquad \lambda\,|\psi(u)| < f(u)$$

et, par suite,

$$f_1(u) = f(u) + \lambda\psi(u) > 0.$$

On a d'ailleurs évidemment

$$\int_0^\infty u^k f_1(u)\,du = \int_0^\infty u^k f(u)\,du + \lambda\int_0^\infty u^k \psi(u)\,du = \int_0^\infty u^k f(u)\,du.$$

La fonction $f_1(u)$ étant *positive*, ce résultat *contredit l'hypothèse que* $f(u)$ *satisfait à la condition* S.

Par conséquent, dans cette hypothèse, on peut affirmer que le rapport

$$\frac{|\psi(u)|}{f(u)}$$

prend, pour des valeurs de u croissant indéfiniment, des valeurs dépassant un nombre quelconque donné.

Cette proposition est pour nous fondamentale ; car nous en déduirons aisément le résultat que nous voulons obtenir ; mais il est nécessaire auparavant de rappeler quelques résultats obtenus par Stieltjes au sujet de *la condition* S et de présenter quelques remarques à ce sujet.

La fonction positive $f(u)$ étant donnée, on peut calculer les c_k, les A_n et les B_n et, par suite, les a_n qui sont positifs. La fonction $f(u)$ satisfait à la condition S lorsque la série

$$\sum a_n$$

est divergente. Comment peut-on le reconnaître directement, c'est-à-dire sans calculer les c et les a ?

« C'est là un problème, dit Stieltjes (*loc. cit.*, p. J. 112), qui présente quelques analogies avec celui qui consiste à décider de la convergence ou de la divergence d'une série donnée. On n'en peut guère donner une solution générale ; tout ce qu'on peut faire c'est donner quelques règles qui permettent de répondre à cette question dans un certain nombre de cas particuliers. »

L'analogie avec le problème de la convergence des séries est, en effet, très grande et ne doit pas nous étonner, puisqu'en réalité il y a correspondance univoque entre les deux problèmes : à toute série divergente à termes positifs $\sum a_n$ correspond une fonction $f(u)$ qui satisfait à la condition S. On doit donc s'attendre, d'après les travaux de du Bois-Reymond, à des difficultés insurmontables à cause de l'introduction du transfini dans la solution générale de la question. Heureusement, en pratique, il en sera de même que pour les séries; des règles simples, correspondant, par exemple, aux critères de M. Bertrand, suffiront dans la plupart des cas. On obtiendrait aisément ces règles en prenant pour $\sum a_n$ une série divergente d'une forme particulière (l'une des séries de comparaison qui donnent naissance aux critères rappelés) et en formant la fonction $f(u)$ correspondante. Comme notre but est moins d'avoir des critères étendus que de connaître la nature de ces critères, nous ne ferons pas ce calcul; nous nous bornerons à rappeler quelques résultats obtenus par Stieltjes [1].

On démontre d'abord que si le rapport $\frac{f_1(u)}{f(u)}$ reste inférieur à un nombre fixe [2] et si $f(u)$ satisfait à la condition S, il en est de même de f_1.

Il en résulte que la connaissance d'une fonction particulière $f(u)$

---

(1) Il se présente ici un fait fort général. Pour pouvoir tirer parti de ce fait que la série des a est divergente, il est nécessaire de faire une hypothèse sur la nature de cette divergence, c'est-à-dire de supposer la série *plus divergente* qu'une série de comparaison *connue*. C'est là un fait analogue à celui-ci, sur lequel nous avons insisté à diverses reprises : il est souvent plus important de connaître la manière dont une quantité tend vers sa limite que de savoir simplement qu'elle a telle limite. Ce n'est pas que l'on ne puisse tirer quelques conséquences des notions générales de limite, de convergence, de divergence; mais, pour aller vraiment au fond des choses, il est nécessaire de préciser ces notions en les restreignant, comme nous le faisons ici. En réalité, nous substituons à la condition S, dont il paraît difficile de tirer parti à cause de sa trop grande généralité, une condition beaucoup plus précise, et par suite nécessairement plus restreinte. D'ailleurs les restrictions introduites, théoriquement très considérables, se trouveront, en pratique, être le plus souvent sans importance : elles ne gêneront nullement pour les applications.

(2) Il suffit même que ce rapport ait un maximum fini dans l'intervalle u_0, $+\infty$, ce maximum pouvant croître indéfiniment lorsque u_0 tend vers zéro. (*Voir* la note ci-dessus.)

satisfaisant à la condition S permet d'énoncer une *règle*, de même que la connaissance d'une série convergente particulière permet d'énoncer une règle de convergence.

Il est clair que, réciproquement, si $f_2(u)$ ne satisfait pas à la condition S, il en sera de même de $f_1(u)$ si le rapport $f_1 : f_2$ reste *supérieur* à un nombre fixe. On peut prendre, d'après Stieltjes,

$$f(u) = e^{-bu^\lambda}, \qquad b > 0, \quad \lambda \geqq \tfrac{1}{2};$$
$$f_2(u) = e^{-bu^\lambda}, \qquad b > 0, \quad \lambda < \tfrac{1}{2}.$$

Il est clair qu'entre les fonctions $f(u)$ et les fonctions $f_2(u)$ il existe des fonctions à décroissance intermédiaire qu'il y aurait lieu de classer. Il existe aussi des fonctions qui ne sont pas comparables à $f(u)$ ni à $f_2(u)$.

Il y a là, nous le répétons, une difficulté analogue à celle qui se présente pour la convergence des séries, et il y aurait lieu encore ici de distinguer entre les cas où une règle est *inapplicable* et ceux où elle est en *défaut*. Nous supposerons que nous avons à faire exclusivement, dans ce qui suit, à des fonctions $\theta(u)$ telles que, *ou bien il existe un nombre b, tel que le rapport $\frac{\theta(u)}{e^{-b\sqrt{u}}}$ tende vers zéro pour $u = +\infty$, ou bien il existe un nombre $\lambda < \frac{1}{2}$, tel que le rapport $\frac{\theta(u)}{e^{-u^\lambda}}$ augmente indéfiniment avec u.* On pourrait remplacer cette hypothèse restrictive sur $\theta(u)$ par une autre moins restrictive, *mais il est de la nature de la question qu'une hypothèse restrictive soit nécessaire.* Nous supposons aussi que $\theta'(u)$ a la même propriété; $\theta'(u)$ est alors dans la même catégorie que $\theta(u)$.

Cela posé, nous dirons qu'une fonction *réelle* $\sigma(u)$ est *une fonction de Stieltjes*, si, en posant

$$\theta(u) = |\sigma(u)|,$$

la fonction $\theta(u)$ se trouve dans la première catégorie, c'est-à-dire est telle que $e^{b\sqrt{u}}\theta(u)$ tend vers zéro pour $u = \infty$, le nombre positif b ayant été convenablement choisi. Alors on est assuré que $\theta(u)$ satisfait à la condition S; mais nous ne nous contentons pas de supposer que $\theta(u)$ satisfait à la condition S; nous explicitons la condition pour qu'il en soit ainsi, et nous ne pouvons le faire complètement ([1]).

Désignant par $\sigma(u)$ une fonction de Stieltjes, nous poserons

$$c_k = \int_0^\infty u^k \sigma(u)\,du,$$

$$F(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots.$$

La série $F(z)$ sera une *série de Stieltjes*.

Nous allons montrer que pour toute valeur de $\sigma(u)$ et $\sigma_1(u)$ étant deux fonctions de Stieltjes, l'on ne peut avoir

$$(1) \qquad \int_0^\infty u^k \sigma(u)\,du = \int_0^\infty u^k \sigma_1(u)\,du.$$

Il en résultera qu'à une *série de Stieltjes* correspond une seule *fonction de Stieltjes* et, par suite, *une fonction analytique bien déterminée*

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{\sigma(u)\,du}{z+u}.$$

En posant $\sigma(u) - \sigma_1(u) = \psi(u)$ les égalités (1) deviennent

$$\int_0^\infty u^k \psi(u)\,du = 0,$$

et elles sont impossibles, car la fonction $\psi(u)$ est telle que le rapport $\frac{|\psi(u)|}{e^{-b\sqrt{u}}}$ reste fini, la fonction $e^{-b\sqrt{u}}$ satisfaisant, d'ailleurs, à la condition S; c'est la proposition fondamentale ([2]) de la page 113.

On peut prouver qu'une fonction de Stieltjes est la différence de

---

([1]) Il y a là quelque analogie avec les démonstrations où l'on suppose un nombre x inférieur à un nombre quelconque $r' < r$, tandis que l'on ne pourrait supposer seulement $x < r$. Mais l'existence de modes de croissance non comparables est ici une complication de plus.

([2]) Nous avons supposé $\psi(0)$ non infini; on pourrait ajouter cette condition à la définition des fonctions de Stieltjes, si l'on ne veut pas admettre que cette restriction pourrait se lever.

deux fractions continues de Stieltjes. Posons, en effet,

$$f(u) = \frac{\sigma(u) + |\sigma(u)|}{2},$$

$$f_1(u) = \frac{-\sigma(u) + |\sigma(u)|}{2},$$

les fonctions $f(u)$ et $f_1(u)$ sont positives et l'on a

$$\sigma(u) = f(u) - f_1(u);$$

d'ailleurs, $f(u)$ et $f_1(u)$ sont visiblement des fonctions de Stieltjes; comme elles sont positives, elles satisfont à la condition S et, par suite, l'on a

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{\sigma(u)\,du}{z+u} = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u} - \int_0^\infty \frac{f_1(u)\,du}{z+u},$$

chacune de ces intégrales définies correspondant à une fraction continue de Stieltjes. C. Q. F. D.

Il est clair que la somme ou la différence de deux séries de Stieltjes est une série de Stieltjes.

Nous allons prouver que *le produit de deux séries de Stieltjes est une série de Stieltjes.*

Soit

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{\sigma(u)\,du}{z+u},$$

$$G(z) = \int_0^\infty \frac{\tau(u)\,du}{z+u};$$

on a, évidemment,

$$zF(z)G(z) = \int \int_0^\infty \frac{z\,\sigma(u)\tau(v)\,du\,dv}{(z+u)(z+v)}.$$

Or on a

$$\frac{z}{(z+u)(z+v)} = \frac{1}{v-u}\left(\frac{v}{z+v} - \frac{u}{z+u}\right)$$

et, par suite,

$$zF(z)G(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{-u\sigma(u)\,\tau(v)\,du\,dv}{(v-u)(z+u)} + \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{-v\,\sigma(u)\,\tau(v)\,du\,dv}{(u-v)(z+v)}.$$

En apparence, le facteur $\frac{1}{u-v}$ rend les intégrales indéterminées; la formule est exacte si l'on remplace chacune d'elles par sa valeur principale (¹) au sens de Cauchy (²).

Le premier terme peut s'écrire

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sigma(u)\tau(v)\,du\,dv}{(v-u)(z+u)} = \int_0^\infty \frac{\sigma(u)}{z+u}\left[\int_0^\infty \frac{-u\tau(v)\,dv}{v-u}\right]du = \int_0^\infty \frac{\sigma(u)\,\mathrm{T}(u)\,du}{z+u},$$

en posant

$$\mathrm{T}(u) = \int_0^\infty \frac{-u\tau(v)\,dv}{v-u} = \int_0^\infty \tau(v)\,dv - \int_0^\infty \frac{v\tau(v)\,dv}{v-u}.$$

Si l'on pose de même

$$\mathrm{S}(u) = \int_0^\infty \frac{-u\sigma(v)\,dv}{v-u},$$

on obtient

$$z\mathrm{F}(z)\,\mathrm{G}(z) = \int_0^\infty \frac{\sigma(u)\,\mathrm{T}(u) + \tau(u)\,\mathrm{S}(u)}{z+u}\,du.$$

Il reste à faire voir que, si l'on pose

$$\varpi(u) = \sigma(u)\,\mathrm{T}(u) + \tau(u)\,\mathrm{S}(u),$$

la fonction $\varpi(u)$ est une fonction de Stieltjes [en vertu de l'hypothèse que $\sigma(u)$ et $\tau(u)$ sont des fonctions de Stieltjes].

Comme la somme de deux fonctions de Stieltjes est aussi une fonction de Stieltjes, il suffit de prouver que le produit $\tau(u)\,\mathrm{S}(u)$ est une fonction de Stieltjes. On a, d'après la définition de la *valeur principale*

(¹) Cette valeur principale existe grâce à l'hypothèse faite sur l'existence de dérivées pour $\sigma(u)$ et $\tau(u)$; dans le cas où l'on ne ferait pas cette hypothèse, le calcul serait ici plus long et pourrait introduire des termes en $\frac{1}{(z+u)^2}$ dans le résultat final.

(²) Si les fonctions σ et τ étaient analytiques, on pourrait déformer légèrement les chemins d'intégration dans le plan des variables u et v, de manière que l'on n'eût en aucun point $u = v$ (sauf pour $u = v = 0$).

d'une intégrale définie,

$$S(u) = \int_0^\infty \frac{u\sigma(v)\,dv}{u-v} = \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_0^{u-\varepsilon} \frac{u\sigma(v)\,dv}{u-v} + \int_{u+\varepsilon}^\infty \frac{u\sigma(v)\,dv}{u-v}\right].$$

Or l'intégration par parties donne, les logarithmes ayant un sens arithmétique,

$$\int_0^{u-\varepsilon} \frac{u\sigma(v)\,dv}{u-v} = [-u\sigma(v)\log(u-v)]_0^{u-\varepsilon} + \int_0^{u-\varepsilon} u\log(u-v)\sigma'(v)\,dv,$$

$$\int_{u+\varepsilon}^\infty \frac{u\sigma(v)\,dv}{u-v} = [-u\sigma(v)\log(v-u)]_{u+\varepsilon}^\infty + \int_{u+\varepsilon}^\infty u\log(v-u)\sigma'(v)\,dv.$$

d'où

$$S(u) = \lim_{\varepsilon=0}\{u\log u\sigma(0) + u\log\varepsilon[\sigma(u+\varepsilon) - \sigma(u-\varepsilon)]\}$$
$$+ \int_0^\infty \frac{u}{2}\log(u-v)^2\sigma'(v)\,dv.$$

Or, si l'on suppose $\sigma'(u)$ finie, le produit

$$\log\varepsilon[\sigma(u+\varepsilon) - \sigma(u-\varepsilon)] = 2\varepsilon\log\varepsilon\sigma'(u+\theta\varepsilon) \qquad (-1 < \theta < +1)$$

tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro. D'ailleurs

$$\left|\int_0^\infty \frac{u}{2}\log(u-v)^2\sigma'(v)\,dv\right| < \int_0^\infty \frac{u}{2}|\log(u-v)^2|.|\sigma'(v)|\,dv,$$

et il est aisé d'avoir un maximum de cette intégrale en supposant $|\sigma'(v)| < e^{-b\sqrt{v}}$. Somme toute, on trouve que $S(u)$ croît moins rapidement que u^2, de sorte que le produit $\tau(u)S(u)$ est une fonction de Stieltjes en même temps que $\tau(u)$.

Il est évident d'ailleurs que l'intégrale obtenue pour le produit des deux fonctions $F(z)$ et $G(z)$ donnerait comme développement en série le produit des développements en série de F et de G.

Si l'on a

$$F(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \ldots,$$

$$G(z) = \frac{d_0}{z} - \frac{d_1}{z^2} + \frac{d_2}{z^3} - \ldots,$$

on obtient (¹)

$$zF(z)G(z) = \frac{c_0 d_0}{z} - \frac{c_0 d_1 + c_1 d_0}{z^2} + \frac{c_0 d_2 + c_1 d_1 + c_2 d_0}{z^3} - \dots.$$

Il serait d'ailleurs aisé de vérifier ce résultat en calculant $\sum_0^k c_i d_{k-i}$ au moyen des intégrales définies que donnent les valeurs de c_i et d_{k-i}; le calcul est tout semblable à celui que nous venons de faire.

On voit que les séries de Stieltjes forment une classe assez étendue de séries sommables avec lesquelles on peut calculer comme avec les séries convergentes.

Pour faire rentrer dans cette catégorie les polynomes en $\frac{1}{z}$, il serait nécessaire d'introduire, ce qui ne présente aucune difficulté, des intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \frac{\varpi(u)\,du}{(z+u)^k}; \qquad k \text{ entier positif};$$

ces intégrales se ramènent d'ailleurs, par l'intégration par parties, à la somme d'un polynome et d'une des intégrales considérées.

Une série de Stieltjes n'est identiquement nulle que si la fonction de Stieltjes correspondante est nulle; par conséquent, si nous avons une équation différentielle dont les coefficients sont des polynomes en $\frac{1}{z}$ et si le développement formel d'une intégrale suivant les puissances de $\frac{1}{z}$ est une série de Stieltjes, nous pourrons affirmer, non seulement que l'on obtient ainsi une fonction analytique vérifiant l'équation et satisfaisant aux conditions aux limites, mais encore que l'intégrale ainsi obtenue est la seule satisfaisant à ces conditions et représentable par une série de Stieltjes.

Les conditions aux limites ont ici la forme suivante : lorsque la

(¹) On voit ici pourquoi nous avons multiplié par z. Nous évitons une singularité en $z = 0$. Ceci pourrait être rattaché à l'étude des *cas exceptionnels* dont parle Stieltjes dans son Mémoire.

partie réelle de z augmente indéfiniment, on a

$$\lim z\,F(z) = c_0,$$
$$\lim z\left[F(z) - \frac{c_0}{z}\right] = -c_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On pourrait écrire aussi

$$\lim \frac{d\,F(z)}{d\left(\frac{1}{z}\right)} = c_0,$$
$$\lim \frac{d^2[F(z)]}{\left[d\left(\frac{1}{z}\right)\right]^2} = -2c_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et il est aisé de voir que l'intégrale

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u}$$

satisfait à ces conditions, lorsque l'on a

$$c_k = \int_0^\infty f(u)\,u^k\,du.$$

Malheureusement, sauf dans le cas très particulier que Stieltjes a traité à l'aide des fractions continues, nous ne pouvons indiquer aucune méthode précise pour reconnaître si une série donnée

$$F(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z_2} + \frac{c_2}{z_3} - \ldots$$

est une série de Stieltjes, et pour trouver la fonction $f(u)$ correspondante [1].

Le cas traité par Stieltjes est celui où, les déterminants A_n et B_n étant positifs, la série Σa_n est divergente. On pourra rechercher s'il est possible de mettre $F(z)$ sous la forme de la *différence* de deux séries satis-

---

[1] Dans le cas où les c sont imaginaires, on écrit $F = F_1 + iF_2$ et l'on étudie F_1 et F_2.

faisant à ces conditions, et le problème sera alors résolu par l'étude de ces séries à l'aide de la réduction en fraction continue.

On pourra aussi réduire la série en fraction continue, calculer les réduites successives, et, dans le cas où la loi en serait simple, rechercher si, bien que la fraction continue ne rentre pas dans le type de Stieltjes, ses méthodes ne sont point applicables [1].

Mais il ne sera pas inutile d'indiquer une condition *nécessaire* que doivent vérifier les c pour qu'une série donnée soit une série de Stieltjes. D'ailleurs, lorsque les A_n et les B_n sont positifs, cette condition nécessaire devient *suffisante*, c'est-à-dire que la série Σa_n diverge.

Nous avons

$$c_k = \int_0^\infty f(u)\, u^k\, du$$

et

$$|f(u)| < e^{-b\sqrt{u}};$$

donc

$$|c_k| < \int_0^\infty e^{-b\sqrt{u}}\, u^k\, du = \frac{2}{b^{2(k+1)}} \int_0^\infty e^{-x} x^{2k+1}\, dx < \frac{2(2k+1)!}{b^{2(k+1)}}.$$

Ces inégalités doivent être vérifiées pour un choix convenable du nombre positif b. En d'autres termes, *le rayon de convergence de la série*

$$\sum \frac{c_k X^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ne doit pas être nul.

Il est aisé, à l'aide des formules rappelées plus haut, d'exprimer asymptotiquement les a au moyen des c, lorsque ceux-ci croissent rapidement. On a, en effet

$$A_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ c_1 & & \ldots & \ldots \\ & & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad B_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix},$$

$$a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}, \qquad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}},$$

---

(1) Signalons, par exemple, le cas où, les c étant imaginaires, les a auraient leurs parties réelles *positives*, formant une série divergente; une partie des conclusions de Stieltjes s'y appliqueraient.

d'où

$$a_{2n}a_{2n+1} = \frac{A_n}{A_{n+1}} \cdot \frac{B_n}{B_{n-1}}.$$

Or, lorsque les c croissent rapidement, $\frac{B_n}{B_{n-1}}$ est asymptotiquement égal à c_{2n-1}, $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ à c_{2n-2}. On en conclut, asymptotiquement,

$$a_{2n}a_{2n+1} = \frac{c_{2n-1}}{c_{2n}}.$$

Si la série des a est régulière, elle divergera si le produit $a_n a_{n+1}$ est $\geqq \frac{1}{n^2}$ et convergera s'il est inférieur à $\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}$. D'où pour c_n la valeur asymptote $(n!)^2$ comme limite du cas où la série des a diverge. Cette valeur coïncide bien, à un facteur $n\,2^{2n}$ ici négligeable, avec la valeur $(2n+1)!$ donnée plus haut. On peut rapprocher ce résultat de celui que Stieltjes obtient au n° 10 de son Mémoire.

Lorsque cette condition *nécessaire* est vérifiée par les c, on peut rechercher s'il est possible de mettre la série proposée sous la forme de la différence de deux séries vérifiant la même condition, et telles de plus que les déterminants A_n et B_n soient positifs.

Mais nous ne nous étendrons pas davantage sur ce point, ni sur la relation qu'il y a entre la méthode de sommation ici étudiée et les méthodes de sommation exponentielles, dont nous avons étudié des types précédemment. Indiquons cependant que, dans les cas où les méthodes sont applicables toutes deux pour un même argument de z, elles donnent le même résultat (il est à peine utile de rappeler qu'ici le point singulier est à l'infini, tandis que précédemment il était à l'origine).

Nous préférons montrer comment les résultats que nous venons d'obtenir sur les séries de Stieltjes peuvent être généralisés à un point de vue assez différent.

Considérons l'intégrale

$$J = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(u)\,du}{u-z};$$

nous désignons ici par Γ un chemin quelconque dans le plan de la variable u; la fonction $f(u)$ n'est d'ailleurs pas nécessairement analytique; il suffit qu'elle soit définie sur Γ (de telle manière que l'intégrale ait un sens).

Il est clair que J représente une fonction analytique régulière en dehors de Γ; dans deux régions du plan *séparées*, elle peut représenter deux fonctions analytiques différentes. D'ailleurs, si, sur deux bords de Γ, J représente deux fonctions analytiques $F(z)$ et $F_1(z)$ tendant vers des limites lorsque z tend vers le point u de Γ et, si $f(u)$ est continue en ce point, on a

$$f(u) = \frac{1}{2}[F(u) + F_1(u)].$$

Réciproquement toute fonction analytique peut être représentée par une intégrale J, le contour Γ et la fonction $f(u)$ étant convenablement choisis. Si l'on se donne pour Γ un contour fermé entourant une région dans laquelle la fonction donnée est régulière, on peut prendre pour $f(u)$ la valeur de $F(z)$ sur ce contour; d'ailleurs on pourrait ajouter à $f(u)$ les valeurs sur le contour d'une fonction arbitraire, *sans singularités à l'extérieur du contour*. A cela près, $f(u)$ est déterminée par $F(z)$. D'ailleurs, la fonction $F(z)$ déterminée par J est connue, si l'on donne, en un point z_0 non situé sur Γ, la valeur des intégrales

$$J_k = \int_\Gamma \frac{f(u)\,du}{(u-z_0)^{k+1}}.$$

C'est une conséquence immédiate des travaux de Cauchy sur la série de Taylor.

Nous nous proposons d'appeler l'attention sur le cas où le point z_0 est situé sur le contour Γ, la fonction $f(u)$ étant d'ailleurs telle que les intégrales J_k aient toutes un sens [1]. La fonction analytique $F(z)$

---

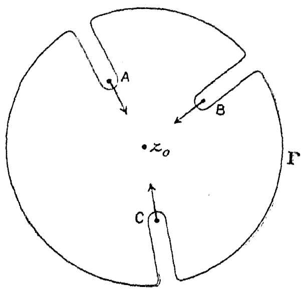
[1] La formule de Cauchy $2i\pi f(z) = \int_c \frac{f(u)\,du}{u-z}$ subsiste lorsque le contour C renferme un *point singulier* de $f(z)$, à condition que lorsque z tend vers ce point *par un chemin intérieur à* C, la fonction $f(z)$ *tende vers une limite déterminée*. Ce point n'est en quelque sorte singulier que *dans un angle* et cet angle est extérieur à C. Par exemple, le point $x = 0$, pour la fonction $e^{-\frac{1}{x}}$, n'est singulier que dans un angle égal à π.

continue-t-elle d'être déterminée par la valeur de ces intégrales ? Il est d'abord nécessaire de faire une remarque importante. Si le point z_0 n'est pas un point *d'arrêt* pour Γ, c'est-à-dire si plusieurs branches de Γ aboutissent à z_0, ces branches divisent le voisinage de z_0 en plusieurs régions; il est clair que les fonctions $F(z)$, définies dans ces diverses régions, ne seront pas, en général, le prolongement analytique l'une de l'autre [1] (en supposant même que les arcs de Γ ne soient pas des lignes singulières essentielles). Donc, en général, il se posera un problème différent pour chacun des angles.

Supposons, par exemple, que nous ayons trois droites A, B, C, issues d'un même point z_0, et formant par suite trois angles autour de ce point. On pourra regarder cette figure comme un cas limite de la *fig.* 4, dans laquelle les trois points singuliers seraient venus se confondre avec z_0.

Les lignes A, B, C, dans le cas où ces points singuliers sont

Fig. 4.



isolés, sont simplement des coupures artificielles, correspondant à une *non-uniformité* de la fonction. Il pourra en être de même dans le cas limite, avec cette différence que, les coupures se rejoignant maintenant, on ne peut plus passer d'un côté à l'autre par l'intermédiaire de la petite région régulière autour de z_0.

Mais notre but est de montrer que les résultats de Stieltjes per-

---

(1) Si le chemin d'intégration Γ ne divise pas le plan en régions séparées, il est clair que J définit une fonction analytique *unique*, mais cette fonction n'est pas uniforme au voisinage de z_0, où nous restons.

mettent d'avoir *quelque idée de* L'INDÉTERMINATION de notre problème général. Il est à peine besoin de dire que, lorsque z_0 est infini, $u - z_0$ doit être remplacé par $\frac{1}{u}$, de sorte que les intégrales J_k deviennent

$$J_k = \int_\Gamma u^{k+1} f(u)\,du.$$

Or nous avons vu, en prenant pour Γ un chemin rectiligne particulier (correspondant à u réel et positif) qu'il existe des fonctions $f(u)$ *telles que ces intégrales soient toutes nulles;* il est clair qu'à ces fonctions $f(u)$, non identiquement nulles, correspondent des fonctions analytiques qui ne sont pas identiquement nulles : il faut donc les exclure si l'on veut que notre problème soit *déterminé*. Or le caractère de ces fonctions $f(u)$, c'est de tendre vers zéro *moins rapidement* que $e^{-\sqrt{u}}$ lorsque u augmente indéfiniment (et même que e^{-u^λ}, $\lambda < \frac{1}{2}$); par conséquent, voilà une condition *nécessaire* que nous devons imposer à $f(u)$, si nous voulons que notre problème puisse être déterminé. En d'autres termes, $f(u)$ doit être une fonction de Stieltjes. Si z_0 n'est pas infini, cette condition s'exprime par l'inégalité

$$(1) \qquad |f(u)| < e^{-\frac{b}{\sqrt{|z_0 - u|}}}, \qquad b > 0,$$

pour les valeurs de u suffisamment voisines de z_0.

Il en résulte d'ailleurs, pour les intégrales J_k, des inégalités exactement semblables à celles que nous avons écrites plus haut pour les c_k.

Bien entendu, ceci n'écarte pas la possibilité de généralisations analogues à celles qui terminent le Chapitre II. Par exemple, si la série

$$F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$$

n'est pas sommable, on peut poser $z^2 = y$ et

$$F(z) = \varphi(y) + z\psi(y);$$

les séries $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ pourront l'être. Ceci amènerait à considérer des intégrales de la forme

$$\int_\Gamma \frac{f(u)\,du}{u - z^k},$$

k étant un nombre *rationnel*.

Mais c'est là *un autre* problème que celui que nous avions posé, et qui peut s'énoncer sous la forme suivante : *déterminer le contour* Γ *et la fonction* $f(u)$, *de telle sorte que les intégrales*

$$J_k = \int_\Gamma \frac{f(u)\,du}{(u - z_0)^{k+1}}$$

aient des valeurs données (¹).

On ne considère pas d'ailleurs comme distinctes *deux solutions telles* que en posant pour chacune d'elles

$$F(z) = \int_\Gamma \frac{f(u)\,du}{u - z},$$

la fonction $F(z)$ soit *la même* dans le voisinage de $z = z_0$.

L'étude de ce problème équivaut à celle de la série (divergente)

$$F(z) = \sum J_k (z - z_0)^k.$$

On peut soupçonner sa difficulté dans le cas le plus général, en se rappelant combien est complexe l'étude des singularités d'une série de Taylor *convergente*.

Les méthodes de Stieltjes permettent de le résoudre dans un cas particulier; il y aurait lieu d'en tenter une généralisation.

(¹) De plus, la fonction $f(u)$ est assujettie à l'inégalité (1) de la page précédente. On verrait aisément que si le contour Γ a plusieurs branches, et si l'angle de deux d'entre elles est α, sur les côtés de cet angle, on doit avoir, en posant $\lambda = \frac{\pi}{\alpha}$,

$$(1)' \qquad |f(u)| < e^{-b|(u - z_0)^{-\lambda}|}.$$

Dans le cas des séries de Stieltjes, il y a une seule branche; on a donc $\lambda = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$, car $\alpha = 2\pi$. Bien entendu, nous affirmons simplement que ces conditions sont *nécessaires* pour déterminer le problème.

Conclusion.

Il nous paraît résulter des recherches précédentes que non seulement les séries divergentes peuvent rendre de grands services au point de vue formel (ce dont personne n'a jamais douté) et au point de vue du calcul approximatif (séries asymptotiques), mais encore qu'elles peuvent, dans des cas assez étudiés, être calculées *exactement* (c'est-à-dire avec une approximation *arbitraire*). Une série divergente *numérique* peut avoir une valeur numérique *déterminée*, c'est-à-dire qu'il peut exister un *lien précis* entre la série et cette valeur numérique. On pourrait d'ailleurs concevoir des cas où cette valeur ne serait, comme celle d'une intégrale définie, déterminée qu'à des multiples près de périodes.

Il y a certainement encore beaucoup à faire pour que l'on puisse employer couramment les séries divergentes. Il y aurait lieu, en particulier, d'étudier les rapports de leur théorie avec celle des intégrales singulières. C'est là un point que nous avons dû renoncer à traiter, faute de temps.

Nous n'avons pas eu le temps non plus d'étudier beaucoup d'exemples particuliers; et, notamment dans les applications aux équations différentielles, il semble que ce soit l'étude approfondie d'exemples simples et bien choisis qui pourra donner des indications précieuses sur les circonstances possibles et permettre d'aborder le cas général.

Nous nous sommes attaché surtout à l'étude des séries de Taylor; les séries de Fourier paraissent pouvoir fournir aussi l'occasion d'appliquer nos théories (*dans certains cas,* il n'y a pour ainsi dire pas de différence entre ces deux sortes de séries, grâce à la transformation $z = e^{ix}$); mais c'est encore un point sur lequel nous n'avons pas eu le temps d'obtenir assez de résultats. Il en est de même en ce qui concerne l'extension aux séries doubles ou multiples; nous n'aurions pu qu'énoncer quelques généralisations tellement immédiates qu'on peut les sous-entendre.

Terminons par quelques réflexions générales.

Nous avons fait jouer un rôle important à certaines fonctions simples, en particulier à la fonction exponentielle; ou, si l'on veut, à la fonction $\Gamma(n)$, par laquelle nous divisons le terme général d'une série pour la sommer. D'autre part, nous avons fait souvent des restrictions qu'on pourrait résumer en disant que nous supposions les modes de convergence et de divergence des fonctions introduites en relation simple avec le mode exponentiel. Nous avons, d'ailleurs, donné quelques raisons qui portent à présumer qu'il en est ainsi de la plupart des fonctions qui s'introduisent naturellement.

Il semble que ces remarques expliquent à la fois la confiance plus ou moins consciente accordée par les anciens géomètres aux séries divergentes, et les hésitations d'Abel et de Cauchy à les proscrire absolument. Tant qu'on n'emploie que de *bonnes* fonctions, et tant qu'on ne le fait pas exprès, ce ne sera que par hasard que l'emploi des séries divergentes pourra être dangereux. Une erreur causée par leur emploi sera un accident fort rare.

Seulement la difficulté consiste précisément à savoir quelle distinction précise il y a entre les *bonnes* fonctions et les autres, et quels seront les cas exceptionnels où l'emploi des séries divergentes conduit à des erreurs. Sinon, on ne pourra regarder cet emploi que comme un procédé de recherche. Cette difficulté n'est pas médiocre, et, pour la surmonter, ce ne sera point trop des ressources que l'Analyse a acquises, précisément en cherchant à approfondir et à compliquer l'idée de fonction. Il nous paraît qu'il y avait là un détour indispensable, que l'on peut expliquer ainsi :

1° On employait d'abord exclusivement des fonctions *simples*, mais sans savoir au juste ce que l'on entendait par là;

2° On a compliqué l'idée de fonction en la généralisant; d'où des difficultés souvent inextricables;

3° On utilise les recherches du 2° pour définir d'une manière précise les fonctions qui méritent d'être appelées *simples* et pour se borner à celles-là.

Ces trois stades se marquent de même dans l'étude de la convergence des séries; ou, si l'on veut, dans la notion générale de fonction croissante. Du Bois-Reymond a montré fort nettement à quelles difficultés on se heurte quand on veut faire une classification générale : on peut les résumer en disant que l'introduction explicite du transfini paraît nécessaire. Dès lors, on doit se demander quelles restrictions on doit faire pour éviter ces difficultés [1] et pouvoir étudier quand même des classes pratiquement très étendues de fonctions ou de séries.

Il en est de même pour les séries (ou intégrales) divergentes :

1° On les a d'abord utilisées quand elles se présentaient et comme elles se présentaient : elles se sont trouvées *bonnes*, à de très rares exceptions près ;

2° On s'est aperçu ensuite qu'il y en avait beaucoup de mauvaises;

3° On doit en conclure la nécessité de distinguer les *bonnes* à des caractères précis; et l'on pourra, dès lors, en toute sécurité, agir presque toujours comme le faisaient les anciens géomètres, guidés seulement par leur instinct du vrai, c'est-à-dire, souvent, par leur génie [2].

Saint-Affrique (Aveyron), septembre 1898.

---

[1] Comme nous l'avons déjà observé plusieurs fois, ces difficultés sont de deux sortes correspondant respectivement aux cas où les critères de convergence sont *inapplicables* et *en défaut*.

[2] En terminant l'impression de ce Mémoire, je tiens à adresser les plus vifs remerciements à M. Ernst Lindelöf qui, se trouvant à Paris, m'a obligeamment proposé de m'aider à revoir les épreuves. Ses amicales et fines observations m'ont été, à plusieurs reprises, fort utiles et j'en garde le reconnaissant souvenir.