ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. MANGEOT

Sur la similitude et la symétrie de deux courbes ou surfaces algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 15 (1898), p. 385-392

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1898_3_15__385_0>

SUR LA SIMILITUDE ET LA SYMÉTRIE

DE DEUX COURBES OU SURFACES ALGÉBRIQUES,

PAR M. S. MANGEOT.

Soient

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0$$

les équations cartésiennes, entières et à coefficients réels, de deux surfaces réelles ou imaginaires S_1, S_2, de même ordre m supérieur à 2, rapportées à des axes de coordonnées rectangulaires quelconques Ox, Oy, Oz. Une même variable, z, pourra manquer dans les deux équations, et les résultats trouvés au sujet des deux surfaces S_1, S_2 donneront alors des résultats concernant deux courbes planes du plan xOy : on verra sans peine les modifications à apporter aux énoncés pour passer du cas des surfaces à celui des courbes planes.

Je désigne par $\varphi_1(x, y, z)$ et $\varphi_2(x, y, z)$ les deux fonctions du second degré

$$\sum \frac{(m-1)!}{\alpha!\beta!\gamma!}\left[\frac{\partial^{m-1} f_r(x, y, z)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma}\right]^2 \qquad (r = 1, 2;\ \alpha+\beta+\gamma = m-1) :$$

chacune des dérivées qui figurent dans ces deux sommes peut se calculer immédiatement à l'inspection du polynome $f_1(x, y, z)$ ou $f_2(x, y, z)$ sans qu'il soit nécessaire de recourir aux différentiations successives [1].

---

[1] Si f est un polynome entier de degré m à n variables $x, y, z, \ldots, t$, une dérivée quelconque d'ordre $m-1$ de ce polynome, telle que $\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma \ldots \partial t^\delta}$ a pour expres-

Les deux équations

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z) = 0$$

représentent deux quadriques à centre Γ_1, Γ_2, qui sont deux surfaces respectivement covariantes des deux surfaces S_1, S_2. Ces deux quadriques sont imaginaires, à moins d'être réduites à un plan double, mais leurs axes sont, dans tous les cas, des droites réelles (1).

Tout élément de symétrie : centre, axe ou plan de symétrie, que peut avoir la surface S_1 doit être un élément de symétrie de la quadrique Γ_1, et j'ai montré le parti que l'on peut tirer de cette propriété pour la recherche des éléments de symétrie de la figure S_1 (2). Cette question n'est qu'un cas particulier du problème suivant, que je vais traiter :

Reconnaître si les deux surfaces S_1, S_2 sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un point, ou par rapport à une droite, ou par rapport à un plan, et, en cas d'affirmative, déterminer cet élément.

On peut d'abord ramener ce problème à la question précédente. On n'a, en effet, qu'à considérer la surface qui a pour équation $f_1 f_2 = 0$. On cherchera si elle a un centre, ou un axe, ou un plan de symétrie, et, l'ayant déterminé, il ne restera plus qu'à vérifier si cet élément remplit la condition indiquée à l'égard des deux surfaces S_1, S_2.

---

sion

$$\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\delta!\,[(\alpha+1)Mx + (\beta+1)Ny + (\gamma+1)Pz + \ldots + (\delta+1)Qt + R],$$

en désignant par $x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots t^\delta (Mx + Ny + Pz + \ldots + Qt + R)$ la somme des termes de f qui contiennent en facteur $x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots t^\delta$.

(1) Dans le cas de deux courbes du plan des xy, $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$, les équations $\varphi_1(x, y) = 0$, $\varphi_2(x, y) = 0$ définissent deux coniques à centre Γ_1, Γ_2, imaginaires à moins d'être réduites à une droite double, et dont les axes sont des droites réelles.

[Si $\sum_{n=0}^{n=m} C_m^n a_n x^{m-n} y^n$ et $m \sum_{n=0}^{n=m-1} C_{m-1}^n x^{m-n-1} y^n$ sont les deux groupes formés par les termes de degrés m et $m-1$ de $f_1(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$ est le produit de l'expression $\sum_{n=0}^{n=m-1} C_{m-1}^n (a_n x + a_{n+1} y + b_n)^2$ par le carré de $1.2\ldots m$.]

(2) *Annales de l'École Normale*, janvier 1897.

On peut aussi, pour traiter le problème, remplacer les deux surfaces S_1, S_2 par leurs quadriques covariantes Γ_1, Γ_2; car, si S_1 et S_2 sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un élément (point, droite ou plan), Γ_1 et Γ_2 devront être aussi symétriques l'une de l'autre par rapport à ce même élément. Or, on sait aisément résoudre le problème dans le cas de deux surfaces du second ordre. Un élément trouvé par rapport auquel les deux quadriques Γ_1, Γ_2 seraient symétriques l'une de l'autre ne remplira généralement pas cette condition à l'égard des deux surfaces S_1, S_2 : il faudra en faire la vérification.

D'une manière plus générale, la recherche des conditions d'homothétie, de similitude, d'égalité, de symétrie par rapport à un point, à une droite ou à un plan, de deux surfaces S_1, S_2, peut être effectuée au moyen de leurs quadriques covariantes Γ_1, Γ_2, ainsi que je vais le montrer.

Une dépendance de l'une quelconque de ces six sortes entre les deux surfaces S_1, S_2 se traduit analytiquement par une relation identique de la forme

$$(\mathrm{A}) \qquad f_1[k(u+a),\, k(v+b),\, k(w+c)] \equiv h f_2(x, y, z),$$

où h, k, a, b, c désignent des constantes convenables, et u, v, w les seconds membres des formules

$$X = \lambda x + \mu y + \nu z, \qquad Y = \lambda' x + \mu' y + \nu' z, \qquad Z = \lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z,$$

d'une substitution orthogonale particulière. Or, si cette identité a lieu, on devra avoir aussi, pour les mêmes valeurs des constantes k, a, b, c, λ, μ, ν, λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'',

$$(\mathrm{B}) \qquad \varphi_1[k(u+a),\, k(v+b),\, k(w+c)] \equiv h' \varphi_2(x, y, z),$$

en raison de la propriété de covariance qui lie $\varphi_1(x, y, z)$ à $f_1(x, y, z)$. Comme $\varphi_1(x, y, z)$ et $\varphi_2(x, y, z)$ sont des polynomes du second degré, on connaît, dans chacun des six cas considérés, les valeurs de ces constantes qui rendent possible l'identité (B), s'il en existe. Alors, pour que les deux surfaces S_1, S_2 aient entre elles la dépendance en question, il faudra et il suffira que, pour ces valeurs, le polynome

$$f_1[k(u+a),\, k(v+b),\, k(w+c)]$$

soit proportionnel à

$$f_2(x, y, z).$$

On connaîtra, par le fait, la transformation linéaire qui permet de passer de l'une des surfaces S_1, S_2 à l'autre.

En ce qui concerne la similitude, la solution du problème peut être présentée de la manière suivante. On veut savoir sous quelles conditions les deux figures S_1, S_2 (surfaces ou courbes) sont semblables, et déduire l'une de l'autre. D'abord les deux quadriques ou coniques Γ_1, Γ_2 doivent être semblables. Supposant S_1 liée aux axes de Γ_1, amenons la figure Γ_1 à être homothétique à Γ_2 en la faisant tourner autour de son centre, rotation qui amène les axes de Γ_1 à être parallèles à ceux de Γ_2. Soit S'_1 la nouvelle position de S_1. La figure homothétique de S'_1 par rapport à un centre d'homothétie des deux quadriques ou coniques, obtenue en prenant pour rapport d'homothétie celui de celles-ci, devra coïncider avec S_2 (1).

L'égalité de deux figures S_1, S_2 se reconnaîtrait ou s'exprimerait en transportant les axes de Γ_1 sur ceux de Γ_2, S_1 étant supposée liée aux axes de Γ_1.

Une autre solution du problème de l'homothétie, plus simple que celle qui résulte de l'emploi des deux figures Γ_1, Γ_2, est donnée par la proposition qui suit :

Soient, en coordonnées rectangulaires ou obliques, $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ [ou $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$] les équations de deux courbes (ou de deux surfaces) de degré m, dans lesquelles on suppose que les termes du $m^{\text{ième}}$ degré sont les mêmes de part et d'autre. Si T_1 et T_2 désignent les deux triangles (ou les deux tétraèdres) formés, le premier, par trois quelconques des droites

$$\frac{\partial^{m-1} f_1(x, y)}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta} = 0$$

$\left[\text{ou par quatre quelconques des plans } \frac{\partial^{m-1} f_1(x, y, z)}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \, \partial z^\gamma} = 0\right]$, et le se-

(1) On voit que si le rapport de similitude de Γ_1 et Γ_2 est déterminé, il donnera le rapport de similitude de S_1 et S_2.

cond, par celles des droites

$$\frac{\partial^{m-1} f_2(x, y)}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta} = 0$$

$\left[\text{ou ceux des plans } \dfrac{\partial^{m-1} f_2(x, y, z)}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \, \partial z^\gamma} = 0\right]$ qui correspondent aux mêmes valeurs de α, β (ou de α, β, γ), les deux courbes (ou les deux surfaces) ne peuvent être homothétiques l'une de l'autre que par rapport au centre d'homothétie de T_1 et T_2, et leur rapport d'homothétie ne peut être que celui de T_1 et T_2.

Si l'une des deux courbes (ou des deux surfaces) peut être amenée sur l'autre par un mouvement de translation, cette translation doit être égale et parallèle à la droite qui joint deux sommets correspondants de T_1 et de T_2. Si elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un point, ce ne peut être que par rapport au milieu de cette droite.

On voit, d'après ce qui précède, que, étant données, par leurs équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, deux courbes ou deux surfaces de même ordre, il est généralement possible de résoudre sans le secours des indéterminées, par de simples vérifications, la question qui consiste à reconnaître si ces deux figures ont entre elles telle ou telle des six dépendances énumérées plus haut, désignée à l'avance, et à déterminer les constantes qui fixent cette dépendance. Je dis généralement, car il peut arriver que le problème sur les deux figures Γ_1, Γ_2 ou T_1, T_2, auquel j'ai ramené la question, admette une infinité de solutions, ou que les axes de Γ_1, Γ_2, dans les cas où leur emploi a été indiqué, soient en nombre infini. Mais je vais faire connaître d'autres figures analogues à celles-ci, que l'on peut utiliser de la même façon quand les axes des coordonnées sont rectangulaires.

Si, dans le développement de $(x + y + z)^\rho$, à savoir

$$\sum \frac{\rho!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma \qquad (\alpha + \beta + \gamma = \rho),$$

on remplace $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, soit par le carré de $\dfrac{\partial^\rho f}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \, \partial z^\gamma}$, soit par son carré symbolique $\dfrac{\partial^{2\rho} f}{\partial x^{2\alpha} \, \partial y^{2\beta} \, \partial z^{2\gamma}}$, f désignant une fonction quelconque de x,

y, z, on obtient deux notations représentant deux fonctions qui sont des covariants de f pour toute substitution orthogonale. En partant du polynome $f_1(x, y, z)$, on peut ainsi, à l'aide des opérations exprimées par les deux symboles

$$\sum \frac{\rho\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!}\left(\frac{\partial^\rho}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right)^2, \qquad \sum \frac{\rho\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\,\gamma\,!}\,\frac{\partial^{2\rho}}{\partial x^{2\alpha}\,\partial y^{2\beta}\,\partial z^{2\gamma}} \qquad (\alpha+\beta+\gamma=\rho),$$

où ρ est choisi à volonté, former des polynomes, en aussi grand nombre que l'on veut, qui seront tous des covariants de $f_1(x, y, z)$. Soient $F_1(x, y, z)$ l'une quelconque de ces fonctions, et $F_2(x, y, z)$ la fonction analogue déduite de $f_2(x, y, z)$ par la même suite d'opérations. Si l'identité (A) a lieu, elle subsiste quand on y remplace $f_1(x, y, z)$ et $f_2(x, y, z)$ par $F_1(x, y, z)$ et $F_2(x, y, z)$, sauf peut-être à changer la constante h. Donc on pourra, pour l'objet que l'on a en vue, remplacer les deux figures données $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ par les deux figures (F_1), (F_2) qui ont pour équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, et, si celles-ci sont d'ordre supérieur à 2 (¹), par les deux figures du second ordre Γ_1, Γ_2, relatives à (F_1), (F_2), ou encore, dans les questions d'homothétie, par les deux triangles ou tétraèdres T_1, T_2 relatifs à (F_1), (F_2) (²).

Je vais généraliser le sujet que je viens de traiter.

Soient $f_1(x, y, z, \ldots, t)$, $f_2(x, y, z, \ldots, t)$ deux polynomes de même degré m supérieur à 2, distincts ou non, à un nombre quelconque n de variables $x, y, z, \ldots, t$; F_1, F_2 les deux polynomes analogues aux deux fonctions $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ précédemment définies, et φ_1, φ_2 les deux fonctions du second degré déduites, soit de f_1, f_2, soit de F_1, F_2, de la même façon que $\varphi_1(x, y, z)$ et $\varphi_2(x, y, z)$ l'ont été de $f_1(x, y, z)$ et de $f_2(x, y, z)$.

(¹) Elles doivent être du même ordre pour que la dépendance en question ait lieu.

(²) J'ai montré (*loc. cit.*) comment l'on peut déterminer sans l'emploi d'aucun paramètre auxiliaire les centres ou les axes d'une courbe plane algébrique quelconque, et les centres des surfaces algébriques. En appliquant la méthode à la courbe (ou à la surface) qui a pour équation $f_1 f_2 = 0$, on voit que l'on aura là un moyen de résoudre, dans tous les cas, sans le secours d'aucune indéterminée, le problème ayant pour objet de trouver un point ou une droite par rapport auquel ou à laquelle les deux courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ seraient symétriques l'une de l'autre (ou un point par rapport auquel les deux surfaces $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ seraient symétriques l'une de l'autre).

Les fonctions F_1, φ_1 sont des covariants de f_1 pour toute substitution orthogonale.

Dès lors, si

$$X = u(x, y, z, \ldots), \qquad Y = v(x, y, z, \ldots), \qquad Z = w(x, y, z, \ldots), \qquad \ldots$$

étant les formules d'une substitution orthogonale homogène, on se propose de déterminer, pour les formes linéaires u, v, w, ... et pour les constantes k, a, b, c, ... (¹), des valeurs telles que

$$f_1[k(u+a),\ k(v+b),\ k(w+c),\ \ldots]$$

soit proportionnel à

$$f_2(x, y, z, \ldots),$$

on n'aura à chercher ces valeurs que parmi celles qui rendraient

$$\varphi_1[k(u+a),\ k(v+b),\ k(w+c),\ \ldots]$$

proportionnel à

$$\varphi_2(x, y, z, \ldots).$$

La détermination de ces dernières dépend de la résolution de l'une ou de l'autre des deux équations en s relatives aux deux fonctions Φ_1, Φ_2 formées par les termes du second degré de φ_1 et φ_2. Ces deux équations doivent avoir leurs racines proportionnelles, et l'une d'elles suffit à faire connaître les substitutions orthogonales

$$(\Sigma_1) \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \lambda_1 x' + \mu_1 y' + \nu_1 z' + \ldots, \\ y = \lambda'_1 x' + \mu'_1 y' + \nu'_1 z' + \ldots, \\ z = \lambda''_1 x' + \mu''_1 y' + \nu''_1 z' + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

et

$$(\Sigma_2) \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \lambda_2 x' + \mu_2 y' + \nu_2 z' + \ldots, \\ y = \lambda'_2 x' + \mu'_2 y' + \nu'_2 z' + \ldots, \\ z = \lambda''_2 x' + \mu''_2 y' + \nu''_2 z' + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

(¹) Je les suppose toutes indéterminées, formes et constantes, pour me placer dans le cas le plus général.

qui ramènent Φ_1 et Φ_2 à leurs formes canoniques. Les formes linéaires $u, v, w, \ldots$ auront des expressions telles que

$$
\begin{array}{l}
\lambda_1(\lambda_2 x+\lambda'_2 y+\lambda''_2 z+\ldots)+\mu_1(\mu_2 x+\mu'_2 y+\mu''_2 z+\ldots)+\nu_1(\nu_2 x+\nu'_2 y+\nu''_2 z+\ldots)+\ldots,\\
\lambda'_1(\lambda_2 x+\lambda'_2 y+\lambda''_2 z+\ldots)+\mu'_1(\mu_2 x+\mu'_2 y+\mu''_2 z+\ldots)+\nu'_1(\nu_2 x+\nu'_2 y+\nu''_2 z+\ldots)+\ldots,\\
\lambda''_1(\lambda_2 x+\lambda'_2 y+\lambda''_2 z+\ldots)+\mu''_1(\mu_2 x+\mu'_2 y+\mu''_2 z+\ldots)+\nu''_1(\nu_2 x+\nu'_2 y+\nu''_2 z+\ldots)+\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}
$$

et les constantes k^2, a, b, c, ... seront données par des formules du premier degré faciles à calculer à l'aide de $\varphi_1(u, v, w, \ldots)$ et de $\varphi_2(x, y, z, \ldots)$.

En supposant $k = 1$, on a, par ce qui précède, un moyen particulier de traiter la question suivante :

Dans quels cas le polynome $f_1(x, y, z, \ldots, t)$ peut-il se transformer dans le polynome $f_2(x, y, z, \ldots, t)$ par une substitution orthogonale, homogène ou non, et quelle doit être cette substitution? [1]

---

[1] Si $f_2 = f_1$, les substitutions (Σ_2) se confondent avec les substitutions (Σ_1), et l'on devra, bien entendu, associer deux substitutions différentes pour former, de la manière que je viens d'indiquer, les expressions de $u, v, w, \ldots$.