Jules Beudon

Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux équations du premier ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 15 (1898), p. 229-242
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1898_3_15__229_0>

SUR DES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ANALOGUES AUX

ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE,

PAR M. JULES BEUDON.

L'objet de ce Travail est l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles définissant une fonction de n variables indépendantes et dont la solution générale dépend d'une fonction arbitraire de $n-1$ arguments.

Le premier Chapitre est réservé au cas général; je montre que l'on peut toujours donner à un tel système une forme normale qui met en évidence ses analogies avec les équations du premier ordre.

Dans le second Chapitre, je m'occupe particulièrement des systèmes linéaires et du second ordre; je fais une étude approfondie des conditions d'intégrabilité, et je montre l'existence de données initiales singulières qui échappent au cas général. Je me réserve de revenir sur ces singularités, qui sont complètement définies dans ce Travail.

J'adopterai enfin la notation suivante :

$$\frac{\partial^k z}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = Z^k_{\alpha_1\ldots\alpha_n},$$

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_n = k.$$

CHAPITRE I.

1. Si un système d'équations aux dérivées partielles, d'ordre p, définissant une fonction z des variables $x_1, \ldots, x_n$, a une solution générale dépendant d'une fonction arbitraire de $n-1$ arguments, on pourra se donner arbitrairement, pour $x_n = x_n^0$

$$z = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

et les valeurs numériques des dérivées prises par rapport à x_n et d'ordre inférieur à p pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$ (1). Toutes les dérivées d'ordre égal ou supérieur à p où x_n intervient dans les dérivations doivent pouvoir être calculées en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, des dérivées d'ordre inférieur à p, et des dérivées d'ordre égal ou supérieur à p prises par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Si l'on prolonge le système au delà de p par une différentiation, il jouira de la même propriété et sera de plus linéaire; je me placerai donc uniquement dans ce dernier cas.

Il y aura en particulier des équations de la forme

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_n} = \text{fonction linéaire des dérivées d'ordre } p \text{ où } x_n \text{ n'intervient pas.}$$

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_j^{p-1}\,\partial x_n} = \qquad \text{id.}$$

$$(i, j \leqq n-1).$$

Pour écrire les conditions d'intégrabilité relatives à ces deux équations, il faudra différentier la première $p-1$ fois par rapport à x_j, et la seconde $p-1$ fois par rapport à x_i; on aura ainsi deux expressions pour

$$\frac{\partial^{2p-1} z}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_j^{p-1}\,\partial x_n},$$

(1) Je n'insiste pas sur les conditions relatives aux valeurs initiales, aux coefficients, à la fonction ψ, etc., car je suppose le système complètement intégrable et les données initiales non singulières.

qui devront être identiques; or, dans l'expression tirée de la seconde équation, toutes les dérivées sont prises au moins $p-1$ fois par rapport à x_i; il doit donc en être de même pour l'expression tirée de la première équation; cela ne peut avoir lieu que si l'on a

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_n} = a_1 \frac{\partial^p z}{\partial x_1\,\partial x_i^{p-1}} + a_2 \frac{\partial^p z}{\partial x_2\,\partial x_i^{p-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial^p z}{\partial x_{n-1}\,\partial x_i^{p-1}}$$
$$+ \text{ une fonction des dérivés d'ordre inférieur à } p.$$

Pour la même raison, on aura

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_j^{p-1}\,\partial x_n} = \alpha_1 \frac{\partial^p z}{\partial x_1\,\partial x_j^{p-1}} + \alpha_2 \frac{\partial^p z}{\partial x_2\,\partial x_j^{p-1}} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{\partial^p z}{\partial x_{n-1}\,\partial x_j^{p-1}} + \ldots.$$

Si l'on effectue maintenant les dérivations indiquées, en portant son attention sur les dérivées d'ordre $2p-1$, on voit aisément que

$$a_1 = \alpha_1, \qquad a_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad a_{n-1} = \alpha_{n-1}.$$

Considérons maintenant les deux équations suivantes :

$$(a) \qquad Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_i\ldots(\alpha_n=1)} = \text{fonction linéraire des dérivées d'ordre } p \text{ où } x_n \text{ n'intervient pas,}$$

et

$$(b) \qquad \frac{\partial^p z}{\partial x_i^{p-1}\,\partial x_n} = a_1 \frac{\partial^p z}{\partial x_1\,\partial x_i^{p-1}} + a_2 \frac{\partial^p z}{\partial x_2\,\partial x_i^{p-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{\partial^p z}{\partial x_{n-1}\,\partial x_i^{p-1}} + \ldots.$$

Pour écrire les conditions d'intégrabilité relatives à ces deux équations, il faut faire, sur la première, l'opération

$$\frac{\partial^{p-1-\alpha_i}}{\partial x_i^{p-1-\alpha_i}},$$

et sur la seconde l'opération

$$\frac{\partial^{p-1-\alpha_i}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}\,\partial x_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\ldots\partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}},$$

et l'on aura pour

$$Z^{2p-1-\alpha_i}_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}(\alpha_i=p-1)\alpha_{i+1}\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n=1)}$$

deux expressions qui devront être identiques.

L'expression provenant de (b) ne contiendra que des dérivées où l'on a différentié au moins

$$\begin{array}{lcl} \alpha_1 & \text{fois par rapport à} & x_1, \\ \alpha_2 & \text{»} & x_2, \\ \dots & \dots & \dots, \\ \alpha_{i-1} & \text{»} & x_{i-1}, \\ \alpha_{i+1} & \text{»} & x_{i+1}, \\ \dots & \dots & \dots, \\ \alpha_{n-1} & \text{»} & x_{n-1}; \end{array}$$

ce qui exige que l'on ait

$$Z^p_{\alpha_1\dots\alpha_i\dots\alpha_{n-1}(\alpha_n=1)} = \lambda_1 Z^p_{\alpha_1+1\dots\alpha_i\dots\alpha_{n-1}(\alpha_n=0)} + \lambda_2 Z^p_{\alpha_1\alpha_2+1\dots\alpha_{n-1}(\alpha_n=0)} + \dots$$
$$+ \lambda_{n-1} Z^p_{\alpha_1\dots\alpha_{n-1}+1(\alpha_n=0)} + \dots.$$

En identifiant les deux résultats obtenus, on obtient

$$\lambda_1 = a_1, \qquad \lambda_2 = a_2, \qquad \dots, \qquad \lambda_{n-1} = a_{n-1}.$$

Je suppose maintenant la propriété établie jusqu'à une certaine valeur α_n de l'indice de dérivation par rapport à x_n, et je vais montrer qu'elle subsiste pour l'indice $\alpha_n + 1$.

On a, par hypothèse,

$$(c) \qquad Z^p_{\alpha_1\dots\alpha_i\dots\alpha_n} = a_1 Z^p_{\alpha_1+1\dots\alpha_n} + a_2 Z^p_{\alpha_1\alpha_2+1\dots\alpha_n} + \dots + a_{n-1} Z^p_{\alpha_1\dots\alpha_n+1} + \dots$$

et je considère l'équation qui donne

$$(d) \qquad Z^p_{\alpha_1\dots\alpha_i-1\dots\alpha_n+1} = \text{fonction linéaire des dérivées d'ordre } p,$$

où l'indice relatif à x_n est au plus égal à α_n.

J'effectue sur (c) l'opération $\dfrac{\partial}{\partial x_n}$, et sur (d) l'opération $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Je dois obtenir deux expressions identiques.

L'expression tirée de (c) ne contiendra que les dérivées d'ordre p de la forme

$$Z^{p+1}_{\alpha_1+1\dots\alpha_n+1}, \quad Z^{p+1}_{\alpha_1\alpha_2+1\dots\alpha_n+1}, \quad \dots, \quad Z^{p+1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}+1,\alpha_n+1};$$

il devra en être de même pour l'expression tirée de (d), ce qui exige que l'on ait

$$Z^p_{\alpha_1\dots\alpha_i-1\dots\alpha_n+1} = \lambda_1 Z^p_{\alpha_1+1\dots\alpha_i-1\dots\alpha_n} + \dots + \lambda_{n-1} Z^p_{\alpha_1\dots\alpha_i-1\dots\alpha_{n-1}+1\,\alpha_n} + \dots;$$

en complétant l'identification, on obtient

$$\lambda_1 = a_1, \qquad \ldots, \qquad \lambda_{n-1} = a_{n-1}.$$

Nous arrivons donc au résultat suivant :

Théorème. — *Si un système d'équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre p définissant une fonction z de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a une solution générale dépendant d'une fonction arbitraire de $n - 1$ arguments, on peut toujours mettre les équations qui le composent sous la forme*

$$a_1 Z^p_{\alpha_1+1\ldots\alpha_n} + a_2 Z^p_{\alpha_1\,\alpha_2+1\ldots\alpha_n} + \ldots + a_n Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n+1} = A_{\alpha_1\ldots\alpha_n},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des entiers positifs pouvant prendre toutes les valeurs telles que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = p - 1;$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des fonctions des variables indépendantes, de la fonction inconnue, et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $p - 1$, qui restent les mêmes pour toutes les équations, et les $A_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ étant des fonctions des mêmes arguments qui peuvent changer d'une équation à l'autre.

2. Cette forme du système étudié met en évidence ses analogies avec l'équation du premier ordre. Si l'on considère, en effet, sur une multiplicité intégrale les courbes définies par les équations différentielles

$$dt = \frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n},$$

on aura

$$dt = \frac{dZ^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{a_1 Z^{k+1}_{\lambda_1+1\ldots\lambda_n} + \ldots + a_n Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}},$$

$$k = 1, 2, \ldots, p - 1,$$

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = k;$$

on tire, en outre, des équations proposées

$$\frac{dZ^{p-1}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{dt} = A_{\alpha_1\ldots\alpha_n}.$$

On connaît, par suite, l'orientation des éléments différentiels le long de cette courbe indépendamment de la surface intégrale choisie; et, si une multiplicité intégrale possède un élément d'ordre $p-1$ connu, elle possédera tous ceux qui appartiennent à l'orientation précédente.

On retrouve donc bien les *caractéristiques*.

3. Considérons une multiplicité ponctuelle à $n-1$ dimensions, et cherchons les différentes surfaces intégrales qui la contiennent; on peut définir cette multiplicité en se donnant z et x_n en fonction de x_1, x_2, ..., x_{n-1}; et il s'agit d'obtenir l'orientation des éléments d'ordre $p-1$ correspondant aux différentes surfaces intégrales, c'est-à-dire les $Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(k=1, 2, \ldots, p-1)$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

On a

$$(e) \qquad \frac{\partial Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n}}{\partial x_i} = Z^{k+1}_{\lambda_1\ldots\lambda_i+1\ldots\lambda_n} + \frac{\partial x_n}{\partial x_i} Z^k_{\lambda_1\ldots\lambda_n+1}.$$

Ceci montre que l'on pourra calculer tous les $Z^{k+1}_{\ldots}$ en fonction de $Z^{k+1}_{0\ldots 0k+1}$ et des dérivées des $Z^h_{\ldots}$ où l'indice h est inférieur à $k+1$.

On aura, en particulier,

$$(f) \qquad \frac{\partial Z^{p-1}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial x_i} = Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_i+1\ldots\alpha_n} + \frac{\partial x_n}{\partial x_i} Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n+1}, \quad i=1, 2, \ldots, n-1,$$

et les équations du système proposé donnent

$$(g) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial Z^{p-1}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{\partial x_i} - Z^p_{\alpha_1\ldots\alpha_n+1}\left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial x_n}{\partial x_i} - a_n\right] = A_{\alpha_1\ldots\alpha_n}.$$

Si l'on tient compte de toutes les équations telles que (e) et (f), les équations (g) ne renferment plus que $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, $\frac{\partial^p z}{\partial x_n}$, les dérivées de $\frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_n^{p-1}}$, $\frac{\partial^{p-2} z}{\partial x_n^{p-2}}$ et ses dérivées jusqu'au deuxième ordre, etc.; $\frac{\partial^\rho z}{\partial x_n^\rho}$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-\rho$, etc.; $\frac{\partial z}{\partial x_n}$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$.

Il y a p fonctions inconnues intervenant respectivement aux ordres $0, 1, 2, \ldots, p-1$; le nombre des dérivées d'ordre supérieur est $1+\Gamma^1_{n-1}+\Gamma^2_{n-1}+\ldots+\Gamma^{p-1}_{n-1}$; il est précisément égal au nombre Γ^{p-1}_n

des équations du système proposé. On sait qu'on peut alors obtenir ces fonctions à l'aide d'équations différentielles ordinaires.

Une orientation d'éléments d'ordre $p-1$ étant connue, il suffit de faire passer par chaque élément une caractéristique pour obtenir la surface intégrale correspondante.

Il existe des multiplicités singulières définies par les équations

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial x_n}{\partial x_i} - a_n = 0,$$

$$\sum_i a_i \frac{\partial Z^{p-1}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial x_i} - A_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = 0,$$

$$\frac{\partial Z^k_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}}{\partial x_i} = Z^{k+1}_{\lambda_1 \ldots \lambda_i + 1 \ldots \lambda_n} + \frac{\partial x_n}{\partial x_i} Z^{k+1}_{\lambda_1 \ldots \lambda_n + 1}.$$

Pour éviter l'embarras d'une notation compliquée, nous n'étudierons ces équations, ainsi que les conditions d'intégrabilité, que dans le cas des systèmes du second ordre.

CHAPITRE II.

1. Un système linéaire du second ordre, dont la solution générale dépend d'une fonction arbitraire de $n-1$ arguments peut s'écrire

$$(1) \qquad p_{ni} = a_1 p_{i1} + a_2 p_{i2} + \ldots + a_{n-1} p_{in-1} + A_{ni},$$

$$(2) \qquad p_{nn} = a_1 p_{n1} + a_2 p_{n2} + \ldots + a_{n-1} p_{nn-1} + A_{nn},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$p_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_j}, \qquad p_{ijk} = \frac{\partial^3 z}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_k}.$$

La dernière équation peut être mise sous la forme suivante

$$p_{nn} = \sum_{\lambda=1}^{n-1} a_\lambda^2 p_{\lambda\lambda} + 2 \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} a_\lambda a_\mu p_{\lambda\mu} + A_{nn} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} a_\lambda A_{n\lambda},$$

$$\lambda \neq \mu.$$

Pour obtenir les conditions d'intégrabilité, je considère d'abord l'équation (1) et l'équation analogue

$$(3) \qquad p_{nk} = a_1 p_{k1} + a_2 p_{k2} + \ldots + a_{n-1} p_{kn-1} + \mathrm{A}_{nk};$$

je différentie la première par rapport à x_k, la seconde par rapport à x_i, pour obtenir deux expressions différentes de p_{nik}; j'en déduis

$$\sum_{\rho=1}^{n-1} \frac{da_\rho}{dx_k} p_{i\rho} = \sum_{h=1}^{n-1} \frac{\partial a_h}{\partial x_i} p_{hk}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{da_\rho}{dx_k} = \sum_{h=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial p_h} + a_h \frac{\partial a_\rho}{\partial p_n} \right) p_{hk} + \ldots,$$

$$\frac{da_h}{dx_i} = \sum_{\rho=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_h}{\partial p_\rho} + a_\rho \frac{\partial a_h}{\partial p_n} \right) p_{\rho i} + \ldots,$$

en ne portant son attention que sur les termes renfermant des dérivées du second ordre.

On en déduit

$$\sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{h=1}^{n-1} p_{i\rho} p_{hk} \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial p_h} + a_h \frac{\partial a_\rho}{\partial p_n} \right) = \sum_{\rho=1}^{n-1} \sum_{h=1}^{n-1} p_{i\rho} p_{hk} \left(\frac{\partial a_h}{\partial p_\rho} + a_\rho \frac{\partial a_h}{\partial p_n} \right),$$

ce qui exige que l'on ait

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial a_\rho}{\partial p_h} + a_h \dfrac{\partial a_\rho}{\partial p_n} = \dfrac{\partial a_h}{\partial p_\rho} + a_\rho \dfrac{\partial a_h}{\partial p_n}, \\ \qquad \rho, h = 1, 2, \ldots, n-1. \end{array} \right.$$

Envisageons maintenant les équations (1) et (2); elles fournissent deux expressions de p_{nni}, et l'on devra avoir

$$(4) \qquad \sum_{\rho=1}^{n-1} \frac{da_\rho}{dx_n} p_{i\rho} = 2 \sum_{\lambda=1}^{n-1} a_\lambda \frac{da_\lambda}{dx_i} p_{\lambda\lambda} + 2 \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} \left(a_\lambda \frac{da_\mu}{dx_i} + a_\mu \frac{da_\lambda}{dx_i} \right) p_{\lambda\mu},$$

en ne considérant comme plus haut que les dérivées du second ordre.

On peut écrire les formules

$$\frac{da_\rho}{dx_n} = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{\partial a_\rho}{\partial p_\lambda} p_{\lambda n} + \frac{\partial a_\rho}{\partial p_n} p_{nn} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{da_\rho}{dx_n} = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{n-1} \left[a_\mu \frac{\partial a_\rho}{\partial p_\lambda} p_{\lambda\mu} + \frac{\partial a_\rho}{\partial p_n} (a_\lambda^2 p_{\lambda\lambda} + 2 a_\lambda a_\mu p_{\lambda\mu}) \right] + \ldots,$$

$$\frac{da_\lambda}{dx_i} = \sum_{\rho=1}^{n-1} p_{i\rho} \left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\rho} + a_\rho \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_n} \right) + \ldots,$$

$$\frac{da_\mu}{dx_i} = \sum_{\rho=1}^{n-1} p_{i\rho} \left(\frac{\partial a_\mu}{\partial p_\rho} + a_\rho \frac{\partial a_\mu}{\partial p_n} \right) + \ldots,$$

ce qui donne, en portant dans l'équation (4)

$$\sum_{\rho,\, \lambda,\, \mu}^{n-1} p_{i\rho} \left[\frac{\partial a_\rho}{\partial p_\lambda} a_\mu p_{\lambda\mu} + \frac{\partial a_\rho}{\partial p_n} (a_\lambda^2 p_{\lambda\lambda} + 2 a_\lambda a_\mu p_{\lambda\mu}) \right]$$

$$= \quad 2 \sum_{\lambda,\, \rho}^{n-1} p_{\lambda\lambda} p_{\rho i} a_\lambda \left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\rho} + a_\rho \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_n} \right)$$

$$+ 2 \sum_{\lambda,\, \mu,\, \rho}^{n-1} p_{\lambda\mu} p_{\rho i} \left[a_\lambda \left(\frac{\partial a_\mu}{\partial p_\rho} + a_\rho \frac{\partial a_\mu}{\partial p_n} \right) + a_\mu \left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\rho} + a_\rho \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_n} \right) \right].$$

L'identification conduit aux résultats suivants

$$\frac{\partial a_\rho}{\partial p_\lambda} a_\lambda + \frac{\partial a_\rho}{\partial p_n} a_\lambda^2 = 2 a_\lambda \left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\rho} + a_\rho \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_n} \right),$$

$$a_\mu \frac{\partial a_\rho}{\partial p_\lambda} + 2 a_\lambda a_\mu \frac{\partial a_\rho}{\partial p_n} = 2 a_\lambda \left(\frac{\partial a_\mu}{\partial p_\rho} + a_\rho \frac{\partial a_\mu}{\partial p_n} \right) + 2 a_\mu \left(\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\rho} + a_\rho \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_n} \right).$$

Nous supposerons, pour rester dans le cas le plus général, que tous les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont différents de zéro; on déduit alors des conditions (I) et des relations précédentes les conditions

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial a_\lambda}{\partial p_\rho} + a_\rho \dfrac{\partial a_\lambda}{\partial p_n} = 0, \\ \lambda, \rho = 1, 2, \ldots, n-1. \end{array} \right.$$

Si l'on considère les équations

$$\frac{\partial a_\lambda}{\partial p_\rho} + a_\rho \frac{\partial a_\lambda}{\partial p_n} = 0,$$
$$\frac{\partial a_\mu}{\partial p_\rho} + a_\rho \frac{\partial a_\mu}{\partial p_n} = 0,$$

en laissant λ et μ fixes et faisant varier ρ, on en déduit

$$\frac{\dfrac{\partial a_\lambda}{\partial p_\rho}}{\dfrac{\partial a_\mu}{\partial p_\rho}} = \frac{\dfrac{\partial a_\lambda}{\partial p_n}}{\dfrac{\partial a_\mu}{\partial p_n}},$$

quel que soit ρ. Donc, deux des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pris arbitrairement et considérés comme des fonctions de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont fonctions l'un de l'autre, et l'on peut poser

$$a_1 = \varphi_1(\alpha, x_1, \ldots, x_n, z), \qquad \ldots, \qquad a_{n-1} = \varphi_{n-1}(\alpha, x_1, \ldots, x_n, z).$$

Il ne reste plus que les relations

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial p_\rho} + \varphi_\rho(\alpha) \dfrac{\partial \alpha}{\partial p_n} = 0, \\ \rho = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Écrivons

$$F(\alpha, p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, z) = \text{const.};$$

les équations (5) deviennent

$$\frac{\partial F}{\partial p_\rho} + \varphi_\rho(\alpha) \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0,$$

donc

$$F = p_n - \varphi_1(\alpha) p_1 - \ldots - \varphi_{n-1}(\alpha) p_{n-1}.$$

et l'on a l'identité

$$p_n - \varphi_1(\alpha) p_1 \ldots \varphi_{n-1}(\alpha) p_{n-1} = \psi(x_1, \ldots, x_n, z).$$

Si l'on différentie cette identité par rapport à x_i, on obtient

$$p_{ni} - a_1 p_{i1} \ldots a_{n-1} p_{in-1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial z} p_i + \sum_{\rho=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial x_i} + \frac{\partial a_\rho}{\partial z} p_i \right) p_\rho,$$

car les termes du second ordre provenant de la différentiation des a disparaissent à cause des relations (II); on a donc

$$A_{ni} = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial z} p_i + \sum_{\rho=1}^{n-1}\left(\frac{\partial a_\rho}{\partial x_i} + \frac{\partial a_\rho}{\partial z} p_i\right) p_\rho.$$

On peut résumer les résultats obtenus dans le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Tout système linéaire d'équations aux dérivées partielles du second ordre définissant une fonction z de n variables $x_1, \ldots, x_n$ dont la solution générale dépend d'une fonction arbitraire de $n - 1$ arguments peut être mis sous la forme*

$$p_{ni} = a_1 p_{i1} + a_2 p_{i2} + \ldots + a_{n-1} p_{in-1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial z} p_i + \sum_{\rho=1}^{n-1}\left(\frac{\partial a_\rho}{\partial x_i} + \frac{\partial a_\rho}{\partial z} p_i\right) p_\rho,$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} a_1 &= \varphi_1(\alpha, x_1, \ldots, x_n, z),\\ a_2 &= \varphi_2(\alpha, x_1, \ldots, x_n, z),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_{n-1} &= \varphi_{n-1}(\alpha, x_1, \ldots, x_n, z),\\ p_n - \varphi_1 p_1 - \varphi_2 p_2 \ldots &\varphi_n p_n = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z).\end{aligned}$$

2. Pour définir les multiplicités intégrales, donnons-nous une multiplicité ponctuelle à $n - 1$ dimensions, par exemple z et x_n en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, et cherchons l'orientation des éléments du premier ordre sur cette multiplicité.

On aura

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} = p_{\rho i} + p_{\rho n} \frac{\partial x_n}{\partial x_i},$$

d'où l'on déduit

$$(6)\quad \begin{cases} p_{\rho i} = \dfrac{\partial p_\rho}{\partial x_i} - \dfrac{\partial p_n}{\partial x_\rho}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i} + p_{nn}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_\rho} = \dfrac{\partial p_i}{\partial x_\rho} - \dfrac{\partial p_n}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + p_{nn}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_\rho},\\ p_{ni} = \dfrac{\partial p_n}{\partial x_i} - p_{nn}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i},\\ \qquad\qquad (i, \rho = 1, 2, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à obtenir p_n et p_{nn} en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Or, l'équation (1) donne

$$(7) \quad \frac{\partial x_n}{\partial x_i} p_{nn}\left(1+\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho}\right)=\frac{\partial p_n}{\partial x_i}-\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho\left(\frac{\partial p_\rho}{\partial x_i}-\frac{\partial p_n}{\partial x_\rho}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\right)-\mathrm{A}_{ni},$$

et de l'équation (2) on déduit

$$(8) \quad p_{nn}\left(1+\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho}\right)=\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho \frac{\partial p_n}{\partial x_\rho}+\mathrm{A}_{nn}.$$

Cette relation permet de simplifier l'équation précédente, qui devient

$$\frac{\partial p_n}{\partial x_i}-\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho \frac{\partial p_\rho}{\partial x_i}=\mathrm{A}_{ni}+\mathrm{A}_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial x_i};$$

de plus, on a

$$p_\rho=\frac{\partial z}{\partial x_\rho}-p_n\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho},$$

d'où

$$\frac{\partial p_\rho}{\partial x_i}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_\rho}-p_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_\rho}-\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho}\frac{\partial p_n}{\partial x_i}.$$

On a donc

$$(9) \quad \frac{\partial p_n}{\partial x_i}\left(1+\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho}\right)=\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_\rho}-p_n\frac{\partial^2 x_n}{\partial x_i \partial x_\rho}\right)+\mathrm{A}_{nn}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}+\mathrm{A}_{ni}.$$

Ces équations permettent de calculer p_n par des équations différentielles ordinaires; les caractéristiques sont d'ailleurs

$$-dx_n=\frac{dx_1}{a_1}=\frac{dx_2}{a_2}=\ldots=\frac{dx_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{dz}{\psi}=\frac{dp_\rho}{\mathrm{A}_{\rho n}}.$$

Il y a exception si la relation suivante est vérifiée

$$(10) \quad 1+\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho}=0.$$

On a, en outre,

$$\frac{\partial z}{\partial x_\rho}=p_\rho+p_n\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho},$$

d'où

$$\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho \frac{\partial z}{\partial x_\rho} = \sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho p_\rho + p_n \sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho},$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (10) et des conditions d'intégrabilité,

$$\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho \frac{\partial z}{\partial x_\rho} + \psi(x_1, \ldots, x_n, z) = 0.$$

Les fonctions a_ρ renferment $p_1, p_2, \ldots, p_n$; si l'on remplace p_ρ par $\frac{\partial z}{\partial x_n} - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho}$, on aura

$$\overline{a_\rho}\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1} - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} - p_{n-1} \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}, p_n\right).$$

Nous allons voir que p_n ne figure pas dans ces expressions. On a, en effet,

$$\frac{\partial \overline{a_\rho}}{\partial p_n} = -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial a_\rho}{\partial p_j} \frac{\partial x_n}{\partial x_j} + \frac{\partial a_\rho}{\partial p_n};$$

or, des conditions (II), on déduit

$$\frac{\partial a_\rho}{\partial p_j} = -a_j \frac{\partial a_\rho}{\partial p_n},$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \overline{a_\rho}}{\partial p_n} = 0.$$

Les deux équations suivantes

$$1 + \sum_{\rho=1}^{n-1} \overline{a_\rho} \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} = 0,$$

$$\psi + \sum_{\rho=1}^{n-1} \overline{a_\rho} \frac{\partial z}{\partial x_\rho} = 0,$$

qui sont du premier ordre en z et x_n, fournissent donc les multiplicités singulières à $n-1$ dimensions.

Il y aura indétermination dans le calcul de p_n et p_{nn}, si l'on a

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
&1+\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho \frac{\partial x_n}{\partial x_\rho}=0,\\
&\frac{\partial z}{\partial x_\rho}=p_\rho+p_n\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho},\\
&\frac{\partial p_n}{\partial x_i}-\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho\left(\frac{\partial p_\rho}{\partial x_i}-\frac{\partial p_n}{\partial x_\rho}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\right)-A_{ni}=0,\\
&\sum_{\rho=1}^{n-1}\frac{\partial p_n}{\partial x_\rho}a_\rho+A_{nn}=0;
\end{aligned}
$$

or, on a, d'après l'équation (6)

$$\frac{\partial p_\rho}{\partial x_i}-\frac{\partial p_n}{\partial x_\rho}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}=\frac{\partial p_i}{\partial x_\rho}-\frac{\partial p_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho},$$

et l'équation (11) devient

$$\frac{\partial p_n}{\partial x_i}-\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_\rho}-\frac{\partial p_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho}\right)-A_{ni}=0,$$

de sorte que les conditions sont finalement

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x_\rho}=p_\rho+p_n\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho},\\
&1+\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho}=0,\\
&\sum_{\rho=1}^{n-1} a_\rho\frac{\partial p_i}{\partial x_\rho}+A_{ni}=0\\
&(i=1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

On voit sous cette forme que les multiplicités singulières sont engendrées par les caractéristiques du système proposé; pour les obtenir, on considérera une multiplicité d'éléments unis du premier ordre à $n-2$ dimensions, susceptibles de porter des éléments unis d'ordre p, vérifiant le système étudié, et l'on fera passer par chaque élément de cette multiplicité une caractéristique.