ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. DESAINT

Sur quelques points de la théorie des fonctions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 311-378
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__311_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR QUELQUES POINTS

DE LA

THÉORIE DES FONCTIONS,

PAR M. L. DESAINT.

PRÉFACE.

Dans la première Partie de ce travail, j'étudie la distribution des zéros d'une fonction. C'est une façon d'aborder le problème général de la résolution des équations. Je ne me suis pas proposé de déterminer point par point leurs racines; ce problème est beaucoup trop difficile à résoudre; mais je limite les régions du plan de la variable complexe où une fonction peut s'annuler. Le cas d'un polynome à racines réelles est un des rares exemples où l'on soit parvenu à trouver par point les zéros d'une fonction; si certaines racines d'un tel polynome sont commensurables, celles-ci s'obtiennent immédiatement; quant aux racines incommensurables, pour les avoir on procède ainsi : la valeur de la racine cherchée est enserrée entre deux nombres commensurables, l'un a plus grand, l'autre b plus petit qu'elle; considérons le segment $\overline{ab}$ de l'axe des quantités réelles et à chaque zéro faisons correspondre un segment analogue; l'ensemble E de ces segments représente la précision avec laquelle on a résolu l'équation; à notre point de vue E limite la région du plan où sont les racines du polynome. Dans l'exemple cité, la région linéaire E s'approche autant qu'on le veut d'une région ponctuelle; analytiquement ce résultat est parfait; mais, dès que la fonction dont on étudie les zéros se complique légèrement, non seulement on ne peut approcher d'une région ponctuelle, mais encore il est impossible de déterminer une région linéaire à l'extérieur de laquelle la fonction ne s'annule pas. En un mot, $F(z)$ étant une fonction uniforme quelconque, on ne peut fixer une région

du plan, qui ne soit pas tout le plan, et qui contienne tous les zéros possibles de $F(z)$.

Je viens de signaler l'insuffisance des résultats auxquels on est arrivé jusqu'ici dans le problème qui m'occupe; il faut en chercher la raison dans la méthode presque toujours exclusivement analytique qu'on employait, quand, d'après la nature même du problème de la distribution, l'élément géométrique devait jouer un si grand rôle; la définition de la zone des zéros peut d'ailleurs se faire de bien des façons; comme nous le verrons dans le cours de ce travail, on arrive à des résultats d'une grande simplicité en rapportant la position des zéros à l'ensemble des discontinuités; dans le problème général de *la distribution des valeurs de la variable qui font prendre à une fonction une valeur donnée*, nous retrouverons, comme élément géométrique fondamental, cette même région de discontinuités. Ce résultat n'a rien de surprenant si l'on considère que les fonctions ne se différencient véritablement que par la position et la nature de leurs singularités; les points singuliers constituent à un certain point de vue l'essence des fonctions, et si l'on veut aller un peu loin dans leur théorie, il faut employer une méthode qui rattache avec simplicité le problème visé, à la connaissance de l'ensemble des discontinuités.

Dans le premier Chapitre, j'expose la méthode géométrique dont je fais usage; elle repose sur les considérations suivantes: soit un ensemble de segments F partant du point z; si ces segments sont tous situés au-dessus d'une droite D, le segment résultant est essentiellement différent de zéro et se trouve au-dessus de D. J'applique cette remarque aux séries de fractions rationnelles, ce qui me conduit à un théorème fondamental, dont je fais l'application aux racines d'un polynome, aux fonctions algébriques et aux zéros des fonctions uniformes à discontinuités polaires; parmi ces dernières se trouvent les dérivées logarithmiques des fonctions entières, ce qui me mène à l'étude de la comparaison des zéros des fonctions entières et de leur dérivée; les premiers travaux, dus à M. Félix Lucas, ont été suivis des recherches de MM. Berloty [1] et Cesaro [1]; je complète celles-ci par quelques propositions.

---

[1] *Sur les fonctions holomorphes de genre quelconque* (*Comptes rendus*, t. XCIX).

Le second Chapitre vise les fonctions déterminées par des intégrales définies portant sur une fraction rationnelle de z; je présente un théorème dont je fais l'application aux intégrales elliptiques et hyperelliptiques ainsi qu'aux intégrales hypergéométriques.

Dans la seconde Partie, le théorème de Cauchy me permet d'utiliser les propositions précédentes, pour donner une solution du problème de la distribution des valeurs de la variable qui font prendre à une fonction uniforme une valeur donnée.

Un grand nombre de travaux de l'Analyse ont été consacrés à cette question : *Une fonction étant donnée par ses valeurs sur un contour, trouver sa valeur u en un point z quelconque.*

Le problème qui nous occupe : *une fonction est donnée par ses valeurs le long d'un contour; trouver les valeurs de la variable qui lui font prendre la valeur u*, peut être considéré comme l'inverse du précédent, et ce titre le rend intéressant. J'appellerai en particulier l'attention sur cette proposition : soit $F(z)$ une fonction uniforme pour laquelle l'infini est point ordinaire; traçons un cercle C qui entoure toutes les discontinuités de $F(z)$ et d'ailleurs aussi rapproché qu'on le veut du contour convexe de surface minima entourant ces points; désignons par M le module maximum de $F(z)$ sur le cercle C de rayon R; les valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ prend la valeur u sont à l'intérieur d'un cercle Γ concentrique à C de rayon $R\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|A-u|}\right)$.

De là se déduit avec facilité un théorème général sur la continuité des fonctions.

La seconde Partie se termine par une étude des fonctions entières et des intégrales des équations différentielles, et par l'esquisse très sommaire d'une classification polaire des fonctions à m valeurs d'exclusion.

Un certain nombre des résultats de cette étude ont été insérés dans les *Comptes rendus de l'Académie*.

Qu'il me soit permis, ici, de remercier M. Poincaré pour le bienveillant accueil qu'il a fait à mes recherches et de lui exprimer ma profonde reconnaissance.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LA DISTRIBUTION DES ZÉROS DES FONCTIONS UNIFORMES.

CHAPITRE I.

La méthode géométrique dont je me sers pour démontrer les théorèmes qui vont suivre est fondée sur la remarque suivante : étant donné un ensemble de segments F partant d'un point z, si ces segments sont tous situés au-dessus d'une droite D, le segment résultant est essentiellement différent de zéro et se trouve au-dessus de D. Considérons alors une série de fonctions de z; à chaque valeur de la variable faisons correspondre un segment, qui est la représentation géométrique de la valeur d'une fonction de cette série, l'origine du segment étant la valeur considérée de la variable; on définira ainsi un ensemble de droites dont la résultante est la représentation géométrique de la valeur de la fonction déterminée par la somme des termes de la série pour la valeur donnée à z. La proposition qui suit est ainsi immédiate :

Une fonction $f(z)$ de la variable complexe est définie par la série

$$f(z) = \sum_n \varphi_n(z),$$

la série des modules étant convergente. Si R *est une région du plan des z où la variation de l'argument de $\varphi_n(z)$ est inférieure à π lorsque n varie, la fonction $f(z)$ ne peut s'annuler qu'en dehors de cette région.*

Dans ce premier Chapitre, je supposerai que les fonctions $\varphi_n(z)$ sont des fractions rationnelles; sous deux conditions très simples, la proposition qui précède permettra, avec la plus grande facilité, de limiter les régions du plan de la variable où une fonction $f(z)$ peut s'annuler.

D'après la nature des zéros et des pôles des fractions ration-

nelles $\varphi_n(z)$, deux cas bien distincts vont se présenter : tout d'abord ces zéros et ces pôles sont à distance finie et, le plus souvent, $f(z)$ présentera des lignes ou des espaces de discontinuité; nous considérerons ensuite le cas où les pôles et les zéros des fonctions $\varphi_n(z)$ tendent vers la même limite à l'infini lorsque n augmente indéfiniment. Nous étudierons d'une façon spéciale le premier cas et voici, à ce sujet, le thorème fondamental :

1. Théorème I. — *Soit $f(z)$ une fonction définie par la série*

$$f(z) = \sum_{m,n,\ldots,s} \frac{A_{kk'}(z-a_1)\ldots(z-a_k)}{(z-b_1)\ldots(z-b_{k'})},$$

où $A_{kk'}, a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ sont des quantités variables avec les entiers $m, n, \ldots, s$; $A_{kk'}$ est réel et garde un signe constant quand $m, n, \ldots s$, prennent toutes les valeurs de la série, la différence $k - k'$ étant la même pour toutes les fractions rationnelles; de plus, tous les points $a_1 a_2 \ldots a_k$ $b_1 b_2 \ldots b_{k'}$ sont à distance finie; considérons le cercle C (de rayon R) de surface minima entourant tous les pôles et les zéros des termes de la série $f(z)$; les zéros de $f(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle concentrique au cercle C, de rayon $\dfrac{R}{\sin\dfrac{\pi}{2(k+k')}}$, où $k + k'$ est la plus forte somme des degrés des dénominateurs et numérateurs respectifs des fractions rationnelles de la série.

Voici la démonstration de ce théorème : appelons λ et λ' les valeurs les plus grandes respectivement de k et de k'; puisque $k - k'$ est constant pour toutes les fractions rationnelles, λ et λ' seront les degrés du numérateur et du dénominateur d'une fraction rationnelle de $f(z)$. Rendons alors les degrés des numérateurs et dénominateurs des fractions respectivement égaux à λ et λ'; pour cela, multiplions les deux termes de chaque fraction $\varphi(z)$ par les mêmes binomes $(z - \gamma)$ où les quantités γ sont prises d'une façon quelconque parmi les zéros a et les pôles b.

Entourons tous ces points a et b du cercle C; en dehors de ce cercle, cherchons la région du plan des z dans laquelle la variation de l'argument des fractions rationnelles, lorsque $m, n, \ldots, s$ varient, soit infé-

rieure à π; à cet effet, du point z menons les deux tangentes au cercle C; les deux points de contact étant c_1 et c_2, supposons que l'argument de $\overrightarrow{c_1 z}$ soit plus grand que l'argument de $\overrightarrow{c_2 z}$, ces deux arguments étant d'ailleurs positifs et inférieurs à 2π. Géométriquement, l'on voit que la plus grande variation de l'argument d'un des binomes $z - a$ ou $z - b$, lorsque $m, n, \ldots, s$ varient, est inférieure, en valeur absolue, à l'angle α des deux tangentes. Comparons alors les arguments des numérateurs et dénominateurs des fractions rationnelles $\varphi(z)$ de $f(z)$ aux termes correspondants de la fraction $\frac{A_{\lambda\lambda'}(z-c_1)^\lambda}{(z-c_2)^{\lambda'}}$; la différence absolue maxima entre l'argument du numérateur de chaque fraction $\varphi(z)$ et l'argument de $A_{\lambda\lambda'}(z-c_1)^\lambda$ est certainement inférieure à $\lambda\alpha$; de même, cette différence pour l'argument du dénominateur de chaque fraction $\varphi(z)$ et l'argument de $(z-c_2)^{\lambda'}$ est certainement plus petite que $\lambda'\alpha$; par suite, la différence maxima absolue entre l'argument de chaque fraction rationnelle $\varphi(z)$ et l'argument ω de $\frac{A_{\lambda\lambda'}(z-c_1)^\lambda}{(z-c_2)^{\lambda'}}$ est $(\lambda+\lambda')\alpha$. Or, d'après la position des tangentes l'une par rapport à l'autre, les arguments des fractions rationnelles de $f(z)$ sont inférieurs à l'argument de $\frac{A_{\lambda\lambda'}(z-c_1)^\lambda}{(z-c_2)^{\lambda'}}$, en prenant, comme nous le supposons dans toute cette démonstration, pour les arguments de $z-a$ et $z-b$, des quantités comprises entre les arguments choisis pour $z-c_2$ et $z-c_1$. Si donc, $\theta_1, \ldots, \theta_i$ sont les arguments des diverses fonctions rationnelles $\varphi(z)$, les différences $\omega-\theta_1, \ldots, \omega-\theta_z$ sont toutes positives et leur différence maxima est $(\lambda+\lambda')\alpha$; il suffira ainsi de prendre z dans une région pour laquelle $(\lambda+\lambda')\alpha$ soit inférieure à π pour que $\theta_1, \ldots, \theta_i$ diffèrent entre eux de moins de π; or, la courbe sur laquelle on a $(\lambda+\lambda')\alpha = \pi$ est un cercle Γ concentrique à C, de rayon $\frac{R}{\sin\frac{\pi}{2(\lambda+\lambda')}}$; comme $\lambda+\lambda'$ est la plus forte valeur de $k+k'$, et que, en dehors de Γ, l'on a $(\lambda+\lambda')\alpha < \pi$, d'après la proposition qui est en tête de ce Chapitre, les zéros de $f(z)$ sont à l'intérieur du cercle Γ de rayon $\frac{R}{\sin\frac{\pi}{2(\lambda+\lambda')}}$ où $\lambda+\lambda'$ est la plus forte somme des degrés des dénominateurs et numérateurs respectifs des fractions

rationnelles de la série $f(z)$, ce qui démontre le théorème. Nous allons maintenant présenter plusieurs importantes applications de ce théorème, aux fonctions algébriques et aux surfaces d'intégration des intégrales doubles.

2. Tout d'abord, étant donné un polynome, proposons-nous de limiter, dans le plan de la variable, les régions où ce polynome peut s'annuler. J'énoncerai à ce sujet la proposition qui suit :

THÉORÈME II. — *Étant donné le polynome*

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_p z^{n-p} + \ldots + A_n,$$

si p est la valeur de k pour laquelle $\sqrt[k]{\frac{|A_k| n}{|A_0|}}$ prend sa plus grande valeur quand k varie entre 1 et n, $|A_k|$ et $|A_0|$ étant les modules de A_k et A_0, les racines de $f(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon $\dfrac{\sqrt[p]{\frac{|A_p| n}{|A_0|}}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.

Remarquons, en effet, que, A_0 ayant une valeur finie, les zéros du polynome $f(z)$ satisfont à l'équation

$$z^n + \frac{A_1}{A_0} z^{n-1} + \ldots + \frac{A^p}{A_0} z^{n-p} + \ldots + \frac{A_n}{A_0} = 0,$$

et encore à cette autre équation

$$\varphi(z) = n z^n + \frac{n A_1}{A_0} z^{n-1} + \ldots + \frac{n A_p}{A_0} z^{n-p} + \ldots + \frac{n A_n}{A_0} = 0,$$

qui peut s'écrire, d'ailleurs,

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(z^n + \frac{n A_k}{A_0} z^{n-k} \right) = 0.$$

Or, d'après le théorème général qui précède, les zéros de $\varphi(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle Γ concentrique au cercle C de surface minima entourant les zéros des polynomes $z^n + \frac{n A_k}{A_0} z^{n-k}$ quand k prend toutes

les valeurs de 1 à k. Or, les zéros de $z^n + \frac{n A_k}{A_0} z^{n-k}$ sont : 1° l'origine comme racine d'ordre $n-k$; 2° k points situés sur un cercle de rayon $\sqrt[k]{\frac{|A_k| n}{|A_0|}}$. Par suite, nous prendrons pour C un cercle concentrique à l'origine, de rayon infiniment peu différent de $\sqrt[p]{\frac{|A_p| n}{|A_0|}}$ (mais supérieur), si c'est p la valeur de k pour laquelle $\sqrt[k]{\frac{|A_k| n}{|A_0|}}$ prend sa plus grande valeur. Le cercle Γ, d'après le théorème fondamental, différera infiniment peu du cercle Γ' de rayon $\frac{\sqrt[p]{\frac{|A_p| n}{|A_0|}}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$ et concentrique à l'origine. Le théorème II est, par suite, immédiat.

Nous allons tirer, de ce théorème II, une proposition sur les fonctions algébriques d'une et de plusieurs variables. Supposons, en effet, que, dans le théorème précédent, $A_0, A_1, \ldots, A_k$ soient des polynomes dépendant d'une certaine variable complexe; lorsque cette variable décrit un circuit C, la quantité $\sqrt[k]{\frac{|A_k| n}{|A_0|}}$ atteindra sa valeur maxima pour une valeur z_0 de la variable qui entre dans les coefficients et pour une valeur $k = p$ de k; nous sommes donc conduits au théorème suivant sur les fonctions algébriques :

THÉORÈME III. — *Soit une fonction algébrique u de la variable définie par*

$$u^n + \varphi_1(z) u^{n-1} \ldots + \varphi_p(z) u^{n-p} \ldots + \varphi_n(z) = 0,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \ldots, \varphi_n$ sont des fractions rationnelles de z; quand z décrit dans son plan le circuit C *ne rencontrant aucun pôle de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, le radical $\sqrt[k]{|\varphi_k| n}$ atteint sa valeur maxima pour $z = z_0$ et $k = p$, z_0 étant un point de* C. *Les circuits décrits par la fonction algébrique u sont à l'intérieur du cercle Γ concentrique à l'origine et de rayon $\frac{\sqrt[p]{|\varphi_1(z_0)| n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.*

La démonstration employée pour prouver ce théorème nous conduit immédiatement d'ailleurs à la généralisation suivante :

THÉORÈME IV. — *Soit une fonction algébrique u des variables $x, y, \ldots, z$, définie par l'équation*

$$u^n + \ldots + \varphi_p(x, y, z)\, u^{n-p} + \ldots + \varphi_n(x, y, z) = 0,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \ldots, \varphi_n$ sont des fractions rationnelles en x, y, z, lorsque (x, y, z) décrit dans l'espace à $2r$ dimensions (r étant le nombre des variables $x, y, \ldots, z$) un continuum C ne rencontrant aucune discontinuité de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, le radical $\sqrt[k]{|\varphi_k(x, y, \ldots, z)|\, n}$ atteint sa plus grande valeur pour $x = x_0$, $y = y_0$, $\ldots$, $z = z_0$ et $k = p$ où $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ est un point du continuum C; les circuits décrits par la fonction algébrique u dans le plan de ses valeurs sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon $\dfrac{\sqrt[p]{|\varphi_k(x_0, y_0, \ldots, z_0)|\, n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.

Ici les circuits décrits par u pourront former une aire, si le continuum a plus d'une dimension dans l'espace à $2r$ dimensions, ce qui n'avait pas lieu lorsque les fonctions dépendaient seulement d'une variable. Voici la dernière généralisation que je présente du théorème sur les zéros d'un polynome :

THÉORÈME V. — *La fonction u des variables $x, y, \ldots, z$ est définie par l'équation*

$$u^n + \ldots + G_p(x, y, \ldots, z)\, u^{n-p} + \ldots + G_n(x, y, z) = 0,$$

où $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sont des fonctions uniformes de $x, y, \ldots, z$; quand le point $x, y, \ldots, z$ décrit dans l'espace à $2r$ dimensions (r étant le nombre de variables $x, y, \ldots, z$) un continuum C ne rencontrant aucune discontinuité des fonctions $G_1, G_2, \ldots, G_p$, le radical $\sqrt[k]{|G_k(x, y, \ldots, z)|\, n}$ atteint sa plus grande valeur pour $x = x_0$, $y = y_0$, $\ldots$, $z = z_0$ et $k = p$ où $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ est un point du continuum C; les aires ou les circuits décrits par la fonction u dans le plan de ses valeurs sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon $\dfrac{\sqrt[p]{|G_p(x_0, y_0, z_0)|\,(n+1)}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.

Nous allons appliquer le théorème IV, dans le cas où $r = 2$, à une

question d'intégrales doubles relative à deux variables complexes. Considérons, en effet, l'intégrale double $\int\int \frac{P(x,y)\,dx\,dy}{Q(x,y)}$ où $Q(x,y)$ est un polynome suivant l'une des deux variables, l'intégrale étant étendue à une surface dans l'espace à quatre dimensions. Comment pouvons-nous déformer cette surface sans que l'intégrale change de valeur lorsque $P(x, y)$ est holomorphe en x et y, $Q(x,y)$ étant un polynome en x et une fonction uniforme en y. Pour répondre à cette question nous nous appuierons tout d'abord sur cette proposition, établie dans toute sa généralité par M. Picard, que l'on peut déformer la surface d'intégration sans rencontrer le continuum $Q(x,y) = 0$, de façon que la surface déformée corresponde à l'ensemble de deux courbes, l'une sur laquelle se déplace y, l'autre étant un circuit sur lequel x prend ses valeurs. Soit C la courbe lieu de y et C′ la courbe lieu de x. Nous allons maintenant raisonner sur le continuum (CC′); nous fixons la courbe C lieu de y et nous cherchons les déformations de C′ qui n'altèrent pas la valeur de l'intégrale. Or, d'après le théorème IV, y variant sur C, le polynome en x, $Q(x,y)$, étant mis sous la forme

$$Q(x,y) = x^n\varphi_0(y) + x^{n-1}\varphi_1(y) + \ldots + x^{n-p}\varphi_p(y) + \ldots + \varphi_n(y),$$

les valeurs de x qui annulent $Q(x, y)$ sont sur des courbes situées à l'intérieur du cercle Γ concentrique à l'origine des x, son rayon étant $\dfrac{\sqrt[p]{\dfrac{|\varphi_p(y_0)|\,n}{|\varphi_0(y_0)|}}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}$, où y_0 est un point de C qui, avec la valeur p de k, détermine le maximum du radical $\dfrac{\sqrt[k]{\dfrac{|\varphi_k(y)|\,n}{|\varphi_0(y)|}}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}$.

La courbe C étant laissée fixe, plusieurs cas se présenteront dans la transformation du contour C′ :

1° C′ est complètement en dehors de Γ; alors l'intégrale double est nulle;

2° C′ empiète sur l'aire du cercle Γ. Nous supposerons, comme cela se passe dans le cas général, que C′ ne soit pas tangente à Γ. Les deux

courbes C′ et Γ étant fermées se rencontrent en un nombre pair de points à distance finie; soit 2μ ce nombre. Marchons alors sur Γ dans un sens déterminé; nous rencontrerons les points d'intersection dans l'ordre $A_1A_2, \ldots, A_{2\delta-1}A_{2\delta}, \ldots, A_{2\mu-1}A_{2\mu}$; nous voyons immédiatement que nous pourrons remplacer C′ par la courbe obtenue en fermant la portion intérieure de C′ dans Γ par les μ arcs $\overline{A_1A_2}, \ldots, \overline{A_{2\delta}A_{2\delta-1}}, \ldots, \overline{A_{2\mu-1}A_{2\mu}}$. Si en marchant sur Γ dans le sens direct (l'aire du cercle à gauche) les points A se présentent dans l'ordre $A_1A_2, \ldots, A_{2\mu}$, le contour C′ étant aussi décrit dans le sens direct (l'aire de C à gauche), nous remplacerons C′ par la portion intérieure de C (décrite dans le sens choisi pour C) fermée par les μ arcs $\overline{A_1A_2}, \ldots, \overline{A_{2\delta-1}A_{2\delta}}, \ldots, \overline{A_{2\mu-1}A_{2\mu}}$ parcourus, relativement au cercle Γ, dans le sens direct.

Si la courbe C′ était complètement intérieure à Γ, notre théorème sur les fonctions algébriques ne permettrait pas de simplifier la surface d'intégration.

3. Après avoir étudié la distribution des zéros d'un polynome et tiré quelques conséquences pour la théorie des fonctions algébriques d'une ou plusieurs variables, je reprends la question de la détermination des zéros d'une fonction uniforme dans le cas où les points singuliers sont à distance finie. Voici à ce sujet une première proposition :

Théorème VI. — *Soit* $F(z)$ *une fonction uniforme dont tous les points singuliers* a_n *sont à distance finie, cette fonction ne pouvant admettre comme points singuliers essentiels que les limites des pôles, de telle sorte qu'on peut l'écrire*

$$F(z) = A_0 + \sum_{n}^{n=\infty} \sum_{\mu}^{\mu=m_n} \frac{A_n^{(\mu)}}{(z-a_n)^{\mu}},$$

où a_n *est un pôle de degré* m_n *de multiplicité, la série* $\Sigma|A_n^{(\mu)}|$ *étant supposée convergente. Si le radical* $\sqrt[\mu]{\frac{\Sigma|A_n^{\mu}|}{|A_0|}}$ *atteint sa plus grande valeur pour* $\mu = k$, C *désignant un cercle (de surface minima entourant les pôles* a_n*) de rayon* R, *les zéros de* $F(z)$ *sont à l'intérieur du cercle* Γ *con-*

centrique à C *et de rayon* $\dfrac{R + \sqrt[k]{\dfrac{\Sigma|A_n^\mu|}{|A_0|}}}{\sin\dfrac{\pi}{4m_0}}$, m_0 *étant le plus grand degré de multiplicité des pôles.*

Reprenons, en effet, la série qui définit $F(z)$

$$F(z) = A_0 + \sum \frac{A_n^\mu}{(z - a_n)^\mu}.$$

Les zéros de $F(z)$ sont ainsi déterminés par l'équation

$$A_0 + \sum \frac{A_n^{(\mu)}}{(z - a_n)^\mu} = 0,$$

qui peut encore s'écrire

$$\sum |A_n^{(\mu)}| + \sum \frac{\dfrac{\delta A_n^{(\mu)}}{A_0}}{(z - a_n)^\mu} = 0,$$

où nous avons posé $\delta = \Sigma |A_n^\mu|$.

L'équation précédente se transforme définitivement en celle-ci

$$\sum \frac{|A_n^\mu| \left[(z - a_n)^\mu \pm \dfrac{\Sigma |A_n^\mu|}{A_0} \right]}{(z - a_n)^\mu} = 0.$$

Dans la série de fractions rationnelles du premier membre, les conditions d'application du théorème I sont satisfaites. Les pôles de ces fractions rationnelles sont les points a_n; leurs zéros sont déterminés par l'équation

$$(z - a_n)^\mu \pm \frac{\Sigma |A_n^\mu|}{A_0} = 0;$$

elles sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à a_n et de rayon $\sqrt[\mu]{\dfrac{\Sigma |A_n^\mu|}{|A_0|}}$.

De là résulte immédiatement, d'après le premier théorème, la démonstration du théorème que nous avons en vue.

Si A_0 était nul, la proposition qui précède ne présenterait aucun intérêt; il faut imposer de nouvelles conditions à $F(z)$ pour obtenir,

par la méthode employée, des renseignements sur la position de ses zéros. Voici la proposition qui répond au cas de A_0 nul :

THÉORÈME VII. — *Une fonction uniforme* $F(z)$ *régulière et s'annulant à l'infini, n'a que des discontinuités polaires* a_n (*sauf peut-être aux limites des pôles*), *d'un degré* m_n *de multiplicité ; elle est représentée par la série*

$$F(z) = \sum_{n}^{n=\infty} \sum_{\mu}^{\mu=m_n} \frac{A_n^{(\mu)}}{(z-a_n)^{\mu}},$$

la série $\Sigma |A_n^{\mu}|$ *étant convergente. Si les résidus des pôles sont tous différents de zéro et ont même argument,* C *étant un cercle* (*de rayon* R) *de surface minima qui entoure tous les pôles* a_n *et les zéros des parties principales relatives à ces pôles, les zéros de* $F(z)$ *sont à l'intérieur d'un cercle* Γ *concentrique à* C, *de rayon* $\dfrac{R}{\sin\dfrac{\pi}{2(2m-1)}}$, *où* m *est l'ordre de multiplicité le plus élevé des pôles.*

Remarquons, à cet effet, que $F(z)$ peut s'écrire

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} P_n(z),$$

où P_n désigne la partie principale du pôle a_n, fraction rationnelle qui s'écrit

$$P_n(z) = \frac{A'_n(z-a_n)^{m-1} + \ldots + A_n^{(m-1)}(z-a_n) + A_n^m}{(z-a_n)^m}.$$

Or, lorsque n varie, les résidus A'_n sont des quantités imaginaires de même argument θ; en faisant sortir $e^{i\theta}$ du signe Σ, on a une série de fractions qui satisfont aux conditions d'application du théorème I, ce qui achève la démonstration du théorème.

Lorsque le degré m_n de multiplicité des pôles est l'unité, on peut donner de la région des zéros une définition intéressante et très simple dans ses rapports avec la région des discontinuités de la fonction. La proposition qui vise le cas de $m = 1$ s'énonce ainsi :

COROLLAIRE. — *Si une série à termes réels de signe constant* ΣA_n, *est*

convergente, la fonction $F(z)$, *définie par l'identité*

$$F(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n},$$

a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant les points a_n.

En effet, entourons les points a_n d'un contour convexe quelconque C; d'après un raisonnement complètement analogue à celui que nous avons employé dans la démonstration du théorème I, il ne peut y avoir de zéros de $F(z)$ à l'extérieur du contour C′, lieu des points d'où C est vu sous un angle π; ce contour C′ est C lui-même.

Nous allons appliquer ce corollaire à l'étude de certaines fonctions étudiées par MM. Poincaré et Homèn. Auparavant, faisons cette remarque : en dehors de l'ensemble G des points a_n, la fonction $F(z)$ est holomorphe; on peut aller plus loin : les zéros de $F(z)$ étant à l'intérieur d'un contour convexe quelconque C entourant G, la fonction ne s'annule pour aucune valeur finie de la variable en dehors de C; $F(z)$ est donc représentable par $e^{\theta(z)}$, où $\theta(z)$ est holomorphe en dehors de tout contour convexe entourant les points a_n.

Je considère d'abord les fonctions de M. Poincaré [1] :

$$F(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\alpha^m \beta^n \gamma^p}{z - \dfrac{ma + nb + pc}{m + n + p}},$$

$$F(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \cdots \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\alpha^m \beta^n \gamma^p \ldots \lambda^s}{z - \dfrac{ma + nb + \ldots + sl}{m + n + \ldots + l}},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sont des quantités réelles comprises entre 0 et 1.

M. Poincaré a établi que ces séries représentaient des fonctions bien déterminées de la variable z, sauf dans les régions respectives définies par le triangle (abc) et le polygone convexe $(abc\ldots l)$, qui sont pour ces fonctions des espaces lacunaires; or, d'après le corollaire du théorème VII, les fonctions $F(z)$ ne peuvent s'annuler, en dehors du triangle ou du polynome convexe, que pour des valeurs infinies de z.

---

[1] *Acta Societatis Scientiarum fennicæ*, t. XII.

La forme générale de ces fonctions à espace lacunaire est donc $e^{\theta(z)}$, où $\theta(z)$ est holomorphe en dehors de l'espace lacunaire correspondant; cette propriété rattache entre elles les séries considérées de M. Poincaré.

En second lieu, dans le même ordre d'idées, examinons la distribution des zéros de la fonction de M. Homèn, définie par l'identité

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m=n} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{u_1^n u_2^p u_3^m}{z - z_1 - t_1 \frac{p}{n} e^{\frac{m}{n} 2\pi i}}$$

où u_1, u_2, u_3 sont des quantités réelles, positives, inférieures à 1, et t_1 une quantité réelle positive.

La fonction $F(z)$, ainsi déterminée, admet le cercle C_1 de centre z_1, de rayon t_1 comme espace lacunaire; d'après le corollaire précédent, elle ne peut s'annuler en dehors du cercle lacunaire. La forme de $F(z)$ est donc $e^{\theta(z)}$, où $\theta(z)$ est holomorphe en dehors de l'espace lacunaire correspondant à $F(z)$; quand u_1, u_2, u_3, t_1 varient sous les conditions rappelées plus haut, les fonctions $F(z)$, ainsi déterminées, sont rattachées par la forme $\theta(z)$, qui leur est commune.

4. Dans les paragraphes qui précèdent, nous avons limité la position possible des zéros de polynomes et de fonctions régulières à l'infini, ayant un nombre quelconque de pôles à distance finie; nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'étudier les zéros de fonctions uniformes n'ayant à distance finie et à l'infini que des discontinuités polaires, l'infini n'étant pas limite de discontinuités. Je donnerai, à ce sujet, le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Soit* $F(z)$ *une fonction uniforme pour laquelle l'infini est pôle d'ordre* p *sans être limite de discontinuités, les singularités à distance finie étant toutes polaires (sauf peut-être aux limites des pôles où elles peuvent être essentielles), de telle sorte qu'on ait cette identité*

$$F(z) = A_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_k z^{p-k} + \ldots + B_n + \sum_{n=1,\, \mu=1}^{n=\infty,\, \mu=m,} \frac{A_n^{(\mu)}}{(z - a_n)^{\mu}},$$

où a_n est un pôle d'ordre m_n, la série $\Sigma|A_n^\mu|$ étant convergente. Si R *est la plus grande des quantités*

$$|a_n|,\quad \frac{\sqrt[k]{\frac{|B_k|[1+\Sigma|A_n^\mu|]p}{|A_0|}}}{\sin\frac{\pi}{2p}},\quad \frac{|a_n|\sqrt[i]{\frac{\mu\ldots(\mu-i+1)}{1,2,\ldots,i}}}{\sin\frac{\pi}{2(\mu+p)}},\quad \frac{\sqrt[\mu+p]{\frac{1+\Sigma|A_n^\mu|}{|A_0|}}}{\sin\frac{\pi}{2(\mu+p)}}$$

lorsque k varie entre 1 *et p, i entre* 1 *et m_n, n entre* 1 *et ∞, les zéros de* $F(z)$ *sont à l'intérieur d'un cercle* T *concentrique à l'origine et de rayon* $\dfrac{R}{\sin\frac{\pi}{2(2M+p)}}$, M *étant l'ordre de multiplicité le plus élevé.*

Considérons la série qui définit $F(z)$

$$F(z)=A_0z^p+B_1z^{p-1}+\ldots+B_kz^{p-k}+\ldots+B_p+\sum_{n=1,\,\mu=1}^{n=\infty,\,\mu=m_n}\frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu}.$$

Les zéros de $F(z)$ sont déterminés par l'équation

$$A_0z^p+B_1z^{p-1}+\ldots+B_kz^{p-k}+\ldots+\sum\frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu}=0,$$

que nous écrirons

$$[1+\Sigma|A_n^\mu|]z^p+\frac{B_1\delta z^{p-1}}{A_0}+\ldots+\frac{B_k\delta z^{p-k}}{A_0}+\ldots+\frac{B_p\delta}{A_0}+\sum\frac{\frac{A_n^\mu\delta}{A_0}}{(z-a_n)^\mu}=0$$

avec

$$\delta=1+\Sigma|A_n^\mu|.$$

L'équation précédente se transforme définitivement en celle-ci :

$$(1)\qquad z^p+\ldots+\frac{B_k\delta z^{p-k}}{A_0}+\ldots+\frac{B_p\delta}{A_0}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(|A_n^\mu|z^p+\frac{A_n^\mu\delta}{A_0(z-a_n)^\mu}\right)=0.$$

Le polynome et les fractions rationnelles du premier membre satisfont aux conditions du théorème I. La différence des degrés des numérateurs et dénominateurs respectifs est p, le rapport des termes de degré le plus élevé dans les termes correspondants étant un nombre réel positif, 1 ou $|A_n^\mu|$. Il nous reste donc à étudier les zéros du poly-

nome et des fractions rationnelles du premier membre de l'équation (1).

Les zéros du polynome

$$f(z) = z^p + \ldots + \frac{B_k \delta z^{p-k}}{A_0} + \ldots + \frac{B_p \delta}{A_0}$$

sont, d'après le théorème II, à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et dont le rayon est la plus grande des quantités

$$\frac{\sqrt[k]{\frac{|B_k|(1+\Sigma|A_n^\mu|)p}{A_0}}}{\sin\frac{\pi}{2p}},$$

lorsque k prend toutes les valeurs entières entre 1 et p.

La fraction rationnelle

$$|A_n^\mu| z^p + \frac{A_n^\mu[1+\Sigma|A_n^\mu|]}{A_0(z-a_n)^\mu}$$

a pour zéros les racines de l'équation

$$z^p(z-a_n)^\mu \pm \frac{1+\Sigma|A_n^\mu|}{A_0} = 0,$$

qui s'écrit encore

$$z^{p+\mu} + \ldots + (-a_n)^i \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1)}{1,2,\ldots,i} z^{\mu+p-i} + \ldots + \frac{1+\Sigma|A_n^\mu|}{A_0} = 0.$$

Or, les racines de cette équation sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine dont le rayon est la plus grande des quantités

$$\frac{|a_n|\sqrt[i]{\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1)}{1,2,\ldots,i}}}{\sin\frac{\pi}{2(p+\mu)}}, \quad \frac{\sqrt[p+\mu]{\frac{1+\Sigma|A_n^\mu|}{|A_0|}}}{\sin\frac{\pi}{2(p+\mu)}}.$$

Si donc R est la plus grande des quantités

$$a_n|, \quad \frac{\sqrt[k]{\frac{|B_k|[1+\Sigma|A_n^\mu|]p}{A_0}}}{\sin\frac{\pi}{2p}}, \quad \frac{|a_n|\sqrt[i]{\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1)}{1,2,\ldots,i}}}{\sin\frac{\pi}{2(p+\mu)}}, \quad \frac{\sqrt[p+\mu]{\frac{1+\Sigma|A_n^\mu|}{|A_0|}}}{\sin\frac{\pi}{2(p+\mu)}},$$

les zéros et les pôles des fractions rationnelles du premier membre de l'équation (I) sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon R. L'application du théorème I achève la démonstration.

5. Dans les paragraphes précédents, nous nous sommes placés exclusivement dans le cas où les fonctions étudiées étaient développables en séries de fractions rationnelles dont les pôles étaient à distance finie, ou tout au moins ne formaient pas de suites s'étendant à l'infini; nous allons nous occuper maintenant de la limitation des régions du plan où la fonction $F(z)$, définie par la série de fractions rationnelles

$$F(z) = \sum_n \varphi_n(z),$$

peut s'annuler, les fonctions $\varphi_n(z)$ étant assujetties aux conditions suivantes : la différence des degrés entre le numérateur et le dénominateur de chaque fraction rationnelle $\varphi(z)$ est la même, quel que soit n, le rapport des coefficients des termes de degré le plus élevé au dénominateur et au numérateur étant réel et gardant un signe constant pour toutes valeurs de n; nous supposerons, de plus, que les pôles et zéros des fractions $\varphi_n(z)$ tendent tous vers le même point à l'infini I pour des valeurs infinies de n. Ce point à l'infini sera situé, par exemple, dans la direction α; si nous joignons l'origine dans le plan des z au point à l'infini I, la demi-droite $\overrightarrow{OI}$ aura une direction α; supposons alors qu'une perpendiculaire P à OI, venant d'un point très éloigné sur la droite OI dans la direction opposée à la droite $\overrightarrow{OI}$, se déplace de telle sorte que son point d'intersection avec OI varie dans le sens $\overrightarrow{OI}$ sur cette droite. Le premier point rencontré par la droite P, parmi les zéros et les pôles des fractions $\varphi_n(z)$, sera le point a par exemple. Je considère alors la parabole C de sommet a, son axe étant une droite de direction α passant par a; la concavité de C est de plus tournée vers I; le paramètre de cette parabole sera pris assez grand pour que tous les pôles et zéros des fractions rationnelles $\varphi_n(z)$ soient à l'intérieur de cette parabole C, ce qui sera toujours possible d'après la façon dont nous avons défini a. Le raisonnement employé dans la démonstration du théorème I nous montre que nous obtiendrons une

courbe séparatrice des régions du plan des z, où $F(z)$ ne s'annule jamais ou peut s'annuler, par le lieu du point desquels la parabole P est vue sous un angle égal à $\frac{\pi}{k+k'}$, où k et k' sont respectivement les degrés du numérateur et du dénominateur de la fraction rationnelle $\varphi_n(z)$ à termes du plus haut degré. Le lieu, nous le savons, est une branche d'hyperbole dont un des foyers est le foyer de la parabole C; la directrice correspondante coïncide de plus avec la directrice de la parabole. Si nous rapportons l'hyperbole H que nous avons en vue à l'axe de C et à sa tangente au sommet, l'équation de cette hyperbole peut s'écrire

$$y^2 - 2px = \operatorname{tang}^2 V \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

où p est le paramètre de la parabole et $V = \frac{\pi}{k+k'}$. Pour l'une des branches de H, l'angle des deux tangentes qui comprend C est égal à $\frac{\pi}{k+k'}$; pour l'autre branche, l'angle analogue est égal à

$$\pi - \frac{\pi}{k+k'} = \frac{\pi(k+k'-1)}{k+k'}.$$

Il y a donc deux cas à distinguer :

1° $k+k'=1$. Alors les fractions rationnelles $\varphi_n(z)$ ont la forme $\frac{A}{z-b}$ ou $A(z-b)$; si $k=0, k'=1$, les fonctions $\varphi_n(z)$ ont la forme $\frac{A_n}{z-b_n}$, où A_n garde un signe constant quand n varie; ce cas particulièrement simple sera étudié en détail à la fin de ce Chapitre : les zéros de $F(z)$ sont à l'intérieur de la branche d'hyperbole G comprenant en cet intérieur toutes les discontinuités finies ou infinies de $F(z)$; si les pôles des fractions $\varphi_n(z)$ tendent ainsi que les zéros vers une même limite à l'infini, les zéros de $F(z)$ sont à l'intérieur de la parabole C qui vient d'être définie; c'est ce dernier cas qui nous occupe en ce moment.

Si $k=1$, $k'=0$, les fonctions rationnelles $\varphi_n(z)$ ont la forme $A_n(z-a_n)$; et la fonction $F(z)$ se réduit à un binome dont l'unique racine est encore à l'intérieur de la parabole C dont le sommet est un des points a_n.

2° $k+k'=2$. L'hyperbole H se réduit à la directrice de la para-

bole C comme droite double : cette directrice sépare le plan des z en deux régions, dont l'une contient la parabole C.

La fonction $F(z) = \Sigma \varphi_n(z)$ *a ses zéros dans la région de la directrice de la parabole* C *qui contient cette parabole.*

3° $k + k' > 2$. Alors $\frac{\pi}{k+k'} < \frac{\pi}{2}$ et $\pi - \frac{\pi}{k+k'} > \frac{\pi}{2}$. Des deux branches de l'hyperbole, celle pour laquelle l'angle des deux tangentes qui comprend C est égal à $\frac{\pi}{k+k'}$ est la branche située par rapport à la directrice de C du côté opposé à cette parabole.

Remarque. — Nous avons supposé, dans l'énoncé des propositions qui précèdent, que la droite P, en variant, ne rencontrait tout d'abord que le point a; pour cette position P_0 de P, il pourrait se trouver sur P d'autres points que a, appartenant au groupe des pôles et zéros des fractions rationnelles de la série. Appelons, dans ce cas, A et B les deux points entre lesquels sont les points a sur P_0. Nous pourrons prendre, pour la parabole qui entre dans nos propositions, une parabole passant par A et B, dont l'axe est parallèle à OI, sa concavité étant tournée vers I. On disposera du sommet et du paramètre pour enfermer à l'intérieur de la parabole tous les points a_k et $b_{k'}$, pôles et zéros des fractions rationnelles de la série $F(z)$.

Pour simplifier les énoncés des propositions qui vont suivre, j'appellerai *parabole des points a et b*, la parabole C définie comme il vient d'être dit dans ce paragraphe. Je résumerai la discussion qui précède, dans le cas de $k + k' > 2$, en ce théorème :

THÉORÈME IX. — *La fonction* $f(z)$ *est définie par la série de fractions rationnelles*

$$f(z) = \sum_{m,n,\ldots,s} \frac{A_{kk'}(z-a_1)\ldots(z-a_k)}{(z-b_1)\ldots(z-b_{k'})},$$

où $A_{kk'}, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{k'}$ *sont des quantités variables avec* $m, n, \ldots, s$; $A_{kk'}$ *est réel et garde un signe constant quand* $m, n, \ldots, s$ *prennent toutes leurs valeurs, la différence* $k - k'$ *étant la même pour toutes les fractions rationnelles qui forment les termes de cette série; de plus, il existe au*

moins une fraction rationnelle pour laquelle $k+k'>2$; *lorsque* $m, n, \ldots, s$ *augmentent indéfiniment les pôles et les zéros des fractions tendent vers le point* I *à l'infini. Le lieu des points d'où l'on voit* la parabole C des points a et b *sous un angle comprenant* C, *d'ouverture* $\frac{\pi}{k+k'}$ ($k+k'$ *étant la plus forte somme des degrés des numérateurs et dénominateurs respectifs des fractions*), *est une branche d'hyperbole* H; *les zéros de* $F(z)$ *sont situés, par rapport à cette branche d'hyperbole, dans la région de la parabole* C.

Nous allons suivre, dans la recherche des zéros des fonctions uniformes polaires quelconques, une voie parallèle à celle qui nous a guidés lorsque nous avions à déterminer les zéros de fonctions uniformes à discontinuités polaires ne s'étendant pas à l'infini. La proposition qui correspond au théorème VI s'énonce ainsi :

THÉORÈME X. — *Étant donnée une fonction uniforme* $F(z)$ *n'admettant comme points singuliers essentiels que les limites de ses pôles, une seule de ces limites* I *étant infinie, sans que le point à l'infini soit pôle, on l'écrit sous la forme suivante*

$$F(z)=A_0+\sum_{n=1,\ \mu=1}^{n=\infty,\ \mu=m_n}\frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu},$$

où a_n *est un pôle de degré* m_n *de multiplicité, la série* $\Sigma|A_n^\mu|$ *étant supposée convergente. De chaque pôle* a_n *comme centre décrivons un cercle* C_n *de rayon* $\sqrt[\mu]{\frac{\Sigma|A_n^\mu|}{|A_0|}}$; *soit* P *une parabole comprenant à son intérieur tous ces cercles* C_n, *son axe étant parallèle à la direction du point limite* I *de la suite infinie des pôles. Le lieu des points d'où l'on voit* P *sous un angle* $\frac{\pi}{2M}$ (M *étant l'ordre de multiplicité le plus élevé des pôles*) *est une branche d'hyperbole* H; *les zéros de* $F(z)$ *sont situés, par rapport à cette branche d'hyperbole, dans la région de la parabole* P.

Considérons, en effet, la série qui définit $F(z)$

$$F(z)=A_0+\sum\frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu}.$$

Les zéros de $F(z)$ sont déterminés par l'équation

$$A_0 + \sum \frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu} = 0$$

qui s'écrit

$$\sum \frac{|A_n^\mu| \left[(z-a_n)^\mu \pm \frac{\Sigma |A_n^\mu|}{|A_0|} \right.}{(z-a_n)^\mu} = 0.$$

La série de fractions rationnelles, qui figure au premier membre, satisfait aux conditions du théorème IX. Les pôles sont ici les points a_n; les zéros sont à l'intérieur des cercles C_n de centre a_n, de rayon $\sqrt[\mu]{\frac{|\Sigma A_n^\mu|}{A_0}}$. La parabole C est une parabole comprenant à son intérieur ces cercles C_n; si nous la désignons, dans ce cas, par P, d'après le théorème IX, les zéros de $F(z)$ sont situés, par rapport à la branche d'hyperbole H, dans la région de la parabole P.

La proposition précédente peut prendre une nouvelle forme au moyen des considérations qui suivent; mettons la quantité A_0 sous la forme $Re^{i\theta}$, R étant son module et θ son argument. Développons ensuite R en série de termes *positifs* et *réels* suivant les entiers de la série $F(z)$. Pour abréger, nous écrirons deux entiers n et μ dans les termes de R, de telle sorte qu'on ait

$$A_0 = e^{i\theta} \sum_{n=1,\ \mu=1}^{n=\infty,\ \mu=m_n} s(n, \mu).$$

Nous remplacerons alors les cercles C_n du théorème X par des cercles D_n de centre a_n de rayon $\sqrt[\mu]{\frac{|A_n^\mu|}{s(n, \mu)}}$, la parabole P sera remplacée par une parabole P′ entourant les cercles D_n; les zéros de $F(z)$ sont alors situés par rapport à la branche d'hyperbole correspondante dans la région de la parabole P′.

Lorsque A_0 est nul, les conclusions du théorème X doivent être transformées; voici le théorème qui correspond à cette valeur particulière de A_0 :

THÉORÈME XI. — *Soit* $F(z)$ *une fonction uniforme qui n'admet comme points singuliers essentiels que les limites de ses pôles, une seule de ces limites* I *étant infinie; de plus,* $F(z)$ *s'annule à l'infini, sauf en* I, *de*

telle sorte que l'on peut écrire

$$F(z) = \sum_{n=1,\ \mu=1}^{n=\infty,\ \mu=m_n} \frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu},$$

où $\Sigma|A_n^\mu|$ *est convergente,* a_n *étant un pôle d'ordre* m_n *de multiplicité. Désignons par* C *la parabole* des pôles et zéros des parties principales de $F(z)$ relatives aux pôles. *Si les résidus des pôles sont tous différents de zéro et ont même argument, les zéros de* $F(z)$ *sont à l'extérieur de la branche d'hyperbole, lieu des points desquels* C *est vue sous un angle* $\frac{\pi}{2M-1}$, *où* M *est l'ordre de multiplicité le plus élevé des pôles.*

Remarquons à ce sujet que $F(z)$ donne lieu à la représentation suivante :

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} P_n(z),$$

où $P_n(z)$ désigne la partie principale relative au pôle a_n; cette fraction rationnelle est définie, comme l'on sait, par l'identité

$$P_n(z) = \frac{A_n^{(1)}(z-a_n)^{m_n-1} + \ldots + A_n^{(m-1)}(z-a_n) + A_n^{(m)}}{(z-a_n)^{m_n}}.$$

Lorsque n varie, les résidus $A_n^{(1)}$ sont, par hypothèse, des quantités imaginaires différentes de zéro et ayant même argument θ; en faisant sortir $e^{i\theta}$ du signe Σ, on a une série de fractions rationnelles qui satisfont aux conditions d'application du théorème IX, d'où l'on déduit immédiatement le théorème XI.

Remarque. — Le théorème précédent aurait encore lieu si les résidus étant tous nuls, la valeur minima de μ était la même pour toutes les parties principales, les quantités $A_n^{(\mu)}$ correspondant à cette valeur commune de μ étant des quantités imaginaires de même argument.

Lorsque le degré m_n de multiplicité des pôles est l'unité, la région des zéros de $F(z)$ se définit très simplement par la région des discontinuités de la fonction considérée.

La proposition qui vise le cas qui nous occupe se présente ainsi :

COROLLAIRE. — *Si une série, à termes réels et de signe constant* ΣA_n, *est convergente, la fonction* $F(z)$, *donnée par l'identité*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{z - a_n},$$

a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant les points a_n.

Le contour convexe est ici infini; si les limites des pôles sont toutes finies sauf une I, le contour convexe, entourant les points a_n dont on pourra se servir, sera par exemple la parabole C définie au commencement de ce paragraphe.

Je ferai l'application de ce corollaire à l'étude de la fonction $\cot z$; cette fonction est définie pour toutes les valeurs de la variable par la série

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \ldots} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right).$$

Les discontinuités de $\cot z$ sont les pôles $n\pi$, où n prend les valeurs $0, \pm 1, \ldots, \pm\infty$. Nous prendrons comme contour convexe deux droites parallèles infiniment rapprochées de l'axe des quantités réelles et comprenant cet axe entre elles. Nous déduisons donc immédiatement, comme corollaire du théorème XI, cette proposition :

La fonction $\cot z$ *ne s'annule (sauf pour l'infini) que pour des valeurs réelles de la variable.*

On voit encore que $\cot z$ est représentable par $e^{\theta(z)}$, où $\theta(z)$ est holomorphe en dehors de l'axe des quantités réelles.

Parmi les fonctions $F(z)$ du corollaire précédent, se trouvent encore les dérivées logarithmiques des fonctions entières à multiplicateur exponentiel constant, de genre pair, à racines réelles. Nous savons, en effet, qu'en désignant par $f(z)$ une fonction entière de genre ω, on a cette identité

$$F(z) = \frac{f'_z}{f_z} = z^{\omega} \sum \frac{1}{a_n^{\omega}(z - a_n)}.$$

Lorsque les racines a_n sont réelles, le genre ω étant pair, les quantités a_n^ω sont réelles et positives; le corollaire nous apprend que $F(z)$ ou encore f'_z ont leurs racines réelles; cette propriété des fonctions entières a été donnée par M. Cesàro.

Remarque. — Lorsque dans le corollaire du théorème XI, les points a_n sont en ligne droite, leurs arguments étant θ, si A_0 est une quantité d'argument $-\theta$, les zéros de la fonction définie par

$$F(z) = A_0 + \sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

sont sur la droite des points a_n, D. Écrivons à cet effet $F(z)$ sous la forme $X - iY$; on voit alors que (XY) est la résultante R de segments de répulsion venant des points a_n, en raison inverse de la distance et d'une force $|A_0|$ parallèle à la droite des points a_n, toutes ces actions s'exerçant sur le point mobile z. Si par z nous menons une parallèle à D, les composantes de R sont toutes situées au-dessus de cette parallèle P ou sur elle; de plus elles ne pourront être toutes situées sur P, qu'en supposant z sur la droite D; R ne peut donc s'annuler que pour des valeurs de z situées sur la droite des points a_n, ce qui achève la démonstration.

Cette remarque conduit tout de suite à la proposition de M. Cesàro sur les fonctions entières de genre impair : lorsque les racines de telles fonctions sont toutes réelles, les zéros de leur dérivée sont tous aussi réels. Nous voyons en effet que, $F(z)$ étant de genre impair ω, on a l'identité

$$F(z) = \frac{f'_z}{f_z} = z^\omega \sum \frac{1}{a_n^\omega (z - a_n)} = z^{\omega-1} \left\{ \sum \left[\frac{1}{a_n^{\omega-1}(z - a_n)} + \frac{1}{a_n^\omega} \right] \right\}.$$

Les racines a_n sont réelles par hypothèse, et $a_n^{\omega-1}$ est, par suite, une quantité réelle positive; de plus $\frac{1}{a_n^\omega}$ est réelle. L'application des considérations qui précèdent conduit ainsi au théorème de M. Cesàro sur les fonctions entières de genre impair.

Quand tous les pôles a_n sont réels, le corollaire du théorème XI donne lieu à cette seconde remarque : si A_0 est une quantité réelle négative et si B_0 et α sont des quantités réelles de signe quelconque, les

zéros de la fonction déterminée par l'identité

$$F(z) = A_0(z-\alpha) + B_0 + \sum \frac{A_n}{z-a_n} \qquad (A_n > 0)$$

sont tous réels si les quantités a_n sont toutes réelles. Mettons $F(z)$ sous la forme $X - iY$; on reconnaît ainsi que (XY) est la résultante de deux systèmes de forces : 1° une répulsion proportionnelle à la distance, venant du point $\left(\frac{B_0}{A_0} - \alpha + 2x\right)$ de l'axe des quantités réelles, la masse du point étant $(-A_0)$; 2° par des répulsions en raison inverse de la distance venant des points a_n de l'axe des quantités réelles.

Le point matériel $z = x + iy$ est soumis à des forces qui toutes sont situées au-dessus de la parallèle à l'axe X des quantités réelles, menée par le point z ou sur cette parallèle, à moins que z ne soit sur l'axe X. Ainsi $X - iY$ ou encore $F(z)$ ne peut s'annuler que pour des valeurs de z réelles. La même propriété subsisterait si $F(z)$ était donnée sous la forme

$$A_0(z-\alpha) + \sum \left(\frac{A_n}{z-a_n} + c_n\right),$$

c_n étant réel.

Nous allons maintenant appliquer les remarques qui précèdent à l'étude des zéros des dérivées des fonctions entières à racines réelles.

6. Tout d'abord nous étudierons les fonctions entières de genre 0 et 1, dont le multiplicateur exponentiel est de la forme $e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$; les dérivées de ces fonctions donnent lieu au théorème suivant :

Les fonctions entières de genre 0 et 1, dont le multiplicateur exponentiel est de la forme $Ae^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, où A est une constante, α et β étant réels et α négatif ou nul, jouissent de cette propriété que, si leurs zéros sont réels, les zéros de leur dérivée sont tous aussi réels.

Les fonctions dont nous parlons sont représentables respectivement par

$$f_1(z) = Ae^{\alpha z^2+\beta z+\gamma} \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \qquad \text{(genre 0)},$$

$$f_2(z) = Ae^{\alpha z^2+\beta z+\gamma} \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}} \qquad \text{(genre 1)}.$$

Les dérivées logarithmiques correspondantes sont

$$\frac{f'_1}{f_1} = 2\alpha\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right) + \sum \frac{1}{z - a_n},$$
$$\frac{f'_2}{f_2} = 2\alpha\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right) + \sum \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n}\right).$$

Sous cette forme on reconnaît, d'après ce qui a été dit, que ces dérivées logarithmiques ont leurs racines réelles, ce qui entraîne la même propriété pour les dérivées des fonctions entières $f_1(z)$ et $f_2(z)$.

J'appliquerai cette proposition à l'inverse arithmétique de la fonction eulérienne, en remarquant que $\Gamma(z)$ désignant cette fonction, on a l'identité

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{Cz} \prod \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right],$$

où C est la constante d'Euler et $n = 1, 2, 3, \ldots$. Sous cette forme $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$ apparaît comme fonction entière de genre 1 où le facteur exponentiel est de la forme $Ae^{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}$ avec $\alpha = 0$, $\beta = C$. Ainsi :

La fonction inverse arithmétique de la fonction eulérienne de seconde espèce admet une dérivée dont les zéros sont tous aussi réels.

D'après les expressions de la dérivée logarithmique de la fonction eulérienne de seconde espèce

$$\frac{d\log\Gamma(z)}{dz} = \lim_{n=\infty}\left(\log n - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \ldots - \frac{1}{z+n}\right),$$
$$\frac{d\log\Gamma(z)}{dz} = -C + \sum \frac{z-1}{(n+1)(z+n)}.$$

Les équations

$$\lim_{n=\infty}\left(\log n - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \ldots - \frac{1}{z+n}\right) = 0, \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(z-1)}{(n+1)(z+n)} = C,$$

C *étant la constante d'Euler, ont toutes leurs racines réelles.*

Voici une seconde proposition sur les fonctions entières :

Les fonctions entières de genre 1, *dont le multiplicateur exponentiel*

est de la forme $Ae^{\alpha z+\beta}$, *où* α *est une quantité réelle positive ou nulle, et les fonctions de genre* 2 *de multiplicateur* $Ae^{\alpha z^2+\beta}$, *jouissent de cette propriété que si leurs zéros sont réels, les zéros de leur dérivée sont tous aussi réels.*

Les fonctions qui nous occupent sont représentables ainsi

$$f_2(z) = Ae^{\alpha z^2+\gamma} \prod \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{2a_n^2}}\right] \qquad \text{(genre 2)},$$

$$f_1(z) = Ae^{\alpha z+\gamma} \prod \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}\right] \qquad \text{(genre 1)}.$$

Les dérivées logarithmiques correspondantes sont

$$\frac{f_2'(z)}{f_1(z)} = 2\alpha z + \sum\left[\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n^2}(z+a_n)\right] = z^2\left[\frac{2\alpha}{z} + \sum \frac{1}{a_n^2(z-a_n)}\right],$$

$$\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \alpha + \sum\left[\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right].$$

La dernière remarque du paragraphe 5 montre que $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$ et $\frac{f_2'}{f_2}$ ont toutes leurs racines réelles; il en est de même, bien entendu, des dérivées $f_1'(z)$ et $f_2'(z)$.

Les fonctions entières, de genre quelconque, donnent lieu aux propositions qui suivent :

Les fonctions entières, de genre pair ω, *dont le multiplicateur exponentiel du produit infini de facteurs primaires de M. Weierstrass est de la forme* $Ae^{\alpha z^{\omega+2}+\beta z^{\omega+1}+\gamma}$, *où* A *est une constante,* α *et* β *réels et* α *négatif, jouissent de cette propriété que, si leurs zéros sont réels, les zéros de leur dérivée sont aussi réels.*

Il suffit de se rappeler la représentation analytique des fonctions que nous considérons; $f(z)$ étant une fonction du type étudié, l'on a

$$\frac{f_z'(z)}{f(z)} = z^\omega \sum \frac{1}{a_n^\omega(z-a_n)} + \alpha(\omega+2)z^{\omega+1} + \beta(\omega+1)z^\omega$$

$$= z^\omega\left\{\sum \frac{1}{a_n^\omega(z-a_n)} + \alpha(\omega+2)\left[z + \frac{\beta(\omega+1)}{\alpha(\omega+2)}\right]\right\};$$

le raisonnement à tenir alors est exactement le même que pour le théorème qui précède.

Lorsque des fonctions entières, de genre impair ω, *ont toutes leur racines* a_n *réelles (simples ou multiples), le multiplicateur exponentiel du produit infini de facteurs primaires de M. Weierstrass étant de la forme* $Ae^{\alpha z^{\omega+2}+\beta z^{\omega+1}+\gamma}$, *où* A *est une constante,* α, β *réels et* $\beta > \frac{1}{\omega+1}\sum\frac{1}{a_n^{\omega+1}}$, *les racines des dérivées de ces fonctions entières sont toutes réelles.*

Les fonctions, de genre impair ω, dont on s'occupe, satisfont à l'identité

$$\frac{f'_z}{f_z} = z^\omega\left[\sum\frac{1}{a_n^\omega(z-a_n)} + \alpha(\omega+2)z + \beta(\omega+1)\right];$$

or $\frac{f'_z}{f_z}$ peut s'écrire encore

$$\begin{aligned}\frac{f'_z}{f_z} &= z^\omega\left[\sum\frac{z}{a_n^{\omega+1}(z-a_n)} - \sum\frac{1}{a_n^{\omega+1}} + \alpha(\omega+2)z + \beta(\omega+1)\right]\\ &= z^{\omega+1}\left\{\sum\frac{1}{a_n^{\omega+1}(z-a_n)} + \left[\beta(\omega+1) - \sum\frac{1}{a_n^{\omega+1}}\right]\frac{1}{z} + \alpha(\omega+2)\right\}.\end{aligned}$$

Sous les conditions énoncées dans la proposition, les racines $\frac{f'_z}{f_z}$ sont réelles; il en est de même des zéros de f'_z.

Voici une dernière proposition sur les zéros des dérivées des fonctions entières.

Lorsque des fonctions entières, de genre impair ω, *ont toutes leurs racines* a_n *réelles et positives, le multiplicateur exponentiel du produit infini de facteurs primaires de M. Weierstrass étant de la forme* $Ae^{\alpha z^{\omega+2}+\beta z^{\omega+1}+\gamma}$, *où* A *est une constante,* α, β *réels et* α *négatif, les racines de leurs dérivées sont toutes réelles.*

Il suffit, pour le voir, de se reporter à l'identité utilisée dans le premier théorème sur les fonctions entières de genre pair, identité qui subsiste pour ω impair.

7. Après avoir ainsi ouvert une parenthèse pour montrer l'application de nos théorèmes à l'étude des dérivées des fonctions entières à racines réelles, nous allons revenir à la détermination des zéros des fonctions polaires quelconques, en supposant à présent que l'infini est pôle d'ordre p. Je donnerai, à ce sujet, le théorème qui suit :

THÉORÈME XII. — *Soit* $F(z)$ *une fonction uniforme qui n'admet comme points singuliers essentiels que les limites de ses pôles, limites toutes finies, sauf une,* I; *de plus* $F(z)$ *admet le point à l'infini comme pôle d'ordre p et donne lieu à la représentation analytique*

$$F(z) = B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_p$$
$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{A_n^{m_n}}{(z-a_n)^{m_n}} + \ldots + \frac{A_n^1}{(z-a_n)} + r_1 + r_1 z + \ldots + r_{p+1} z^p \right],$$

où a_n *est un pôle d'ordre* m_n *de multiplicité,* $r_1, r_2, \ldots, r_{p+1}$ *des quantités qui dépendent de n. Si les quantités* B_0 *et* $r_{p+1}(n)$ *ont le même argument et, si les racines infinies (avec n) des termes de la série tendent vers* I, *en désignant par* C *une parabole entourant les zéros de*

$$B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_p = 0,$$

ainsi que les pôles et les zéros des termes de la série, les zéros de $F(z)$ *sont à l'extérieur de la branche d'hyperbole, lieu des points d'où l'on voit* C *sous un angle* $\frac{\pi}{2M+p}$, M *étant l'ordre de multiplicité le plus élevé des pôles.*

La démonstration de cette proposition est immédiate : le polynome $B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_p$ et les divers termes de la série forment des fractions rationnelles satisfaisant aux conditions d'application du théorème IX.

Le théorème XII va nous conduire avec facilité à quelques propriétés de types très étendus de fonctions entières. Considérons une fonction $F(z)$ de genre p, de multiplicateur exponentiel

$$e^{\alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0},$$

où α_p est une quantité réelle positive, le polynome $\alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0$ ayant ses racines réelles. La fonction $F(z)$ sera ainsi représentée

$$F(z) = e^{\alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0} \prod \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \ldots + \frac{x^p}{p a_n^p}} \right].$$

De cette identité on tire la suivante

$$\frac{F'_z}{F_z} = p\alpha_p z^{p-1} + \ldots + \alpha_1 + \sum \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p} \right).$$

Les quantités désignées par B_0 et r_{p+1} sont ici $p\alpha_p$ et $\frac{1}{a_n^p}$; de plus, d'après l'identité

$$S = \sum\left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p}\right) = \sum \frac{z^p}{a_n^p(z-a_n)},$$

les racines de chaque terme de la série S se confondent avec l'origine; la condition imposée aux racines infinies des termes de S de tendre vers I est ainsi remplie; quant aux valeurs des quantités B_0 et r_{p+1}, nous distinguerons, à ce sujet, plusieurs cas qui nous conduiront aux propositions suivantes :

Une fonction $F(z)$ *est entière de genre pair* p; *ses racines* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sont réelles et le multiplicateur exponentiel du produit infini de facteurs primaires est de la forme* $e^{\alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0}$ *où* α_p *est une quantité réelle positive, le polynome* $P = \alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0$ *ayant ses racines réelles. En désignant par* a_1^0 *la racine qui, avec* a_∞, *limite les racines de la dérivée de* $P(z)$ *et les racines* a_n *de* $F(z)$, *les zéros de la dérivée de* $F(z)$ *se trouvent dans l'angle de sommet* a_1^0, *d'ouverture* $\frac{2\pi p}{p+1}$, *symétrique par rapport à l'axe des quantités réelles et couvrant sur cet axe les zéros de* $F(z)$.

La parabole C du théorème XII se réduit ici à la portion de l'axe des quantités réelles comprises entre a_1^0 et a_∞; le lieu des points d'où l'on voit ce segment sous un angle égal à $\frac{\pi}{2+p-1} = \frac{\pi}{p+1}$ se compose de deux droites symétriques par rapport à l'axe X des quantités réelles, faisant entre elles un angle $\frac{2\pi}{p+1}$, cette ouverture V égale à $\frac{2\pi}{p+1}$ étant dirigée du côté opposé aux racines a_n; la région V est une zone d'exclusion pour les zéros de $F(z)$.

Voici maintenant deux autres propositions que je ne fais qu'énoncer :

Soit $F(z)$ *une fonction entière à racines simples* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *de genre quelconque* p, *le multiplicateur exponentiel du produit de facteurs primaires étant* $e^{\alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0}$, *où* α_p *est une quantité réelle positive, le polynome* $P = \alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0$ *ayant toutes ses racines réelles. Si les racines de* $F(z)$ *sont réelles et positives, les zéros de la dérivée de* $F(z)$ *se trouvent dans l'angle symétrique par rapport à l'axe des quantités réelles de som-*

met a_1^0 (*défini comme précédemment*), *l'ouverture de l'angle étant* $\frac{2\pi p}{p+1}$ *et dirigée vers les zéros de* $F(z)$.

Un théorème analogue a lieu pour les dérivées des fonctions entières (*à racines réelles négatives*) *de genre impair.*

Remarque. — Dans le cas où le polynome P, du facteur exponentiel $e^{\alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0}$, a ses racines comprises entre les zéros extrêmes de $F(z)$, les racines de la dérivée de P sont aussi comprises entre les limites des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$; le point a_1^0 se confondra donc avec la limite finie des zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$; les racines réelles de $F'(z)$ seront ainsi comprises entre les limites des racines de la fonction $F(z)$, puisque la région angulaire des zéros de la dérivée $F'(z)$ a pour sommet a_1^0 et contient la portion de l'axe des quantités réelles où se trouvent les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Cette propriété rapproche les fonctions entières des polynomes et des fonctions entières de genre o à multiplicateur exponentiel constant.

8. Nous avons supposé dans le théorème XII que, la fonction $F(z)$ étant mise sous la forme

$$F(z) = G_0(z) + \sum \left[G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) + r_1 + r_2 z + \ldots + r_{p+1} z^p \right],$$

$G_0(z)$ était un polynome de degré p, $G_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$ représentant la partie principale de $F(z)$ relative au pôle a_n. Plus généralement, une fonction à discontinuités polaires a_n donnera lieu à l'identité

$$F(z) = G_0(z) + \sum \left[G_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) + r_0 + r_1 z + \ldots + r_\nu z^\nu \right],$$

où $G_0(z)$ et une fonction entière et ν un exposant variable avec n. Nous n'examinerons ici que le cas suivant : $G_0(z)$ est un polynome de degré p, les exposants ν se réduisant à un entier constant inférieur à p. L'identité qui précède se transformera en celle-ci :

$$\begin{aligned} F(z) = {} & B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_p \\ & + \sum \left[G_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) + r_0 + r_1 z + \ldots + r_\nu z^\nu \right] \qquad (\nu < p). \end{aligned}$$

Les zéros de $F(z)$ sont donnés par l'équation

$$B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_p + \sum \left[G_n \left(\frac{1}{z - a_n} \right) + r_1 + r_2 z + \ldots + r_p z^\nu \right] = 0, \ \nu < p.$$

où $G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ est la partie principale du pôle a_n. Or, déterminons une série $\Sigma s(n)$ à termes réels et positifs, dont la somme est inférieure à l'unité; ainsi

$$k = \sum s(n), \qquad k < 1.$$

L'équation des zéros de $F(z)$ se transforme et devient

$$(1-k) z^p + \frac{B_1 z^{p-1}}{B_0} + \ldots$$
$$+ \frac{B_p}{B_0} + \sum_n \left[\frac{1}{B_0} G\left(\frac{1}{z - a_n} \right) + \frac{r_1}{B_0} + \frac{r_2}{B^0} z + \ldots + \frac{r_\nu}{B_0} z^\nu + s(n) z^p \right] = 0.$$

Sous cette forme, le premier membre apparaît comme une somme de fractions rationnelles satisfaisant aux conditions d'application du théorème IX; en effet, la différence entre les degrés respectifs des numérateurs et dénominateurs est p, et le rapport des coefficients des termes de degré le plus élevé est pour le polynome $(1-k)$ et pour les termes de la série $s(n)$; or $(1-k)$ et $s(n)$ sont des quantités réelles positives. Par suite, si l'on peut déterminer les quantités $s(n)$ de telle sorte que les termes de la série

$$S = \sum_n \left[\frac{1}{B_0} G\left(\frac{1}{z - a_n} \right) + \frac{r_1}{B_0} + \frac{r_2}{B_0} z + \ldots + \frac{r_\nu z^\nu}{B_0} + s(n) z^p \right] = 0$$

aient leurs racines finies, ou bien tendent vers I quand n augmente indéfiniment (I est toujours le point limite des pôles a_n), on pourra construire une parabole C entourant les racines de

$$B_0(1-k) z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_p = 0,$$

ainsi que les pôles et zéros des termes de la série S.

Nous énoncerons, sous cette forme abrégée, le résultat auquel nous arrivons :

Les zéros de $F(z)$ *sont situés à l'extérieur de la branche d'hyperbole* H,

lieu des points d'où la parabole C *est vue sous un angle* $\frac{\pi}{2M+p}$, M *étant le plus grand ordre de multiplicité des pôles.*

Remarque. — Jusqu'ici nous avons fait cette hypothèse que les pôles et zéros des termes de $F(z)$ tendaient à l'infini vers la même limite I; admettons maintenant qu'il y ait μ directions limites de pôles; les suites correspondantes seront ainsi $a_1, a_2, \ldots, a_n(\alpha)$, $b_1, b_2, \ldots, b_n(\beta), \ldots, l_1, l_2, \ldots, l_n(\lambda)$. Cherchons alors quelle courbe remplacera la parabole C, qui intervient dans nos théorèmes. A cet effet, par un point O du plan des z, menons les demi-droites de direction $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ dans le sens des limites des pôles; soient α et λ les demi-droites qui comprennent toutes les autres dans l'ouverture de leur angle, quand cet angle est décrit dans le sens de $O\alpha$ à $O\lambda$. De plus, nous supposerons cet angle supérieur à π, ce qui est le seul cas intéressant, comme nous allons le voir. Ceci posé, une parallèle à $O\alpha$, venant de l'infini et se déplaçant parallèlement à elle-même, coupera pour la première fois l'ensemble des pôles dans la position $O\alpha$; de même, une parallèle à $O\lambda$ venant de l'infini traversera tout d'abord le même ensemble pour une position $l\lambda$. La courbe qui remplacera P sera formée par les deux demi-droites $a\alpha$, $l\lambda$ limitées à leur point d'intersection O'. Le lieu des points d'où l'on voit $O'\alpha$ sous un angle $\frac{\pi}{2M+p}$ (M étant le plus grand ordre de multiplicité), se compose de deux droites $O'm$, $O'n$ également inclinées sur le prolongement de $O'\alpha$ et faisant avec celui-ci un angle $\frac{\pi}{2M+p}$; de même le lieu des points d'où $O'\lambda$ est vue sous un angle $\frac{\pi}{2M+p}$ se compose de deux droites $O'p$, $O'q$ également inclinées sur le prolongement $O'\lambda$ de $O\lambda$ et faisant avec $O'\lambda'$ un angle égal à $\frac{\pi}{2M+p}$; les deux régions limitées par l'ouverture $(O'm, O'n)$ et l'angle $(O'p, O'q)$ n'auront de partie commune que si $\frac{\pi}{2M+p} > \frac{\theta}{2}$, θ étant l'angle inférieur à 2π de $O\alpha$ avec $O\lambda$. Ainsi la méthode géométrique dont nous nous sommes servi ne présentera d'intérêt qu'en supposant $\theta < \frac{2\pi}{2M+p}$: sous cette condition, les zéros seront en dehors de la région commune aux angles $(O'm, O'n)$ et $(O'p, O'q)$; en parti-

culier, si $\theta = \frac{2\pi}{2M+p}$, $F(z)$ admettra la région symétrique de l'angle $(O'\alpha, O'\lambda)$ par rapport à O', comme zone d'exclusion de zéros.

Nous allons nous occuper, dans le Chapitre suivant, des intégrales définies étudiées par M. Hermite; nous arriverons, par cette voie, aux théorèmes sur les fonctions uniformes quelconques, relatifs à la distribution des valeurs de la variable qui font prendre à ces fonctions une valeur donnée u.

CHAPITRE II.

1. Nous étudierons, dans ce Chapitre, les zéros de fonctions $F(z)$ données par des intégrales définies multiples

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w}^{w_2}\frac{H(t, u, \ldots, w, z)\,dt\,du\ldots dw}{G(t, u, \ldots, w, z)}$$

(toutes les quantités $u_1, u_2, \ldots, w_1, w_2$ sont finies),

où $H(t, u, \ldots, w, z)$ et $G(t, u, \ldots, w, z)$ sont des fonctions holomorphes de $t, u, \ldots, w$ et des polynomes en z de degrés respectifs α et β, le rapport des termes de degré le plus élevé en z de $H(t, \ldots, z)$ et de $G(t, \ldots, z)$ gardant une valeur réelle de signe constant quand t varie entre t_1 et $t_2, \ldots$; de plus, nous supposerons que, $A(t, u, \ldots, w)$ et $B(t, u, \ldots, w)$ désignant les coefficients de z^α et z^β dans $H(t, u, \ldots, w, z)$ et $G(t, u, \ldots, w, z)$, l'ensemble des racines en t des équations $A = 0$ et $B = 0$, n'ait qu'un nombre fini de points communs avec le segment $\overline{t_1 t_2}$ de l'axe des quantités réelles, lorsque $u, v, \ldots, w$ prennent toutes les valeurs de l'intégration.

Les fonctions $F(z)$, ainsi définies, donnent lieu à ce premier théorème :

THÉORÈME I. — *La fonction* $F(z)$ *est donnée par l'intégrale définie multiple*

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w_1}^{w_2}\frac{H(t, u, \ldots, w, z)\,dt\,du\ldots dw}{G(t, u, \ldots, w, z)},$$

où $H(t, u, \ldots, w, z)$ *et* $G(t, u, \ldots, w, z)$ *sont des polynomes en* z *de degrés respectifs* α *et* β, *le rapport des coefficients* $A(t, u, \ldots, w)$ *et* $B(t, u, \ldots, w)$ *des termes en* z^α *et* z^β *dans ces polynomes ne devenant jamais infini ou indéterminé dans les limites d'intégration. Si ce rapport est réel et garde un signe constant pour toutes les valeurs de* t *entre* t_1 *et* $t_2, \ldots,$ *de* w *entre* w_1 *et* w_2, C *désignant un cercle de surface minimum qui entoure les pôles et zéros de* $\frac{H(t, u, \ldots, z)}{G(t, u, \ldots, z)}$ *(lorsque* $t, u, \ldots, w$ *varient de* t_1 *à* $t_2, \ldots,$ *de* w_1 *à* w_2*), les zéros de* $F(z)$ *sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à* C *et de rayon* $\frac{R}{\sin\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}}$, *où* R *est le rayon de* C.

La démonstration de ce théorème est contenue dans celle du théorème I du Chapitre I; il suffit de prendre comme termes de la série, les éléments infiniment petits

$$\frac{H(t, u, \ldots, w, z)\, dt\, du \ldots dw}{G(t, u, \ldots, w, z)}.$$

Comme corollaire du théorème I, j'énoncerai la proposition qui suit :

THÉORÈME II. — *Si* $A(t, u, v, \ldots, v, w)$ *garde un signe constant quand* t *varie de* t_1 *à* $t_2, \ldots,$ w *de* w_1 *à* w_2, *la fonction*

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{w_1}^{w_2} \frac{A(t, u, \ldots, w)\, dt\, du\, dv \ldots dw}{z - G(t, u, \ldots, w)}$$

a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant la région

$$z = G\begin{pmatrix} t_2, u_2, \ldots, w_2 \\ t, u, \ldots, w \\ t_2, u_2, \ldots, w_1 \end{pmatrix},$$

qui est un espace de discontinuité pour la fonction.

Ce théorème, ainsi que le corollaire du théorème XI (Chapitre I), me semble intéressant à signaler pour les raisons suivantes : il est assez rare de rencontrer des fonctions formées simplement et dont deux ensembles remarquables de points jouissent, l'un par rapport à

l'autre, de propriétés géométriques très simples. Or, c'est ce qui arrive ici, où les fonctions considérées possèdent cette propriété que l'ensemble de leurs zéros (sauf l'infini) est à l'intérieur de tout contour convexe entourant l'ensemble de leurs discontinuités.

Le théorème II conduit immédiatement à ce corollaire :

COROLLAIRE. — *Si* $H(t)$ *garde un signe constant de* t_1 *à* t_2, t *étant une variable réelle, la fonction*

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{H(t)\,dt}{z - G(t)},$$

qui admet la ligne

$$z = G\begin{pmatrix} t_2 \\ t \\ t_1 \end{pmatrix}$$

comme ligne de discontinuité, a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant cette ligne.

A l'effet de démontrer le théorème II et son corollaire, entourons les points des ensembles

$$z = G\begin{pmatrix} t_2, & \ldots, w_2 \\ t, \ u, & \ldots, w \\ t_1, & \ldots, w_1 \end{pmatrix}$$

d'un contour convexe qui les entoure tous ; un raisonnement, complètement analogue à celui que nous avons employé dans la démonstration du théorème I du Chapitre I, nous montre que les intégrales $F(z)$ considérées ne peuvent avoir de zéros qu'à l'extérieur du contour C', lieu des points desquels C est vue sous un angle π ; ce contour C' est le contour C lui-même.

Un raisonnement identique va nous conduire aux formules de MM. Darboux et Weierstrass sur les intégrales définies. Voici, à cet effet, la proposition qui nous y amènera :

La fonction

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{w_1}^{w_2} H(t, u, \ldots, w)\,[z - G(t, u, \ldots, w)]\,dt\,du \ldots dw,$$

où $H(t, u, \ldots, w)$ *est une quantité réelle de signe constant pour les va-*

leurs de l'intégration, a son zéro à l'intérieur de tout contour convexe entourant l'ensemble

$$z = \mathrm{G}\begin{pmatrix} t_2, & \ldots, w_2 \\ t, \; u, & \ldots, w \\ t_1, & \ldots, w_1 \end{pmatrix}.$$

La démonstration de cette proposition est analogue à celle du corollaire précédent; nous allons déduire de là la formule de M. Weierstrass, généralisée :

Si $\mathrm{G}(t, u, \ldots, w)$ *est une fonction complexe de* n *variables réelles* $t_1, u, \ldots, w$, $\mathrm{H}(t, u, \ldots, w)$ *gardant un signe constant quand* t *varie de* t_1 *à* $t_2, \ldots, w$ *de* w_1 *à* w_2, *on a l'égalité suivante relative à des intégrales multiples d'ordre* $\alpha + \beta + \ldots + \lambda$:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w_1}^{w_2} \mathrm{G}(t, u, \ldots, w)\,\mathrm{H}(t, u, \ldots, w)\,(dt)^\alpha (du)^\beta \ldots (dw)^\lambda$$
$$= re^{i\theta}\int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w_1}^{w_2} \mathrm{H}(t, u, \ldots, w)\,(dt)^\alpha (du)^\beta \ldots dw)^\lambda,$$

où $re^{i\theta}$ *est l'affixe d'un point situé à l'intérieur de tout contour convexe entourant la région engendrée par le point d'affixe* $z = \mathrm{G}(t, u, \ldots, w)$, *où* t *varie de* t_1 *à* $t_2, \ldots, w$ *de* w_1 *à* w_2.

La formule de M. Darboux, étendue au cas des intégrales multiples, est immédiate en remarquant l'identité

$$re^{i\theta} = \mathrm{K}\,\mathrm{G}(t_0, u_0, \ldots, w_0),$$

où K est une quantité imaginaire de module inférieur à 1,

$$\mathrm{G}(t_0, u_0, \ldots, w_0),$$

la valeur de $\mathrm{G}(t, u, \ldots, w)$ de module maximum quand t varie de t_1 à $t_2, \ldots, w$ de w_1 à w_2; je présenterai ainsi le résultat auquel nous arrivons :

Si $\mathrm{G}(t, u, \ldots, w)$ *est une fonction de* u *variables réelles* $t, u, \ldots, w$; *si de plus la fonction* $\mathrm{H}(t, u, \ldots, w)$ *et les différentielles* $dz_1, \ldots, dz_n$

gardent un signe constant, pour les valeurs de l'intégration, on a cette égalité

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w_1}^{w_2} G(t, u, \ldots, w)\, H(t, u, \ldots, w)\,(dz_1)^\alpha\ldots(dz_n)^\lambda$$
$$= K\,G(t_0, u_0, \ldots, w_0)\int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w_1}^{w_2} H(t, u, \ldots, w)\,(dz_1)^\alpha\ldots(dz_n)^\lambda,$$

où $G(t_0, u_0, \ldots, w_0)$ *est une des valeurs de* $G(t, u, \ldots, w)$ *dans l'intégration et* K *une quantité de module inférieur à* 1.

2. Nous avons étudié, dans le premier paragraphe, le cas où la fraction rationnelle en z, $\frac{H(t, u, \ldots, w, z)}{G(t, u, \ldots, w, z)}$ qui entre sous le signe d'intégration, a ses zéros et ses pôles à distance finie lorsque les variables réelles $t, u, \ldots, w$ prennent les valeurs de l'intégration. Nous allons nous occuper maintenant des intégrales pour lesquelles

$$\frac{H(t, u, \ldots, w, z)}{G(t, u, \ldots, w, z)}$$

a des zéros et des pôles infinis.

Nous imposons toujours d'ailleurs à la fraction rationnelle

$$\frac{H(t, u, \ldots, w, z)}{G(t, u, \ldots, w, z)},$$

les conditions indiquées au commencement de ce second Chapitre.

THÉORÈME III. — *Soit* $F(z)$ *une fonction donnée par l'intégrale définie multiple*

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w_1}^{w_2} \frac{H(t, u, v, \ldots, w, z)\,dt\,du\ldots dw}{G(t, u, v, \ldots, w, z)},$$

où $H(t, u, \ldots, z)$, $G(t, u, \ldots, w, z)$ *sont des fonctions holomorphes des variables réelles* $t, u, \ldots, w$ *et des polynomes en* z *de degrés* α *et* β, *les coefficients de* z^α *et* z^β *étant respectivement* $A(t, u, \ldots, w)$, $B(t, u, \ldots, w)$. *Si le rapport* $\frac{A(t, u, \ldots, w)}{B(t(u, \ldots, w)}$ *est réel et garde un signe constant pour toutes les valeurs qui n'annulent pas* A *ou* B, *et si les circuits décrits par les ra-*

cines z des équations $H(t, u, \ldots, w, z) = 0$ *et* $G(t, u, \ldots, w, z) = 0$ *admettent une seule et même direction asymptotique pour toutes les valeurs de $t, u, \ldots, w$ de l'intégration, les zéros de* $F(z)$ *sont à l'extérieur de la branche d'hyperbole lieu des points desquels la parabole* P des pôles et zéros de $\frac{H(t, u, v, \ldots, w, z)}{G(t, u, v, \ldots, w, z)}$ *est vue sous un angle* $\frac{\pi}{\alpha + \beta}$.

Je n'ajouterai qu'un mot d'éclaircissement à ce théorème. Donnons à z une valeur qui soit l'affixe d'un point situé en dehors de la coupure

$$G\begin{pmatrix} t_2, & \ldots, & w_2 \\ t, u, & \ldots, & w, & z \\ t_1, & \ldots, & w_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Appelons $t_i, \ldots, t_p$ les p points communs à l'ensemble des racines en t de $A = 0$ et de $B = 0$ (lorsque $u, v, \ldots, w$ prennent les valeurs de l'intégration), et au segment $t_1 t_2$ de l'axe des quantités réelles; considérons alors les éléments de l'intégrale relatifs à toutes les valeurs de $u, v, \ldots, w$ considérées dans l'intégration et à ces p valeurs de t; leur somme est

$$S = dt \int_{u_1}^{u_2} \cdots \int_{w_1}^{w_2} \frac{H(t_i, u, v, \ldots, w, z)}{G(t_i, u, v, \ldots, w, z)} du\, dv \ldots dw + \ldots$$
$$+ dt \int_{u_1}^{u_2} \cdots \int_{w_1}^{w_2} \frac{H(t_p, u, v, \ldots, w, z)}{G(t_p, u, v, \ldots, w, z)} du\, dv \ldots dw;$$

or $G(t_i, u_1, v, \ldots, w, z), \ldots, G(t_p, u_1, v, \ldots, w, z)$ sont différents de zéro puisque z n'est pas sur la coupure; la somme S est donc infiniment petite et l'on peut négliger, par suite, les termes pour lesquels $A(t, u, \ldots, w)$ ou $B(t, u, \ldots, w)$ s'annulent. Comme pour tous les autres éléments le rapport $\frac{A(t, u, \ldots, w)}{B(t, u, \ldots, w)}$ est réel et de signe constant, le théorème est immédiat, d'après un raisonnement complètement analogue à celui que nous avons employé dans le n° 5 du Chapitre I.

Remarque. — Si les circuits des pôles et des zéros admettent des branches infinies s'éloignant dans des directions asymptotiques différentes, on pourra encore limiter les régions où $F(z)$ peut s'annuler; soient $\alpha, \ldots, \lambda$ les directions des demi-droites suivant lesquelles

les pôles et les zéros de $\frac{H(t, u, \ldots, w, z)}{G(t, u, \ldots, w, z)}$ tendent vers l'infini. Soient $O\alpha$ et $O\lambda$ les directions asymptotiques extrêmes; le seul cas intéressant pour nous est celui dans lequel l'angle positif de $O\lambda$ avec $O\alpha$ est inférieur à π. Considérons, comme précédemment (Chapitre I, n° 8), deux droites respectivement parallèles à $O\alpha$ et $O\lambda$, venant de l'infini; en se déplaçant elles rencontrent l'ensemble des pôles et zéros en z de $\frac{H(z)}{G(z)}$ respectivement en a et l, leur position correspondante étant $O'\alpha$ $O'\lambda$. Le lieu des points d'où l'on voit ces deux droites $O'\alpha$, $O'\lambda$, sous un angle $\frac{\pi}{\alpha+\beta}$, se compose pour la première droite $O'\alpha$ de deux droites $O'm$, $O'n$; de même le lieu des points d'où l'on voit O', sous un angle $\frac{\pi}{\alpha+\beta}$, se compose de deux droites $(O'p, O'q)$ également inclinées sur le prolongement $O'\lambda'$ de $O\lambda$ et faisant avec $O'\lambda'$ un angle $\frac{\pi}{\alpha+\beta}$; θ étant l'angle inférieur à π de $O\alpha$ avec $O\lambda$, sous la condition $\theta < \frac{2\pi}{\alpha+\beta}$, les deux régions limitées par l'ouverture $(O'm', O'n)$, $(O'p, O'q)$ auront une partie commune à l'intérieur de laquelle $F(z)$ ne peut s'annuler.

3. Nous allons appliquer les propositions et les considérations qui précèdent à des fonctions non uniformes qui, en dehors de leurs coupures, sont représentables par des intégrales définies qui rentrent dans la classe étudiée dans ce Chapitre. Tout d'abord nous nous occuperons des intégrales de fractions rationnelles.

Soit $\varphi(z)$ une fraction rationnelle dont le zéro et les pôles sont situés en ligne droite avec l'origine; proposons-nous de déterminer les zéros de l'intégrale $\int_0^z \varphi(z)dz$ lorsque la variable z décrit des circuits ne rencontrant pas les coupures de cette fonction; à cet effet, nous écrirons $\varphi(z)$ sous la forme qui suit :

$$\varphi(z) = \frac{A(z-a_1)\ldots(z-a_k)}{(z-b_1)\ldots(z-b_{k'})},$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ sont situés sur une même droite D passant par l'origine O.

Nous voyons que l'intégrale

$$F(z) = \int_0^z \varphi(z)\,dz$$

aura la représentation uniforme

$$\text{(I)} \qquad F(z) = \int_0^z \varphi(z)\,dz = \int_0^1 \frac{A\,t^{k-k'}\left(z-\frac{a_1}{t}\right)\cdots\left(z-\frac{a_k}{t}\right)}{\left(z-\frac{b_1}{t}\right)\cdots\left(z-\frac{b_{k'}}{t}\right)};$$

cette identité (I) n'a lieu qu'en dehors de la coupure définie de la façon suivante : appelons b_h, b_g les deux pôles de $\varphi(z)$ situés sur la droite D, ne comprenant entre eux ni l'origine O ni aucun pôle de $\varphi(z)$; la coupure de $F(z)$ sera la droite D, moins le segment de cette droite compris entre b_h et b_g. Si tous les points $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ se trouvaient d'un même côté de l'origine sur D, la coupure serait la portion de D, partant du point b le plus voisin de O, qui s'étend à l'infini du côté des pôles de $\varphi(z)$. Quand la variable décrit des contours ne coupant pas les coupures ainsi déterminées, la fonction $F(z)$ est uniforme et donnée par l'identité (I). Or, nous pouvons appliquer le théorème III à la fonction $F(z)$ représentée par l'intégrale définie de l'identité (I); deux cas bien nets se présenteront dans l'application que nous ferons du théorème III : 1° les points $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ ne sont pas tous situés du même côté de l'origine; alors nous désignerons par A et B les deux points consécutifs de l'ensemble des pôles et des zéros de $\varphi(z)$ qui comprennent l'origine; 2° les points a et b sont situés d'un même côté de l'origine; le point des pôles et zéros de $\varphi(z)$ le plus rapproché de l'origine sera désigné ici par A. De cette discussion résulte, d'après le théorème III, la proposition qui suit :

La fraction rationnelle $\varphi(z)$, dont le numérateur a pour racines a_1, $a_2, \ldots, a_k$ et le dénominateur $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$, a tous ses pôles et ses zéros situés sur une même droite D *passant par le point z_0; soient* A *et* B *les deux points consécutifs de l'ensemble $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ qui comprennent z_0, et b_h, b_g les points correspondants pour l'ensemble $(b_1, b_2, \ldots, b_{k'})$. Lorsque la variable z décrit des contours ne rencontrant*

pas les coupures $\infty \overrightarrow{b_h}$, $\overrightarrow{b_g \infty}$ (*situées sur la droite* D) *de la fonction*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz,$$

cette fonction $F(z)$ *ne peut s'annuler qu'en dehors du losange de sommets* A *et* B *dont les côtés font un angle* $\frac{\pi}{k+k'}$ *avec la droite* D.

Le cas où les points $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ sont situés sur D d'un même côté de z_0 nous conduit à cette seconde proposition :

Soit une fonction définie par l'intégrale

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz,$$

où $\varphi(z)$ *est une fraction rationnelle dont le numérateur a pour racines* $a_1, a_2, \ldots, a_k$, *le dénominateur* $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$, *les points* $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ *étant situés avec* z_0 *sur une droite* D, *et du même côté de* z_0. *Désignons par* A *et* b_h *les points respectifs des ensembles* $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'})$ *et* $(b_1, b_2, \ldots, b_{k'})$ *qui sont les plus rapprochés de* z_0. *Lorsque* z *décrit des contours ne rencontrant pas le segment de* D, $\overrightarrow{b_h \infty}$ *tracé du côté des pôles de* $\varphi(z)$, *la fonction* $F(z)$ *a ses zéros dans l'angle de sommet* A, *symétrique par rapport à* D, *d'ouverture* (*tournée vers les points a et b*) *égale à* $\frac{2\pi(k+k'-1)}{k+k'}$.

4. Les deux corollaires du théorème III, que nous venons d'énoncer, trouveront leurs applications pour des valeurs réelles des pôles et zéros de $\varphi(z)$. Si les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ ne sont pas du même signe, les points A et B, dont nous avons parlé dans le premier corollaire, deviennent ici la limite supérieure des racines négatives et la limite inférieure des racines positives du numérateur et du dénominateur de $\varphi(z)$; les quantités b_g, b_h sont les limites analogues pour les racines du dénominateur seulement. Dans le cas où $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ sont des quantités réelles de même signe, les points b_h et A du second corollaire sont respectivement les limites supérieures des ensembles $(b_1, b_2, \ldots, b_{k'})$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'})$,

si toutes les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ sont négatives; b_h et A seront, au contraire, les limites inférieures des ensembles correspondants si toutes ces quantités sont positives. Le point z_0 est, bien entendu, ici, un point quelconque de l'axe des quantités réelles.

Après avoir étudié les zéros des intégrales de fractions rationnelles, nous appliquerons le théorème III à la détermination des intégrales

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}},$$

où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont des polynomes. Ces fonctions se rattachent à nos intégrales définies multiples, dans la représentation analytique uniforme que nous allons donner des intégrales portant sur des irrationnelles de la forme indiquée.

Ainsi considérons les intégrales

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}} \qquad (\lambda > 1),$$

où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont deux polynomes; $\psi(z)$ n'a que des racines simples et les racines de $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont situées sur une même droite D avec z_0. Pour simplifier les démonstrations, je supposerai, dans les explications, que z_0 se confond avec l'origine. Cherchons tout d'abord une représentation uniforme de l'intégrale

$$F(z) = \int_{0}^{z} \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}}.$$

A cet effet, je rappellerai un théorème que j'ai donné dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (11 mars 1895); c'est une généralisation de la proposition de Laguerre sur la période elliptique $K(z)$; ce théorème est contenu dans l'identité suivante

$$(1 - zx)^{-\lambda} = \frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{y^{\lambda-1}(1-y)^{-\lambda}\,dy}{(1 - zxy)} \qquad (0 < \lambda < 1);$$

elle a lieu quand la variable z décrit, pour prendre sa valeur, des circuits ne coupant pas la droite $z = \frac{1}{xy}$, où x est une quantité constante

réelle ou imaginaire, la variable y prenant ses valeurs entre o et 1. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\psi^{-\frac{1}{\lambda}}(tz) &= [B_0(tz-b_1)\ldots(tz-b_{k'})]^{-\frac{1}{\lambda}}\\ &= \left[B_0(-1)^{k'}b_1b_2\ldots b_{k'}\left(1-\frac{tz}{b_1}\right)\cdots\left(1-\frac{tz}{b_{k'}}\right)\right]^{-\frac{1}{\lambda}};\end{aligned}$$

or, si nous écrivons le polynome $\psi(z)$ sous sa forme

$$\psi(z) = B_0z^{k'}+B_1z^{k'-1}+\ldots+B_{k'},$$

on a

$$B_0(-1)^{k'}b_1b_2\ldots b_{k'} = B_{k'}.$$

Nous aurons donc les deux identités suivantes

$$\psi^{-\frac{1}{\lambda}}(tz) = \frac{1}{B_{k'}^{\frac{1}{\lambda}}}\left(1-\frac{tz}{b_1}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}\cdots\left(1-\frac{tz}{b_{k'}}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}$$

et

$$(\mathrm{I})\quad\left\{\begin{aligned}\psi^{-\frac{1}{\lambda}}(tz) &= \frac{1}{B_{k'}^{\frac{1}{\lambda}}}\frac{(\sin\lambda\pi)^{k'}}{\pi^{k'}}\\ &\times\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{y_1^{\frac{1}{\lambda}-1}\ldots y_{k'}^{\frac{1}{\lambda}-1}(1-y_1)^{-\frac{1}{\lambda}}\ldots(1-y_{k'})^{-\frac{1}{\lambda}}dy_1\ldots dy_{k'}}{\left(1-\frac{y_1tz}{b_1}\right)\cdots\left(1-\frac{y_{k'}tz}{b_{k'}}\right)}.\end{aligned}\right.$$

En dehors des coupures $z=\frac{b_1}{y_1t}, \ldots, z=\frac{b_{k'}}{y_{k'}t}$, où les y varient entre o et 1 ainsi que t, on peut écrire ainsi la fonction $F(z)$

$$F(z) = \int_0^z\frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}} = \int_0^1\frac{\varphi(tz)z\,dt}{\sqrt[\lambda]{\psi(tz)}} = z\int_0^1\varphi(tz)\psi^{-\frac{1}{\lambda}}(tz)\,dt.$$

L'identité (I) nous conduit à la suivante :

$$\begin{aligned}F(z) &= \frac{z(\sin\lambda\pi)^{k'}}{B_k^{\frac{1}{\lambda}}\pi^{k'}}\\ &\times\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{\varphi(tz)(y_1\ldots y_{k'})^{\frac{1}{\lambda}-1}(1-y_1)^{-\frac{1}{\lambda}}\ldots(1-y_{k'})^{-\frac{1}{\lambda}}dy_1\ldots dy_{k'}dt}{\left(1-\frac{y_1tz}{b_1}\right)\cdots\left(1-\frac{y_{k'}tz}{b_{k'}}\right)}.\end{aligned}$$

Or, cette intégrale multiple, d'ordre $k'+1$, satisfait aux conditions d'application du théorème III. Pour le voir, écrivons l'intégrale précédente sous la forme

$$F(z)=\frac{z(\sin\lambda\pi)^{k'}}{B_0 B_{k'}^{\frac{1}{\lambda}-1}\pi^{k'}}$$
$$\times\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{\varphi(tz)(y_1y_2\ldots y_{k'})^{\frac{1}{\lambda}-2}[(1-y_1)\ldots(1-y_{k'})]^{-\frac{1}{\lambda}}dy_1\ldots dy_{k'}dt}{t^{k'}\left(z-\frac{b_1}{y_1t}\right)\cdots\left(z-\frac{b_{k'}}{y_{k'}t}\right)}.$$

Remarquons, de plus, que $\varphi(z)$ peut s'écrire

$$\varphi(z)=A_0z^k+A_1z^{k-1}+\ldots+A_{k'};$$

$\varphi(tz)$ est ainsi un polynome en t et z dont le coefficient de z^k est A_0t^k; nous pouvons faire sortir A_0 du signe d'intégration et $\varphi(z)$ se présentera alors sous la forme d'un polynome en z de degré k dont le coefficient de z^k est t^k; ce coefficient ne s'annulant pas entre 0 et 1 et gardant un signe constant, ainsi que

$$(y_1y_2\ldots y_{k'})^{\frac{1}{\lambda}-2}[(1-y_1)\ldots(1-y_{k'})^{-\frac{1}{\lambda}}$$

et $t_{k'}$, la fonction $F(z)$ définie par l'intégrale

$$F(z)=\frac{A_0z(\sin\lambda\pi)^{k'}}{B_0B_{k'}^{\frac{1}{\lambda}-1}\pi^{k'}}$$
$$\times\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{\left(t^kz^k+\frac{A_1}{A_0}t^{k-1}z^{k-1}+\ldots+\frac{A_{k'}}{A_0}\right)(y_1y_2\ldots y_{k'})^{\frac{1}{\lambda}-2}[(1-y_1)\ldots(1-y_{k'})]^{-\frac{1}{\lambda}}dy_1dy_2\ldots dy_{k'}}{t^{k'}\left(z-\frac{b_1}{y_1t}\right)\cdots\left(z-\frac{b_{k'}}{y_{k'}t}\right)}$$

satisfait aux conditions d'application du théorème III de ce Chapitre. Comme dans l'étude des intégrales de fractions rationnelles, nous distinguerons deux cas dans l'application de ce théorème; nous sommes ainsi conduits à ces deux propositions :

Soient $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ deux polynomes; le premier est de degré k; le second, de degré k', a pour racines $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$; de plus, les racines

de $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *sont sur une même droite* D *passant par* z_0; *désignons par* A *et* B *les deux points consécutifs de l'ensemble des zéros de* $\varphi(z)$ *et de* $\psi(z)$, *qui comprennent* z_0, b_h *et* b_g *étant les points analogues de l'ensemble des racines de* $\psi(z)$ *seulement. Lorsque la variable* z *décrit des contours ne rencontrant pas les coupures* $\overrightarrow{\infty b_h}$, $\overrightarrow{b_g \infty}$ *sur la droite* D *de la fonction*

$$F(z) = \int_0^z \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}} \qquad (\lambda > 1),$$

la fonction $F(z)$ *ainsi définie ne peut s'annuler, sauf pour* $z = z_0$, *qu'en dehors du losange de sommets* A *et* B *dont les côtés forment un angle* $\frac{\pi}{k+k'}$ *avec la droite* D.

Quand les racines de $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont toutes situées d'un même côté de z_0 sur D, nous avons cette seconde proposition :

Les deux polynomes $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *ont leurs racines situées du même côté du point* z_0 *sur la droite* D. *Soient* A *et* b_h *les points respectifs de l'ensemble des racines de* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *et de l'ensemble des racines de* $\psi(z)$ *seulement, qui sont le plus rapprochés de* z_0. *Lorsque* z *décrit des contours ne rencontrant pas le segment de droite* $\overrightarrow{b_h \infty}$ *qui, par rapport à* b_h, *s'étend à l'infini du côté des racines de* $\varphi(z)$ *et de* $\psi(z)$ *sur la droite* D, *la fonction*

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}} \qquad (\lambda > 1)$$

a ses zéros (sauf pour $z = z_0$*) dans l'angle symétrique par rapport à* D, *de sommet* A, *d'ouverture* $\frac{2\pi(k+k'-1)}{k+k'}$ *tournée vers les racines des polynomes* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$.

Voici quelques fonctions particulièrement simples qui rentrent dans la classe d'intégrales dont nous étudions les zéros :

Tout d'abord, considérons la fonction arc sin z déterminée par l'intégrale

$$F(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Ici $z_0 = 0$, $\lambda = 2$, $\psi(z) = (1 - z)(1 + z) = -(z - 1)(z + 1)$; le polynome $\psi(z)$ a donc pour racines 1 et -1; les sommets A et B deviennent ici les points 1 et -1 de l'axe des quantités réelles; l'angle $\frac{\pi}{k + k'}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$, puisque le polynome $\varphi(z)$ se réduit à la constante 1 et que $\psi(z)$ est de degré 2. La fonction $\arcsin z$ donne lieu à la remarque suivante :

Lorsque la variable z, pour prendre sa valeur, décrit des circuits ne rencontrant pas les segments $\overrightarrow{-\infty \ldots -1}$ et $\overrightarrow{+1 \ldots +\infty}$ de l'axe des quantités réelles, la fonction $\arcsin z$ *ne peut s'annuler (sauf pour $z = 0$) que pour des valeurs de z dont la partie réelle est plus grande que l'unité en valeur absolue.*

L'intégrale elliptique

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k_0^2 z^2)}}$$

donne lieu à une remarque analogue. Ici

$$z_0 = 0, \qquad \lambda = 2, \qquad \varphi(z) = 1, \qquad k = 0, \qquad \psi(z) = (1 - z^2)(1 - k_0^2 z^2);$$

le degré de $\psi(z)$, k', est égal à 4; les sommets A et B de la première proposition sur les intégrales de la forme

$$\int_0^z \frac{\varphi(z)\, dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}}$$

sont ici les points -1 et $+1$ de l'axe des quantités réelles, puisque $k_0 < 1$; b_h et b_g se confondent d'ailleurs avec A et B; enfin l'angle $\frac{\pi}{k + k'} = \frac{\pi}{4}$. De là se déduit cette proposition sur l'intégrale elliptique normale :

Lorsque la variable z décrit des circuits ne rencontrant pas les segments $\overrightarrow{-\infty \ldots -1}$ et $+1 \ldots +\infty$ de l'axe des quantités réelles, l'intégrale elliptique

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k_0' z^2)}}$$

ne peut s'annuler (sauf pour $z = 0$) qu'à l'extérieur du carré de sommets opposés $+1$ et -1.

Plus généralement, si nous considérons les intégrales hyperelliptiques de première et de seconde espèce, où le radical carré porte sur un polynome $\psi(z)$ à racines réelles $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$, ces intégrales auront leurs zéros limités ainsi : désignons par b_h la limite supérieure des racines négatives et par b_g la limite inférieure des racines positives : lorsque z décrit des circuits qui ne rencontrent pas les coupures $-\infty, \ldots, \overrightarrow{b_h}, b_g, \ldots, \overrightarrow{+\infty}$ (sur l'axe des quantités réelles), les intégrales hyperelliptiques, ainsi définies, ne peuvent s'annuler (sauf pour $z = 0$) qu'en dehors du losange de sommets $b_h b_g$, dont les côtés font un angle $\frac{\pi}{k'}$ avec l'axe des quantités réelles.

5. Le théorème III se prête aussi, avec la plus grande facilité, à l'étude de fonctions qui se présentent comme périodes d'intégrales abéliennes ou comme intégrales hypergéométriques.

Auparavant, j'ouvrirai une parenthèse pour rappeler le théorème II de ce Chapitre, en l'étendant au cas où les discontinuités de l'intégrale multiple s'étendent à l'infini.

Théorème IV. — *Si $A(t, u, \ldots, w)$ garde un signe constant quand t varie de t_1 à t_2, ..., w de w_1 à w_2, la fonction*

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{w_1}^{w_2} \frac{A(t, u, \ldots, w)\, dt\, du \ldots dw}{z - G(t, \ldots, w)}$$

a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant les points à distance finie ou à l'infini

$$z = G\begin{pmatrix} t_2, & \ldots, w_2 \\ t_1, u, & \ldots, w \\ t_1, & \ldots, w_1 \end{pmatrix}.$$

Tout d'abord, au moyen du théorème IV, nous allons retrouver les propriétés bien connues des périodes elliptiques $4k$ et $2ik'$. A cet effet, j'emploierai la représentation uniforme de ces quantités considérées comme fonctions du module, représentation donnée par La-

guerre et qui résulte de l'identité suivante :

$$k(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(1 - z\,x^2y^2)\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}};$$

cette identité a lieu à l'extérieur de toute la partie positive de l'axe des x, comptée depuis une distance de l'origine égale à l'unité.

Appliquons à l'intégrale double, que nous venons d'obtenir, le théorème IV après avoir mis $k(z)$ sous cette forme

$$\begin{aligned} k(z) &= \frac{2}{\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(1 - z\,x^2y^2)\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{\left(z - \frac{1}{x^2y^2}\right)x^2y^2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}. \end{aligned}$$

Ici, dans la dernière intégrale double que nous venons d'obtenir, on a

$$u = x, \qquad v = y, \qquad A(u, v) = \frac{1}{x^2y^2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}, \qquad G(u, v) = \frac{1}{x^2y^2}.$$

Or, lorsque x et y prennent toutes les valeurs réelles entre 0 et 1,

$$\frac{1}{x^2y^2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

est une quantité réelle de signe constant; de plus, la ligne de discontinuité de l'intégrale est l'ensemble de points définis par $z = \frac{1}{x^2y^2}$, où x et y varient entre 0 et 1; c'est donc la portion de l'axe des quantités réelles, s'étendant de l'unité à l'infini positif. D'où cette proposition connue :

Les fonctions $k(z)$ et $k'(z)$ ne peuvent s'annuler, à l'extérieur de leur coupure respective $+1 \ldots \overrightarrow{+\infty}$ et $0 \ldots \overrightarrow{-\infty}$, que pour des valeurs infinies du module z.

Comme corollaire des propriétés de $k(z)$ et de $k'(z)$, nous retrouvons ce théorème :

La fraction $\frac{ik'}{k}$ *ne peut s'annuler, à l'extérieur de ses coupures* $+1 \ldots \overrightarrow{+\infty}$ *et* $0 \ldots \overrightarrow{-\infty}$ *que pour des valeurs infinies du module.*

Voici quelques propriétés des intégrales hypergéométriques, qui se rattachent bien simplement au théorème IV.

Je considère les intégrales $\mathfrak{J}(z)$, où les limites sont 1 et $+\infty$,

$$\mathfrak{J}(z) = \int_1^\infty u^a (u-1)^b (u-z)^\lambda \, du,$$

où $a > -1$, $b > -1$, $\lambda > -1$, $a + b + \lambda < -1$, ce qui entraîne $-1 < \lambda < 1$. De plus, nous supposerons λ négatif, c'est-à-dire compris entre -1 et 0.

Par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, nous ramènerons les limites à être 1 ou 0; $\mathfrak{J}(z)$ s'écrit ainsi :

$$\mathfrak{J}(z) = \int_0^1 t^{-(a+b+\lambda+1)} (1-t^2)^b (1-tz)^\lambda \, dt.$$

L'intégrale $\mathfrak{J}(z)$ admet une représentation uniforme, que nous obtiendrons par l'identité rappelée précédemment :

$$(1-zx)^{-\lambda} = \frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{y^{\lambda-1}(1-y)^{-\lambda}\, dy}{(1-zxy)} \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Nous arrivons ainsi à l'expression uniforme de $\mathfrak{J}(z)$,

$$\mathfrak{J}(z) = -\frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^{-\lambda-1}(1-y)^\lambda t^{-(a+b+\lambda+2)}(1-t)^b \, dt}{(1-zty)},$$

expression valable en dehors de la portion $1 \ldots +\infty$ de l'axe des quantités réelles.

En dernier lieu nous avons cette identité

$$\mathrm{J}(z) = +\frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^{-\lambda-2}(1-y)^\lambda t^{-(a+b+\lambda+3)}(1-t)^b \, dt}{\left(z - \frac{1}{ty}\right)}.$$

Comme $y^{\lambda-2}(1-y)^{-\lambda}t^{-(a+b+\lambda+3)}(1-t)^b$ conserve un signe constant pour toutes les valeurs de t et y comprises entre 0, 1, les conditions d'application du théorème IV se trouvent remplies.

Les intégrales hypergéométriques

$$J(z)=\int_1^\infty u^a(u-1)^b(u-z)^\lambda\,du, \qquad \text{où } -1<\lambda<0,$$

ne s'annulent jamais en dehors de leur coupure $1\ldots+\infty$.

Nous allons continuer l'étude de ces intégrales $J(z)$, en reprenant l'expression uniforme

$$J(z)=-\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\int_0^1\int_0^1\frac{y^{-\lambda-1}(1-y)^{+\lambda}t^{-(a+b+\lambda+2)}(1-t)^b\,dy\,dt}{(1-zty)}.$$

Faisons $z=X+iY$. En séparant la partie réelle et la partie imaginaire de $J(z)$, nous arrivons à cette représentation de $J(z)$

$$J(z)=-\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\left[\int_0^1\int_0^1\frac{(1-Xty)y^{-\lambda-1}(1-y)^{\lambda}t^{-(a+b+\lambda+2)}(1-t)^b\,dy\,dt}{(1-Xty)^2+Y^2t^2y^2}\right.$$
$$\left.+iY\int_0^1\int_0^1\frac{y^{-\lambda}(1-y)^{\lambda}t^{-(a+b+\lambda+1)}(1-t)^b\,dy\,dt}{(1-Xty)^2+Y^2t^2y^2}\right].$$

Or, comme λ est compris entre -1 et 0, $-\sin\lambda\pi$ est positif; de plus tous les éléments qui figurent dans la deuxième intégrale du second membre de l'égalité sont positifs; ces deux intégrales sont donc essentiellement positives. Ainsi :

Les intégrales hypergéométriques

$$J(z)=\int_1^\infty u^a(u-1)^b(u-z)^\lambda\,du, \qquad \text{où } 0>\lambda>-1,$$

ont leur partie imaginaire de même signe que la partie imaginaire de la variable, lorsque la variable décrit des chemins ne traversant pas la coupure $1\overrightarrow{\ldots}+\infty$.

Une proposition analogue nous sera fournie par la considération de l'intégrale figurant dans la partie réelle de $J(z)$; on voit que pour

toutes les valeurs de X inférieures à 1, $1 - Xty$ est positif; l'intégrale double correspondante est par suite positive et, comme $-\sin\lambda\pi > 0$, la partie réelle de $J(z)$ est aussi positive.

Pour toutes les valeurs de la variable de partie réelle inférieure à 1, *les intégrales hypergéométriques*

$$J(z) = \int_3^\infty u^a (u-1)^b (u-z)^\lambda \, du, \qquad \text{où } -1 < \lambda < 0,$$

ont leur partie réelle positive, si les circuits que décrit la variable ne traversent pas la coupure $\overrightarrow{1 \ldots +\infty}$.

Je vais appliquer les théorèmes qui précèdent à l'étude de la série hypergéométrique de Gauss à l'intérieur de son cercle de convergence. Soit

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma} z + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+p-1)}{12\ldots p\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)} z^p + \ldots$$

la série de Gauss relative aux paramètres α, β, α, où $\alpha > \beta$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Or, à l'intérieur du cercle de convergence de rayon 1, on a l'identité

$$\int_1^\infty u^{-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{z}{u}\right)^{-\alpha} du$$
$$= \int_1^\infty u^{-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1} du \left[1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma} z + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+p-1) z^p}{12\ldots p\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)}\right]\ldots,$$

c'est-à-dire

$$\int_1^\infty u^{-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{z}{u}\right)^{-\alpha} du = F(\alpha, \beta, \gamma, z) \int_3^\infty u^{-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1} du;$$

mais l'intégrale $\int_1^\infty u^{-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1} du$ est une quantité positive avec la détermination initiale des radicaux que nous avons choisie; ainsi les trois propositions énoncées sur les intégrales hypergéométriques sont applicables à $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, puisque l'intégrale du premier membre de la dernière identité rentre dans la classe d'intégrales étudiées, car

$0 > -\alpha > -1$, et la variable restant à l'intérieur du cercle de convergence de rayon 1 de centre l'origine, sa partie réelle est inférieure à 1. Ainsi :

La série hypergéométrique de Gauss, $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, *où* $\gamma > \beta$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$, *ne s'annule jamais à l'intérieur de son cercle de convergence; sa partie réelle garde un signe constant et sa partie imaginaire a le même signe que la partie imaginaire de la variable.*

Je terminerai ce Chapitre par l'application du théorème IV aux périodes de certaines intégrales abéliennes.

Soit $F(z)$ une fonction définie par l'intégrale

$$f(z) = \int_{u_0 z_0}^{uz} \frac{dz}{u},$$

sur la surface de Riemann correspondant à la fonction algébrique u, déterminée par l'identité

$$u^2 = (z - a_1) \ldots (z - a_k)(z - y),$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont des quantités réelles ou complexes représentées par des points en ligne droite D. Considérons alors les périodes de l'intégrale abélienne relatives aux points $a_1, \ldots, a_k$ comme fonctions de y, et cherchons la distribution des zéros de ces fonctions. Je prends une de ces périodes correspondant à deux points consécutifs de l'ensemble $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sur D

$$F(y) = 2 \int_{a_h}^{a_i} \frac{dz}{u}.$$

La fonction $F(y)$ s'écrit en remplaçant u par sa valeur

$$F(y) = 2 \int_{a_h}^{a_i} \frac{dz}{\sqrt{(z - a_1) \ldots (z - a_k)}\sqrt{z - y}}.$$

Or le radical $\sqrt{(z - a_1) \ldots (z - a_k)}$ conserve un argument constant quand z varie entre a_h et a_i.

Faisons de $F(y)$ une représentation uniforme par la formule si sou-

vent employée qui donne ici cette identité

$$F(y)=\frac{2\sqrt{a_i-a_h}}{\pi}\int_0^1\int_0^1\frac{dt\,d\theta}{\sqrt{(z-a_1)\ldots(z-a_k)(1-\theta)\theta t}\left[1-\frac{(y-a_h)\theta}{t(a_i-a_h)}\right]},\quad \text{où } z=a_h+(a_i-a_h)t.$$

Lorsque z varie entre a_h et a_i ou t entre 0 et 1, le radical

$$\sqrt{(z-a_1)\ldots(1-a_k)(1-\theta)\theta t}$$

a un argument constant. De plus, nous pouvons transformer définitivement ainsi $F(y)$:

$$F(y)=\frac{2(a_i-a_h)^{\frac{3}{2}}}{\pi}\int_0^1\int_0^1\frac{dt\,d\theta}{\sqrt{\frac{(z-a_1)\ldots(z-a_k)(1-\theta)\theta^3}{t}}\left[\frac{t(a_i-a_h)}{\theta}+a_h-y\right]}.$$

Notre théorème IV est alors applicable et conduit à ce résultat :

Étant donnée une intégrale abélienne

$$f(z)=\int\frac{dz}{u},$$

relative à la fonction algébrique u, définie par l'identite

$$u^2=(z-a_1)\ldots(z-a_k)(z-y),$$

si les points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont en ligne droite, les périodes de cette intégrale (qui correspondent à deux points consécutifs a_h, a_i de l'ensemble a_1, a_2, ..., a_k sur la droite D *de ces points), considérées comme fonctions de y, ne peuvent s'annuler en dehors du segment $\overline{a_h a_i}$ de la droite* D.

Je termine ici mon étude préliminaire sur les zéros des fonctions; dans cette première Partie je ferai remarquer que j'ai pu caractériser certaines classes de fonctions discontinues ou multiformes par une propriété de leurs zéros qui leur fût commune et par suite les rattachât entre elles; seulement par elle-même la méthode géométrique que j'ai employée ne peut viser qu'un nombre relativement restreint de classes de fonctions.

Dans la seconde Partie de ce travail, en utilisant le théorème de

Cauchy et le théorème III (Chapitre I), je vais parvenir à étendre l'application de mes propositions aux fonctions uniformes quelconques et généraliser le problème que je me suis proposé dans la première Partie. Le problème général que j'ai en vue est le suivant : étudier la distribution des valeurs de la variable qui font prendre à une fonction uniforme une valeur donnée u.

SECONDE PARTIE.

SUR LA DISTRIBUTION DES VALEURS DE LA VARIABLE QUI FONT PRENDRE A UNE FONCTION UNE VALEUR DONNÉE u.

Pour résoudre le problème que j'ai en vue, je m'appuierai sur le théorème suivant qui n'est qu'un cas particulier du théorème I (première Partie, Chapitre II) :

Soit la fonction $f(z)$ définie par l'intégrale

$$f(z) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{H(t, z)\,dt}{G(t, z)},$$

où $H(t, z)$ et $G(t, z)$ sont des fonctions holomorphes en t et des polynomes en z de degrés respectifs α et β, les coefficients des termes de degré le plus élevé en z de $H(t, z)$ et $G(t, z)$ étant respectivement $A(t)$ et $B(t)$ différents de zéro pour toutes les valeurs de t, de t_1 à t_2. Si le rapport $\frac{A(t)}{B(t)}$ est réel et garde un signe constant pour toutes les valeurs de t, entre t_1 et t_2, en désignant par C un cercle de surface minima entourant les pôles et zéros de $\frac{H(t, z)}{G(t, z)}$ lorsque t varie, les zéros de $f(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à C, de rayon $\frac{R}{\sin \frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}}$, R étant le rayon de C.

Considérons une fonction uniforme $F(z)$ uniquement assujettie à avoir toutes ses discontinuités à distance finie; de plus, pour des valeurs infinies de z, $F(z)$ prend une valeur A_0. Déterminons un cercle C aussi voisin qu'on le veut, mais ne le coupant pas, du contour convexe minimum entourant les discontinuités de $F(z)$. D'après le théorème de Cauchy, $F(z)$ étant holomorphe en dehors de C et prenant la valeur A_0 sur le cercle de l'infini, on a l'identité

$$F(z) = A_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(x)\,dx}{x-z}$$

pour toutes les valeurs de z à l'extérieur de C supposé parcouru dans le sens indirect, c'est-à-dire en laissant son aire à droite.

De l'identité précédente, nous déduisons qu'en dehors du cercle C (à l'extérieur), les valeurs de z, qui font prendre à $F(z)$ la valeur u, sont données par l'équation

$$u = A_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(x)\,dx}{x-z},$$

qui s'écrit encore

$$\text{(I)} \qquad 0 = A_0 - u + \frac{1}{2\pi}\int_0^{-2\pi} \frac{F(x)\,R e^{i\varphi}\,d\varphi}{x-z},$$

en faisant $x = a + Re^{i\varphi}$, R étant le rayon du cercle C et a son centre.

Or

$$A_0 - u = -\frac{(A_0 - u)}{2\pi}\int_0^{-2\pi} d\varphi.$$

L'équation (I) devient

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{-2\pi}\left[-(A_0 - u) + \frac{F(x)\,R e^{i\varphi}}{x-z}\right] d\varphi.$$

Dans l'intégrale du second membre, donnons à $d\varphi$ une valeur constante; de plus, divisons tous les termes de l'intégrale par $A_0 - u$; l'équation en z s'écrit définitivement

$$\text{(II)} \qquad 0 = \int_0^{-2\pi}\left[\frac{z - x + \dfrac{F(x)\,R e^{i\varphi}}{A_0 - u}}{z - x}\right] d\varphi.$$

Or, les quantités $\dfrac{z - x + \dfrac{F(x) R e^{i\varphi}}{A_0 - u}}{z - x}$ sont des fractions rationnelles en z, telles que, x ou φ variant, la différence des degrés du numérateur et du dénominateur est constante : c'est zéro; de plus, le rapport des termes en z est l'unité. Nous pouvons alors appliquer le théorème mentionné en tête de cette seconde Partie. Ici l'ensemble des pôles des fractions rationnelles considérées, lorsque φ varie, est le cercle C; l'ensemble des zéros est défini par

$$z = x + \frac{F(x) R e^{i\varphi}}{A_0 - u}.$$

Désignons par M le module maximum de $F(z)$ sur le cercle C; nous voyons que les zéros seront à l'intérieur d'un cercle concentrique à C et de rayon $R\left(1 + \dfrac{M}{|A_0 - u|}\right)$; par suite, les zéros de l'équation (II), ou encore les valeurs de z qui font prendre à $F(z)$ la valeur u sont déterminées par ce théorème :

THÉORÈME I. — *Soit* $F(z)$ *une fonction uniforme pour laquelle le point à l'infini est ordinaire; traçons un cercle* C *entourant toutes les discontinuités de* $F(z)$ *et d'ailleurs aussi rapproché qu'on le veut du contour convexe minimum entourant les discontinuités; appelons* M *le module maximum de* $F(z)$ *sur* C, R *étant le rayon de ce cercle. Les valeurs de* z, *pour lesquelles* $F(z)$ *prend une valeur* u, *sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à* C *et de rayon*

$$R\sqrt{2}\left(1 + \frac{M}{|A - u|}\right),$$

A *étant la valeur de* $F(z)$ *à l'infini.*

Remarque. — Pour abréger l'énoncé des théorèmes qui vont suivre j'entendrai par cercle de surface minima entourant un ensemble de points, un cercle aussi rapproché qu'on le veut du contour convexe de surface minima entourant ces points, mais ne rencontrant pas ce contour. De même, pour simplifier le langage, je désignerai par points singuliers, les pôles ou les discontinuités essentielles.

Le théorème I peut se mettre sous une autre forme qui nous sera utile par la suite :

THÉORÈME II. — *Une fonction* $F(z)$ *uniforme et pour laquelle l'infini*

est point ordinaire, est donnée par ses valeurs sur un cercle C *à l'extérieur duquel la fonction est holomorphe. La fonction* $F(z)$ *prenant à l'infini la valeur* A, M *désignant le module maximum de* $F(z)$ *sur le cercle* C *de rayon* R, *les valeurs de* z, *pour lesquelles* $F(z)$ *prend la valeur* u, *sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à* C *et de rayon*

$$R\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|A-u|}\right).$$

Du théorème II nous pouvons déduire une réciproque qui permet, en particulier, d'établir une distinction entre les fonctions uniformes et les fonctions non uniformes :

COROLLAIRE. — *Soit* $F(z)$ *une fonction donnée par ses valeurs le long d'un cercle* C *de rayon* R; *désignons par* M *son module maximum sur* C. *Si, pour des valeurs* z *s'éloignant à l'infini dans une direction* α, $F(z)$ *tend vers* u_1, *et si l'on peut trouver une quantité* u_2 *différente de* u_1, *telle qu'il y ait au moins une valeur de* z, z_2 *en dehors d'un cercle* Γ *concentrique à* C *et de rayon* $R\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|u_2-u_1|}\right)$, *qui fasse prendre à* $F(z)$ *la valeur* u_2 :

1° *La fonction* $F(z)$ *étant uniforme et régulière à l'infini admet nécessairement des points singuliers à l'extérieur de* C;

2° *La fonction* $F(z)$ *étant uniforme et n'ayant pas de discontinuités à distance finie en dehors de* C, *admet nécessairement le point à l'infini comme pôle au point singulier essentiel; si* u_1 *est fini, l'infini est point singulier essentiel;*

3° *La fonction* $F(z)$ *n'ayant pas de points singuliers à distance finie ou à l'infini en dehors de* C *ne peut être uniforme.*

En effet, dans le premier cas, si $F(z)$ n'admet pas l'infini comme pôle ou point singulier essentiel, en supposant qu'il n'existe pas de discontinuités à distance finie à l'extérieur de C, la fonction est holomorphe en dehors du cercle C; comme elle prend la valeur u_1 dans une direction, elle prend cette valeur dans toutes les directions. Le théorème I est alors applicable et la fonction $F(z)$ ne peut prendre la valeur u_2 qu'en des points z_2, à l'intérieur du cercle Γ concentrique à C et de rayon $R\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|u_2-u_1|}\right)$, ce qui est en contradiction avec

les conditions auxquelles $F(z)$ satisfait dans le corollaire. Il est donc nécessaire qu'il existe des discontinuités à distance finie à l'extérieur du cercle C.

Dans la seconde hypothèse la fonction $F(z)$ est uniforme et de plus est holomorphe sauf à l'infini à l'extérieur de C; si l'infini était point ordinaire pour $F(z)$, cette fonction prendrait en ce point la valeur u_1, et les valeurs z_2 de z pour lesquelles sa valeur est u_2, seraient à l'intérieur d'un cercle Γ concentrique à C de rayon $R\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|u_2-u_1|}\right)$, ce qui amène une contradiction avec les propriétés de $F(z)$ dans le corollaire.

Enfin, dans la troisième Partie, la fonction $F(z)$ étant finie pour des valeurs de z infiniment grandes a pour valeur u_1 à l'infini, si elle est uniforme autour de ce point; puisque $F(z)$ n'a pas de points singuliers en dehors de C, en la supposant uniforme, il n'existerait pas de valeurs z_2 de la variable faisant prendre à cette fonction la valeur u_2 en dehors du cercle Γ. Ainsi $F(z)$ ne peut être uniforme.

2. Nous allons maintenant étudier le problème de la limitation des régions du plan où une fonction peut prendre une valeur u, dans le cas d'une fonction uniforme quelconque. Nous nous servirons à cet effet du premier théorème (théorème I). Considérons les transformations définies par les égalités

$$z-\alpha=x, \tag{1}$$

$$x=\frac{\gamma}{y}. \tag{2}$$

Soit alors $F(z)$ la fonction uniforme sur laquelle nous raisonnons; nous aurons les identités

$$F(z)=\varphi(x)=\Phi(y).$$

Dans une région du plan de la variable complexe z, où $F(z)$ est holomorphe, traçons un cercle C (de rayon R, de centre P) sur lequel la fonction prend un module maximum M. Nous donnerons alors à α la valeur de l'affixe de P, dans la transformation (1). Décrivons de $P(\alpha)$ comme centre, un cercle E ayant pour rayon la distance de P à la

discontinuité la plus voisine de ce point. Par la première transformation, le cercle C se change en un cercle égal C_x dont le centre est l'origine O. Le cercle E se transforme en un cercle égal de centre O à l'intérieur duquel est C_x. Dans la seconde transformation, prenons $\gamma = R^2$; celle-ci équivaut à une inversion de pôle O, la puissance d'inversion étant R^2, suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des quantités réelles : ainsi, le cercle C_x se change en lui-même et C_y n'est autre que C_x. Les points à l'extérieur de C_x et, *a fortiori*, les points à l'extérieur de E_x, parmi lesquels se trouvent les discontinuités de $\varphi(x)$, se changent en points à l'intérieur de C_y. Considérons alors la fonction uniforme $\Phi(y)$; tous ses points singuliers sont à l'intérieur de C_y sur lequel elle prend un module maximum M; le théorème II est donc applicable à $\Phi(y)$ et les valeurs de y pour lesquels cette fonction prend la valeur u sont à l'intérieur d'un cercle Γ_y concentrique à l'origine, de rayon $R\sqrt{2}\left[1 + \frac{M}{|A-u|}\right]$, A étant la valeur de $\Phi(y)$ pour y infini, c'est-à-dire $F(\alpha)$.

Revenons maintenant au plan des x et, ensuite, au plan des z; le cercle C_y se change en lui-même C_x; le cercle Γ_y se transforme en un cercle Γ_x concentrique à O et de rayon $\frac{R}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{M}{|F(\alpha)-u|}\right)}$; enfin les seuls valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ peut prendre la valeur u sont à l'intérieur du cercle Γ concentrique à C et de rayon $\frac{R}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{M}{|F(\alpha)-u|}\right)}$, où M est le module maximum de $F(z)$ sur le cercle C. Nous sommes ainsi conduits aux propositions qui suivent :

THÉORÈME III. — *Une fonction* $F(z)$, *uniforme, est donnée par ses valeurs le long d'un cercle* C *de rayon* R; *soit* M *son module maximum sur* C. *Soit*

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z)\,d\varphi$$

(*où* $z = \alpha + Re^{i\varphi}$, α *désignant l'affixe du centre* C). *La fonction* $F(z)$ *étant holomorphe à l'intérieur de* C *ne peut prendre une valeur donnée* u *qu'à l'extérieur du cercle* Γ *concentrique à* C *et de rayon* $\frac{R}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{M}{|A-u|}\right)}$.

Ce théorème est applicable à toute région circulaire où $F(z)$ est holomorphe; voici une autre forme de la proposition qui précède; elle mène à un théorème général sur la continuité :

THÉORÈME IV. — *Étant donnée une fonction uniforme quelconque* $F(z)$, *lorsqu'en un point* P, *au voisinage duquel la fonction est holomorphe,* $F(z)$ *prend une valeur* A *différente d'une quantité* u, *on peut fixer un cercle* Γ *à l'intérieur duquel, certainement,* $F(z)$ *n'atteindra pas la valeur* u; *soit* C *un cercle de centre* P *de rayon* R *inférieur à la distance de* P *au point singulier le plus voisin,* M *étant le module maximum de* $F(z)$ *sur ce cercle. Le cercle cherché* Γ *est concentrique à* C *et de rayon*

$$\frac{R}{\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|A-u|}\right)}.$$

Le théorème III est susceptible de fournir des renseignements sur la position des points singuliers de fonctions uniformes données par leurs valeurs sur un cercle :

THÉORÈME V. — *Étant donnée une fonction uniforme* $F(z)$, *par ses valeurs le long d'un cercle* C *de centre* α, *de rayon* R, *soit* M *son module maximum sur* C. *En désignant par* A *l'intégrale*

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z)\,d\varphi$$

(*où* $z = \alpha + Re^{i\varphi}$, $F(z)$ *lorsque* φ *varie, prenant les valeurs données sur le cercle*), *si l'on peut trouver une quantité* u *différente de* A *telle qu'il existe au moins une valeur de* z, z_1 *à l'intérieur d'un cercle* Γ *concentrique à* C *et de rayon* $\dfrac{R}{\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|A-u|}\right)}$, *qui fasse prendre à* $F(z)$ *la valeur* u, *la fonction* $F(z)$ *a certainement des points singuliers dans* C.

En effet, si $F(z)$ n'avait pas de points singuliers dans C, d'après le théorème III, il n'y aurait aucun point à l'intérieur de Γ faisant prendre à $F(z)$ la valeur u, puisque A serait alors la valeur de $F(z)$ au centre de C; ainsi, comme A est différent de u, z_1 serait forcément en dehors de Γ.

Le théorème III admet un corollaire analogue à celui du théorème II;

on peut ainsi établir une nouvelle distinction entre les fonctions uniformes et les fonctions multiformes :

Une fonction $F(z)$ *est donnée par ses valeurs le long d'un cercle* C *de rayon* R, *de centre* α; *désignons par* M *son module maximum sur* C. *La fonction* $F(z)$, *n'ayant pas de points singuliers à l'intérieur de* C, A *représentant l'intégrale*

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z)\,d\varphi$$

(où $z = \alpha + Re^{i\varphi}$*), si l'on peut trouver une quantité* u *différente de* A *telle qu'il existe au moins une valeur de* z, z_1 *à l'intérieur d'un cercle* Γ *concentrique à* C *de rayon* $\dfrac{R}{\sqrt{2}\left(1+\dfrac{M}{|A-u|}\right)}$, *qui fasse prendre à* $F(z)$ *la valeur* u, *on peut affirmer que* $F(z)$ *n'est pas uniforme.*

La démonstration de cette proposition est immédiate; si $F(z)$ était uniforme, A serait sa valeur au centre du cercle et, d'après le théorème III, il n'y aurait aucun point à l'intérieur de Γ faisant prendre à $F(z)$ la valeur u différente de A.

3. Nous allons appliquer les théorèmes généraux du paragraphe précédent à l'étude particulière des fonctions entières.

M. Picard a montré l'impossibilité de l'existence de deux nombres a et b pour lesquels $F(z) = a$ et $F(z) = b$ n'aient aucune racine. Ainsi, l'une des deux équations a au moins une racine; M. Picard a complété ce résultat en faisant voir qu'il y avait alors une infinité de racines : nous nous proposons de déterminer leur position possible suivant la valeur de a et b.

Tout d'abord, voici une première proposition qui n'entraîne de propriétés nouvelles, qu'en supposant la fonction entière réduite à un polynome :

Soit $F(z)$ *une fonction entière donnée par ses valeurs le long d'un cercle* C *de rayon* R; $F(z)$ *prend un module maximum* M *sur* C, *et une valeur* A *au centre de* C. *Il ne peut exister deux nombres* a *et* b *pour lesquels l'équation* $F(z) = u$, *quand on remplace* u *par* a *et* b, *n'ait pas*

de racines à l'extérieur d'un cercle concentrique à C *de rayon* $\dfrac{R}{\sqrt{2}\left(1+\dfrac{M}{|A-u|}\right)}$.

En effet, dans le cas d'un polynome $F(z)$, l'équation $F(z)=u$ a au moins une racine, puisque la fonction ne se réduit pas à une constante; de plus, cette racine est à l'extérieur d'un cercle Γ concentrique à C et de rayon $\dfrac{R}{\sqrt{2}\left(1+\dfrac{M}{|A-u|}\right)}$, sauf, peut-être, pour $u=A$.

Si la fonction entière $F(z)$ est transcendante, sauf pour une valeur d'exception, l'équation $F(z)=u$ a toujours des racines, et en nombre infini; par suite, la même conclusion subsiste.

La proposition précédente peut encore se mettre sous cette forme :

Une fonction entière $F(z)$ *donnée par ses valeurs le long d'un cercle* C *de rayon* R, *prend un module maximum* M *sur* C, *et une valeur* A *au centre de* C. *Il ne peut exister deux valeurs de* u, a *et* b *pour lesquelles l'équation* $F(z)=u$ *ait des racines à l'intérieur d'un cercle concentrique à* C *de rayon* $\dfrac{R}{\sqrt{2}\left(1+\dfrac{M}{|A-u|}\right)}$.

Nous avons supposé la fonction $F(z)$ déterminée par ses valeurs sur un cercle; mais la représentation la plus simple d'une fonction entière est le développement en série suivant les puissances croissantes de la variable. Pour me conformer à cette remarque, je reprendrai l'étude des fonctions entières sur leur développement en série de Taylor.

Ainsi $F(z)$ est donnée par la série

$$F(z)=A_0+A_1z+\ldots+A_nz^n+\ldots.$$

Nous prendrons comme cercle C, un cercle concentrique à l'origine, de rayon R. Le module maximum de $F(z)$ sur C, aura pour limite supérieure

$$M=|A_0|+|A_1|R+\ldots+|A_n|R^n+\ldots,$$

où $|A_0|$, $|A_1|$, ..., $|A_n|$, ... sont les modules de A_0, A_1, ..., A_n. La seconde de nos propositions sur les fonctions entières peut ainsi prendre une nouvelle forme.

Soit $F(z)$ *une fonction entière donnée par la série*

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n + \ldots;$$

désignons par M *la quantité* $\sum_{n=\infty}^{n=\infty} |A_n| R^n$. *Il ne peut exister deux valeurs de* u, a *et* b, *pour lesquelles l'équation* $F(z) = u$ *ait des racines à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon*

$$\frac{R}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{M}{|A_0 - u|}\right)}.$$

4. Le théorème III nous permettra d'étudier avec facilité les intégrales des équations différentielles au voisinage de leur valeur initiale.

Tout d'abord, considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

la fonction $f(x, y)$ est holomorphe lorsque x reste à l'intérieur d'un cercle C_0 de centre x_0, de rayon a, et y à l'intérieur d'un cercle C'_0 de cercle y_0, de rayon b. Il existe une intégrale, et une seule, qui, prenant la valeur y_0 pour $x = x_0$, est holomorphe au voisinage de x_0.

Quand les variables restent à l'intérieur de leur cercle respectif, $f(x, y)$ prend un module maximum M, et l'intégrale y qui, pour $x = x_0$, a la valeur y_0 est holomorphe dans un cercle Γ_0 de centre x_0, de rayon la plus petite des quantités a et $\frac{b}{M}$; ainsi, désignons par R le rayon de Γ_0; à l'intérieur de Γ_0, $f(x, y)$ a un module inférieur à M, et la fonction y a un module plus petit que $|y_0| + b$. Ces propriétés subsisteront sur un cercle aussi rapproché de Γ_0 qu'on le veut. Le théorème III sera d'une application immédiate :

Étant donnée l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

soit y une intégrale qui, pour $x = x_0$, prend la valeur y_0, $f(x, y)$ ayant un module maximum M *lorsque x reste à l'intérieur du cercle de centre x_0, de rayon a, y variant à l'intérieur d'un cercle de centre y_0, de rayon b; désignons par* R *la plus petite des quantités a et $\frac{b}{M}$. A l'intérieur de son cercle de convergence de centre x_0, la fonction y ne peut prendre la valeur u qu'à l'extérieur du cercle Γ concentrique à x_0 et de rayon*

$$\frac{R}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{|y_0| + b}{|u - y_0|}\right)}.$$

A l'intérieur du cercle de convergence de l'intégrale y considérée, le module de y est inférieur à $|y_0| + b$; il en est de même à l'intérieur du cercle de centre x_0, de rayon $R - \varepsilon$ et sur ce cercle lui-même, ε étant d'ailleurs aussi petit que l'on veut. Ainsi, dans l'énoncé, pour être rigoureux, il faut dire que la fonction y n'atteint la valeur u qu'à l'extérieur de Γ ou sur Γ.

Plus généralement encore, nous pouvons définir y par un système d'équations :

Étant donné le système

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x_1, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{dy_k}{dx} &= f_k(x_1, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x_1, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n);
\end{aligned}$$

soit y_k l'intégrale satisfaisant à ce système, qui prend la valeur $y_k^{(0)}$ pour $x = x_0$, les fonctions $f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_n$ ayant un module maximum M *lorsque x reste à l'intérieur d'un cercle de centre x_0, de rayon a, y_1, $y_2, \ldots, y_k, \ldots, y_n$ variant respectivement dans les cercles de centres $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_k^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ et de rayon b. Si* R *désigne la plus petite des quantités a et $\frac{b}{M}$, à l'intérieur de son cercle de convergence de centre x_0,*

l'intégrale y_k ne prend la valeur u que sur le cercle Γ ou à l'extérieur du cercle Γ concentrique à x_0 et de rayon

$$\frac{R}{\sqrt{2}\left(1+\frac{|y_k^0|+b}{|u-y_k^0|}\right)}.$$

5. Je me propose, pour terminer ce travail, d'esquisser très sommairement une classification polaire des fonctions $F(z)$ pour lesquelles il existe m valeurs que ces fonctions ne puissent prendre; ainsi $F(z)=u$ n'aura pas de racines pour $u=a_1, \ldots, u=a_m$; ces quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m$ seront alors désignées sous le nom de *valeurs d'exclusion*.

M. Picard a donné ce théorème, qu'une fonction entière ne peut avoir plus d'une valeur d'exclusion a_1; dans le cas spécial d'un polynome, c'est-à-dire d'une fonction entière admettant l'infini, il n'existe aucune valeur d'exclusion. De plus, lorsqu'une fonction qui admet l'infini comme singularité essentielle ne possède, à distance finie, que des pôles, M. Picard a montré qu'il y a au plus deux valeurs a_1, a_2. On est ainsi bien naturellement amené à penser qu'il y a un lien étroit entre le nombre et la position des singularités essentielles et le nombre des valeurs d'exclusion de la fonction possédant ces singularités.

Dans les études que nous venons de résumer, on part de l'ensemble des discontinuités et l'on en déduit le nombre possible des quantités a; je vais suivre une marche inverse : je suppose connu le nombre de valeurs d'exclusion et je cherche à définir l'ensemble des points singuliers.

Soit d'abord $F(z)$ qui ne possède qu'une valeur d'exclusion a_1. Posons

$$f(z)=\frac{1}{F(z)-a_1};$$

$f(z)$ a comme seules discontinuités les points singuliers essentiels E de $F(z)$. Traçons alors une ligne L entourant une aussi grande portion du plan que l'on veut; de plus, cette ligne L ne rencontre aucun point singulier de $F(z)$. De chaque point M de L comme centre, avec un rayon R inférieur à la distance M au point essentiel E le plus voi-

sin, décrivons un cercle C; nous allons déterminer la position des pôles de $F(z)$ par rapport à C, de la façon qui suit : aux pôles de $F(z)$ correspondent les zéros de $f(z)$ et inversement, puisque $F(z) - a_1$ ne s'annule jamais. Or, à l'intérieur de C, la fonction $f(z)$ est holomorphe; d'après le théorème III de cette seconde Partie, les zéros de $f(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle Γ concentrique à C, de rayon

$$\frac{R}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{M}{|f(\gamma)|}\right)},$$

où γ est l'affixe du point M centre de C, et M le module de $f(z)$ sur C, pris avec sa valeur maximum; lorsque M décrit L, comme sur les différents cercles C correspondants, il n'y a pas de points singuliers essentiels, les modules maxima M, relatifs à chacun de ces cercles C, restent inférieurs à une quantité fixe δ, qui est le module maximum de $f(z)$ dans l'aire et sur le contour de l'aire balayée par C; ainsi $f(z)$ n'a pas de zéros dans la région S, balayée par un cercle Γ de centre $M(\gamma)$ sur L, le rayon de Γ étant

$$\frac{R}{\sqrt{2}[1 + \delta|F(\gamma) - a_1|]};$$

par suite, $F(z)$ n'a pas de pôles dans la région S engendrée par Γ lorsque M se déplace sur L.

Lorsque $F(z)$ possède des valeurs d'exclusion $a_1, a_2, \ldots, a_m$, il existe m régions $S_1, S_2, \ldots, S_m$ correspondant à ces valeurs; l'ensemble W de ces m régions forme une région d'exclusion de pôles pour $F(z)$.