ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. ZAREMBA

Sur le problème de Dirichlet

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 251-258
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__251_0>

SUR LE

PROBLÈME DE DIRICHLET,

PAR M. S. ZAREMBA.

1. Nous nous proposons de faire voir que l'on peut conclure de l'existence de la fonction de Green relative à un domaine (D), limité par une surface (S), simplement connexe, possédant en chacun de ses points des rayons de courbure déterminés, différents de zéro, la possibilité du problème de Dirichlet pour ce domaine, même dans le cas où les valeurs que doit prendre la fonction demandée sur la surface (S) admettent des lignes de discontinuité. J'ajoute que l'on rencontrera dans ce qui va suivre une méthode très simple pour résoudre la question suivante : soit $v(x, y, z)$ une fonction satisfaisant, à l'intérieur de la surface (S), à l'équation de Laplace et se réduisant sur cette surface à une fonction admettant des lignes de discontinuité; quelle sera la limite vers laquelle tendra la fonction $v(x, y, z)$ quand on fera tendre, suivant un arc donné, le point (x, y, z) vers un point situé sur une de ces lignes de discontinuité? Cette question offre un certain intérêt parce que c'est d'elle que dépend l'extension à l'espace du *procédé alterné* de M. Schwarz.

2. Nous simplifierons le langage en empruntant, pour un moment, quelques termes à la théorie de l'électricité. Concevons que la surface (S), maintenue au potentiel zéro, soit soumise à l'influence d'une masse électrique égale à -1, concentrée en un point $M(x, y, z)$ situé à l'intérieur de la surface, et désignons par $u(x, y, z, x', y', z')$ la densité en un point $P(x', y', z')$ de l'électricité induite dans ces conditions sur la surface (S). Nous allons déterminer une limite infé-

rieure u_1 et une limite supérieure u_2 de la fonction u en nous appuyant à cet effet sur les propositions suivantes :

a. Soit (S_1) une surface fermée tout entière intérieure à la surface (S), tangente à cette dernière en un point P et telle, en outre, que le point M lui soit intérieur. Si l'on désigne par u'_1 la fonction définie par rapport à la surface (S_1) comme l'a été la fonction u par rapport à la surface (S), on aura, *au point* P, l'inégalité

$$u'_1 \leqq u. \tag{1}$$

b. Soit (S_2) une surface tout entière extérieure à la surface (S), pouvant se composer de plusieurs surfaces fermées, tangente à la surface (S) au point P, et soit u'_2 la fonction analogue aux fonctions u et u'_1, se rapportant à la surface (S_2). On aura, *au point* P, l'inégalité

$$u \leqq u'_2. \tag{2}$$

Chacune de ces propositions est une conséquence immédiate du théorème bien connu d'après lequel une fonction, satisfaisant à l'équation de Laplace dans un domaine déterminé, ne peut posséder, à l'intérieur de ce domaine, ni un maximum ni un minimum.

3. Il résulte de l'hypothèse faite au sujet de la surface (S) qu'il existera une longueur α telle que toute sphère de rayon α tangente à cette surface en un point P lui soit, ou bien tout entière intérieure, ou bien tout entière extérieure, sans avoir avec elle un point commun en dehors du point P.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que la plus courte distance du point M (auquel se rapporte la fonction u) à la surface (S) soit au plus égale à α. Dans cette hypothèse, le point le plus proche du point M sur la surface (S) sera unique. Désignons ce point par O et prenons-le pour origine des coordonnées en ayant soin de diriger l'axe des z suivant la normale intérieure à la surface (S) au point O. Le point M sera, bien entendu, situé sur l'axe des z.

Nous poserons

$$\gamma = \overline{OM}. \tag{3}$$

Entourons le point O par une courbe fermée (C) tracée sur la surface (S). Cette courbe partagera la surface (S) en deux parties. Soit (S′) celle d'entre elles qui contient le point O, et (S″) la seconde de ces deux parties de la surface (S). Nous choisirons la courbe (C) de façon que sa projection sur le plan des (x, y) soit un cercle de centre O. Nous prendrons le rayon δ de ce cercle suffisamment petit pour qu'une perpendiculaire au plan des (x, y) ne puisse rencontrer la portion (S′) de la surface (S) qu'en un seul point au plus et que, en outre, la condition suivante soit satisfaite : il sera possible de construire une sphère (Σ'), de rayon α' non supérieur à α, tangente à la surface (S) en O et orthogonale à une sphère (Σ), de rayon α, tangente extérieurement à la surface (S) en un point P situé sur la portion (S′) de cette surface, quelle que soit d'ailleurs la position du point P. On admettra, pour plus de simplicité, que la longueur δ ait été choisie assez petite pour qu'il soit permis de la regarder comme indépendante de la position du point O sur la surface (S).

Cela posé, considérons une sphère (Σ_1) de rayon α, tangente intérieurement à la surface (S) en un point $P(x', y', z')$, situé sur la portion (S′) de cette surface. Il est aisé de voir que l'on pourra trouver un nombre positif λ, indépendant de la position du point O sur la surface (S), tel que, sous la seule condition

$$x'^2 + y'^2 \leqq \lambda\gamma, \tag{4}$$

le point M soit intérieur à la sphère (Σ_1).

La condition (4) étant satisfaite, nous pourrons, pour appliquer le théorème (a) du n° 2, identifier la surface (S_1) à la sphère (Σ_1). Posons

$$r = \text{MP}$$

et désignons par d la distance du point M au centre de la sphère Σ_1. La valeur de la fonction u'_1 au point P sera alors donnée par la formule bien connue

$$u'_1 = \frac{\alpha^2 - d^2}{4\pi\alpha r^3}.$$

Posons

$$\rho^2 = x'^2 + y'^2,$$

on s'assurera aisément que l'on peut trouver une constante positive K, indépendante de la position du point O sur la surface (S), telle que l'on ait

$$\alpha^2 - d^2 > 2\alpha\gamma - \gamma^2 - K\rho^2.$$

D'ailleurs, la fonction u ne devient, comme on le sait, négative en aucun point de la surface (S).

Nous pourrons, par conséquent, définir la fonction u_1, qui va nous servir de limite inférieure à la fonction u, ainsi : on a, en chaque point de (S'), dont les coordonnées vérifient l'inégalité (4),

$$(5) \qquad u_1 = \frac{\gamma}{2\pi r^3} - \frac{\gamma^2}{4\pi\alpha r^3} - K\frac{\rho^2}{4\pi\alpha r^3},$$

tandis que, dans tous les autres points de (S') et dans tous ceux de (S''), l'on a

$$(6) \qquad u_1 = 0.$$

4. Passons à la recherche de la limite supérieure u_2 de la fonction u et supposons d'abord que le point P, auquel se rapporte la fonction u, soit situé sur la portion (S'') de la surface (S). Nous allons appliquer le théorème (b) du n° 2 en faisant jouer le rôle de la surface (S_2) à un système de deux sphères : l'une (S'_2) de rayon constant R, plus petit que α, tangente extérieurement à la surface (S) en O; l'autre (S''_2), égale à la sphère (S'_2), tangente extérieurement à la surface (S) au point P. Nous supposerons que la longueur R ait été prise suffisamment petite pour que le rapport de la distance des centres des sphères (S'_2) et (S''_2) à 2R ne devienne jamais inférieur à un nombre fixe ν, plus grand que l'unité, quelles que soient les positions du point O sur la surface (S) et du point P sur la partie (S'') de cette surface.

On sait que la théorie des images électriques permet de construire très facilement la fonction de Green pour l'espace extérieure aux sphères (S'_2) et (S''_2). Or, pour peu que l'on veuille bien se reporter à l'expression ainsi obtenue de cette fonction, on ne manquera pas de reconnaître, eu égard à la manière dont on a choisi la longueur R, que l'on peut trouver une constante positive A, indépendante de la position du point O sur la surface (S) et de celle du point P sur la partie (S'') de la même surface, telle que l'on ait, en chaque point de la sphère (S''_2),

$$u'_2 < A\gamma.$$

On pourra donc poser, pour les positions considérées du point P,

$$u_2 = A\gamma. \tag{7}$$

Supposons maintenant que le point P soit situé sur la portion (S′) de la surface (S). Soit (Σ) la sphère de rayon α tangente extérieurement à la surface (S) au point P et (Σ′) la sphère, de rayon α', orthogonale à la sphère (Σ) et tangente en O à la surface (S). Nous ferons jouer le rôle de la surface (S_2) à la surface extérieure du solide formé par l'ensemble des sphères (Σ) et (Σ′).

Désignons par a, a' et r les distances du point M aux centres des sphères (Σ) et (Σ′) et au point P ; soit, en outre, l la distance du point P au centre de la sphère (Σ′). On trouve (Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 316), que la valeur de la fonction u'_2 au point P est donnée par l'équation

$$u'_2 = \frac{a^2 - \alpha^2}{4\pi\alpha r^3}\left\{1 - \frac{\alpha'^3 r^3}{[\alpha'^2 r^2 + (a'^2 - \alpha'^2)(l^2 - \alpha'^2)]^{\frac{3}{2}}}\right\}. \tag{8}$$

Il est évident que

$$u'_2 < \frac{a^2 - \alpha^2}{4\pi\alpha r^3}. \tag{9}$$

On reconnaît d'autre part, sans difficulté, en posant comme plus haut

$$\rho^2 = x'^2 + y'^2,$$

que l'on peut trouver une constante positive m, indépendante de la position du point O sur la surface (S), telle que l'on ait

$$a^2 - \alpha^2 < 2\alpha\gamma + \gamma^2 + m\rho^2. \tag{10}$$

Nous pourrions donc, en tenant compte des inégalités (2) et (9), définir sur (S′) la limite supérieure u_2 de la fonction u, par l'égalité

$$u_2 = \frac{\gamma}{2\pi r^3} + \frac{\gamma^2}{4\pi\alpha r^3} + m\frac{\rho^2}{4\pi\alpha r^3}; \tag{11}$$

mais nous n'allons le faire *que* pour les valeurs de ρ satisfaisant à l'inégalité

$$\rho^2 \leqq \gamma \tag{12}$$

en nous réservant de définir u_2 autrement pour les autres valeurs de ρ. Posons à cet effet

$$P = \alpha'^2 r^2 + (a'^2 - \alpha'^2)(l^2 - \alpha'^2)$$

et écrivons la formule (8) ainsi :

$$u'_2 = \frac{a' - \alpha'}{4\pi r^3} \frac{(a^2 - \alpha^2)(a' + \alpha')(l^2 - \alpha'^2)}{\alpha P} \frac{1 + \frac{\alpha'^2 r^2}{P} + \frac{\alpha'^4 r^4}{P^2}}{1 + \frac{\alpha'^3 r^3}{P^{\frac{3}{2}}}},$$

d'où, en remarquant que $\frac{\alpha'^2 r^2}{P} > 1$,

$$u'_2 < \frac{3}{2} \frac{a' - \alpha'}{4\pi r^3} \frac{(a^2 - \alpha^2)(a' + \alpha')(l^2 - \alpha'^2)}{\alpha P},$$

mais l'on a

$$a' - \alpha' = \gamma,$$

et

$$P > \alpha'^2 r^2,$$

il viendra donc

$$u'_2 < \frac{3}{2} \frac{\gamma}{4\pi r^3} \frac{a^2 - \alpha^2}{r^2} \frac{\left(2 + \frac{\gamma}{\alpha'}\right)(l^2 - \alpha'^2)}{\alpha\alpha'}. \tag{13}$$

J'observe maintenant qu'il existera deux constantes positives h et g, indépendantes de la position du point O sur la surface (S), telles que l'on ait

$$\alpha' > h\rho^2, \qquad l'^2 - \alpha'^2 < g\rho^2.$$

On en conclut, en tenant compte des inégalités (10) et (13), que l'on aura, *sous la condition*

$$\rho^2 \geqq \gamma, \tag{14}$$

l'inégalité

$$u'_2 < n\frac{\gamma}{r^3},$$

en désignant par n une constante positive, indépendante de la position du point O sur la surface (S).

Il résulte de là que, pour les points de la portion (S') de la surface (S) dont les coordonnées satisfont à l'inégalité (14), l'on peut poser

$$u_2 = n\frac{\gamma}{r^3}. \tag{15}$$

5. Soit à trouver une fonction $v(x, y, z)$, satisfaisant, à l'intérieur de la surface (S), à l'équation de Laplace et se réduisant, sur cette surface, à une fonction donnée $f(x', y', z')$ de la position du point $P(x', y', z')$ sur elle.

Désignons par ds l'élément de la surface (S) relatif au point P et soit toujours $u(x, y, z, x', y', z')$ la fonction définie au n° 2. On est conduit, par la théorie de la fonction de Green, à se demander si la fonction qu'il s'agit de trouver ne serait pas donnée par la formule

$$v = \int_S u(x, y, z, x', y', z')\, f(x', y', z')\, ds, \tag{16}$$

où l'indice S exprime que l'intégration doit être étendue à toute la surface (S).

Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi lorsque la fonction $f(x', y', z')$ satisfait aux conditions suivantes :

1° Il existe une constante positive B que ne dépasse jamais la valeur absolue de la fonction $f(x', y', z')$;

2° Cette fonction ne devient discontinue que sur certaines lignes tracées sur la surface (S), lignes au passage desquelles elle varie brusquement d'une quantité finie en devenant indéterminée sur ces lignes elles-mêmes.

On sait que la fonction v définie par l'équation (16) satisfait à l'équation de Laplace à l'intérieur de la surface (S); il s'agit donc seulement de s'assurer qu'elle prend bien les valeurs prescrites sur cette surface elle-même. La chose résulte immédiatement du théorème suivant :

Désignons par γ la plus courte distance du point (x, y, z) à la surface (S) et soit

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

je dis que la différence

$$v - \frac{\gamma}{2\pi}\int_S \frac{f(x', y', z')}{r^3}\, ds \tag{17}$$

tend uniformément vers zéro lorsque γ tend vers zéro. En d'autres termes, il correspond à tout nombre positif ε, si petit qu'il soit, un nombre positif μ, tel que, sous la seule condition

$$\gamma < \mu,$$

l'on ait

$$\left| v - \frac{\gamma}{2\pi} \int_S \frac{f(x', y', z')}{r^3}\, ds \right| < \varepsilon.$$

On simplifiera les calculs en supposant, comme on en a le droit, que γ satisfasse à la fois aux trois inégalités

$$\gamma < \alpha,$$
$$\gamma < \frac{\delta^2}{\lambda},$$
$$\gamma < \delta^2,$$

où δ et λ sont des éléments définis au n° 3.

Cela posé, j'observe que l'on peut, sans nuire à la généralité, supposer que l'on a

$$f(x', y', z') \geqq 0,$$

quelle que soit la position du point (x', y', z') sur la surface (S). Mais, dans ces conditions, l'on aura

$$(18) \quad \int_S f(x', y', z')\, u_1\, ds < \int_S f(x', y', z')\, u\, ds < \int_S f(x', y', z')\, u_2\, ds.$$

Or, en se reportant aux valeurs trouvées plus haut pour u_1 et u_2, on ne manquera pas de reconnaître que chacune des différences

$$\int_S f(x', y' z')\, u_1\, ds - \frac{\gamma}{2\pi} \int_S \frac{f(x', y', z')}{r^3}\, ds$$

et

$$\int_S f(x', y', z')\, u_2\, ds - \frac{\gamma}{2\pi} \int_S \frac{f(x', y', z')}{r^3}\, ds$$

tend uniformément vers zéro lorsque γ tend vers zéro. Il résulte, par conséquent, des inégalités (18) qu'il en est de même de la différence (17). C'est ce que nous voulions démontrer.

Il est clair que les questions posées au n° 1 peuvent maintenant être regardées comme résolues.