H. von Mangoldt

Extrait d'un travail intitulé « Sur le mémoire de Riemann relatif au nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée »

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 61-78
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__61_0>

EXTRAIT D'UN TRAVAIL

INTITULÉ

SUR LE MÉMOIRE DE RIEMANN

RELATIF

AU NOMBRE DES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS A UNE GRANDEUR DONNÉE,

PAR M. H. VON MANGOLDT,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE SUPÉRIEURE TECHNIQUE D'AIX-LA-CHAPELLE.

Présenté à l'Académie des Sciences de Berlin, par M. SCHWARZ, le 14 juin 1894 (¹).

Traduit par M. L. Laugel.

Dans la deuxième édition de la collection des *Œuvres mathématiques* de Riemann, il se trouve, dans les Notes qui font suite au Mémoire *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée,* un passage d'une Lettre dont le brouillon fait partie des manuscrits de Riemann. Riemann y dit lui-même que ses propositions :

« Entre o et T, il existe environ $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$ racines réelles de » l'équation $\xi(\alpha) = 0$; »

et

« La série $\sum^{\alpha}\left[\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right]$, lorsque ses termes sont

(¹) *Sitzungsberichte d. K. P. Acad. d. Wissen. z. Berlin*, pp. 883-896; 19 juillet 1894.

» rangés suivant les grandeurs croissantes de α, converge vers la
» même valeur limite que

$$\frac{1}{2\pi i \log x}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\,\frac{\log\xi\left[\left(s-\frac{1}{2}\right)i\right]}{\xi(0)}\right\}x^s\,ds,$$

» pour la grandeur b croissant sans limite, »

ont besoin d'une démonstration plus exacte et rigoureuse.

Dans le travail qui suit, nous ferons usage des résultats obtenus par M. J. Hadamard, dans son Mémoire : *Étude sur les propriétés des fonctions entières, et en particulier d'une fonction considérée par Riemann* (¹).

Nous montrerons, à l'aide de cette étude, comment on peut démontrer complètement la deuxième de ces propositions, et la première au moins en tant que l'on peut affirmer que le nombre des racines *dont les parties réelles sont comprises entre* 0 *et* T est représenté par l'expression indiquée, aux grandeurs d'ordre inférieur près.

I.

On conclut aisément de chacune des deux représentations, données par Riemann, de la fonction $\xi(t)$ par des intégrales définies que cette fonction n'admet aucun zéro dont la partie réelle serait nulle. Au contraire, ainsi qu'il résulte du travail déjà cité de M. Hadamard, il y a, en effet, des zéros dont les parties réelles sont différentes de zéro, et cela en nombre infini.

Conformément à ce fait, soient alors

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\quad \ldots$$

ces zéros, dont la partie réelle est *positive*. Dans cette série, chacun de ces zéros qui pourra se présenter d'une manière multiple sera compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité, et l'ordre dans lequel sont rangés ces zéros doit être pris de telle sorte que les parties réelles des termes ne décroissent jamais lorsque l'indice croît.

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. IX, pp. 171-215; 1893.

Sous ces conditions, comme l'a démontré M. Hadamard, a lieu l'équation

$$\xi(t) = \xi(0) \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_\nu^2}\right). \tag{1}$$

Concevons, dans le plan de la variable complexe t, un domaine B ne s'étendant pas à l'infini et sur le contour duquel ne se trouve situé aucun zéro de la fonction $\xi(t)$; on sait alors que le nombre des zéros, compris à l'intérieur de ce domaine, est égal à $\frac{1}{2\pi}$, multiplié par l'accroissement qu'éprouve l'argument de la quantité complexe $\xi(t)$, lorsque la variable t décrit le contour de B dans le sens positif.

Bien que cette proposition ne suffise pas à la détermination exacte du nombre des zéros de la fonction $\xi(t)$, compris à l'intérieur d'un domaine donné, il est pourtant possible d'obtenir quelques éclaircissements, relatifs à la position de ces zéros, en faisant parcourir à la variable t certains chemins convenablement choisis, et en étudiant les changements qu'éprouve alors l'argument de la quantité $\xi(t)$. C'est ce que nous allons exposer comme il suit :

Désignons par a, b $(a < b)$ deux constantes *réelles* quelconques, et faisons décrire à la variable t la ligne droite qui joint le point $a - \frac{3}{2}i$ au point $b - \frac{3}{2}i$. Alors chacune des droites, qui joignent les zéros de la fonction $\xi(t)$ au point mobile t, tourne dans le *sens positif*. Les accroissements qu'éprouvent les arguments des facteurs linéaires de la fonction $\xi(t)$ pour cette marche assignée au point t sont donc *tous positifs*, et, par conséquent, la somme de chaque nombre fini quelconque de ces accroissements reste toujours plus petite que l'accroissement qu'éprouve l'argument de la quantité $\xi(t)$ elle-même pour ce même chemin.

Soient maintenant

φ l'accroissement considéré ci-dessus de l'argument de la quantité $\xi(t)$;

A le nombre des zéros de la fonction $\xi(t)$, dont les parties réelles ne sont pas situées en dehors de l'intervalle $a \ldots b$, chacun d'eux étant compté pour son ordre de multiplicité;

S la somme de tous les angles (concaves et positifs), sous lesquels on verrait de ces zéros le chemin du point t, chacun de ces angles devant encore être compté autant de fois que l'indique l'ordre de multiplicité du zéro correspondant.

On aura alors, en particulier,

$$S < \varphi. \tag{2}$$

On obtient ensuite, par de simples considérations géométriques,

$$A \operatorname{arc\,tang}[\tfrac{1}{2}(b-a)] < S, \tag{3}$$

où le symbole arc tang désigne un arc compris entre o et $\frac{1}{2}\pi$; par conséquent, on aura, *a fortiori*,

$$A \operatorname{arc\,tang}[\tfrac{1}{2}(b-a)] < \varphi. \tag{4}$$

Pour le nombre φ, on peut déterminer une limite supérieure à l'aide des considérations suivantes : on a, d'après Riemann,

$$\xi(t) = \Pi(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}ti)(-\tfrac{1}{2}+ti)\pi^{-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}ti\right)}\zeta(\tfrac{1}{2}+ti), \tag{5}$$

où les signes Π et ζ ont même signification que dans le Mémoire de Riemann. Si l'on pose ici

$$t = \tau - \tfrac{3}{2}i,$$

où τ désigne une variable *réelle*, on obtient

$$\xi(\tau - \tfrac{3}{2}i) = \Pi(\tfrac{1}{2}\tau i)(1+\tfrac{1}{2}\tau i)(1+\tau i)\pi^{-\left(1+\frac{1}{2}\tau i\right)}\zeta(2+\tau i).$$

Si l'on entend maintenant par $\log\pi$ la valeur *réelle* du logarithme, et par

$$\log\xi(\tau-\tfrac{3}{2}i),\quad \log\Pi(\tfrac{1}{2}\tau i),\quad \log(1+\tfrac{1}{2}\tau i),\quad \log(1+\tau i),\quad \log\zeta(2+\tau i),$$

ces valeurs des logarithmes qui sont *réelles* pour $\tau = 0$ et varient alors d'une manière *continue* avec τ, on aura par suite

$$\begin{aligned}\log\xi(\tau-\tfrac{3}{2}i) = {} & \log\Pi(\tfrac{1}{2}\tau i) + \log(1+\tfrac{1}{2}\tau i) + \log(1+\tau i) \\ & - (1+\tfrac{1}{2}\tau i)\log\pi + \log\zeta(2+\tau i).\end{aligned} \tag{6}$$

Pour transformer le premier terme du second membre de cette équation, on peut faire usage des résultats obtenus par M. T.-J. Stieltjes dans son Mémoire intitulé *Sur le développement de* $\log\Gamma(a)$ [1].

En vertu de l'équation (20) de ce Mémoire, si l'on exclut les valeurs réelles négatives du domaine de la variable complexe z, on a pour toutes les autres valeurs de z

$$(7)\qquad \log\Pi(z) = \log z + \log\Gamma(z) = (z+\tfrac{1}{2})\log z - z + \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + J(z),$$

où, pour tous les logarithmes qui entrent dans cette expression, on doit prendre ces valeurs qui, en variant d'une manière continue pour des valeurs positives réelles de z, deviennent également réelles, et où $J(z)$ est un terme complémentaire dont M. Stieltjes a donné différentes expressions, terme dont la valeur absolue ne dépasse jamais une limite également assignée par M. Stieltjes.

Si l'on impose maintenant à la variable τ la condition

$$\tau > 0,$$

et si dans (7) l'on pose

$$z = \tfrac{1}{2}\tau i,$$

on obtiendra

$$\log\Pi(\tfrac{1}{2}\tau i) = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tau i)\,[\log(\tfrac{1}{2}\tau) + \tfrac{1}{2}\pi i] - \tfrac{1}{2}\tau i + \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + J(\tfrac{1}{2}\tau i),$$

où $\log(\frac{1}{2}\tau i)$ désigne la valeur réelle, et, en vertu de cette équation, on tire de (6)

$$(8)\qquad \begin{aligned} \log\xi(\tau - \tfrac{3}{2}i) = (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tau i)\,[\log(\tfrac{1}{2}\tau) + \tfrac{1}{2}\pi i] + \log(1 + \tfrac{1}{2}\tau i) \\ + \log(1+\tau i) - \tfrac{1}{2}\tau i(1+\log\pi) - \tfrac{1}{2}\log(\tfrac{1}{2}\pi) \\ + \log\zeta(2+\tau i) + J(\tfrac{1}{2}\tau i). \end{aligned}$$

Concevons maintenant que, dans chacune des deux expressions $\log\xi(\tau - \frac{3}{2}i)$ et $\log\zeta(2+\tau i) + J(\frac{1}{2}\tau i)$, on ait séparé les parties réelles et les parties imaginaires et désignons alors par $F(\tau)$ le coefficient de i dans l'expression $\log\xi(\tau - \frac{3}{2}i)$ et par $f(\tau)$ le coefficient de i dans l'expression $\log\zeta(2+\tau i) + J(\frac{1}{2}\tau i)$.

---

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, Tome V, pages 425-444; 1889.

On obtient alors

$$F(0) = 0, \tag{9}$$
$$F(-\tau) = -F(\tau); \tag{10}$$

et pour $\tau > 0$, on tire de (8)

$$\begin{aligned} F(\tau) = \tfrac{1}{2}\tau \log(\tfrac{1}{2}\tau) + \operatorname{arc\,tang}(\tfrac{1}{2}\tau) + \operatorname{arc\,tang}\tau \\ + \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\tau(1 + \log\pi) + f(\tau), \end{aligned} \tag{11}$$

où l'on doit encore entendre chaque fois par le symbole arc tang l'arc compris entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$. Ensuite, en ayant égard à l'inégalité

$$|\log\zeta(2 + \tau i)| \leqq \log\zeta(2) = \log(\tfrac{1}{6}\pi^2)$$

et en vertu des formules (25) et (26) du Mémoire de M. Stieltjes, on obtient pour $\tau > 0$

$$-\log(\tfrac{1}{6}\pi^2) - \frac{1}{3\tau} < f(\tau) < \log(\tfrac{1}{6}\pi^2). \tag{12}$$

On peut donc, au moins approximativement, calculer la valeur de la fonction $F(t)$ à l'aide de (11). Il en est aussi de même de l'accroissement φ, défini précédemment, qu'éprouve l'argument de la quantité $\xi(t)$. En effet, par suite des conventions faites ci-dessus pour la définition monotrope des logarithmes en question, on a

$$\varphi = F(b) - F(a). \tag{13}$$

A l'aide de ces développements, nous obtenons, après quelques calculs auxiliaires, ces premières conclusions relatives à la distribution des zéros de la fontion $\xi(t)$:

1° *L'équation* $\xi(t) = 0$ *n'admet certainement aucune racine dont la partie réelle prise en valeur absolue serait* $\leqq 12$;

2° *Si l'on désigne par* h *et* k *deux nombres réels quelconques satisfaisant à la condition*

$$\operatorname{tang} 1 = 1{,}55741 \leqq k \leqq h - 4,$$

le nombre des termes contenus dans la suite des zéros

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots$$

et dont les parties réelles ne sont pas situées en dehors de l'intervalle $h-k, \ldots, h+k$ est inférieur à

$$k \log h.$$

En s'appuyant sur la dernière proposition, on arrive ensuite, après un calcul assez long, aux résultats suivants :

3° *Pour toutes les valeurs du nombre réel h, supérieures à* 12, *le nombre de ces racines de l'équation $\xi(t)=0$, dont les parties réelles sont positives et plus petites que h, sera représenté par l'expression*

$$\frac{h}{2\pi}\log\frac{h}{2\pi}-\frac{h}{2\pi}+\frac{5}{4}+\eta[0{,}34(\log h)^2+1{,}34(\log h)+1{,}33],$$

où η désigne un nombre compris entre -1 *et* $+1$, *et où, lorsqu'il se présente des racines multiples, chacune d'elles doit être comptée pour autant d'unités qu'en contient son ordre de multiplicité.*

4° *L'équation $\xi(t)=0$ admet au moins une racine dont la partie réelle est comprise entre* 0 *et* 53.

II.

Dans ce qui suit, désignons par a, b, u des constantes réelles positives et par h une variable réelle qui peut prendre toutes les valeurs positives; dans toutes les intégrales définies considérées l'on prendra pour chemin d'intégration la droite qui joint les limites, et pour toutes les puissances et les logarithmes qui se présenteront, nous prendrons les valeurs principales.

Lorsque les constantes réelles c, d, g, v satisfont aux conditions

$$0 \leqq c < d, \qquad g \gtrless 0, \qquad v \gtrless 0,$$

on peut établir facilement, à l'aide de l'intégration par parties, les formules suivantes

$$\left|\int_{g+ci}^{g+di}\frac{e^{vs}}{s}\,ds\right| < \frac{4+\pi}{\sqrt{2}}\,\frac{e^{vg}}{|v|}\,\frac{1}{|g|+c} \tag{14}$$

et

$$(15)\qquad \left|\int_{g-hi}^{g+hi}\frac{e^{vs}}{s}\,ds\right| < (4+\pi)\sqrt{2}\,\frac{e^{vg}}{|vg|}.$$

La considération de l'intégrale $\int \frac{e^{us}}{s}\,ds$ prise le long du contour d'un rectangle dont les sommets ont pour affixes les points

$$a-hi,\quad a+hi,\quad -b+hi,\quad -b-hi,$$

nous donne ensuite, lorsque l'on fait croître b indéfiniment,

$$(16)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\frac{e^{us}}{s}\,ds - 1\right| \leq \frac{3}{2\pi}\,\frac{e^{ua}}{hu}.$$

On peut faire voir d'une manière analogue que

$$(17)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\frac{e^{-us}}{s}\,ds\right| \leq \frac{3}{2\pi}\,\frac{e^{-ua}}{hu}.$$

De (16) et (17) on tire de suite les équations

$$(18)\qquad \lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\frac{e^{us}}{s}\,ds = 1,$$

$$(19)\qquad \lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\frac{e^{-us}}{s}\,ds = 0,$$

auxquelles on peut adjoindre cette troisième équation, facile à établir directement,

$$(20)\qquad \lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\frac{1}{s}\,ds = \tfrac{1}{2}.$$

Ces formules nous permettent d'éviter l'emploi du théorème de Fourier, sur lequel s'appuie Riemann pour la détermination de fonctions arithmétiques.

Soient maintenant n une variable qui peut prendre toutes les valeurs entières positives, et $L(n)$ une fonction de n qui sera définie par les trois équations suivantes

$$(\alpha)\qquad L(1)=0,$$

$$(\beta)\qquad L(n)=0,$$

lorsque n est composé de facteurs premiers *différents*, et

$$(\gamma) \qquad \mathrm{L}(n) = \log p,$$

lorsque $n = p^\alpha$, p désignant un nombre *premier* et α un exposant entier positif.

Soient ensuite

r un nombre quelconque réel,
x une constante réelle plus grande que 1,
$[x]$ le plus grand entier contenu dans x.

Soit encore, au cas où x n'est pas une puissance d'un nombre premier,

$$\Lambda(x, r) = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{\mathrm{L}(n)}{n^r},$$

et, au contraire, au cas où x est une puissance d'un nombre premier,

$$\Lambda(x, r) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mathrm{L}(n)}{n^r} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{L}(x)}{x^r};$$

et, finalement, soit a une constante réelle positive qui satisfait à la condition

$$a + r > 1.$$

Alors a lieu, comme on peut le démontrer à l'aide des formules (16) à (20), l'équation

$$(21) \qquad -\lim_{h=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-hi}^{a+hi} \frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} \frac{x^s}{s}\, ds = \Lambda(x, r).$$

On obtient, d'autre part, en décomposant $\dfrac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)}$ en éléments simples,

$$-\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)} = \frac{1}{s+r-1} - \tfrac{1}{2}\log\pi - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\log\frac{n}{n+1} + \frac{1}{s+r+2n}\right) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2};$$

d'où, par conséquent,

$$\text{22)}\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}\,\frac{x^s}{s}\,ds$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\frac{\zeta'(s+r)}{\zeta(s+r)}\,\frac{x^s}{s}\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\frac{x^s}{s(s+r-1)}\,ds$$
$$-\tfrac{1}{2}\log\pi\,\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\frac{x^s}{s}\,ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\log\frac{n}{n+1}+\frac{1}{s+r+2n}\right)\frac{x^s}{s}\,ds.$$

Pour h augmentant sans limite, les quatre termes du second membre de cette équation tendent tous vers des limites finies.

Pour le premier terme, la limite est dès à présent déterminée par (21). Pour le second, on obtient, au cas où r n'est pas égal à 1,

$$\text{(23)}\qquad \lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\frac{x^s}{s(s+r-1)}\,ds=\frac{1-x^{1-r}}{r-1}$$

et, lorsque $r=1$,

$$\text{(23 a)}\qquad \lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\frac{x^s}{s^2}\,ds=\log x=\lim_{r=1}\frac{1-x^{1-r}}{r-1}.$$

Pour le troisième et le quatrième terme, on obtient enfin les formules

$$\lim_{h=\infty}\tfrac{1}{2}\log\pi\,\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\frac{x^s}{s}\,ds=\tfrac{1}{2}\log\pi$$

et

$$\text{(24)}\qquad \lim_{h=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-hi}^{a+hi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\tfrac{1}{2}\log\frac{n}{n+1}+\frac{1}{s+r+2n}\right]\frac{x^s}{s}\,ds$$
$$=\tfrac{1}{2}C-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r+2nx^{-r-2n}}{2n(r+2n)},$$

où $C=0{,}5772156649\ldots$ désigne la constante d'Euler.

Dans cette dernière expression, lorsque r est égal à un nombre entier négatif pair $-2m$, on devra remplacer le terme

$$\frac{r+2mx^{-r-2m}}{2m(r+2m)}$$

de la somme du second membre, terme qui prend alors la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, par sa valeur limite

$$\lim_{r=-2m} \frac{r+2m x^{-r-2m}}{2m(r+2m)} = \frac{1}{2m} - \log x.$$

Aussi, chaque terme de la somme qui forme le premier membre de l'équation (22) tend vers une valeur limite finie, qui, cela peut être démontré à l'aide des formules (14) et (18), est donnée par l'expression

$$\lim_{h=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-hi}^{a+hi} \frac{2(s-r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \frac{x^s}{s} ds$$
$$= \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} - 2x^{-r+\frac{1}{2}} \frac{(r-\frac{1}{2})\cos(\alpha_\nu \log x) - \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu \log x)}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}.$$

On peut démontrer que la somme de ces valeurs limites est identique à la limite vers laquelle tend le second membre de l'équation (22). Posant, en effet, pour abréger,

$$(25) \quad \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} - 2x^{-r+\frac{1}{2}} \frac{(r-\frac{1}{2})\cos(\alpha_\nu \log x) - \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu \log x)}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2}$$
$$= W_\nu(x, r) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, \infty);$$

nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Lorsque les termes de la série infinie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x, r)$$

sont rangés suivant la succession des valeurs croissantes de l'indice ν, *cette série est convergente pour toutes les valeurs réelles de* r *et pour toutes les valeurs réelles positives de* x, *et, lorsque* $x > 1$, *sa somme est représentée par l'expression*

$$-\Lambda(x, r) + \frac{1-x^{1-r}}{r-1} - \tfrac{1}{2}\log\pi - \tfrac{1}{2}C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r+2n x^{-r-2n}}{2n(r+2n)},$$

où, dans le cas où un terme de cette expression revêt, pour une valeur par-

ticulière de r, la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, *on devra alors, au lieu de ce terme, prendre la valeur limite correspondante.*

La démonstration de cette proposition repose sur les considérations suivantes : soit H le nombre des nombres α_ν dont les parties réelles sont $\leqq h$, le nombre h dorénavant étant pris suffisamment grand pour que H soit au moins égal à 1. Alors, en donnant à la somme

$$\sum_{\nu=1}^{\mathrm{H}} \mathrm{W}_\nu(x, r)$$

la forme suivante

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{\mathrm{H}} \mathrm{W}_\nu(x, r) = & \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-hi}^{a+hi} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \frac{x^s}{s} ds \\
& - \sum_{\nu=\mathrm{H}+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-hi}^{a+hi} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \frac{x^s}{s} ds \\
& - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{a-hi}^{a+hi} \frac{x^s}{s} ds - 1 \right) \sum_{\nu=1}^{\mathrm{H}} \frac{2(r-\frac{1}{2})}{(r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \\
& - \sum_{\nu=1}^{\mathrm{H}} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+\alpha_\nu i}}{r-\frac{1}{2}-\alpha_\nu i} \left(1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-hi}^{a+hi} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}-\alpha_\nu i}}{s+r-\frac{1}{2}-\alpha_\nu i} ds \right) \\
& - \sum_{\nu=1}^{\mathrm{H}} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-\alpha_\nu i}}{r-\frac{1}{2}+\alpha_\nu i} \left(1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-hi}^{a+hi} \frac{x^{s+r-\frac{1}{2}+\alpha_\nu i}}{s+r-\frac{1}{2}+\alpha_\nu i} ds \right),
\end{aligned}$$

on peut, en faisant usage des formules (14) à (16) ainsi que du second théorème de la Section I, démontrer que chacun des termes dans le second membre, à la seule exception du premier, converge vers zéro lorsque h croît sans limites. Mais, des équations (21) à (24), on conclut pour ce premier terme

$$\begin{aligned}
\lim_{h=\infty} & \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-hi}^{a+hi} \frac{2(s+r-\frac{1}{2})}{(s+r-\frac{1}{2})^2+\alpha_\nu^2} \frac{x^s}{s} ds \\
& = -\Lambda(x, r) + \frac{1-x^{1-r}}{r-1} - \tfrac{1}{2}\log\pi - \tfrac{1}{2}\mathrm{C} + \sum^{\infty} \frac{r+2nx^{-r-2n}}{2n(r+2n)}.
\end{aligned}$$

Ces résultats démontrent le théorème énoncé et nous donnent également, pour la fonction arithmétique $\Lambda(x, r)$, l'expression analytique

$$(26)\quad \Lambda(x, r) = \frac{1 - x^{1-r}}{r - 1} - \tfrac{1}{2}\log\pi - \tfrac{1}{2}C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r + 2nx^{-r-2n}}{2n(r+2n)} - \sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x, r).$$

Si l'on pose $r = \frac{1}{2}$, on obtient

$$W_\nu(x, \tfrac{1}{2}) = 2\frac{\sin(\alpha_\nu \log x)}{\alpha_\nu},$$

et alors, d'après ce qui précède, on conclut en particulier le théorème suivant :

La distribution des zéros α_ν de la fonction $\xi(t)$ est telle que la série infinie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu \log x)}{\alpha_\nu},$$

où l'on suppose que les termes sont rangés suivant la succession des valeurs croissantes de l'indice ν, sera convergente pour chaque valeur réelle positive de x; et, les termes étant ainsi rangés lorsque $x > 1$, l'équation suivante a lieu

$$(27)\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_\nu \log x)}{\alpha_\nu} = \tfrac{1}{2}\Lambda(x, \tfrac{1}{2}) + \sqrt{x} - 1 - \tfrac{1}{4}(\log\pi + C) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(4n+1)}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{x}} + \tfrac{1}{4}\log\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

La série infinie du premier membre est convergente, mais comme elle représente une fonction discontinue de l'argument x, nécessairement la convergence n'est pas *uniforme*.

La série infinie $\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x, r)$ peut être représentée comme la somme de deux séries partielles dont l'une

$$2(r - \tfrac{1}{2})\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1 - x^{-r+\frac{1}{2}}\cos(\alpha_\nu \log x)}{(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2} - \frac{(r-\frac{1}{2})x^{-r+\frac{1}{2}}\sin(\alpha_\nu \log x)}{\alpha_\nu[(r-\frac{1}{2})^2 + \alpha_\nu^2]}\right],$$

pour toutes les valeurs positives de x, est absolument et uniformément convergente, tandis que l'autre

$$2x^{-r+\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha_\nu \log x)}{\alpha_\nu}$$

représente le produit de la série à convergence non uniforme

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha_\nu \log x)}{\alpha_\nu}$$

par une fonction continue de x.

Toutes les autres séries infinies à convergence non uniforme, qui se présenteront à nous dans la suite de ce travail, ont même propriété : la partie à convergence non uniforme est toujours égale au produit d'une fonction continue de x par la série particulière

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha_\nu \log x)}{\alpha_\nu}.$$

Pour $r=0$, puisque

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{4}+\alpha_\nu^2}=1+\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}\log\pi-\log 2,$$

on tire de (26) l'équation suivante

$$\begin{aligned}(28)\qquad \Lambda(x,0)=x-\log(2\pi)-\tfrac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)&\\ -x^{\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos(\alpha_\nu\log x)+2\alpha_\nu\sin(\alpha_\nu\log x)}{\frac{1}{4}+\alpha_\nu^2}&.\end{aligned}$$

Posons, lorsque x n'est égal ni à un nombre premier ni à une puissance d'un nombre premier,

$$f(x,r)=\sum_{n=1}^{[x]}\frac{L(n)}{\log n}\,\frac{1}{n^r}=\sum_{1}^{x}\frac{1}{p^r}+\frac{1}{2}\sum_{1}^{x^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{p^{2r}}+\frac{1}{3}\sum_{1}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{p^{3r}}+\ldots,$$

expression où l'indice sommatoire p doit parcourir chaque fois la succession de valeurs des nombres premiers qui ne sont pas compris en dehors des limites inférieures et supérieures des signes somme; au contraire, lorsque x est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier, on posera

$$f(x, r) = \frac{f(x+0, r) + f(x-0, r)}{2}.$$

On tire alors de (26), lorsque l'on remplace r par ρ et que l'on intègre ensuite par rapport à ρ depuis r jusqu'à $+\infty$, après quelques calculs et réductions, l'équation suivante

$$(29) \qquad f(x, r) = \int_r^\infty \left[\frac{x^{1-\rho}}{1-\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-\rho-2n}}{\rho+2n} - \frac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho)} \right] d\rho$$
$$+ 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\alpha_\nu \log x) \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\rho x^{-\rho}}{\rho^2 + \alpha_\nu^2} d\rho$$
$$- 2 \sum_{=1}^{\infty} \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu \log x) \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{x^{-\rho}}{\rho_2 + \alpha_\nu^2} d\rho.$$

Pour la transformation ultérieure de cette équation, on distinguera trois cas :

Premier cas. — Soit

$$r > 1.$$

On a, dans ce cas,

$$(30) \qquad f(x, r) = \log \zeta(r) - \int_x^\infty \frac{1}{\log y} \frac{1}{y^r} \left(1 - \frac{1}{y} \frac{1}{y^2 - 1}\right) dy$$
$$+ 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\alpha_\nu \log x) \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\rho x^{-\rho}}{\rho^2 + \alpha_\nu^2} d\rho$$
$$- 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu \log x) \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{x^{-\rho}}{\rho^2 + \alpha_\nu^2} d\rho.$$

Deuxième cas. — Soit

$$-2 < r \leqq 1.$$

On obtient alors

$$(31)\quad \begin{aligned} f(x, r) = {} & \int_0^{\log x} \frac{e^{(1-r)u} - e^u}{u}\,du - \int_{\log x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du \\ & + \int_x^{\infty} \frac{1}{y^2 - 1}\,\frac{dy}{y^{r+1}\log y} + \log[(r-1)\zeta(r)] \\ & + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\alpha_\nu \log x) \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\rho\, x^{-\rho}}{\rho^2 + \alpha_\nu^2}\,d\rho - 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu \log x) \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{x^{-\rho}}{\rho^2 + \alpha_\nu^2}\,d\rho. \end{aligned}$$

L'équation

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum \left[\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right] + \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1}\,\frac{dx}{x \log x} - \log 2,$$

par laquelle Riemann représente la fonction arithmétique qu'il désigne par $f(x)$, est contenue comme cas particulier dans la dernière formule (31).

Si l'on fait, en effet, dans (31), $r = 0$, on obtient

$$(32)\quad \begin{aligned} f(x, 0) = {} & \int_0^{\log x} \frac{e^u - e^{-u}}{u}\,du - \int_{\log x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du \\ & + \int_x^{\infty} \frac{1}{y^2 - 1}\,\frac{dy}{y \log y} - \log 2 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\alpha_\nu \log x) \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\rho\, x^{-\rho}}{\rho^2 + \alpha_\nu^2}\,d\rho \\ & - 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \sin(\alpha_\nu \log x) \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{x^{-\rho}}{\rho^2 + \alpha_\nu^2}\,d\rho. \end{aligned}$$

Mais on constate que cette équation est identique à la formule de Riemann citée, et, par conséquent, en déduisant l'équation (32) des considérations précédentes, on arrive au résultat final des recherches de Riemann par une voie un peu différente.

Troisième cas. — Soit

$$r \leqq -2.$$

Désignant alors par -2λ et par $-2(\lambda + 1)$ les deux nombres entiers négatifs pairs entre lesquels se trouve comprise la valeur de r. de telle sorte que l'on ait

$$-2(\lambda+1) < r \leqq -2\lambda,$$

on obtient l'équation

$$(33)\quad f(x, r) = \int_0^{\log x} \frac{e^{(1-r)u} - e^{-u}}{u}\,du - \sum_{n=1}^{\lambda} \int_0^{\log x} \frac{e^{-(r+2n)u} - e^{-u}}{u}\,du$$
$$+ \int_x^{\infty} \frac{1}{\log y}\,\frac{1}{y^2-1}\,\frac{dy}{y^{r+2\lambda+1}} + \log \frac{(r-1)\zeta(r)}{(r+2)(r+4)\ldots(r+2\lambda)}$$
$$+ (\lambda-1)\int_{\log x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\alpha_\nu \log x) \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\rho\, x^{-\rho}}{\rho^2+\alpha_\nu^2}\,d\rho$$
$$- 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu (\sin \alpha_\nu \log x) \int_{r-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{x^{-\rho}}{\rho^2+\alpha_\nu^2}\,d\rho.$$

Si l'on parvenait à démontrer que les racines α_ν de l'équation $\xi(t) = 0$ sont toutes réelles, ou même seulement que les parties imaginaires de ces racines sont comprises entre des limites plus étroites que $-\frac{1}{2}i$ et $+\frac{1}{2}i$, les développements précédents fourniraient une série de lois asymptotiques relatives à la théorie des nombres.

On conclurait, par exemple, de (28) que l'on aurait

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Lambda(x, 0)}{x} = 1,$$

et, par conséquent, que la somme des logarithmes de tous les nombres premiers de 1 à x, pour de grandes valeurs de x, serait égale à x lui-même, à des grandeurs d'ordre inférieur près.

Mais, provisoirement, il semble que ce serait trop se hâter que d'affirmer l'exactitude de conclusions de cette nature. Aussi, la démonstration de ce théorème particulier cité, que M. E. Cahen a donnée dans une Note (1), *Sur la somme des logarithmes des nombres premiers qui ne dépassent pas x*, et qui se trouve reproduite, dans ses traits

(1) *Comptes rendus*, pp. 85-88, t. CXVI; 1893.

essentiels, au n° 32 de son Mémoire [1], *Sur la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann et sur des fonctions analogues*, n'est pas absolument satisfaisante.

Ce n'est qu'après avoir terminé mon travail que j'ai eu connaissance, par une remarque contenue dans le Livre de M. P. Bachmann, *Zahlentheorie*, zweiter Theil : *Die analytische Zahlentheorie;* Leipzig, 1894, de l'*Habilitationsschrift* de M. Adolf Piltz, intitulé : *Uber die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze* (Sur la fréquence des nombres premiers dans les progressions arithmétiques et des lois analogues). Dans ce Mémoire, aux pages 42 et 43, sont données quelques indications, — sous l'hypothèse que les affirmations de Riemann sur la distribution des zéros de la fonction $\xi(t)$ sont essentiellement exactes — relatives à la démonstration de la convergence de la série désignée par

$$\sum_{r=1}^{\infty} W_{\nu}(x, r).$$

Les principes, sur lesquels repose la démonstration de la convergence que j'ai exposée, sont déjà énoncés dans ces indications, et les développements de M. Piltz sont, en partie, identiques avec les miens, au moins en tant que dans son travail l'expression analytique de la fonction arithmétique $f(x, r)$ est obtenue, comme ici, à l'aide de l'expression correspondante de la fonction $A(x, r)$ et ensuite à l'aide d'une intégration par rapport à r.

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, pp. 75-164, 3e série, t. XI ; 1894.