

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. LACOUR

**Décomposition en facteurs de la fonction  $\Theta[u^{(i)}(z) - G_i]$**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 13 (1896), p. 415-420

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1896\\_3\\_13\\_\\_415\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__415_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# DÉCOMPOSITION EN FACTEURS DE LA FONCTION

$$\Theta[u^{(i)}(z) - G_i],$$

PAR M. E. LACOUR,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

Je me propose d'appliquer à la fonction

$$\Theta[u^{(i)}(z) - G_i]$$

la méthode générale que j'ai indiquée, dans un travail précédent, pour les fonctions à multiplicateurs exponentiels (*Annales de l'École Normale*; 1895, Supplément).

Soit

$$f(z, s) = 0$$

une équation algébrique de genre  $p$ , et soient  $T$  la surface de Riemann (1) correspondante,  $T'$  cette surface rendue simplement connexe au moyen des coupures

$$\begin{array}{cccc} a_1, & a_2, & \dots, & a_p, \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_p, \\ c_1, & c_2, & \dots, & c_p, \end{array}$$

$u^{(i)}(z)$  l'intégrale normale de première espèce qui admet la période  $2\pi\sqrt{-1}$  le long de la coupure  $a_i$ ,  $2\beta_{ik}$  la période de l'intégrale  $u^{(i)}(z)$  le long de la coupure  $b_k$  de sorte que  $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ .

Considérons la fonction (2) définie par l'égalité

$$\Theta(u_1, u_2, \dots, u_p) = S e^{m_1 u_1 + m_2 u_2 + \dots + m_p u_p + \zeta(m_1, m_2, \dots, m_p)},$$

---

(1) Voir APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, p. 195 et 233.

(2) BRIOT, *Fonctions abéliennes*, p. 114.

où les  $p$  nombres entiers  $m_1, m_2, \dots, m_p$  varient de  $-\infty$  à  $+\infty$  et où  $\varphi(m_1, m_2, \dots, m_p)$  désigne la forme quadratique

$$\sum \sum \beta_{ik} m_i m_k = \beta_{11} m_1^2 + \dots + 2\beta_{12} m_1 m_2 + \dots;$$

posons

$$u_i = u^{(i)}(z) - G_i,$$

en désignant par  $G_1, G_2, \dots, G_p$  des constantes arbitraires, et représentons la fonction ainsi obtenue par

$$F(z) = \Theta[u^{(i)}(z) - G_i].$$

Cette fonction est régulière en tous les points de la surface  $T$ , reste continue quand on traverse une coupure  $a_i$  ou  $c_i$  et admet, le long d'une coupure  $b_i$ , un multiplicateur défini par l'égalité

$$F(\lambda) = F(\rho) e^{-u^{(i)}(\rho) - \beta_{ii}}.$$

Elle s'annule en  $p$  points de la surface  $T$ , et les valeurs correspondantes de  $z$  vérifient les  $p$  relations

$$u^{(i)}(z_1) + u^{(i)}(z_2) + \dots + u^{(i)}(z_p) - G_i \equiv G_i \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

dans lesquelles les constantes  $G_i$  sont indépendantes des quantités arbitraires  $G_i$  et où le signe  $\equiv$  rappelle que l'égalité a lieu à des multiples près des périodes de seconde espèce.

D'après une formule de Clebsch et Gordan (*Theorie der Abelschen Functionen*, S. 198), on a pour la fonction  $\Theta[u^{(i)}(z) - G_i]$  une décomposition en facteurs analogue à une décomposition connue pour les fonctions à multiplicateurs constants. Cette formule peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \dots - u^{(i)}(z_p) + G_i]}{\Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \dots - u^{(i)}(z_p) + G_i]} \\ &= e^{\frac{1}{2} \sum [u^{(k)}(z) - u^{(k)}(a)] + \frac{1}{2} \sum [\Pi_{z'_k z_k} - \Pi_{z'_k a}]} \end{aligned}$$

en désignant par  $\Pi_{z'_k z_k}$  l'intégrale normale de troisième espèce qui se comporte, dans le voisinage des points  $z_k$  et  $z'_k$ , comme

$$\text{Log}(z - z_k) \quad \text{et} \quad -\text{Log}(z - z'_k)$$

et par  $z'_1, z'_2, \dots, z'_p$  des valeurs de  $z$  qui se déduisent algébrique-

ment de  $z_1, z_2, \dots, z_p$  d'une part et de  $a$  et de  $z$  d'autre part, d'après une règle dont l'énoncé géométrique est très simple.

Nous allons rattacher ce résultat à une formule qui s'obtient d'après une méthode de Riemann, en évaluant l'intégrale

$$\int_{\mathbf{T}'} \Pi_{az}(x) d \text{Log} \Phi(x)$$

prise suivant le contour de la surface  $\mathbf{T}'$  et en appliquant ensuite à la même intégrale le théorème de Cauchy ou du moins l'extension de ce théorème aux surfaces de Riemann. On trouve ainsi

$$\text{Log} \frac{\Phi(z)}{\Phi(a)} = \sum n_k [u^{(k)}(z) - u^{(k)}(a)] + \sum \Pi_{az}(z_k) + \varphi(z) \quad (k=1.2..p),$$

$\Phi(z)$  étant une fonction assujettie seulement à avoir les propriétés suivantes de la fonction  $F(z)$  : Elle est régulière sur toute la surface de Riemann  $\mathbf{T}'$  et admet les mêmes multiplicateurs que  $F(z)$  le long des coupures  $a_i, b_i, c_i$ . Cela suffit pour établir que cette fonction a  $p$  zéros, et les valeurs  $z_k$  qui figurent dans la formule désignent ces zéros.

$\varphi(z)$  est une fonction qui ne change pas quand on change la fonction  $\Phi(z)$  en lui conservant les propriétés précédentes. La valeur de  $\varphi(z)$  est

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left[ \int_{b_1} \Pi_{az}(\rho) du^{(1)} + \int_{b_2} \Pi_{az}(\rho) du^{(2)} + \dots + \int_{b_p} \Pi_{az}(\rho) du^{(p)} \right];$$

les intégrales qui figurent dans le second membre sont prises le long des coupures  $b_i$ , la variable décrivant le bord négatif de la coupure dans le sens qui correspond à ce bord négatif.

Appliquons cette formule à la fonction  $F(z)$  et à une fonction qui se déduit de  $F(z)$  et, changeant les valeurs des zéros,

$$\begin{aligned} \text{Log} \frac{\Theta [u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \dots - u^{(i)}(z_p) + C_i]}{\Theta [u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \dots - u^{(i)}(z_p) + C_i]} \\ = \sum n'_k [u^{(k)}(z) - u^{(k)}(a)] + \sum \Pi_{az}(z_k) + \varphi(z). \\ \text{Log} \frac{\Theta [u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z'_1) - u^{(i)}(z'_2) - \dots - u^{(i)}(z'_p) + C_i]}{\Theta [u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z'_1) - u^{(i)}(z'_2) - \dots - u^{(i)}(z'_p) + C_i]} \\ = \sum n''_k [u^{(k)}(z) - u^{(k)}(a)] + \sum \Pi_{az}(z'_k) + \varphi(z). \end{aligned}$$

Or, on peut établir entre les deux systèmes de points

$$z_1, z_2, \dots, z_p \quad \text{et} \quad z'_1, z'_2, \dots, z'_p$$

une relation telle que les logarithmes qui figurent dans les premiers membres des égalités précédentes soient égaux et de signes contraires. Nous allons le montrer dans un instant.

Supposons cette relation établie; en retranchant membre à membre les deux égalités nous ferons disparaître  $\varphi(z)$  et il viendra

$$\begin{aligned} & {}_2 \text{Log} \frac{\Theta[u^{(l)}(z) - u^{(l)}(z_1) - u^{(l)}(z_2) - \dots - u^{(l)}(z_p) + G_l]}{\Theta[u^{(l)}(a) - u^{(l)}(z_1) - u^{(l)}(z_2) - \dots - u^{(l)}(z_p) + G_l]} \\ & = \Sigma n_k [u^{(l)}(z) - u^{(l)}(a)] + \Sigma [\Pi_{az}(z_k) - \Pi_{az}(z'_k)]. \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à se servir de la relation

$$\int_{z'_k}^{z_k} d\Pi_{az} = \int_a^{z_k} d\Pi_{z'_k z_k},$$

appelée *théorème de l'échange du paramètre et de l'argument*, et à passer des logarithmes aux nombres pour obtenir la formule de décomposition

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta[u^{(l)}(z) - u^{(l)}(z_1) - u^{(l)}(z_2) - \dots - u^{(l)}(z_p) + G_l]}{\Theta[u^{(l)}(a) - u^{(l)}(z_1) - u^{(l)}(z_2) - \dots - u^{(l)}(z_p) + G_l]} \\ & = e^{\frac{1}{2} \Sigma [u^{(k)}(z) - u^{(k)}(a)] + \frac{1}{2} \Sigma [\Pi_{z'_k z_k}(z) - \Pi_{z'_k z_k}(a)]} \end{aligned}$$

qu'il s'agissait d'établir.

Il reste à définir la relation entre le système des points  $z_k$  et le système des points  $z'_k$ .

Soient

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-2}$$

les  $n - 2$  points d'intersection de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

avec la droite joignant les deux points  $a$  et  $z$ . Considérons une courbe adjointe  $C_{n-2}$  d'ordre  $n - 2$ , passant par ces points  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-2}$ . Elle rencontre encore la courbe en  $2p$  points, dont  $p$  peuvent être pris arbitrairement. Prenons pour les  $p$  points qui peuvent être choisis

arbitrairement

$$z_1, z_2, \dots, z_p,$$

et soient

$$z'_1, z'_2, \dots, z'_p$$

les  $p$  autres points.

En appliquant le théorème d'Abel aux points d'intersection de la courbe donnée avec la droite  $az$  d'une part et avec la courbe adjointe  $C_{n-2}$  d'autre part, nous trouverons successivement

$$\int^a du^{(i)} + \int^{z_1} du^{(i)} + \int^{\gamma_1} du^{(i)} + \int^{\gamma_2} du^{(i)} + \dots + \int^{\gamma_{n-2}} du^{(i)} = A_i,$$

$$\int^{z'_1} du^{(i)} + \int^{z'_2} du^{(i)} + \dots + \int^{z'_p} du^{(i)} + \int^{z_1} du^{(i)} + \dots + \int^{z_p} du^{(i)} + \int^{\gamma_1} du^{(i)} + \dots + \int^{\gamma_{n-2}} du^{(i)} = B_i,$$

ou bien

$$u^{(i)}(a) + u^{(i)}(z) + u^{(i)}(\gamma_1) + u^{(i)}(\gamma_2) + \dots + u^{(i)}(\gamma_{n-2}) = A_i,$$

$$u^{(i)}(z_1) + \dots + u^{(i)}(z_p) + u^{(i)}(z'_1) + \dots + u^{(i)}(z'_p) + u^{(i)}(\gamma_1) + \dots + u^{(i)}(\gamma_{n-2}) = B_i,$$

et nous pouvons en déduire par soustraction

$$u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - u^{(i)}(z_2) - \dots - u^{(i)}(z_p) + u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z'_1) - u^{(i)}(z'_2) - \dots - u^{(i)}(z'_p) = -H_i,$$

$H_i$  étant une quantité qui reste fixe quand la droite  $az$  et la courbe  $C_{n-2}$  se déplacent de façon que leurs  $n - 2$  points d'intersection restent sur la courbe donnée.

On a, d'après cela et en remarquant que  $\Theta$  ne change pas quand on change les signes des  $p$  arguments,

$$\Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - \dots - u^{(i)}(z_p) + C_i] = \Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z'_1) - \dots - u^{(i)}(z'_p) + H_i - C_i].$$

Si l'un des points du second groupe,  $z'_p$  par exemple, vient se confondre avec  $a$ , les  $p$  points du premier groupe sont sur une courbe adjointe d'ordre  $(n - 3)$  (CLEBSCH et GORDAN, *Abelschen Functionen*, S. 206), le premier membre de l'égalité précédente s'annule alors et

l'on en déduit

$$\Theta[u^{(i)}(z'_1) + u^{(i)}(z'_2) + \dots + u^{(i)}(z'_{p-1}) - H_i + G_i] = 0.$$

Ceci exige (BRIOT, *Fonctions abéliennes*, p. 146) que l'on ait

$$H_i - G_i = C_i;$$

cette condition nous détermine  $H_i$  et la relation entre les fonctions  $\Theta$  devient

$$\begin{aligned} \Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - \dots - u^{(i)}(z_p) + C_i] \\ = \Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z'_1) - \dots - u^{(i)}(z'_p) + C_i]. \end{aligned}$$

On trouve de même, en échangeant les points  $a$  et  $z$ ,

$$\begin{aligned} \Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z_1) - \dots - u^{(i)}(z_p) + C_i] \\ = \Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z'_1) - \dots - u^{(i)}(z'_p) + C_i], \end{aligned}$$

et l'on peut en conclure immédiatement que l'expression

$$\text{Log} \frac{\Theta[u^{(i)}(z) - u^{(i)}(z_1) - \dots - u^{(i)}(z_p) + C_i]}{\Theta[u^{(i)}(a) - u^{(i)}(z'_1) - \dots - u^{(i)}(z'_p) + C_i]}$$

change de signe quand on remplace les points du premier groupe

$$z_1, z_2, \dots, z_p,$$

par les points du second groupe

$$z'_1, z'_2, \dots, z'_p.$$

C'est ce que l'on avait admis dans la démonstration de la formule qui donne la décomposition en facteurs de la fonction  $F(z)$ .

