ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ETIENNE DELASSUS

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 339-365
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__339_0>

SUR LES

ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE DOUAI.

Soient deux équations linéaires, mettons-y les termes du plus haut ordre en évidence

$$A_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots + A_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = F(z),$$

$$B_0 \frac{\partial^p z}{\partial x^p} + B_1 \frac{\partial^p z}{\partial x^{p-1}\partial y} + \ldots + B_p \frac{\partial^p z}{\partial y^p} = \Phi(z).$$

Prenons toutes les dérivées d'ordre $p-1$ de la première équation et toutes celles d'ordre $n-1$ de la seconde, nous aurons ainsi $n+p$ équations, que nous considérerons comme des équations linéaires par rapport aux $n+p$ dérivées d'ordre $n+p-1$.

On voit immédiatement que le déterminant des inconnues est

$$R \equiv \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \ldots & A_{n-1} & A_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_0 & \ldots & \ldots & A_{n-1} & A_n & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & A_n \\ B_0 & B_1 & \ldots & \ldots & B_p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_0 & \ldots & \ldots & B_{p-1} & B_p & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & B_p \end{vmatrix}.$$

Nous remarquons que c'est précisément, sous la forme de Sylvester, le résultant des deux équations caractéristiques

$$A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\lambda + A_n = 0,$$

$$B_0\lambda^p + B_1\lambda^{p-1} + \ldots + B_{p-1}\lambda + B_p = 0.$$

Cette simple remarque va nous permettre d'étendre aux systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles la plupart des résultats obtenus, dans un précédent Mémoire (¹), pour les équations linéaires, et d'en déduire une proposition intéressante sur la nature des singularités des intégrales analytiques de ces équations.

I.

Si les deux équations caractéristiques considérées précédemment n'ont aucune racine commune, R n'est pas identiquement nul et, par suite, les deux équations linéaires données permettront d'exprimer toutes les dérivées de z d'ordre $n+p-1$ au moyen des dérivées d'ordre inférieur.

Considérons maintenant plus de deux équations, mais en supposant qu'il n'y ait aucune racine commune à toutes leurs équations caractéristiques.

Si deux de ces équations caractéristiques n'ont aucune racine commune, on est ramené au cas précédent.

S'il n'en est pas ainsi, mettons à part une des équations et désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les racines de son équation caractéristique. Ramenons toutes les autres équations à être du même ordre, en effectuant au besoin sur chacune d'entre elles des opérations de la forme $\frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y}$, les μ étant arbitraires, mais distincts des λ. Les équations ainsi modifiées auront des équations caractéristiques

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_p = 0$$

et une combinaison linéaire de ces équations aura pour équation caractéristique

$$\nu_1 \varphi_1 + \nu_2 \varphi_2 + \ldots + \nu_p \varphi_p = 0;$$

λ_1 n'est pas racine de toutes les équations $\varphi = 0$; donc, en écrivant

---

(¹) Ét. Delassus, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques réelles* (*Annales de l'École Normale*. Supplément, 1895).

que λ_1 est racine de l'équation précédente, on arrivera à une condition

$$\psi_1(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p) = 0,$$

qui ne sera pas identiquement vérifiée. $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ donneront de même des conditions

$$\psi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \psi_n = 0,$$

de sorte que, si l'on donne à $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ un système de valeurs tel qu'aucune de ces conditions ne soit vérifiée, l'équation

$$\nu_1 \varphi_1 + \nu_2 \varphi_2 + \ldots + \nu_p \varphi_p = 0$$

ne possédera aucune des racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. L'équation linéaire, dont elle est l'équation caractéristique, permettra donc, en l'associant avec celle qui a été mise à part, d'exprimer toutes les dérivées partielles de z d'un certain ordre au moyen des dérivées d'ordre inférieur.

Or, on sait (¹) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'équations aux dérivées partielles admette une intégrale générale ne dépendant que d'un nombre limité de constantes arbitraires est que l'on puisse, au moyen des équations de ce système, exprimer toutes les dérivées de z d'un certain ordre au moyen des dérivées d'ordre inférieur. Pour abréger, nous dirons qu'un système d'équations linéaires satisfaisant à ces conditions est de *première espèce*, et tous les autres seront appelés de *seconde espèce*.

Il résulte alors immédiatement de ce qui précède que :

Des équations linéaires, n'ayant en commun aucun système de caractéristiques, sont incompatibles ou donnent naissance à un système de première espèce et, par suite, leurs intégrales communes ne peuvent dépendre que d'un nombre limité de constantes arbitraires.

Dans tout système de première espèce complètement intégrable il est possible de trouver un ordre m tel que l'on ait

$$\frac{\partial^m z}{\partial x^m} = U_0, \qquad \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-1}\partial y} = U_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^m z}{\partial y^m} = U_m,$$

(¹) Lie, *Theorie der Transformationsgruppen* (*Erster Abschnitt*, S. 179), et Bourlet, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées* (*Annales de l'École Normale*. Suppl. 1891). — On pourra prendre, comme exemples des propriétés dont nous nous occupons, ceux qui sont traités, dans un autre but, par M. Bourlet.

les U étant des fonctions linéaires de z et de ses dérivées d'ordre inférieur à m. Les dérivées de ces équations appartiendront au système et fourniront des équations de même forme, mais d'ordre $m+1$; de sorte que nous pouvons, dans les raisonnements, partir des équations précédentes en supposant à volonté m pair ou impair.

Toute intégrale du système devra vérifier, quels que soient les coefficients μ,

$$\mu_0 \frac{\partial^m z}{\partial x^m} + \mu_1 \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-1}\partial y} + \ldots + \mu_m \frac{\partial^m z}{\partial y^m} = \mu_0 U_0 + \mu_1 U_1 + \ldots + \mu_m U_m.$$

Les μ étant arbitraires, les racines de l'équation caractéristique

$$\mu_0 \lambda^m + \mu_1 \lambda^{m-1} + \ldots + \mu_m = 0$$

le sont également.

En premier lieu, supposons m pair, nous pourrons déterminer les μ, analytiques dans tout le plan, de façon que cette équation ait, dans tout le plan, ses racines imaginaires. D'après un théorème, dû à M. Picard (¹), toutes ses intégrales seront analytiques; comme, parmi elles, on trouve toutes celles du système proposé, on a

Tout système linéaire complètement intégrable de première espèce ne peut avoir que des intégrales analytiques.

Sans faire maintenant aucune hypothèse sur m, nous pouvons déterminer les μ, analytiques dans tout le plan, de façon que l'équation caractéristique ait des racines arbitrairement choisies, *réelles* et analytiques dans tout le plan. Les intégrales du système, étant analytiques, ne pourront pas avoir de lignes singulières essentielles autres que ces caractéristiques, et, comme ces lignes sont absolument arbitraires, elles ne pourront pas en avoir; de sorte que

Les intégrales d'un système linéaire complètement intégrable de première espèce ne peuvent avoir que des lignes singulières essentielles fixes.

(¹) Picard, *Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé* (*Journal de l'École Polytechnique*, LXᵉ Cahier; 1890). — *Sur une classe étendue d'équations linéaires aux dérivées partielles dont toutes les intégrales sont analytiques* (*Comptes rendus*, 1ᵉʳ juillet 1895).

Nous appellerons ces lignes les *lignes singulières fixes du système.*

Dans le cas actuel, il est évident que ces lignes ne peuvent être que des lignes qui sont en même temps singulières essentielles pour des coefficients de $U_0, U_1, \ldots, U_m$.

Cherchons ce que peuvent être ces lignes lorsqu'on part d'équations F_1 $F_2, \ldots, F_q$ n'ayant en commun aucun système de caractéristiques.

Une équation linéaire peut présenter trois sortes de lignes singulières fixes :

1° Lignes singulières essentielles des coefficients;

2° Lignes le long desquelles les coefficients des termes du plus haut ordre sont tous nuls;

3° Lignes le long desquelles des racines de l'équation caractéristique viennent se confondre en cessant d'être analytiques.

Certaines de ces singularités peuvent n'être qu'apparentes. Supposons, par exemple, que $x = 0$ soit une singularité polaire de certains coefficients, c'est-à-dire qu'il y ait, dans l'équation, des coefficients de la forme $\frac{A}{x^\alpha}$, A étant analytique au voisinage de $x = 0$. Supposons, en outre, que la plus grande valeur de α corresponde à un coefficient d'un terme du plus haut ordre. On voit immédiatement qu'en multipliant toute l'équation par x^α, la ligne $x = 0$ ne sera plus ligne singulière pour aucun coefficient, et qu'en outre il y aura au moins un des coefficients des termes du plus haut ordre qui ne s'annulera pas pour $x = 0$, de sorte que cette ligne singulière était illusoire.

Un raisonnement analogue montre que toute singularité polaire du premier genre peut se transformer en une singularité du second genre, et réciproquement.

Nous supposerons donc, dans la suite, que les équations linéaires que nous aurons à considérer n'ont plus de lignes le long desquelles les coefficients des termes du plus haut ordre sont tous nuls.

Ceci posé, ramenons toutes les équations $F_1, F_2, \ldots, F_q$ au même ordre n, en effectuant au besoin sur certaines d'entre elles des opérations de la forme $\frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y}$, ce qui leur ajoutera des caractéristiques absolument arbitraires. Si les μ ont été choisis analytiques dans tout le plan et ne satisfaisant pas à des conditions spéciales, les équations d'ordre n

$$\Phi_0 = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_q = 0$$

n'auront en commun aucun système de caractéristiques, ne posséderont pas de lignes singulières de seconde sorte et auront les mêmes lignes singulières de première sorte que les équations primitives F.

Il en sera de même pour l'équation

$$\Psi = \nu_1 \Phi_1 + \nu_2 \Phi_2 + \ldots + \nu_q \Phi_q = 0,$$

si les fonctions arbitraires ν sont choisies analytiques dans tout le plan et ne satisfont pas à des conditions spéciales.

Soient $\psi = 0$, $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_q = 0$ les équations caractéristiques de

$$\Psi = 0, \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_q = 0,$$

on aura

$$\psi = \nu_1 \varphi_1 + \nu_2 \varphi_2 + \ldots + \nu_q \varphi_q.$$

L'équation $\psi = 0$ n'a pas de racine indépendante des ν, car une telle racine serait commune à toutes les équations $\varphi = 0$. En faisant varier arbitrairement les ν, toutes les racines de $\psi = 0$ vont varier et, sauf pour des systèmes particuliers de valeurs des ν, deviendront distinctes de leurs valeurs initiales, de sorte qu'on pourra trouver un second système $\nu'_1, \nu'_2, \ldots, \nu'_q$, satisfaisant aux mêmes conditions que le premier et tel que l'équation

$$\psi' = \nu'_1 \varphi_1 + \nu'_2 \varphi_2 + \ldots + \nu'_q \varphi_q = 0$$

n'ait aucune racine commune avec $\psi = 0$.

Au moyen des deux équations $\Psi = 0$, $\Psi' = 0$, nous pourrons alors exprimer toutes les dérivées d'ordre $2n - 1$ de z au moyen des dérivées d'ordre inférieur. Ces expressions seront de la forme

$$U = \frac{V}{R}.$$

U sera une fonction linéaire dont les coefficients seront des fonctions entières des coefficients de Ψ et Ψ' et de leurs dérivées ; ils ne pourront avoir comme lignes singulières que celles des coefficients de Ψ et Ψ', c'est-à-dire les lignes singulières de première sorte des équations F.

R est le déterminant formé au début et relatif à Ψ et Ψ'; ses lignes singulières ne peuvent encore être que celles de première sorte des F; mais U peut encore avoir comme lignes polaires les lignes le long desquelles R s'annule. Désignons ces lignes par l.

Formons, au moyen des expressions obtenues pour les dérivées d'ordre $2n-1$, des équations à caractéristiques réelles dans tout le plan et arbitraires; l'application d'un théorème déjà employé montrera que les intégrales ne peuvent pas avoir de lignes singulières fixes autres que celles que nous venons de trouver, de sorte qu'on ne devra conserver que les lignes l, qui sont indépendantes des ν.

Le long d'une telle ligne, les deux équations $\psi = 0$, $\psi' = 0$ auront une solution commune quels que soient les ν et ν'. Cela n'est possible que si toutes les équations $\varphi = 0$ ont une racine commune; en effet, s'il n'en était pas ainsi, toutes les racines de ψ seraient des fonctions des ν, toutes celles de ψ' des fonctions de ν' et, par suite, il ne pourrait y avoir de racine commune qu'en assujettissant les ν et ν' à une certaine relation non identiquement vérifiée.

Soient $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., $f_q = 0$ les équations caractéristiques des équations $F = 0$. Les équations $\varphi = 0$ ne sont que les équations $f = 0$ auxquelles on a ajouté des racines absolument arbitraires pour les ramener au même degré.

Un raisonnement analogue au précédent montrera que les équations $\varphi = 0$ ne peuvent avoir une racine commune que si les équations $f = 0$ ont aussi une racine commune.

Considérons une telle ligne l le long de laquelle les équations $f = 0$ ont une racine commune.

Par hypothèse, ces équations n'ont pas de racine commune quel que soit le point xy, de sorte qu'il y a des racines distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_q de ces q équations qui deviennent égales le long de l. Autrement dit, en tout point de l, on a

$$\lambda_1(x, y) = \lambda_2(x, y) = \ldots = \lambda_q(x, y).$$

Supposons que f soit caractéristique de F_1, on aura, le long de cette ligne,

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda_1(x, y),$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda_2(x, y), \qquad \ldots, \qquad \frac{dy}{dx} = -\lambda_q(x, y).$$

Donc l sera une caractéristique commune à toutes les équations F et réciproquement; toute caractéristique commune aux équations F sera une ligne l. Donc :

Des équations linéaires F, *n'ayant aucun système commun de caractéristiques et qui sont compatibles, donnent naissance à un système de première espèce, dont les lignes singulières fixes ne peuvent être que*

1° *Les lignes singulières des coefficients des équations* F;

2° *Les lignes le long desquelles toutes les équations* $f = 0$ *ont une solution commune et, comme cas particulier, les caractéristiques isolées communes à toutes les équations* F.

II.

Nous allons maintenant nous occuper des systèmes linéaires complètement intégrables de seconde espèce et montrer que les propriétés énoncées pour les équations linéaires, dans le Mémoire déjà cité, leur sont applicables.

Considérons l'infinité d'équations appartenant à un tel système, elles ont certainement des caractéristiques communes. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver un nombre limité d'équations du système n'ayant en commun aucun système de caractéristiques, lesquelles permettraient d'exprimer toutes les dérivées de z d'un certain ordre au moyen des dérivées d'ordre inférieur et, par suite, le système serait de première espèce. Donc :

Toutes les équations qui appartiennent à un système linéaire complètement intégrable de seconde espèce ont en commun des systèmes de caractéristiques.

Nous les appellerons les *caractéristiques du système*. Nous pourrons alors toujours trouver un nombre limité d'équations appartenant au système et n'ayant en commun que les caractéristiques de ce système. Soient

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_q = 0$$

ces équations et soit $\theta(\lambda) = 0$ l'équation qui fournit les caractéristiques du système. Les équations F auront des équations caractéristiques de la forme

$$f_1\theta = 0, \quad f_2\theta = 0, \quad \ldots, \quad f_q\theta = 0,$$

les f n'ayant aucune racine commune.

Soient Θ, F_1, F_2, ..., F_q des expressions linéaires et homogènes ne contenant que des dérivées d'un même ordre et ayant respectivement $\theta = 0$, $f_1 = 0$, ..., $f_q = 0$ comme équations caractéristiques. Les expressions

$$\mathfrak{F}_1(\Theta), \quad \mathfrak{F}_2(\Theta), \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}_q(\Theta)$$

auront respectivement pour équations caractéristiques $f_1\theta = 0$, ..., $f_q\theta = 0$ et, par suite, ne différeront de l'ensemble des termes d'ordre le plus élevé dans F_1, F_2, ..., F_q que par des multiplicateurs indépendants de z, de sorte que les équations F pourront se mettre sous la forme

$$\mathfrak{F}_1(\Theta) = W_1, \quad \mathfrak{F}_2(\Theta) = W_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{F}_q(\Theta) = W_q,$$

les premiers membres étant, dans chaque équation, formés par les termes du plus haut ordre.

Comme les expressions $\mathfrak{F}$ n'ont en commun aucun système de caractéristiques, on pourra, au moyen des équations précédentes, exprimer toutes les dérivées de Θ d'un certain ordre et arriver à des équations

$$\frac{\partial^m \Theta}{\partial x^m} = U_0, \quad \frac{\partial^m \Theta}{\partial x^m \partial y} = U_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^m \Theta}{\partial y^m} = U_m,$$

les U étant des fonctions linéaires de z et de ses dérivées d'ordre inférieur à $m + n$, n étant l'ordre de Θ.

L'équation

$$\mu_0 \frac{\partial^m \Theta}{\partial x^m} + \mu_1 \frac{\partial^m \Theta}{\partial x^{m-1} \partial y} + \ldots + \mu_m \frac{\partial^m \Theta}{\partial y^m} = \mu_0 U_0 + \mu_1 U_1 + \ldots + \mu_m U_m,$$

aura pour équation caractéristique

$$(\mu_0 \lambda^m + \mu_1 \lambda^{m-1} + \ldots + \mu_m)\,\theta = 0.$$

Nous pourrons donc former des équations appartenant au système, possédant ses caractéristiques et ayant, en outre, m systèmes de caractéristiques absolument arbitraires.

En outre, par un raisonnement déjà fait, on voit qu'on peut à volonté supposer m pair ou impair.

Supposons m pair et que, dans une région, 0 ait toutes ses racines imaginaires, nous pouvons déterminer les μ de façon que l'équation

$$\mu_0 \lambda^m + \mu_1 \lambda^{m-1} + \ldots + \mu_m$$

ait, dans cette région, toutes ses racines imaginaires.

Dans cette région, l'équation linéaire correspondante ne pourra, d'après le théorème déjà cité de M. Picard, avoir que des intégrales analytiques. Donc :

Dans une région où toutes ses caractéristiques sont imaginaires, un système de seconde espèce ne peut avoir que des intégrales analytiques.

Considérons maintenant une région R, où toutes les caractéristiques du système sont réelles. Nous pouvons déterminer d'une infinité de façon les μ de façon que les caractéristiques auxiliaires soient toutes réelles dans R; l'équation linéaire ayant dans R toutes ses caractéristiques réelles, ses intégrales ne pourront avoir comme lignes singulières mobiles que ces caractéristiques et le caractère exclusif de cette propriété montre qu'on ne devra conserver que celles qui sont indépendantes des arbitraires μ, c'est-à-dire les caractéristiques du système.

Dans une région où toutes les caractéristiques d'un système de seconde espèce sont réelles, les intégrales analytiques ne peuvent avoir comme lignes singulières mobiles que ces caractéristiques.

Dans cette région R, en outre des singularités mobiles, les intégrales analytiques peuvent présenter des lignes singulières fixes. Un raisonnement tout à fait analogue à celui que nous avons fait pour les systèmes de première espèce nous conduira à la conclusion suivante :

Dans la région où le sytème a toutes ses caractéristiques réelles, les *intégrales analytiques ne peuvent avoir comme lignes singulières fixes que*

1° *Les lignes singulières des coefficients des équations* F;

2° *Les lignes singulières de troisième sorte relatives à l'équation caractéristique* $\theta = 0$ *du système;*

3° *Les lignes le long desquelles toutes les équations* $f = 0$ *ont une racine commune et, comme cas particulier, les caractéristiques isolées communes à toutes les expressions linéaires* $\mathfrak{F}(z)$.

Toujours dans la région R, considérons un arc analytique régulier σ ne possédant aucune tangente caractéristique du système et qui, en outre, ne traverse aucune des lignes singulières fixes que nous venons d'énumérer et ne contienne aucun point singulier fixe des équations F.

Dans l'équation auxiliaire dont nous nous sommes déjà servi, nous pouvons évidemment, et d'une infinité de façons, déterminer les μ de façon que les caractéristiques, réelles dans R, ne soient jamais tangentes à σ et que, en outre, les singularités fixes, introduites auxiliairement par ces coefficients, ne rencontrent pas σ. Relativement à l'équation ainsi formée, σ a un domaine ρ l'entourant complètement et, comme elle est vérifié par toute intégrale du système, on peut énoncer la propriété suivante :

A tout arc analytique régulier σ, situé entièrement dans une région où le système a toutes ses caractéristiques réelles, ne possédant aucune tangente caractéristique du système et qui ne traverse aucune singularité fixe, correspond un domaine ρ l'entourant complètement et tel que toute intégrale du système, analytique en tous les points de σ, soit analytique dans tout ce domaine ρ.

De l'existence de ce domaine nous pourrons, en raisonnant comme pour les équations linéaires, en déduire :

Dans la région où le système a toutes ses caractéristiques réelles, les intégrales analytiques ne peuvent présenter que des points singuliers isolés fixes ou des points singuliers isolés mobiles sur les lignes singulières fixes.

Une ligne singulière mobile ne peut cesser brusquement d'être ligne singulière pour une intégrale, sans être continuée par une autre ligne singulière fixe ou mobile, qu'en passant par un point singulier isolé fixe.

Le contour du domaine à l'intérieur duquel une intégrale est analytique ne peut présenter de points anguleux dirigés vers l'intérieur à moins que ces points ne se trouvent sur les lignes singulières fixes ou coïncident avec des points singuliers isolés fixes.

Tous les auteurs qui se sont occupés, jusqu'à présent, des intégrales des systèmes d'équations aux dérivées partielles ont toujours considéré comme plus commode de ramener à des équations du premier ordre. Les propriétés que nous venons d'établir montrent le rôle important que doivent jouer les caractéristiques d'un système de seconde espèce, dans l'étude de ses intégrales analytiques et, par suite, que la transformation dont nous parlons, qui masque complètement ces caractéristiques, doit, dans un grand nombre de cas, être plutôt nuisible en masquant des propriétés qui auraient pu être aperçues si elle n'avait pas été effectuée.

Pour terminer ce Chapitre, nous allons faire une remarque dont l'importance se verra ultérieurement.

Reprenons le théorème, établi dans le premier Chapitre, sur les lignes singulières des intégrales analytiques communes à des équations F n'ayant en commun aucun système de caractéristiques. Nous remarquerons, dans l'énoncé même, que ces lignes sont singulières pour les équations F, ou caractéristiques isolées communes à toutes ces équations, ou ne sont caractéristiques pour aucune d'elles.

Le théorème analogue établi pour les systèmes de seconde espèce s'applique, sans aucune modification, aux intégrales communes à des équations F ayant en commun des systèmes de caractéristiques, toutes réelles dans une région R. Dans cette région, les lignes singulières fixes seront certainement singulières pour les F, ou caractéristiques isolées communes à toutes ces équations, ou ne seront caractéristiques pour aucune d'elles.

Ces équations F peuvent donner naissance à un système de première espèce, et alors les intégrales communes n'ont pas de lignes singulières mobiles, ou à un système de seconde espèce; mais, dans ce cas, les caractéristiques du système devant être communes à toutes les équations qui le composent devront, en particulier, être communes aux équations F; elles seront donc, d'après l'hypothèse, réelles dans R et, dans cette région, les intégrales communes ne pourront avoir que ces lignes comme singularités mobiles.

Nous pouvons donc énoncer ce résultat :

Si des équations F *n'ont en commun aucun système de caractéristiques, toute ligne singulière essentielle d'une intégrale analytique commune, distincte des lignes singulières des* F, *est caractéristique pour toutes ces équations ou ne l'est pour aucune d'elles.*

Si des équations F *ont en commun des systèmes de caractéristiques, qui sont toutes réelles dans une région* R, *toute ligne singulière essentielle d'une intégrale analytique commune, située dans* R *et distincte des lignes singulières fixes des équations* F, *est caractéristique pour toutes ces équations ou ne l'est pour aucune d'elles.*

Supposons de plus qu'on se place dans une région Δ où l'une des équations, $F = 0$ par exemple, a toutes ses caractéristiques réelles.

Si les équations $F = 0$, $F_1 = 0, \ldots, F_q = 0$ ont en commun des systèmes de caractéristiques, elles seront toutes réelles dans Δ et, par suite, dans cette région, nous pouvons certainement appliquer les résultats précédents. Nous remarquerons, en outre, que dans Δ les intégrales communes ne peuvent avoir, comme singularités, que les lignes singulières fixes de F ou les caractéristiques de cette équation, de sorte que les lignes qui n'étaient caractéristiques pour aucune des équations considérées seront forcément exclues. Nous obtenons ainsi :

Dans une région Δ *où l'équation* $F = 0$ *a toutes ses caractéristiques réelles, les intégrales analytiques communes aux équations* $F = 0$, $F_1 = 0, \ldots, F_q = 0$ *ne peuvent avoir comme lignes singulières essentielles que les lignes singulières fixes de ces équations ou des caractéristiques communes à toutes ces équations.*

III.

La considération des lignes singulières fixes d'une équation linéaire conduit tout naturellement à se poser la question suivante :

L *étant une ligne singulière fixe d'une équation linéaire* $F = 0$, *peut-il* *exister des intégrales de cette équation, analytiques en tous les points d'un domaine traversé par* L?

Si de telles intégrales existent, les déterminer.

La solution complète de cette question semble extrêmement difficile; je me propose uniquement d'en indiquer une transformation qui semble devoir simplifier considérablement le problème.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons toujours que les équations linéaires sont débarrassées des lignes singulières qui pourraient provenir d'un facteur commun à tous les coefficients et que leurs lignes singulières de seconde sorte ont été transformées en lignes polaires des coefficients ou ont disparu, comme nous l'avons indiqué dans le premier Chapitre.

En outre, nous distinguerons les lignes singulières fixes en *traversables* et *non traversables*, suivant que les intégrales dont nous nous occupons existent ou n'existent pas.

Étudions d'abord, à ce point de vue, les lignes singulières de troisième sorte, c'est-à-dire les lignes le long desquelles deux racines de l'équation caractéristique viennent se confondre en cessant d'être analytiques ainsi que leurs inverses.

Soit L une telle ligne et σ un arc analytique régulier traversant L, ne traversant aucune autre singularité fixe et ne possédant aucune tangente caractéristique. Il résulte immédiatement du théorème de Cauchy que si l'on se donne des fonctions initiales analytiques tout le long de σ, l'intégrale correspondante sera analytique en tous les points d'un certain domaine entourant cet arc et, par suite, traversera L. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il sera absolument nécessaire que, parmi les fonctions initiales, il s'en trouve au moins une qui cesse d'être analytique au point où σ traverse L. Il est donc manifeste qu'une intégrale qui est analytique au voisinage de L et dont les fonctions initiales ne satisfont pas à des conditions spéciales pourra se prolonger analytiquement au delà de L et, par suite :

Les lignes singulières fixes de troisième sorte d'une équation linéaire sont toujours traversables et ne sont que des singularités accidentelles des intégrales analytiques.

Ce résultat montre que, relativement à la question posée au début, les lignes singulières des coefficients sont les seules véritablement intéressantes.

Il est facile de voir, par un exemple simple, que de telles lignes peuvent être non traversables.

Soit une équation linéaire dans laquelle $x = 0$ est ligne singulière essentielle d'un seul coefficient, celui de $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q}$; on pourra la mettre sous la forme

$$A \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} = F(z).$$

Soit $\varphi(x, y)$ une intégrale analytique traversant $x = 0$; deux cas peuvent se présenter.

Si $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q}$ n'est pas identiquement nul, on aura

$$A = \frac{F(\varphi)}{\frac{\partial^{p+q} \varphi}{\partial x^p \partial y^q}}.$$

Au voisinage de $x = 0$, les deux termes de la fraction sont analytiques; si la fraction ne l'est pas, c'est que le dénominateur s'annule pour $x = 0$ et, par suite, A est de la forme $\frac{\psi(x, y)}{x^\lambda}$, ψ étant analytique le long de $x = 0$ et ne s'y annulant pas, λ étant un entier positif. La ligne $x = 0$ est donc une ligne polaire pour A.

Si $\frac{\partial^{p+q} \varphi}{\partial x^p \partial y^q} = 0$, on a aussi $F(\varphi) = 0$, de sorte que :

Si les deux équations $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} = 0$ *et* $F(z) = 0$ *sont incompatibles et si* $x = 0$ *n'est pas ligne polaire de* A, *cette ligne singulière n'est pas traversable.*

Nous remarquerons, en outre, que $x = 0$ n'étant pas ligne polaire de A, le problème de la recherche des intégrales traversant $x = 0$ se réduit au même problème pour les deux équations simultanées

$$\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} = 0, \qquad F(z) = 0,$$

dont tous les coefficients sont analytiques le long de cette ligne. Il peut arriver que $x = 0$ soit singulière de seconde sorte pour F, ce qui équivaut pour elle à être ligne polaire des coefficients de la seconde équation.

On peut faire une semblable réduction dans le cas général de la recherche des intégrales analytiques vérifiant plusieurs équations simultanées et traversant une ligne singulière de première sorte de ces équations.

Prenons une seule équation $\mathcal{F} = 0$ ne possédant toujours pas de ligne singulière de seconde sorte et ayant la ligne singulière de première sorte L.

Si L est ligne polaire des coefficients, le problème n'existe pas.

Si L est ligne singulière d'un seul coefficient, nous venons de voir qu'au point de vue de la recherche de nos intégrales l'équation $\mathcal{F} = 0$ pouvait se remplacer par deux équations simultanées ayant leurs coefficients analytiques tout le long de L.

Supposons en dernier lieu que L soit ligne singulière pour plusieurs coefficients, mais non polaire au moins pour l'un d'eux.

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_m$ les coefficients considérés et $Z_1, Z_2 \ldots, Z_m$ les dérivées correspondantes de z. L'équation $\mathcal{F}(z) = 0$ pourra s'écrire

$$A_1 Z_1 + A_2 Z_2 + \ldots + A_m Z_m = F(z);$$

ce qui met immédiatement en évidence, comme répondant à la question, les intégrales communes aux équations

$$Z_1 = 0, \qquad Z_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad Z_m = 0, \qquad F(z) = 0,$$

la dernière pouvant posséder L comme ligne polaire de ses coefficients.

Supposons qu'il existe des intégrales répondant à la question et autres que celles que nous venons de trouver. En écrivant qu'une telle intégrale vérifie l'équation $\mathcal{F} = 0$, on obtient une relation linéaire et à coefficients analytiques le long de L entre les A.

Admettons alors qu'il existe, entre les A, q relations linéaires distinctes, à coefficients analytiques le long de L. On a forcément $q < m$; en effet, s'il n'en était pas ainsi, de ces m relations on pourrait tirer $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et l'on trouverait comme expressions de ces coefficients des fractions dont les deux termes seraient analytiques le long de L, de sorte que cette ligne serait polaire pour tous, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Ayant $q = m - p$, les q relations permettront d'exprimer q coefficients, $A_{p+1}, \ldots, A_m$, par exemple, en fonction linéaire des p autres $A_1, A_2, \ldots, A_p$ et l'on obtiendra ainsi

$$A_{p+1} = \frac{\mu_1^1 A_1 + \mu_2^1 A_2 + \ldots + \mu_p^1 A_p + \lambda_1}{\Delta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_m = \frac{\mu_1^q A_1 + \mu_2^q A_2 + \ldots + \mu_p^q A_p + \lambda_q}{\Delta},$$

les μ, les λ et Δ étant analytiques tout le long de L. L'équation $\mathfrak{F} = 0$ pourra alors s'écrire

$$\begin{aligned} A_1(Z_1 + \mu_1^1 Z_{p+1} + \ldots + \mu_1^q Z_m) + \ldots + A_p(Z_p + \mu_p^1 Z_{p+1} + \ldots + \mu_p^q Z_m) \\ = \Delta F - \lambda_1 Z_{p+1} - \ldots - \lambda_q Z_m. \end{aligned}$$

Une intégrale analytique le long de L doit forcément annuler les coefficients de $A_1, A_2, \ldots, A_p$, sans quoi elle fournirait entre A_1 $A_2, \ldots, A_p$ une relation linéaire à coefficients analytiques le long de L, relation qui serait forcément distincte des q précédentes.

On est donc ramené à chercher des intégrales communes aux équations

$$\begin{gathered} Z_1 + \mu_1^1 Z_{p+1} + \ldots + \mu_1^q Z_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Z_p + \mu_p^1 Z_{p+1} + \ldots + \mu_p^q Z_m = 0, \\ \Delta F - \lambda_1 Z_{p+1} - \ldots - \lambda_q Z_m = 0, \end{gathered}$$

dont tous les coefficients sont analytiques le long de L; certaines d'entre elles peuvent posséder L comme singularité de seconde sorte : on la transformera comme toujours en singularité polaire des coefficients.

Nous remarquerons en outre que les intégrales communes aux équations

$$Z_1 = 0, \qquad Z_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad Z_m = 0, \qquad F = 0$$

sont certainement communes aux équations considérées en dernier lieu et que, par suite, nous pouvons ne garder que ce dernier système.

Supposons qu'on cherche les intégrales communes à des équations $\mathcal{F}_1=0$, $\mathcal{F}_2=0, \ldots, \mathcal{F}_n=0$ ayant L comme ligne singulière non polaire de certains coefficients, et qui traversent cette ligne L.

Par le procédé précédent, on remplacera chacune des équations qui possèdent L comme ligne non polaire par un système d'équations et finalement on arrivera à remplacer le système $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ par un autre $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$ qui lui sera équivalent au point de vue de la recherche des intégrales traversant L, mais qui ne possédera plus L que comme ligne polaire des coefficients. Donc :

La recherche des intégrales qui sont communes à des équations linéaires et qui traversent une ligne singulière de leurs coefficients peut toujours se ramener au problème analogue relatif à d'autres équations où la ligne singulière considérée figure au plus comme ligne polaire de certains coefficients.

Les équations $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$ peuvent être incompatibles; dans ce cas on peut affirmer que la ligne L n'est pas traversable par les intégrales communes à $\mathcal{F}_1$ $\mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$.

Si les équations Φ donnent naissance à un système complètement intégrable, de première espèce, ne possédant pas L comme ligne singulière fixe, les intégrales cherchées, lesquelles sont analytiques dans des domaines fixes, dépendront du même nombre de constantes arbitraires que l'intégrale générale, nombre qu'on sait déterminer; ces constantes seront tout au plus assujetties à certaines inégalités pour que les domaines dans lesquels elles sont analytiques soient précisément ceux qui sont traversés par L.

Si les équations Φ donnent naissance à un système de seconde espèce dont toutes les caractéristiques sont réelles dans une région R traversée par L et qui, dans cette région, ne possède pas L comme ligne singulière fixe, on pourra affirmer que le degré de généralité des intégrales cherchées sera le même que celui de l'intégrale générale du système; les constantes et fonctions initiales, dont on sait déterminer le nombre, seront tout au plus assujetties à des conditions ne pouvant pas se traduire sous forme d'égalités, de façon que les domaines dans lesquels les intégrales correspondantes sont analytiques soient traversés par L.

On voit ainsi que, dans des cas assez étendus, on pourra déterminer le degré de généralité des intégrales cherchées.

IV.

Par un calcul très simple, M. Appell a montré [1] que, si une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

possède une ligne polaire, cette ligne est forcément une caractéristique de l'équation.

Dans le cas actuel, cette propriété est une conséquence évidente des théorèmes fondamentaux démontrés dans notre précédent Mémoire, puisque l'équation considérée a ses caractéristiques réelles dans tout le plan et n'a pas de singularités fixes; et même, elle est encore vraie sans supposer que la singularité soit polaire.

Mais, comme l'a indiqué M. Appell lui-même, le calcul peut s'appliquer à une équation linéaire quelconque sans faire d'hypothèses sur la réalité des caractéristiques, et le résultat est encore vrai dans des régions où les intégrales peuvent présenter des lignes singulières quelconques.

Voici comment on peut présenter ce calcul.

Supposons que par un changement analytique de variables on ait ramené la singularité à être $x = 0$.

Soit F une équation ne possédant pas $x = 0$ comme singularité fixe et $\frac{\alpha(x,y)}{x^m}$ une intégrale où α est analytique le long de $x = 0$ et ne s'y annule pas.

Dans $F = 0$, mettons en évidence le terme en $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$, on aura

$$A \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\alpha}{x^m} = f\left(\frac{\alpha}{x^m}\right).$$

---

(1) Appell, *Sur l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ *et la théorie de la chaleur* (*Journal de Mathématiques*, 1892).

Développons les deux membres suivant les puissances de x; on voit immédiatement que le premier contiendra un terme en $\frac{1}{x^{m+n}}$ dont le coefficient, à un facteur numérique près, sera $A(o, y).\alpha(o, y)$; quant au second, il ne contiendra que des puissances de x supérieures à $-(m+n)$; l'égalité ne sera donc possible que si

$$A(o, y).\alpha(o, y) = o,$$

par hypothèse, le second facteur n'est pas nul.

On doit donc avoir

$$A(o, y) = o.$$

$x = o$ annulant A et n'annulant pas tous les coefficients des termes d'ordre n est forcément une caractéristique de l'équation $F = o$.

On peut remarquer que la démonstration précédente repose sur ce fait que la dérivation par rapport à y ne modifie pas la nature de la singularité, mais que la dérivation par rapport à x élève, en quelque sorte, la nature de cette singularité et que, par suite, s'il y a dans l'équation un seul terme où l'on dérive le maximum de fois par rapport à x, son coefficient doit s'annuler pour $x = o$, de façon à réduire, si cela est possible, la singularité de ce terme pour qu'il puisse ensuite se réduire avec d'autres.

Nous pourrons donc affirmer, sans aucun nouveau calcul, que la propriété précédemment démontrée pour les singularités polaires est encore vraie pour des singularités telles que $\alpha x^{\frac{p}{q}}$, αLx, $\alpha e^{\frac{1}{x}}$, etc.

Ces exemples montrent qu'il existe des singularités d'une nature telle, qu'elles ne peuvent se présenter, en dehors des lignes singulières fixes, que le long des caractéristiques. Le procédé précédent permet d'en trouver un certain nombre, mais il ne peut évidemment s'appliquer qu'à des singularités dont la forme analytique est connue. Pour en découvrir d'autres, nous allons avoir recours aux propriétés démontrées dans les deux premiers Chapitres, et nous arriverons à une propriété générale comprenant comme cas très particulier toutes celles qui nous auraient été fournies par notre méthode primitive.

Si une fonction analytique $f(x, y)$ possède une ligne singulière essentielle L, nous représenterons cette singularité par la notation (f, L).

Si, en outre, f vérifie une équation linéaire $F = 0$, nous dirons que cette équation possède la singularité (f, L).

Il est nécessaire de remarquer qu'il y a des singularités qui ne doivent pas être regardées comme distinctes, par exemple, les singularités telles que

$$(\alpha f + \beta, L),$$

où α et β sont analytiques le long de L, et toutes les singularités obtenues en faisant des changements de variables, analytiques tout le long de L. Nous dirons que de telles singularités sont semblables et, pour être précis, nous poserons la définition suivante :

Deux singularités (f, L), (f', L') *sont semblables s'il existe un changement de variables*

$$x' = \alpha(x, y), \qquad x = \alpha'(x', y'),$$
$$y' = \beta(x, y), \qquad y = \beta'(x', y')$$

transformant L *en* L', α, β *étant analytiques le long de* L *et* α', β' *le long de* L', *et tel, qu'après ce changement,* f' *puisse se mettre sous la forme*

$$\theta(x, y) f(x, y) + \omega(x, y),$$

θ *et* ω *étant analytiques le long de* L *et* θ *ne s'y annulant pas.*

Réciproquement, f pourra se mettre sous la même forme relativement à f'. En effet, le changement inverse transformera θ et ω en deux fonctions θ' et ω' de x', y', qui seront analytiques le long de L. De l'identité

$$f' = \theta' f + \omega'$$

on tirera

$$f = \frac{1}{\theta'} f' - \frac{\omega'}{\theta'},$$

θ' étant analytique et ne s'annulant pas le long de L'; il en est de même de $\frac{1}{\theta'}$, et $\frac{\omega'}{\theta'}$ est également analytique le long de L'.

En outre, deux singularités (f', L'), (f'', L''), toutes deux semblables à (f, L), sont semblables entre elles.

En effet, (f', L') et (f, L) étant semblables, il y aura un changement analytique de variables qui donnera

$$f' = \theta(x, y) f + \omega(x, y),$$

(f, L) et (f'', L'') étant semblables; il y aura de même un changement de variables donnant

$$f = \theta''(x'', y'') f'' + \omega''(x'', y'')$$

et, par suite,

$$f' = \theta\theta'' f'' + \theta\omega'' + \omega.$$

Faisons le second changement de variables dans θ et ω, nous arriverons finalement à

$$f' = \Theta(x'', y'') f'' + \Omega(x'', y''),$$

Θ et Ω ayant les propriétés exigées le long de L''.

Nous pouvons, par conséquent, rassembler toutes les singularités imaginables en groupes tels, que toutes les singularités d'un même groupe soient semblables, mais que deux singularités appartenant à des groupes différents ne soient jamais semblables.

Deux singularités (f, L), (f', L') devront donc être considérées comme non distinctes ou distinctes, suivant qu'elles appartiennent au même groupe ou à des groupes différents.

Pour définir un groupe de singularités, il suffira de se donner l'une d'elles, choisie aussi simplement que possible. Par exemple, on pourra choisir f de façon que L soit la ligne $x = 0$; soit $\mathrm{G}(x, y)$ la fonction ainsi déterminée; nous dirons que nos singularités sont du groupe $\mathrm{G}(xy)$.

Ainsi une singularité polaire sera une singularité d'un groupe tel que $\frac{1}{x^m}$, m étant un entier quelconque.

Une première propriété, presque évidente, va nous montrer la nécessité qu'il y a de considérer ces groupes de singularités.

Nous dirons qu'*une singularité* (f, L) *est caractéristique si toute équation linéaire vérifiée par f et n'ayant pas* L *comme ligne singulière fixe possède* L *comme caractéristique.*

Soit (f', L') une singularité semblable à (f, L) et supposons que f' vérifie une équation $\mathrm{F}'(z) = 0$ n'ayant pas L' comme ligne singulière fixe.

Reprenons le changement de variables déjà considéré, il donnera

$$f' = \theta f + \omega$$

et transformera l'équation $F'(z) = 0$ en une équation $F_1(z) = 0$ qui ne possédera certainement pas L comme ligne singulière fixe et dont les caractéristiques seront les transformées de celles de $F'(z) = 0$. f vérifiera l'équation

$$F_1(\theta z + \omega) = 0.$$

Cette dernière équation ne peut avoir comme lignes singulières fixes que celles de $F_1(z) = 0$, les lignes singulières de θ et les lignes le long desquelles θ s'annule. θ étant analytique et ne s'annulant pas le long de L, on peut affirmer que cette équation n'a pas L comme ligne singulière fixe ; étant vérifiée par f, elle admet forcément L pour caractéristique. Ses caractéristiques étant les mêmes que celles de $F_1(z) = 0$, L est donc caractéristique de cette dernière et, par suite, L' est caractéristique de $F'(z) = 0$. On obtient ainsi le résultat suivant :

Si, dans un groupe, il y a une singularité caractéristique, toutes les singularités du groupe sont caractéristiques.

Toutes les singularités d'un groupe étant à la fois caractéristiques ou non caractéristiques, nous pourrons, suivant le cas, dire que le groupe est caractéristique ou non caractéristique.

Arrivons maintenant au théorème fondamental que nous avions en vue.

Soit $F(z) = 0$ une équation linéaire ayant, dans une région R, toutes ses caractéristiques réelles, et possédant une singularité (f, L) située dans cette région, L n'étant pas une ligne singulière fixe. On sait que L sera forcément caractéristique de F.

Supposons que f vérifie une autre équation $F_1(z)$ ne possédant également pas L comme ligne singulière fixe. Il résulte immédiatement de la dernière propriété, démontrée dans le second Chapitre, que L sera caractéristique commune à F et F_1. La singularité (f, L) est donc caractéristique. De sorte qu'on a :

Si (f, L) est une singularité d'une équation linéaire distincte de ses *singularités fixes et située dans une région où elle a toutes ses caractéristiques réelles, le groupe* (f, L) *est caractéristique.*

Ce théorème nous permet de former une infinité de groupes.

Examinons les plus simples parmi ceux que fournit cette méthode.

Considérons une fonction X de x seulement, possédant une ligne singulière $x = 0$. Cette fonction est solution de l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

qui a ses caractéristiques réelles dans tout le plan et ne possède pas de lignes singulières fixes. Donc

Tout groupe X *est caractéristique.*

On voit que les singularités ainsi obtenues comprennent, comme cas très particulier, les singularités

$$\frac{1}{x^m}, \quad x^{\frac{p}{q}}, \quad L(x), \quad e^{\frac{1}{x}}, \quad \ldots,$$

étudiées au début de ce Chapitre.

Plus généralement, considérons une fonction de la forme

$$\Theta_1 X_1 + \Theta_2 X_2 + \ldots + \Theta_n X_n,$$

les X ayant la singularité commune $x = 0$ et les Θ étant analytiques le long de cette ligne. Une telle fonction vérifie l'équation

$$\begin{vmatrix} z & \frac{\partial z}{\partial y} & \ldots & \frac{\partial^n z}{\partial y^n} \\ \theta_1 & \frac{\partial \theta_1}{\partial y} & \ldots & \frac{\partial^n \theta_1}{\partial y^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_n & \frac{\partial \theta_n}{\partial y} & \ldots & \frac{\partial^n \theta_n}{\partial y^n} \end{vmatrix} = 0,$$

qui est de la forme

$$A_0 \frac{\partial^n z}{\partial y^n} + A_1 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{\partial z}{\partial y} + A_n = 0.$$

Si nous supposons que $\Theta_1(0, y), \ldots, \Theta_n(0, y)$ ne sont pas tous nuls ou ne sont liés par aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, A_0 ne sera pas nul pour $x = 0$, de sorte que nous aurons ainsi une équation ne possédant pas $x = 0$ comme singularité fixe et dont les caractéristiques seront réelles dans tout le plan. Donc :

S'il n'y a aucune relation linéaire et homogène, à coefficients constants, entre $\Theta_1(0, y), \ldots, \Theta_n(0, y)$, le groupe

$$\Theta_1 X_1 + \Theta_2 X_2 + \ldots + \Theta_n X_n$$

est caractéristique.

En partant d'équations à caractéristiques réelles contenant à la fois des dérivées par rapport à x et y, on arrivera à des groupes plus compliqués. Par exemple, en partant de l'équation

$$\Theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial \Theta}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

on verra que, si Θ est analytique et ne s'annule pas le long de $x = 0$, le groupe

$$\int \Theta X \, dx$$

est caractéristique.

On pourrait multiplier ainsi les exemples.

L'étude approfondie des équations linéaires conduit à distinguer, pour chaque équation, trois régions :

1° R, où toutes les caractéristiques sont réelles;

2° R', où il y a, à la fois, des caractéristiques réelles et des caractéristiques imaginaires;

3° R'', où toutes les caractéristiques sont imaginaires.

La région R'' se distingue de RR' par deux propriétés remarquables.

La première, connue depuis longtemps, est la suivante :

Prenons un point $M(x_0, y_0)$ et un arc analytique régulier σ passant par ce point et cherchons à déterminer une intégrale analytique en M en nous donnant ses n fonctions initiales, analytiques le long de σ.

Si M est dans R'', quels que soient l'arc σ et les fonctions initiales, on pourra calculer toutes les dérivées en M de l'intégrale et, par suite, former une série ordonnée suivant les puissances de $x - x_0$, $y - y_0$ qui sera absolument convergente au voisinage de M et la représentera.

Il n'en est plus de même si M est dans RR′ ; les arcs σ qui, en M, seront tangents à une des caractéristiques réelles, ne permettront plus de faire ce calcul : les fonctions initiales seront assujetties à certaines conditions et ne détermineront plus alors toutes les dérivées en M de l'intégrale cherchée.

La seconde propriété caractérisant R″ est celle qui a été donnée par M. Picard, dans le Mémoire cité, et que nous avons déjà utilisée :

Dans R″ *l'équation n'a que des intégrales analytiques; dans* RR′ *il peut exister des intégrales non analytiques.*

En suivant les méthodes d'approximations successives de M. Picard, je suis arrivé à séparer les régions R et R′R″ en montrant que, *dans* R, *les intégrales analytiques ne peuvent avoir, comme lignes singulières mobiles, que des caractéristiques; tandis que, dans* R′R″, *elles peuvent avoir des lignes singulières absolument quelconques.*

Si l'on ne considère que les intégrales analytiques, les seules que l'on puisse étudier d'une façon effective, il ne reste plus, pour séparer R″, que la propriété résultant du théorème de Cauchy et relative à la détermination des intégrales, propriété qui ne donne qu'une idée très vague du changement de nature des intégrales analytiques quand on passe de RR′ dans R″.

Au début du Chapitre III, nous avons vu que les lignes singulières fixes de seconde sorte, qui forment les frontières des régions RR′R″, ne sont qu'accidentellement des lignes singulières essentielles des intégrales analytiques. En général, ces intégrales s'étendent donc analytiquement dans plusieurs régions, de sorte qu'au passage de ces frontières elles doivent perdre certaines propriétés et en acquérir d'autres.

C'est ce que montrent, d'une façon claire, les propriétés que nous venons d'établir en dernier lieu, lesquelles vont nous permettre de séparer nettement nos trois régions en nous servant uniquement des intégrales analytiques. En effet :

Dans R, *les intégrales analytiques ne peuvent avoir, comme singularités mobiles, que des singularités caractéristiques.*

Dans R″, *les singularités mobiles sont toujours non caractéristiques et ont lieu le long de lignes absolument arbitraires.*

Dans R′, *elles peuvent être non caractéristiques le long de lignes arbitraires, mais peuvent aussi être caractéristiques.*

Dans la région R′, les singularités caractéristiques ne peuvent, d'après leur définition, exister que le long des caractéristiques, mais les singularités non caractéristiques, pouvant se présenter le long des lignes arbitraires, pourront également exister le long de ces caractéristiques.

De même que les équations linéaires, les systèmes linéaires complètement intégrables de seconde espèce possèdent des caractéristiques et, par suite, conduisent à considérer les trois régions R, R′, R″.

Nous avons déjà, dans le Chapitre II, généralisé, pour de tels systèmes, la propriété de M. Picard relative à R″ et la propriété des lignes singulières dans R. Il est facile de voir que la propriété relative à la nature des singularités se généralise également.

Supposons que, dans la région R, le système admette la singularité (f, L), L n'étant pas une des lignes singulières fixes que nous avons définies. Nous pouvons former, comme conséquence des équations du système, des équations linéaires ayant, dans R, toutes leurs caractéristiques réelles et ne possédant pas L comme ligne singulière fixe. Ces équations étant vérifiées par f, il résulte du théorème correspondant établi pour les équations linéaires que la singularité (f, L) est forcément caractéristique.

Nous pouvons donc, dans le cas des systèmes de seconde espèce, séparer les régions R, R′, R″ de même façon que dans le cas des équations linéaires.