Annales scientifiques de l'É.N.S.

Eugène Fabry

Sur les courbes planes unicursales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 107-114
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__107_0>

SUR LES

COURBES PLANES UNICURSALES,

PAR M. EUGÈNE FABRY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

Dans un Mémoire publié dans le *Journal de Crelle* (t. 64, p. 43), Clebsch a obtenu des résultats intéressants sur les points d'intersection d'une courbe unicursale d'ordre n, avec une courbe d'ordre $n-3$. Je me propose de montrer que ces résultats peuvent être obtenus par des calculs beaucoup plus simples, qui, appliqués au problème des courbes tangentes, montrent ce que deviennent les solutions qui disparaissent lorsqu'un ou plusieurs points doubles deviennent des points de rebroussement.

Les coordonnées d'un point de la courbe unicursale de degré n étant des fonctions rationnelles du paramètre λ, soient $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $\ldots$, $a_\nu b_\nu$ les couples de valeurs de λ correspondant aux points doubles

$$\left[\nu = \frac{n(n-3)}{2} + 1\right],$$

et $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{2\nu-2}$ les valeurs de λ pour les $n(n-3)$ points communs à cette courbe et à une courbe quelconque de degré $n-3$. On a

$$\frac{(a_i-\lambda_1)(a_i-\lambda_2)\ldots(a_i-\lambda_{2\nu-2})}{(b_i-\lambda_1)(b_i-\lambda_2)\ldots(b_i-\lambda_{2\nu-2})} = c_i^{n-3} = -\frac{\varphi'(a_i)\psi(a_i)}{\psi'(b_i)\varphi(b_i)},$$

où

$$\varphi(z) = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_\nu),$$
$$\psi(z) = (z-b_1)(z-b_2)\ldots(z-b_\nu).$$

Mais si l'on pose

$$F(z) = \varphi(z)\psi(z),$$

la fraction précédente prend la forme plus simple $-\frac{F'(a_i)}{F'(b_i)}$ et l'équation de Clebsch devient

$$(1)\qquad \frac{(a_i-\lambda_1)(a_i-\lambda_2)\ldots(a_i-\lambda_{2\nu-2})}{(b_i-\lambda_1)(b_i-\lambda_2)\ldots(b_i-\lambda_{2\nu-2})}=-\frac{F'(a_i)}{F'(b_i)},$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$(2)\qquad \begin{aligned}&\frac{a_i^{2\nu-2}}{F'(a_i)}+\frac{b_i^{2\nu-2}}{F'(b_i)}-\left[\frac{a_i^{2\nu-3}}{F'(a_i)}+\frac{b_i^{2\nu-3}}{F'(b_i)}\right]\Sigma\lambda_1\\&\quad+\left[\frac{a_i^{2\nu-4}}{F'(a_i)}+\frac{b_i^{2\nu-4}}{F'(b_i)}\right]\Sigma\lambda_1\lambda_2-\ldots\\&\quad+(-1)^{2\nu-2}\left[\frac{1}{F'(a_i)}+\frac{1}{F'(b_i)}\right]\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{2\nu-2}=0,\end{aligned}$$

où $i=1, 2, \ldots, \nu$. Si l'on ajoute ces ν équations, on a une expression identiquement nulle, car les coefficients des fonctions symétriques des λ sont de la forme $\sum\frac{a^\mu}{F'(a)}$, où a est une racine quelconque de $F(z)$, et ces expressions sont nulles puisque F est de degré 2ν et $\mu<2\nu-1$. Les ν équations (2) se réduisent donc à $\nu-1$.

Si $a_i=b_i=\alpha_i$, le point double devient un point de rebroussement, $F(z)$ contiendra le facteur $(z-\alpha_i)^2$, mais les équations (1) et (2) conserveront la même forme pour les points qui restent doubles. Pour le point de rebroussement, en posant

$$F(z)=(z-a_i)(z-b_i)f(z)$$

et

$$b_i=a_i+\varepsilon,$$

l'équation (1) devient

$$(3)\qquad \frac{1}{\alpha_i-\lambda_1}+\frac{1}{\alpha_i-\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_i-\lambda_{2\nu-2}}=\frac{f'(\alpha_i)}{f(\alpha_i)}=\frac{F'''(\alpha_i)}{3F''(\alpha_i)}\quad [1].$$

---

[1] C'est la formule (22) de Clebsch, où

$$(n-3)\gamma_i=\frac{\chi''(\alpha_i)}{\chi'(\alpha_i)}+\frac{\varphi'(\alpha_i)}{\varphi(\alpha_i)}+\frac{\psi'(\alpha_i)}{\psi(\alpha_i)}=\frac{F'''(\alpha_i)}{3F''(\alpha_i)}.$$

La formule (37) de Clebsch porte, par erreur, $2\chi'$ en dénominateur.

Dans l'équation (2), les coefficients ont des limites déterminées, car

$$\frac{a_i^\mu}{F'(a_i)} + \frac{b_i^\mu}{F'(b_i)} = \frac{b_i^\mu f(a_i) - a_i^\mu f(b_i)}{(b_i - a_i) f(a_i) f(b_i)},$$

qui a pour limite

$$\frac{\mu a_i^{\mu-1} f(a_i) - a_i^\mu f'(a_i)}{\overline{f(a_i)}^2} = \frac{2\mu a_i^{\mu-1}}{F''(a_i)} - \frac{2 a_i^\mu F'''(a_i)}{3\,\overline{F''(a_i)}^2}.$$

L'équation (2) devient donc

$$(4)\quad \frac{2(2\nu-2)\alpha_i^{2\nu-3}}{F''(\alpha_i)} - \frac{2\alpha_i^{2\nu-2}}{3}\frac{F'''(\alpha_i)}{\overline{F''(\alpha_i)}^2}$$
$$- \left[\frac{2(2\nu-3)\alpha_i^{2\nu-4}}{F''(\alpha_i)} - \frac{2\alpha_i^{2\nu-3}}{3}\frac{F'''(\alpha_i)}{\overline{F''(\alpha_i)}^2}\right]\Sigma\lambda_1 + \ldots$$
$$+ (-1)^{2\nu-2}\left[\frac{-2F'''(\alpha_i)}{3\,\overline{F''(\alpha_i)}^2}\right]\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{2\nu-2} = 0.$$

Cette relation peut se déduire de l'équation (3) multipliée par

$$\frac{2}{F''(\alpha_i)}(\alpha_i - \lambda_1)(\alpha_i - \lambda_2)\ldots(\alpha_i - \lambda_{2\nu-2}).$$

S'il y a χ points de rebroussement, on a χ équations (4) et $\nu - \chi$ équations (2). En ajoutant ces ν équations, on a encore un résultat identiquement nul, car les sommes des coefficients sont les limites d'expressions nulles. Les ν équations (2), (4) ou (1), (3) se réduisent donc à $\nu - 1$. Ces deux systèmes d'équations sont, en général, équivalents; mais si deux λ inconnus sont égaux, par exemple $\lambda_1 = \lambda_2$, on peut rendre l'équation (3) entière en ne multipliant qu'une fois par $\alpha_i - \lambda_1$; de sorte que, si l'on pose $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha_i$, l'équation (4) sera vérifiée, tandis que l'équation (3) ne l'est pas, le terme $\frac{2}{\alpha_i - \lambda_1}$ étant le seul infini. Lorsque plusieurs des points inconnus sont supposés confondus, le système d'équations (1), (3) est donc moins général que le système (2), (4); ce dernier admet, en plus, les solutions pour lesquelles un point de contact est remplacé par un point de rebroussement.

C'est ce qui a lieu lorsque l'on cherche les courbes d'ordre $n-3$ tangentes à la courbe unicursale en $\frac{n(n-3)}{2}$ points. Les équations (1) et (3) deviennent alors

$$(5)\qquad \frac{(a_i-\lambda_1)(a_i-\lambda_2)\ldots(a_i-\lambda_{\nu-1})}{(b_i-\lambda_1)(b_i-\lambda_2)\ldots(b_i-\lambda_{\nu-1})} = c_i^{\frac{n-3}{2}} = \sqrt{-\frac{F'(a_i)}{F'(b_i)}},$$

où $c_i^{\frac{n-3}{2}}$ peut prendre les deux valeurs du radical

$$(6)\qquad \frac{1}{\alpha_i-\lambda_1}+\frac{1}{\alpha_i-\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_i-\lambda_{\nu-1}} = \frac{n-3}{2}\gamma_i = \frac{F'''(\alpha_i)}{6F''(\alpha_i)}.$$

Les équations (2) et (4) peuvent se mettre sous la forme

$$(7)\qquad \frac{(a_i-\lambda_1)^2(a_i-\lambda_2)^2\ldots(a_i-\lambda_{\nu-1})^2}{F'(a_i)}+\frac{(b_i-\lambda_1)^2(b_i-\lambda_2)^2\ldots(b_i-\lambda_{\nu-1})^2}{F'(b_i)}=0,$$

$$\begin{aligned}(8)\qquad (\alpha_i-\lambda_1)(\alpha_i-\lambda_2)\ldots(\alpha_i-\lambda_{\nu-1})\frac{2}{F''(\alpha_i)}\Big\{&2(\nu-1)\alpha_i^{\nu-2}-\frac{\alpha_i^{\nu-1}F'''(\alpha_i)}{3F''(\alpha_i)}\\ &-\left[2(\nu-2)\alpha_i^{\nu-3}-\frac{\alpha_i^{\nu-2}F'''(\alpha_i)}{3F''(\alpha_i)}\right]\Sigma\lambda_1+\ldots\\ &+(-1)^{\nu}\frac{F'''(\alpha_i)}{3F''(\alpha_i)}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{\nu-1}\Big\}\end{aligned}$$

elles se réduisent encore à $\nu-1$.

Les χ équations (6) et $\nu-\chi-1$ équations (5), où l'on choisit les valeurs des quantités $c_i^{\frac{n-3}{2}}$, déterminent les λ; et les équations (7) et (8) montrent que la dernière équation (5) sera vérifiée, si $c_i^{\frac{n-3}{2}}$ y a une valeur convenable, qui est alors déterminée. Si l'on prend les $\nu-\chi$ équations (5) et $\chi-1$ équations (6), le système (7), (8) est encore vérifié, mais l'équation (6) supprimée ne l'est pas toujours, à cause de la solution $\lambda=\alpha_i$ de (8). Si l'on choisit les valeurs de $\nu-\chi-1$ des quantités $c_i^{\frac{n-3}{2}}$, la dernière doit donc avoir une valeur déterminée pour que les équations (5) et (6) soient compatibles; et si l'on change la valeur de l'une de ces quantités données, la dernière doit aussi changer ; de sorte que les valeurs qui rendent les équations compatibles donnent au produit $\overline{c_1 c_2 \ldots c_{\nu-\chi}}^{\frac{n-3}{2}}$ la même valeur. Pour déterminer cette valeur, considérons les équations précédentes indépendamment de leur signification géométrique, en supposant que les paramètres a, b, α peuvent prendre des valeurs arbitraires, de même que les nombres des équations χ et $\nu - \chi$.

Si $\chi = 0$, en posant

$$A = (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{\nu-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{\nu-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots \\ 1 & a_\nu & a_\nu^2 & \ldots & a_\nu^{\nu-1} \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)\ldots(a_{\nu-1} - a_\nu),$$

$$B = (b_1 - b_2)(b_1 - b_3)\ldots(b_{\nu-1} - b_\nu),$$

on a

$$\overline{c_1 c_2 \ldots c_\nu}^{n-3} = (-1)^\nu \frac{F'(a_1) F'(a_2) \ldots F'(a_\nu)}{F'(b_1) F'(b_2) \ldots F'(b_\nu)} = \frac{A^2}{B^2}.$$

Soit

$$(9) \qquad \overline{c_1 c_2 \ldots c_\nu}^{\frac{n-3}{2}} = \varepsilon \frac{A}{B} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

la condition pour que les équations (5) et (6) soient compatibles. Si les paramètres a, b varient, ε reste fixe.

Si un point double devient un point de rebroussement $a_i = b_i$, c_i^{n-3} tend vers 1, et $c_i^{\frac{n-3}{2}}$ vers ± 1. Pour la valeur $+1$, l'équation (5) est remplacée par (6). Pour la valeur -1, elle devient

$$(10) \qquad (\alpha_i - \lambda_1)(\alpha_i - \lambda_2)\ldots(\alpha_i - \lambda_{\nu-1}) = 0.$$

De même, s'il y a plusieurs points de rebroussement, chaque équation (8) se décompose en deux, (6) et (10), qui remplacent les deux équations (5) suivant que $c_i^{\frac{n-3}{2}}$ tend vers $+1$ ou -1. On obtiendra donc toutes les solutions des équations (7) et (8) en prenant pour chaque α_i l'une des équations (6) ou (10), et pour chaque $a_i b_i$ l'une des équations (5). La condition pour que ces ν équations soient compatibles sera toujours exprimée par l'équation (9), avec les conventions précédentes pour les $c_i^{\frac{n-3}{2}}$ qui correspondent aux points de rebroussement.

En particulier, si $\chi = \nu$, on a la solution

$$\lambda_1 = \alpha_1, \qquad \lambda_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \lambda_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1},$$

qui vérifie les $\nu - 1$ premières équations (10) et la dernière équation (6). Dans ce cas $A = B$, les $c^{\frac{n-3}{2}}$ sont égaux à -1, sauf le dernier égal à $+1$, et l'on a

$$\varepsilon = (-1)^{\nu-1}.$$

L'équation (9) devient donc

$$\overline{c_1 c_2 \ldots c_\nu}^{\frac{n-3}{2}} = (-1)^{\nu-1}\frac{A}{B}, \tag{11}$$

et la condition pour que les équations (5) et (6) soient compatibles sera

$$\overline{c_1 c_2 \ldots c_{\nu-\chi}}^{\frac{n-3}{2}} = (-1)^{\nu-1}\frac{A}{B}.$$

Si dans les équations (7) et (8) on suppose μ des équations (10) vérifiées, μ des λ étant égaux aux α, les autres λ se déduiront des $\chi - \mu$ autres équations (6) et des $\nu - \chi$ équations (5) dans lesquelles

$$\overline{c_1 c_2 \ldots c_{\nu-\chi}}^{\frac{n-3}{2}} = (-1)^{\nu-\mu-1}\frac{A}{B}.$$

Dans les équations (6), on pourra, du reste, supprimer les termes communs provenant des λ égaux aux α, et dans les équations (5) les facteurs tels que $\frac{a_i - \lambda}{b_i - \lambda} = \frac{a_i - \alpha}{b_i - \alpha}$ qui entrent dans $c_i^{\frac{n-3}{2}}$ et dont le produit entre aussi dans $\frac{A}{B}$. On sera ainsi ramené aux équations (5) et (6) pour le cas où $\nu' = \nu - \mu$. Il serait facile d'en déduire une nouvelle démonstration de l'équation (11), en vérifiant que le rapport des deux membres ne dépend pas de ν, et en prenant un cas particulier.

Si l'on exprime que les $n(n-3)$ paramètres λ, donnant les points communs aux deux courbes, sont égaux 2 à 2, on obtient les équations (7) et (8) qui ont toujours $2^{\nu-1}$ systèmes de solutions. Chaque λ correspond alors à un point de contact ou à un point de rebroussement. Par μ points de rebroussement donnés passent $2^{\nu-\chi-1}$ courbes d'ordre $n-3$, tangentes chacune en $\nu-\mu-1$ autres points. Le nombre de groupes de μ points de rebroussement que l'on peut donner étant $2^{\chi}-1$, il y a en tout $2^{\nu-1}-2^{\nu-\chi-1}$ solutions étrangères aux équations (5) et (6); et il reste $2^{\nu-\chi-1}$ solutions pour les courbes tangentes en $\frac{n(n-3)}{2}$ points. On doit remarquer que, si n est impair, on trouve parmi ces solutions une courbe d'ordre $\frac{n-3}{2}$ considérée comme double; il ne reste alors que $2^{\nu-\chi-1}-1$ solutions.

Ces formules supposent $\chi<\nu$. Si $\chi=\nu$, la relation (11) montre que les ν équations (6) ne sont compatibles que si ν est pair. Du reste, la seule courbe unicursale pour laquelle $\nu=\chi$ et $n-3>0$ est celle du quatrième ordre où $\nu=\chi=3$; les équations (7) et (8) ont alors quatre systèmes de solutions qui correspondent à la tangente double et aux droites joignant deux points de rebroussement.

Sur la situation des points de contact des $2^{\nu-1}$ courbes déduites des équations (7) et (8), on trouve facilement des résultats analogues à ceux que Clebsch a déduit du théorème d'Abel dans le cas général d'une courbe d'ordre n (*Journal de Crelle*, t. 63, p. 189). Si l'on choisit $\mu-1$ courbes, les λ étant donnés par les équations (5), (6) et (10), on peut toujours trouver une autre solution telle que l'ensemble des $\mu(\nu-1)$ valeurs de λ donne l'intersection complète de la courbe unicursale avec une courbe d'ordre $\mu\frac{n-3}{2}$ (ce qui suppose μ pair, dans le cas où n est pair). Pour cette dernière solution, les équations (5) sont déterminées. Si, dans les $(\mu-1)$ solutions données, aucun λ n'est égal à α_i, il en sera de même pour la dernière, qui devra vérifier l'équation (6). Si une seule des $(\mu-1)$ premières courbes passe par le point de rebroussement α_i, la dernière doit aussi y passer, et l'équation (6) est alors remplacée par (10). Mais si deux, au moins, des $\mu-1$ courbes choisies passent par le même point de rebroussement α_i, on peut prendre indistinctement, pour la dernière solution, l'équation (6) ou (10); pourvu que la relation (11) reste vérifiée, ce qui a lieu lorsque le nombre total des λ égaux aux α est un nombre pair. Si donc il y a p points de rebroussement par lesquels passent au moins deux des $\mu - 1$ courbes données, on obtiendra pour la dernière 2^{p-1} solutions.