E. LACOUR

Sur les fonctions d'un point analytique à multiplicateurs exponentiels ou à périodes rationnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 3-51 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__S3_0>

SUR DES

FONCTIONS D'UN POINT ANALYTIQUE

A MULTIPLICATEURS EXPONENTIELS

OU

A PÉRIODES RATIONNELLES,

PAR M. E. LACOUR,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS.

INTRODUCTION.

A la fin d'un Mémoire *Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce* (1), M. Appell étudie des fonctions d'un point analytique analogues aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Ces nouvelles fonctions se comportent comme les puissances de la fonction $\Theta[u^{(i)}(x,y)]$, que l'on obtient en prenant une fonction Θ à p variables et en y remplaçant les variables par les intégrales abéliennes normales de première espèce correspondant à une courbe algébrique de genre p. Si l'on considère la surface de Riemann rendue simplement connexe R_{abc}, les fonctions introduites par M. Appell admettent le long de chacune des p coupures b un multiplicateur de la forme

$$e^{-mu^{(i)}(x,y)},$$

m désignant un nombre entier et $u^{(i)}(x,y)$ l'intégrale normale de première espèce correspondant à la coupure traversée.

(1) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I; mai 1884.

Dans la première Partie de ce travail, j'étudie des fonctions dont la définition comprend la précédente comme cas particulier, en supposant qu'à chacune des $2p$ coupures correspond un multiplicateur exponentiel et que l'exposant, au lieu de contenir une seule intégrale de première espèce, est une fonction linéaire des p intégrales de première espèce.

Les coefficients de ces fonctions linéaires ne peuvent être pris arbitrairement; si l'on a ramené à l'unité les multiplicateurs correspondant aux coupures a, ce qui est toujours possible, on trouve comme condition nécessaire que, dans chacune des p fonctions linéaires restantes, l'un des coefficients doit être un nombre entier. Ce sont ces nombres entiers qui interviennent quand on cherche l'excès du nombre des zéros sur le nombre des pôles, en supposant que la fonction n'admet sur la surface R_{abc} d'autres points singuliers que des pôles.

En appliquant la méthode dont Riemann s'est servi pour obtenir la relation entre les périodes de deux intégrales abéliennes de première espèce, on peut voir comment la fonction étudiée se comporte vis-à-vis des intégrales abéliennes attachées à la même surface. On obtient ainsi des propositions qui relient les uns aux autres les théorèmes d'Abel sur les zéros et les infinis des fonctions algébriques, les théorèmes correspondants donnés par M. Appell pour les fonctions à multiplicateurs et, d'autre part, le théorème de Riemann sur les zéros d'une fonction $\Theta[u^i(x,y) - G_i]$, dans laquelle figurent p constantes arbitraires G_i.

Dans la seconde Partie, j'étudie des fonctions qui comprennent, comme cas particulier, les dérivées logarithmiques des fonctions précédentes; l'une de ces fonctions reçoit, lorsque le point représentant la variable traverse une des coupures a ou b, un accroissement qui dépend du point où la coupure est traversée et qui est donné par une fonction rationnelle du point analytique correspondant. Ces fonctions se rattachent à des fonctions déjà étudiées et à des recherches importantes. On voit bien que, si l'on sait former (¹) une fonction uniforme

(¹) Ce problème est un cas très particulier d'une question sur des équations fonctionnelles, traitée par M. Picard, *Sur une Classe de Transcendantes nouvelles* (*Acta mathematica*, mars 1894), par la méthode des approximations successives.

satisfaisant aux conditions

$$F(z+\omega) = F(z), \qquad F(z+\omega_1) = F(z) + \varphi(z)$$

ω et ω_1 étant des constantes et $\varphi(z)$ une fonction doublement périodique aux périodes ω et ω_1, il suffira de remplacer dans $F(z)$ la variable par une intégrale elliptique aux périodes ω et ω_1, pour avoir une des fonctions que nous voulons étudier. Or cette question se ramène à un problème posé par M. Picard (*Comptes rendus*, 1878), généralisé par M. Appell [*Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes* (*Mathematische Annalen*, t. XIX; 1881)] et, dans les deux cas, on rencontre les fonctions O de Heine formées avec la moitié des facteurs qui constituent les fonctions Θ de même que la fonction $\Gamma(x)$ est formée avec la moitié des facteurs qui constituent la fonction $\frac{1}{\sin \pi x}$. Le problème posé par M. Picard a été étudié à nouveau par M. Craig (*American Journal of Mathematics*, Vol. XVI, n° 3, *A Class of Uniform Transcendental Functions*).

On montre d'abord qu'on peut supposer nulles les périodes relatives aux coupures a. En supposant que la fonction n'admet d'autres points singuliers que des pôles, on trouve, entre ces pôles et les résidus, p relations qui, dans certains cas particuliers, peuvent se réduire à des identités.

On obtient ensuite une relation qui donne l'expression de la fonction quand on connaît les pôles avec les résidus correspondants et les périodes.

Dans cette expression se présentent des intégrales définies contenant la variable sous le signe somme et admettant comme ligne de discontinuité une des coupures b. Pour vérifier que l'accroissement de la fonction, quand la variable traverse une des coupures, est bien égal à la période donnée, on est conduit à appliquer une méthode indiquée par M. Hermite [*Sur quelques points de la théorie des fonctions* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. XCI, p. 62; 1881)]. Le même résultat peut être rattaché aux intégrales de Cauchy, mais il y a intérêt à l'établir par une méthode élémentaire et indépendante.

On peut, après cette vérification, répondre à la question suivante : Existe-t-il une fonction ayant les propriétés énoncées, quand on se donne à l'avance les fonctions rationnelles d'un point analytique qui doivent servir de périodes, les pôles et les résidus correspondants, pourvu toutefois que les p relations entre les pôles et les résidus soient vérifiées par les données? La formule qui donne la solution de cette question se réduit, dans le cas où les périodes deviennent nulles, à la formule de Riemann-Roch donnant la décomposition d'une fonction algébrique en éléments simples. On peut encore composer avec des intégrales abéliennes et des fonctions rationnelles une fonction répondant à la question; mais la première solution a l'avantage de mettre en évidence les pôles de la fonction et les parties principales correspondantes.

Dans une troisième Partie je vérifie que les fonctions qui viennent d'être étudiées en dernier lieu satisfont à une équation différentielle linéaire avec second membre dont les coefficients sont des fonctions rationnelles d'un point analytique; je me suis guidé dans cette dernière Partie sur la méthode suivie par M. Appell à la fin de sa Note *Sur les équations différentielles linéaires intégrables à l'aide de la fonction* $\chi_m(x, y)$ (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. V; 1888).

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soient

$$f(z, s) = 0$$

une équation algébrique, T la surface de Riemann correspondante, T′ cette surface rendue simplement connexe au moyen des coupures

$$\begin{array}{cccc} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p, \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_p, \\ c_1, & c_2, & \ldots, & c_p; \end{array}$$

nous désignerons par $u^{(i)}(z)$ l'intégrale normale de première espèce admettant la période $2\pi\sqrt{-1}$ sur la coupure a_i.

Soit, d'autre part, $F(z)$ une fonction de z régulière en tout point de cette surface, sauf en un nombre limité de points qu'elle admet comme pôles. On suppose de plus que la fonction $F(z)$ admet le long des coupures a_k, b_k des multiplicateurs variables définis par les égalités suivantes, où λ désigne un point du bord positif d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord négatif de la même coupure :

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{le long de } a_k \quad F(\lambda) = F(\rho)\, e^{A_k + A_k^{(1)} u^{(1)}(\rho) + A_k^{(2)} u^{(2)}(\rho) + \ldots + A_k^{(p)} u^{(p)}(\rho)}, \\ \text{le long de } b_k \quad F(\lambda) = F(\rho)\, e^{B_k + B_k^{(1)} u^{(1)}(\rho) + B_k^{(2)} u^{(2)}(\rho) + \ldots + B_k^{(p)} u^{(p)}(\rho)}, \end{cases}$$

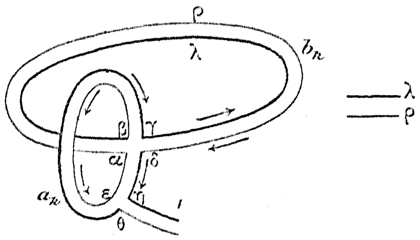
pour $k = 1, 2, \ldots, p$.

Le long de chacune des coupures $c_2, \ldots, c_p$ le multiplicateur est supposé constant et égal à l'unité.

2. En considérant les points de croisement de deux coupures, on reconnaît aisément que les coefficients $A_k^{(i)}$ et $B_k^{(i)}$ ne peuvent pas être pris arbitrairement.

Considérons d'abord le point de croisement des coupures a_k, b_k et soient α, β, γ, δ les quatre sommets qui se trouvent en ce point (on a marqué d'un trait plus gros sur la *fig.* 1 le bord positif de chacune

Fig. 1.



des coupures et on a désigné par α le sommet qui se trouve à la fois sur le bord négatif de chacune des deux coupures). Pour aller de α en γ on peut, ou bien aller de α en β puis de β en γ, ou bien aller de α en δ puis de δ en γ. On doit trouver le même résultat dans les deux cas, puisque la fonction $F(z)$ est uniforme; cette remarque conduit à considérer l'égalité, évidente par elle-même

$$\frac{F(\beta)}{F(\alpha)} \times \frac{F(\gamma)}{F(\beta)} = \frac{F(\delta)}{F(\alpha)} \times \frac{F(\gamma)}{F(\delta)}.$$

Il nous sera commode ici de poser

$$\begin{aligned} A_k(z) &= A_k + A_k^{(1)} u^{(1)}(z) + \ldots + A_k^{(p)} u^{(p)}(z), \\ B_k(z) &= B_k + B_k^{(1)} u^{(1)}(z) + \ldots + B_k^{(p)} u^{(p)}(z). \end{aligned}$$

Alors l'égalité précédente devient (si l'on néglige d'écrire l'indice k)

$$e^{B(\alpha)} e^{A(\beta)} = e^{A(\alpha)} e^{B(\delta)},$$

ou bien

$$e^{A(\beta) - A(\alpha)} = e^{B(\delta) - B(\alpha)}.$$

Dans le premier membre, l'exposant est l'accroissement que reçoit $A(z)$ quand on traverse la coupure b; dans le second, c'est l'accroissement de $B(z)$ quand on traverse la coupure a. On déduit de là, en désignant par n_k un nombre entier et par b_{ik} le module de périodicité de $u^{(i)}(z)$ le long de la coupure b_k

$$A_k^{(1)} b_{1k} + A_k^{(2)} b_{2k} + \ldots + A_k^{(p)} b_{pk} = B_k^{(k)} \times 2\pi\sqrt{-1} + 2 n_k \pi \sqrt{-1},$$

ou encore

$$\frac{A_k^{(1)} b_{1k} + A_k^{(2)} b_{2k} + \ldots + A_k^{(p)} b_{pk}}{2\pi\sqrt{-1}} - B_k^{(k)} = n_k, \tag{2}$$

pour $k = 1, 2, \ldots, p$.

Il reste à examiner le point de croisement d'une coupure a_k avec une coupure c_k. On doit avoir entre les valeurs de la fonction $F(z)$ aux trois points ε, η, θ les trois relations

$$\begin{aligned} F(\eta) &= F(\varepsilon) e^{A(\varepsilon)}, \\ F(\theta) &= F(\varepsilon) e^{A(\varepsilon)}, \\ F(\theta) &= F(\eta). \end{aligned}$$

Ces relations sont compatibles; mais on voit que si, comme nous l'avons supposé, les coefficients qui figurent dans l'exposant du multiplicateur sur la coupure a_k restent les mêmes de part et d'autre de la coupure c_k et si le multiplicateur relatif à c_k est constant, ce dernier multiplicateur est nécessairement égal à 1.

En résumé, les conditions données pour les multiplicateurs par la considération des points de croisement se réduisent aux p conditions (2). Celles-ci prennent une forme très simple quand les multiplicateurs relatifs aux coupures a_k sont tous égaux à l'unité; elles deviennent

$$B_k^{(k)} = \text{un nombre entier} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

3. *Excès du nombre des zéros sur le nombre des infinis.* — La fonction

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} F(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}$$

reste holomorphe dans une aire T″ obtenue en enlevant dans l'aire T′ un cercle infiniment petit autour de chacun des points qui sont zéros ou infinis de F; l'intégrale

$$\int d \operatorname{Log} F$$

prise le long du contour de cette aire est donc nulle.

Le chemin d'intégration se compose du contour de la surface T′ et des contours des petits cercles, et le sens est choisi de façon qu'un mobile marchant dans ce sens ait constamment à sa gauche l'aire T″.

On peut changer le sens d'intégration sur chacun des petits cercles, à condition de changer en même temps le signe de l'intégrale partielle correspondante.

D'après cela, si l'on désigne par

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_g$$

les points qui sont zéros ou infinis de F, on a la relation

$$\int_{T'} d \operatorname{Log} F - \int_{(c_1)} d \operatorname{Log} F - \int_{(c_2)} d \operatorname{Log} F - \int_{(c_g)} d \operatorname{Log} F = 0,$$

en supposant maintenant que le mobile définissant le sens d'intégration sur le contour de l'aire T′ ou de chacun des petits cercles c_i ait constamment à sa gauche l'aire limitée par ce contour. On sait que l'on a

$$\int_{(c_i)} d \operatorname{Log} F = \mu_i \times 2\pi\sqrt{-1},$$

en désignant par μ_i l'ordre de la fonction au point c_i de sorte que, en définitive

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_g = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{T'} d \operatorname{Log} F.$$

Le premier membre de cette égalité fait connaître l'excès du nombre des zéros sur le nombre des infinis : il reste à calculer l'intégrale

$$I = \int_{T'} d\,\mathrm{Log}\,F.$$

Le contour de la surface T' est formé par l'ensemble des bords des coupures a_k, b_k, c_k et l'intégrale I peut être considérée comme une somme de termes dont chacun correspond à l'un des bords d'une coupure; nous associerons les termes qui correspondent aux bords opposés d'une même coupure.

Prenons d'abord une coupure a_k (*fig.* 1), et soit (a_k) la somme des termes donnés par les bords opposés de cette coupure. (On a indiqué par des flèches, sur la figure, le sens dans lequel chacun des deux bords doit être parcouru.) Les deux bords sont parcourus en sens contraire, mais, pour obtenir des réductions, on change le sens sur le bord positif et l'on corrige en changeant le signe de l'intégrale partielle correspondante; il vient ainsi

$$(a_k) = -\int_{a_k} d\,\mathrm{Log}\,F(\lambda) + \int_{a_k} d\,\mathrm{Log}\,F(\rho),$$

le point λ se mouvant dans le sens défini pour le mouvement du point ρ. On peut maintenant réunir en une seule les deux intégrales du second membre en écrivant

$$(a_k) = -\int_{a_k} [d\,\mathrm{Log}\,F(\lambda) - d\,\mathrm{Log}\,F(\rho)],$$

et supposer que les points λ et ρ restent constamment en face l'un de l'autre sur les bords opposés de la coupure a_k; mais, dans cette hypothèse, on a constamment

$$d\,\mathrm{Log}\,F(\lambda) = d\,\mathrm{Log}\,F(\rho) + d\,A_k(\rho);$$

d'autre part, le point ρ se meut sur la coupure a_k depuis le point β jusqu'au point α. On a donc

$$(a_k) = -\int_{\beta}^{\alpha} d\,A_k(\rho),$$

ou encore

$$(a_k) = A_k(\beta) - A_k(\alpha).$$

Mais, pour passer de α à β, il faut traverser la coupure b_k en passant du bord négatif au bord positif; l'intégrale $u^{(i)}(z)$ s'accroît de b_{ik} et, par suite,

$$(a_k) = A_k^{(1)} b_{1k} + A_k^{(2)} b_{2k} + \ldots + A_k^{(p)} b_{pk}.$$

On voit de même, en désignant par (b_k) la somme des deux intégrales partielles correspondant aux bords opposés de la coupure b_k :

$$(b_k) = -\int_{b_k} d\,B_k(\rho),$$

et, comme sur la coupure b_k le point ρ se meut de α à δ,

$$(b_k) = -\int_{\alpha}^{\delta} d\,B_k(\rho) = -[B_k(\delta) - B_k(\alpha)].$$

Pour passer de α à δ, il faut traverser la coupure a_k en allant du bord négatif au bord positif; l'intégrale $u^{(k)}(z)$ s'accroît de $2\pi\sqrt{-1}$; pour chacune des autres intégrales de première espèce l'accroissement est infiniment petit; on a donc

$$(b_k) = -B_k^{(k)} 2\pi\sqrt{-1}.$$

L'ensemble des deux coupures a_k et b_k donne donc dans l'intégrale I l'expression

$$(a_k) + (b_k) = 2 n_k \pi \sqrt{-1},$$

en posant

$$\frac{A_k^{(1)} b_{1k} + A_k^{(2)} b_{2k} + \ldots + A_k^{(p)} b_{pk}}{2\pi\sqrt{-1}} - B_k^{(k)} = n_k,$$

et l'on reconnaît dans la valeur de n_k le nombre entier qui s'est présenté quand on a considéré le point de croisement des coupures a_k et b_k.

Il resterait à considérer une coupure c_k, mais le long de cette coupure on a

$$d \log F(\lambda) = d \log F(\rho),$$

et l'on voit aisément que les deux termes de l'intégrale I donnés par la coupure c_k se détruisent.

En définitive, on a

$$\int_{T'} d\log F = \sum_{k=1}^{p} [(a_k) + (b_k)]$$

ou, en remplaçant chacun des deux membres par les valeurs qui viennent d'être calculées,

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_g = n_1 + n_2 + \ldots + n_p.$$

Ainsi, *pour la fonction* F, *l'excès du nombre des zéros sur le nombre des infinis est égal à la somme des p nombres entiers*

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\frac{A_k^{(1)} b_{1k} + A_k^{(2)} b_{2k} + \ldots + A_k^{(p)} b_{pk}}{2\pi\sqrt{-1}} - B_k^{(k)} \right).$$

Comme application, considérons la fonction

$$F = \Theta[u^{(i)}(z) - G_i]$$

(*voir* Briot, *Fonctions abéliennes*, p. 122); tous les coefficients $A_k^{(h)}$ sont nuls; on a, quel que soit k,

$$B_k^{(k)} = -1,$$

et l'on sait que cette fonction n'a pas d'infinis.

On voit alors que *le nombre des zéros de la fonction* $\Theta[u^i(z) - G_i]$ *est égal à p*.

4. On peut toujours ramener à l'unité les multiplicateurs correspondant aux coupures a_k. Remarquons d'abord, en supposant $p = 3$ pour simplifier l'écriture, que l'exponentielle

$$e^{Q(u_1, u_2, u_3)},$$

où $Q(u_1, u_2, u_3)$ représente une forme quadratique et où l'on remplace les variables par les intégrales abéliennes normales de première espèce, est l'une des fonctions F que nous étudions. Il résulte, en effet, de l'égalité

$$Q(u_1 + 2\pi\sqrt{-1}, u_2, u_3) - Q(u_1, u_2, u_3) = \frac{\partial Q}{\partial u_1} 2\pi\sqrt{-1} + \frac{1}{1.2} \frac{\partial^2 Q}{\partial u_1^2} (2\pi\sqrt{-1})^2$$

que, pour l'exponentielle considérée, le multiplicateur relatif à la coupure a_1 est, à un facteur constant près,

$$e^{\frac{\partial Q}{\partial u_1} 2\pi\sqrt{-1}},$$

et les multiplicateurs relatifs aux autres coupures ont une forme analogue. Mais les coefficients des fonctions linéaires qui figurent en exposant ne sont pas indépendants les uns des autres. Pour les coupures a_1, a_2, a_3, ces fonctions linéaires sont, à des constantes près,

$$\frac{\partial Q}{\partial u_1} 2\pi\sqrt{-1}, \quad \frac{\partial Q}{\partial u_2} 2\pi\sqrt{-1}, \quad \frac{\partial Q}{\partial u_3} 2\pi\sqrt{-1},$$

et l'on voit que le déterminant des coefficients des variables u_1, u_2, u_3 dans ces trois fonctions linéaires est un déterminant symétrique.

Cette remarque nous conduit à distinguer deux cas suivant que, pour la fonction F considérée, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & A_1^{(3)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & A_2^{(3)} \\ A_3^{(1)} & A_3^{(2)} & A_3^{(3)} \end{vmatrix}$$

est symétrique ou non.

Dans le premier cas, on pourra toujours, en multipliant la fonction F par une exponentielle ayant en exposant une forme quadratique des trois intégrales normales de première espèce, réduire à des constantes les multiplicateurs relatifs aux coupures a_k; puis, à l'aide d'une fonction à multiplicateurs constants, sans zéros ni infinis, on ramènera à l'unité les trois multiplicateurs considérés de la fonction F.

Dans le cas où le déterminant correspondant aux coupures a_k n'est pas symétrique, on est conduit à introduire des exponentielles dont l'exposant n'est plus une fonction rationnelle des intégrales de première espèce. Il est commode, dans ce cas, de considérer la dérivée logarithmique $\Phi(z)$ de la fonction $F(z)$.

La fonction $\Phi(z)$ admet, le long des coupures a_k, des *périodes* variables définies par les égalités suivantes, où l'on a désigné par $\varphi_i(z)$ la dérivée de l'intégrale $u^{(i)}(z)$, dérivée qui est une fonction rationnelle du point analytique (z, s),

$$\begin{array}{ll} \text{le long de } a_1\ldots\ldots & \Phi(\lambda) - \Phi(\rho) = A_1^{(1)}\varphi_1(\rho) + A_1^{(2)}\varphi_2(\rho) + A_1^{(3)}\varphi_3(\rho), \\ \text{le long de } a_2\ldots\ldots & \Phi(\lambda) - \Phi(\rho) = A_2^{(1)}\varphi_1(\rho) + A_2^{(2)}\varphi_2(\rho) + A_2^{(3)}\varphi_3(\rho), \\ \text{le long de } a_3\ldots\ldots & \Phi(\lambda) - \Phi(\rho) = A_3^{(1)}\varphi_1(\rho) + A_3^{(2)}\varphi_2(\rho) + A_3^{(3)}\varphi_3(\rho). \end{array}$$

Le long des coupures b_1, b_2, b_3, la fonction $\Phi(z)$ admet des périodes qui se définissent de même, à l'aide de fonctions linéaires de $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$.

Il est facile de ramener la fonction $\Phi(z)$ à une autre fonction admettant le long des coupures b_1, b_2, b_3 des périodes de la forme indiquée, mais telle que les périodes correspondant aux coupures a_1, a_2, a_3 soient toutes nulles; il suffit de poser

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = \Phi(z) &- \frac{u^{(1)}(z)}{2\pi\sqrt{-1}}\left[A_1^{(1)}\varphi_1(z) + A_1^{(2)}\varphi_2(z) + A_1^{(3)}\varphi_3(z)\right] \\ &- \frac{u^{(2)}(z)}{2\pi\sqrt{-1}}\left[A_2^{(1)}\varphi_1(z) + A_2^{(2)}\varphi_2(z) + A_2^{(3)}\varphi_3(z)\right] \\ &- \frac{u^{(3)}(z)}{2\pi\sqrt{-1}}\left[A_3^{(1)}\varphi_1(z) + A_3^{(2)}\varphi_2(z) + A_3^{(3)}\varphi_3(z)\right]; \end{aligned}$$

le long de la coupure a_1 par exemple, on a

$$\Phi(\lambda) - \Phi(\rho) = A_1^{(1)}\varphi_1(\rho) + A_1^{(2)}\varphi_2(\rho) + A_1^{(3)}\varphi_3(\rho),$$
$$\frac{u^{(1)}(\lambda) - u^{(1)}(\rho)}{2\pi\sqrt{-1}} = 1,$$

et l'on vérifie bien que

$$\Phi_1(\lambda) - \Phi_1(\rho) = 0.$$

Il en est de même pour chacune des coupures a_2, a_3, et, d'autre part, les périodes de $\Phi_1(z)$ relatives aux coupures b_1, b_2, b_3 se définissent encore à l'aide de fonctions linéaires de $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, comme les périodes correspondantes de $\Phi(z)$.

Cela posé, si nous considérons la fonction

$$F_1(z) = F(z)\, e^{\int [\Phi_1(z) - \Phi(z)]\, dz},$$

$F_1(z)$ est encore dans la classe de fonctions que nous étudions, mais les multiplicateurs le long des coupures a_k sont tous ramenés à l'unité.

Comme vérification, voyons ce que donne le calcul précédent dans le cas déjà considéré où le déterminant des $A_i^{(k)}$ est symétrique. Prenons, par exemple, le coefficient de $A_1^{(2)}$ dans l'intégrale

$$\int [\Phi_1(z) - \Phi(z)]\, dz;$$

en tenant compte de la condition $A_2^{(1)} = A_1^{(2)}$, nous trouvons, pour ce coefficient, l'expression

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int (u^{(1)}\, du^{(2)} + u^{(2)}\, du^{(1)}) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d(u^{(1)} u^{(2)}).$$

Nous supposerons toujours qu'un même point analytique (z_0, s_0) sert de limite inférieure à toutes les intégrales abéliennes. Prenons ce point $z_0 s_0$ comme limite inférieure de l'intégrale précédente; le coefficient de $A_1^{(2)}$ est simplement

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\, u^{(1)} u^{(2)}.$$

En répétant plusieurs fois un raisonnement analogue, on trouve que l'exponentielle auxiliaire est ici

$$e^{-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{1}{2}Q(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})},$$

où Q désigne la forme quadratique dont le discriminant est le déterminant symétrique des quantités $A_i^{(k)}$.

5. Revenant au cas général, nous voyons que, pour ramener à l'unité les multiplicateurs relatifs aux coupures a_k, on est conduit à introduire des exponentielles de la forme

$$e^{-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{z_0}^{z} u^{(i)}(z)\, du^{(k)}}.$$

La fonction définie par l'intégrale qui figure en exposant a déjà été employée par Neumann pour la détermination des constantes du théorème de Riemann sur les zéros d'une fonction $\Theta[u^{(i)}(z) - G_i]$ (*voir* Neumann, *Abelschen Integrale,* p. 364). Nous allons nous arrêter un instant sur cette fonction et vérifier directement qu'elle est le logarithme d'une fonction répondant à la définition que nous avons donnée des fonctions F. Soit donc

$$\mathrm{U}_{ik}(z) = \int_{z_0}^{z} u^{(i)}(z)\, du^{(k)}(z);$$

cette fonction est uniforme sur la surface de Riemann rendue simplement connexe T′; en effet, le coefficient différentiel est le produit de deux facteurs

$$u^{(i)}(z)\,\frac{du^k(z)}{dz},$$

qui sont tous les deux uniformes sur T′; le premier de ces facteurs n'a pas d'infinis, le second facteur en a, mais tous ses résidus sont nuls; donc, tous les résidus du coefficient différentiel sont nuls et la fonction $\mathrm{U}_{ik}(z)$ est uniforme sur T′.

Le long de la coupure a_i, on a

$$\begin{aligned} u^{(i)}(\lambda) &= u^i(\rho) + 2\pi\sqrt{-1},\\ du^{(k)}(\lambda) &= du^{(k)}(\rho); \end{aligned}$$

par suite, on a successivement

$$\begin{aligned} d\mathrm{U}_{ik}(\lambda) - d\mathrm{U}_{ik}(\rho) &= 2\pi\sqrt{-1}\, du^{(k)}(\rho),\\ \mathrm{U}_{ik}(\lambda) - \mathrm{U}_{ik}(\rho) &= 2\pi\sqrt{-1}\, u^k(\rho) + \text{const.}, \end{aligned}$$

Le long d'une coupure $a_h (h \neq i)$, on a

$$\begin{aligned} d\mathrm{U}_{ik}(\lambda) - d\mathrm{U}_{ik}(\rho) &= 0,\\ \mathrm{U}_{ik}(\lambda) - \mathrm{U}_{ik}(\rho) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Le long de la coupure c_h, on a

$$d\mathrm{U}_{ik}(\lambda) - d\mathrm{U}_{ik}(\rho) = 0,$$

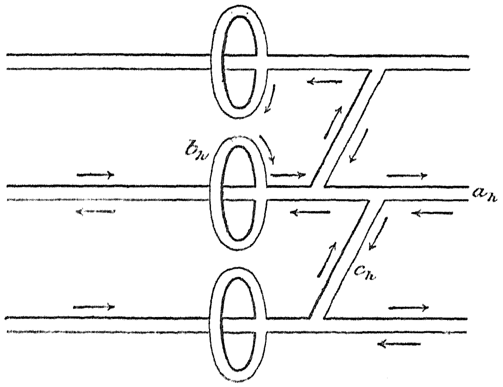
et, par suite,

$$\mathrm{U}_{ik}(\lambda) - \mathrm{U}_{ik}(\rho) = \text{const.}$$

La valeur de cette constante peut s'obtenir en supposant qu'un mobile aille d'un point ρ (*fig.* 2) choisi sur le bord négatif de la coupure c_h au point λ correspondant, en suivant le contour de la surface T′ dans le sens indiqué par les flèches sur la *fig.* 2 : on raisonne comme l'on fait quand on veut établir la relation entre les périodes de deux intégrales de première espèce (*voir*, par exemple, APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques*, p. 140).

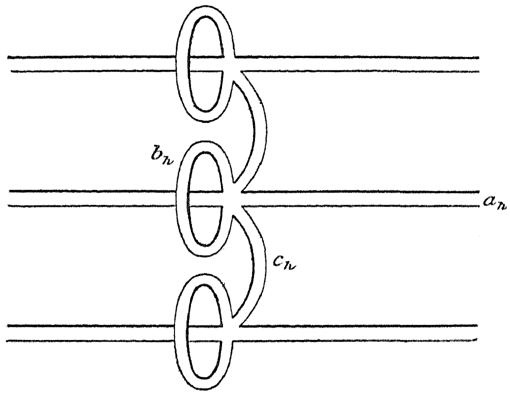
La relation entre les périodes des intégrales $u^{(i)}$ et $u^{(k)}$ intervient elle-même quand on veut vérifier qu'on aurait trouvé la même valeur pour la constante cherchée, si le mobile, pour aller de ρ en λ, avait marché dans le sens contraire et suivi les bords des coupures laissées de côté dans le premier trajet. On trouve ainsi que la fonction U_{ik} admet le long de la coupure c_h une période qui n'est pas nulle.

Fig. 2.



Il résulte nécessairement de là que la période relative à la coupure a_h ne peut garder la même valeur quand on passe d'un côté à l'autre de la coupure c_h ou de la coupure c_{h+1}. D'abord ce résultat n'est pas en contradiction avec les calculs précédents puisque, lorsqu'on a effectué une intégration le long de la coupure a_h, on a supposé que les deux points λ et ρ pouvaient se mouvoir en restant en face l'un de l'autre sur les bords opposés de cette coupure; or, l'un des deux points est arrêté quand on rencontre l'une des coupures c_h ou c_{h+1}. Mais on peut réduire à un point la portion du contour de T' comprise sur a_h entre b_h et c_{h+1} (*fig.* 3), et aussi la portion comprise sur a_h entre b_h et c_h, en faisant partir les coupures $c_2, c_3, \ldots, c_p$ des points de croisement des coupures a avec les coupures b, comme le fait M. Appell dans son Mémoire *Sur les fonctions à multiplicateurs*, et la complication provenant d'une période différente de zéro sur les coupures c se trouve évitée, ou du moins ne se présente plus qu'en un nombre limité de sommets situés aux points de croisement des coupures.

Fig. 3.



Il reste à considérer une coupure b_h; le long de cette coupure, on a

$$u^{(i)}(\lambda) = u^{(i)}(\rho) + b_{ih},$$
$$du^{(k)}(\lambda) = du^{(k)}(\rho),$$

et, par suite,

$$dU_{ik}(\lambda) - dU_{ik}(\rho) = b_{ih} du^{(k)}(\rho),$$
$$U_{ik}(\lambda) - U_{ik}(\rho) = b_{ih} u^{(k)}(\rho) + \text{const.}$$

En résumé, la fonction

$$U_{ik}(z) = \int_{z_0}^{z} u^{(i)}(z)\, du^{(k)}(z)$$

admet les périodes suivantes :

le long de a_i.......... $U_{ik}(\lambda) - U_{ik}(\rho) = 2\pi\sqrt{-1}\, u^{(k)}(\rho) + \text{const.}$,
le long de a_h $(h \neq i)$... $U_{ik}(\lambda) - U_{ik}(\rho) = \text{const.}$,
le long de b_h.......... $U_{ik}(\lambda) - U_{ik}(\rho) = b_{ih} u^{(k)}(\rho) + \text{const.}$,
le long de c_h.......... $U_{ik}(\lambda) - U_{ik}(\rho) = \text{const.}$

L'intégrale $\int_{z_0}^{z} u^{(i)}(z)\, du^{(k)}$ nous fournit donc un exemple du logarithme d'une fonction F.

5 *bis*. Des remarques précédentes, il résulte qu'en multipliant une

fonction F donnée par des facteurs de la forme $e^{U_{ik}(z)} = e^{\int u^i(z)\,du^k}$, puis par des fonctions à multiplicateurs constants, on peut ramener à l'unité les multiplicateurs relatifs aux coupures a_k. A la vérité, on a introduit un multiplicateur constant sur chacune des coupures c_h. Mais cela ne complique aucun des calculs qui suivent, si les coupures c_h partent des points de croisement des coupures a avec les coupures b.

Nous ne considérerons plus maintenant que les fonctions F, dont les périodes sont définies par les égalités

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \text{le long de } a_k \ldots\ldots & F(\lambda) = F(\rho), \\ \text{le long de } c_k \ldots\ldots & F(\lambda) = F(\rho), \\ \text{le long de } b_k \ldots\ldots & F(\lambda) = F(\rho)\, e^{B_k + B_k^{(1)} u^{(1)}(\rho) + \ldots + B_k^{(p)} u^{(p)}(\rho)}, \end{array} \right.$$

pour $k = 1, 2, \ldots, p$.

6. Il existe, entre les zéros et les infinis d'une fonction F dont les multiplicateurs sont donnés, des relations qui peuvent être considérées comme une généralisation du théorème d'Abel sur les zéros et les infinis d'une fonction algébrique. Ce sont ces relations que nous voulons obtenir.

Nous commencerons par calculer l'intégrale

$$I = \int_{T'} U\, d \operatorname{Log} F,$$

prise le long du contour de la surface de Riemann, rendue simplement connexe T' dans le sens indiqué par les flèches sur la *fig.* 2, F étant l'une des fonctions considérées et U une intégrale abélienne attachée à la même surface de Riemann : nous désignerons par $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$ les modules de périodicité de U le long des coupures a_k et b_k. L'intégrale I peut être considérée comme une somme de termes dont chacun correspond à l'un des bords d'une coupure; nous associerons les termes qui correspondent aux bords opposés d'une même coupure.

Considérons d'abord une coupure a_k et désignons par (a_k) la somme des deux termes qui correspondent aux bords opposés de cette coupure. En raisonnant comme au n° 3, nous obtenons

$$(a_k) = -\int_{a_k} [U(\lambda)\, d \operatorname{Log} F(\lambda) - U(\rho)\, d \operatorname{Log} F(\rho)],$$

en supposant que le point ρ se meut dans le sens indiqué par une flèche sur la *fig.* 1 et que le point λ est assujetti à rester en face du point ρ. Or, le long de la coupure a_k, on a constamment

$$d\,\mathrm{Log}\,F(\lambda) = d\,\mathrm{Log}\,F(\rho);$$

il en résulte

$$(a_k) = -\int_{a_k} [U(\lambda) - U(\rho)]\, d\,\mathrm{Log}\,F(\rho),$$

puis

$$(a_k) = -\mathcal{A}_k \int_{a_k} d\,\mathrm{Log}(\rho),$$

et, comme le long de a_k le point ρ se déplace de β à α (voir *fig.* 1),

$$(a_k) = -\mathcal{A}_k [\mathrm{Log}\,F(\alpha) - \mathrm{Log}\,F(\beta)],$$

$$(a_k) = \quad \mathcal{A}_k\, \mathrm{Log}\, \frac{F(\beta)}{F(\alpha)}.$$

Mais, pour passer de α à β, il faut passer du bord négatif au bord positif de la coupure b_k; on a donc

$$\frac{F(\beta)}{F(\alpha)} = e^{\left[B_k + B_k^{(1)} u^{(1)}(\alpha) + B_k^{(2)} u^{(2)}(\alpha) + \ldots + B_k^{(p)} u^{(p)}(\alpha)\right]},$$

et il en résulte, pour (a_k), l'expression

$$(a_k) = \mathcal{A}_k [B_k + B_k^{(1)} u^{(1)}(\alpha) + B_k^{(2)} u^{(2)}(\alpha) + \ldots + B_k^{(p)} u^{(p)}(\alpha)] + \mathcal{A}_k 2 m_k \pi \sqrt{-1},$$

dans laquelle α est l'affixe d'un sommet situé au point de croisement des coupures a_k et b_k, celui qui se trouve sur le bord négatif de chacune des deux coupures, et m_k désigne un nombre entier positif ou négatif.

Prenons maintenant la coupure b_k, et désignons par (b_k) la somme des deux termes correspondant aux bords opposés de cette coupure; (b_k) est donné par l'égalité

$$(b_k) = -\int_{b_k} [U(\lambda)\, d\,\mathrm{Log}\,F(\lambda) - U(\rho)\, d\,\mathrm{Log}\,F(\rho)],$$

le mouvement du point ρ ayant lieu dans le sens indiqué par une flèche sur la *fig.* 1, et le point λ étant assujetti à rester constamment en face du point ρ. Le long de la coupure b_k, on a

$$U(\lambda) = U(\rho) + \mathfrak{B}_k,$$
$$d\,\mathrm{Log}\,F(\lambda) = d\,\mathrm{Log}\,F(\rho) + B_k^{(1)} du^{(1)}(\rho) + B_k^{(2)} du^{(2)}(\rho) + \ldots + B_k^{(p)} du^{(p)}(\rho);$$

en remplaçant $U(\lambda)$ et $d\,\mathrm{Log}\,F(\lambda)$ par ces valeurs dans l'expression de (b_k), on trouve, après une réduction évidente et un changement de signe dans les deux membres,

$$\begin{aligned}-(b_k) = {} & B_k^{(1)}\int_{b_k} U(\rho)\,du^{(1)} + B_k^{(2)}\int_{b_k} U(\rho)\,du^{(2)} + \ldots + B_k^{(p)}\int_{b_k} U(\rho)\,du^{(p)} \\ & + \mathfrak{B}_k\int_{b_k} d\,\mathrm{Log}\,F(\rho) + \mathfrak{B}_k\left[B_k^{(1)}\int_{b_k} du^{(1)}(\rho) + B_k^{(2)}\int_{b_k} du^{(2)}(\rho) + \ldots + B_k^{(p)}\int_{b_k} du^{(p)}(\rho)\right].\end{aligned}$$

Les intégrales multipliées par $\mathfrak{B}_k$ se calculent aisément. Sur la coupure b_k le point ρ se déplace du point α au point δ; d'après cela

$$\int_{b_k} d\,\mathrm{Log}\,F(\rho) = \mathrm{Log}\,F(\delta) - \mathrm{Log}\,F(\alpha) = \mathrm{Log}\,\frac{F(\delta)}{F(\alpha)}.$$

Mais, pour passer du point α au point δ, il faut traverser la coupure a_k, de sorte que

$$\frac{F(\delta)}{F(\alpha)} = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Log}\,\frac{F(\delta)}{F(\alpha)} = 2\,n_k\pi\sqrt{-1},$$

n_k désignant un nombre entier positif ou négatif : on a donc

$$\int_{b_k} d\,\mathrm{Log}\,F(\rho) = 2\,n_k\pi\sqrt{-1}.$$

On trouve de même

$$\int_{b_k} du^{(h)}(\rho) = 0 \qquad \text{si } h \neq k$$

et

$$\int_{b_k} du^{(k)}(\rho) = 2\,\pi\sqrt{-1}.$$

En remplaçant par leurs valeurs dans l'expression de (b_k) les intégrales qui viennent d'être calculées, il vient

$$-(b_k)=\mathrm{B}_k^{(1)}\int_{b_k}\mathrm{U}(\rho)\,du^{(1)}+\mathrm{B}_k^{(2)}\int_{b_k}\mathrm{U}(\rho)\,du^{(2)}+\ldots+\mathrm{B}_k^{(p)}\int_{b_k}\mathrm{U}(\rho)\,du^{(p)}$$
$$+\mathfrak{B}_k\left(2n_k\pi\sqrt{-1}+\mathrm{B}_k^{(k)}2\pi\sqrt{-1}\right).$$

Il reste à considérer une coupure c_k; mais, le long de cette coupure, si le point λ reste constamment en face du point ρ, on a

$$\mathrm{U}(\lambda)=\mathrm{U}(\rho),$$
$$d\operatorname{Log}\mathrm{F}(\lambda)=d\operatorname{Log}\mathrm{F}(\rho),$$

et l'on en conclut aisément que les bords opposés de la coupure c_k donnent, dans l'intégrale I, deux termes qui se détruisent.

En définitive, on obtient

$$(4)\left\{\begin{aligned}\int_{\mathrm{T}'}\mathrm{U}\,d\operatorname{Log}\mathrm{F}=&\sum\mathfrak{A}_k[\mathrm{B}_k+\mathrm{B}_k^{(1)}u^{(1)}(\alpha)+\mathrm{B}_k^{(2)}u^{(2)}(\alpha)+\ldots+\mathrm{B}_k^{(p)}u^{(p)}(\alpha)]\\&-\sum\left[\mathrm{B}_k^{(1)}\int\mathrm{U}(\rho)\,du^{(1)}+\mathrm{B}_k^{(2)}\int\mathrm{U}(\rho)du^{(2)}+\ldots+\mathrm{B}_k^{(p)}\int\mathrm{U}(\rho)du^{(p)}\right]\\&+2\pi\sqrt{-1}\sum[m_k\mathfrak{A}_k-(n_k+\mathrm{B}_k^{(k)})\mathfrak{B}_k],\end{aligned}\right.$$

toutes les sommes étant prises de $k=1$ à $k=p$, et les lettres m_k, n_k, $\mathrm{B}_k^{(k)}$ désignant des nombres entiers positifs ou négatifs.

7. Dans le cas où l'on prend pour U une intégrale normale de première espèce, $u^{(i)}(z)$, on doit faire

$$\mathfrak{A}_i=2\pi\sqrt{-1},\qquad \mathfrak{A}_k=0,\qquad \text{si } k\neq i,$$
$$\mathfrak{B}_k=b_{ik}.$$

La formule générale devient alors, en négligeant les multiples des périodes des intégrales de première espèce,

$$\int_{\mathrm{T}'}u^{(i)}d\operatorname{Log}\mathrm{F}\equiv 2\pi\sqrt{-1}[\mathrm{B}_i+\mathrm{B}_i^{(1)}u^{(1)}(\alpha)+\mathrm{B}_i^{(2)}u^{(2)}(\alpha)+\ldots+\mathrm{B}_i^{(p)}u^{(p)}(\alpha)]$$
$$-\sum_{k=1}^{p}\left[\mathrm{B}_k^{(1)}\int u^{(i)}(\rho)du^{(1)}+\mathrm{B}_k^{(2)}\int u^{(i)}(\rho)\,du^{(2)}+\ldots+\mathrm{B}_k^{(p)}\int u^{(i)}(\rho)du^{(p)}\right],$$

le point α étant l'un des sommets situés au point de croisement des coupures $a_i b_i$, celui qui est sur le bord négatif de chacune de ces deux coupures.

Nous allons maintenant obtenir une autre expression de l'intégrale

$$I = \int_{T'} u^{(i)}(z)\, d \operatorname{Log} F(z) = \int_{T'} u^{(i)}(z) \frac{F'(z)}{F(z)} dz,$$

en considérant une aire à l'intérieur de laquelle chacune des fonctions $u^{(i)}(z)$ et $\frac{F'(z)}{F(z)}$ reste holomorphe et telle qu'une partie du contour de cette aire sera donnée par le contour de la surface simplement connexe T'.

La fonction $u^{(i)}(z)$ reste holomorphe à l'intérieur de la surface T'. D'un autre côté, par hypothèse, la fonction $F(z)$ est régulière en tout point de la surface T', sauf en un nombre limité de points qu'elle admet comme pôles : la dérivée logarithmique de $F(z)$ n'admet alors d'autres points singuliers que des pôles qui sont les zéros et les infinis de $F(z)$. Désignons ces pôles de $\frac{F'(z)}{F(z)}$ par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_g$, et supposons qu'aucun de ces points n'est infiniment rapproché du contour de la surface T'. On peut décrire autour de ces points comme centre des cercles suffisamment petits pour qu'ils n'empiètent pas les uns sur les autres et pour que chacun d'eux soit tout entier compris à l'intérieur de T'. Soient

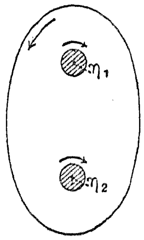
$$\mathfrak{V}_1, \quad \mathfrak{V}_2, \quad \mathfrak{V}_g$$

ces petits cercles : enlevons la portion de la surface T' située à l'intérieur de chacun d'eux; il restera une aire T'' à l'intérieur de laquelle les deux fonctions $u^{(i)}(z)$, $\frac{F'(z)}{F(z)}$ et par suite leur produit restent holomorphes. T'' est une aire à contour multiple et son contour est formé par le contour de T' et les circonférences des petits cercles $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_g$ (*fig.* 4). On a donc, en appliquant le théorème de Cauchy

$$\int_{T'} u^{(i)}(z)\, d \operatorname{Log} F(z) - \sum_{k=1}^{k=g} \int_{\mathfrak{V}_k} u^{(i)}(z)\, d \operatorname{Log} F(z) = 0,$$

le contour de chacune des aires T', $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_g$ étant supposé décrit dans le sens positif, c'est-à-dire dans le sens défini par un mobile qui aurait constamment à sa gauche l'aire limitée par le contour. (On remarque que l'intégrale donnée par le contour de $\mathfrak{v}_1$ doit être changée de signe, si l'on change le sens de l'intégration le long du

Fig. 4.



contour de $\mathfrak{v}_1$.) La première intégrale est précisément l'intégrale I que nous venons d'évaluer; les autres se calculent aisément. A l'intérieur du petit cercle $\mathfrak{v}_k$ il y a un seul point singulier à considérer, le point η_k; le résidu correspondant de la dérivée logarithmique de $F(z)$ est le nombre entier positif ou négatif, μ_k, qui exprime l'ordre de la fonction $F(z)$ en ce point. On en conclut que

$$\int_{b_k} u^{(i)}(z)\, d\log F(z) = 2\pi\sqrt{-1}\,\mu_k u^{(i)}(\eta_k).$$

L'application du théorème de Cauchy donne donc, pour l'intégrale I, la nouvelle expression suivante

$$I = 2\pi\sqrt{-1}\left\{\Sigma\mu_k u^{(i)}(\eta_k)\right\}$$

ou, en séparant les zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots$ et les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

$$I = 2\pi\sqrt{-1}\left\{\Sigma u^{(i)}(\beta_j) - \Sigma u^{(i)}(\alpha_j)\right\}.$$

Égalons maintenant les deux expressions de l'intégrale I; en négligeant les multiples des périodes, il vient

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\Sigma u^{(i)}(\beta_j) - \Sigma u^{(i)}(\alpha_j)\\ &\quad\equiv B_i + B_i^{(1)} u^{(1)}(\alpha) + B_i^{(2)} u^{(2)}(\alpha) + \ldots + B_i^{(p)} u^{(p)}(\alpha)\\ &\quad - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{k=1}^{k=p}\left[B_k^{(1)}\int_{b_k} u^{(i)}(\rho)\,du^{(1)} + B_k^{(2)}\int_{b_k} u^{(i)}(\rho)\,du^{(2)} + \ldots + B_k^{(p)}\int_{b_k} u^{(i)}(\rho)\,du^{(p)}\right]\end{aligned}\right.$$

pour $i = 1, 2, \ldots, p$.

Dans le cas particulier où les multiplicateurs le long des coupures b_k sont constants et se réduisent par conséquent à $e^{B_1}, e^{B_2}, \ldots, e^{B_p}$, le nombre des zéros est égal au nombre des infinis; si l'on désigne ce nombre par q, la formule précédente devient

$$\sum_{j=1}^{j=q}[u^{(h)}(\beta_j)-u^{(h)}(\alpha_j)]\equiv B_h, \qquad h=1,2,\ldots,p,$$

et l'on retrouve, à un changement de notations près, les formules données par M. Appell [*Mémoire sur les fonctions à multiplicateurs*, p. 13, formule (3)]. Ces dernières formules étaient déjà une généralisation du théorème d'Abel; les formules (5) en donnent l'extension avec fonction F.

8. Appliquons les formules précédentes à la fonction

$$F=\Theta[u^{(i)}(z)-G_i].$$

(*Voir* Briot, *Fonctions abéliennes*.)

Dans ce cas particulier, on a

$$B_i=-b_{ii}+G_i;$$

de plus le Tableau des coefficients autres que $B_1, B_2, \ldots, B_p$ est

$$\begin{matrix} -1, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & -1, & \ldots, & 0, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & ., \\ 0, & 0, & \ldots, & -1, \end{matrix}$$

Tableau symétrique dont tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale qui sont tous égaux à -1.

Les formules (5) deviennent ici

$$u^{(i)}(\beta_1)+u^{(i)}(\beta_2)+\ldots+u^{(i)}(\beta_p)-G_i=C_i,$$

en posant

$$C_i=b_{ii}-u^{(i)}(\alpha)+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{k=1}^{k=p}\int_{b_k}u^{(i)}(\rho)\,du^{(k)}$$

(α désigne l'affixe d'un sommet situé au point de croisement des coupures a_i et b_i).

Pour faire la comparaison avec les formules données par Neumann [*Abelschen Integrale*, p. 364, formule (30)], savoir

$$K_\sigma = w_\sigma(\beta_\sigma) - \frac{1}{2} b_{\sigma\sigma} + \sum_{k=1}^{k=p} \left[b_{\sigma k} + \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_{b_k} w_\sigma(\lambda)\, dw_k \right],$$

on doit remplacer

$$u^{(i)}(z), \quad b_{ik}, \quad G_i, \quad C_i \quad \text{(notation de Briot)}$$

par

$$2w^{(i)}(z), \quad b_{ik}, \quad 2G_i, \quad 2C_i \quad \text{(notation de Neumann)},$$

et remarquer que

$$\int_{b_k} w_\sigma(\lambda)\, dw_k = -\int_{b_k} w_\sigma(\rho)\, dw_k.$$

9. Le théorème de Riemann sur les zéros d'une fonction

$$\Theta[u^{(i)}(z) - G_i]$$

consiste en ce que, dans les égalités

$$u^{(i)}(\beta_1) + u^{(i)}(\beta_2) + \ldots + u^{(i)}(\beta_p) - G_i \equiv C_i,$$

les quantités C_i sont indépendantes des valeurs attribuées aux constantes G_i. Nous allons étendre ce théorème aux fonctions F. Nous nous nous appuierons sur la remarque suivante : Les quantités G_i peuvent être introduites en se donnant les multiplicateurs de la fonction $\Theta[u^{(i)}(z) - G_i]$, puisque, le multiplicateur de cette fonction le long de la coupure b_i étant

$$e^{-u^{(i)}(z) + G_i - b_{ik}},$$

si l'on désigne la partie constante de l'exposant par B_i, on a

$$B_i = G_i - b_{ii}.$$

Si nous remplaçons G_i par $B_i - b_{ii}$ dans les égalités qui expriment le théorème de Riemann, elles deviennent

$$u^{(i)}(\beta_1) + u^{(i)}(\beta_2) + \ldots + u^{(i)}(\beta_p) - B_i \equiv C'_i,$$

les quantités C'_i étant indépendantes des valeurs attribuées à B_1, $B_2, \ldots, B_p$.

Ceci nous conduit à écrire les p relations (5) (en supposant, pour que l'analogie se voie mieux, que la fonction F admet p zéros et n'a aucun infini)

$$\begin{gathered} u^{(i)}(\beta_1) + u^{(i)}(\beta_2) + \ldots + u^{(i)}(\beta_p) - B_i \\ \equiv B_i^{(1)} u^{(1)}(\alpha) + B_i^{(2)} u^{(2)}(\alpha) + \ldots + B_i^{(p)} u^{(p)}(\alpha) \\ - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{k=1}^{k=p} \left[B_k^{(1)} \int_{b_k} u^{(i)}(\rho)\, du^{(1)} + B_k^{(2)} \int_{b_k} u^{(i)}(\rho)\, du^{(2)} + \ldots + B_k^{(p)} \int_{b_k} u^{(i)}(\rho)\, du^{(p)} \right], \end{gathered}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, p$, et à remarquer que les seconds membres sont indépendants des quantités $B_1, B_2, \ldots, B_p$.

Le résultat correspondant dans le cas général peut s'énoncer en disant que *si, pour une fonction* F, *on connaît, à une constante près, les exposants des multiplicateurs et si de plus on se donne les zéros et les infinis de la fonction, les multiplicateurs sont complètement déterminés.* Nous verrons que ces données définissent à un facteur constant près la fonction F.

10. Le théorème d'Abel faisant intervenir les intégrales abéliennes de troisième espèce s'étend de la même manière aux fonctions F.

Soit $\Pi_{z_0 x}(z)$ l'intégrale normale de troisième espèce devenant infinie

$$\begin{aligned} &\text{dans le voisinage du point } x \text{ comme } && \log(z - x), \\ &\text{dans le voisinage du point } z_0 \text{ comme } && -\log(z - z_0); \end{aligned}$$

nous supposerons que le point z_0 est celui qui correspond à la limite inférieure des intégrales de première espèce.

Considérons l'intégrale

$$\int_{T'} \Pi_{z_0 x}(z)\, d \operatorname{Log} F(z),$$

prise le long du contour de T'. On a immédiatement une première valeur de cette intégrale, en se servant du calcul fait pour une intégrale abélienne quelconque; il suffit, dans la formule (4), de faire

$$\mathcal{A}_k = 0, \qquad \mathcal{B}_k = u^{(k)}(x) - u^{(k)}(z_0) = u^{(k)}(x),$$

on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}&\int_{T'} \Pi_{z_0 x}(z)\, d\,\mathrm{Log}\,F(z)\\ &= -\sum_{k=1}^{k=p} n'_k u^{(k)}(x) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{k=1}^{k=p}\left[B_k^{(1)}\int_{b_k}\Pi_{z_0 x}(\rho)\, du^{(1)} + \ldots + B_k^{(p)}\int_{b_k}\Pi_{z_0 x}(\rho)\, du^{(p)}\right],\end{aligned}$$

en posant

$$n'_k = B_k^{(k)} + n_k = B_k^{(k)} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{b_k} d\,\mathrm{Log}\,F(\rho).$$

Nous aurons une autre expression de la même intégrale en considérant une aire dans laquelle le coefficient différentiel reste holomorphe et telle qu'une partie du contour de cette aire est formée par le contour de T'.

Soient

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_g$$

les points qui sont zéros ou infinis de $F(z)$: ces points sont des pôles pour la fonction $\frac{d}{dz}\mathrm{Log}\,F(z)$. Considérons une bande très étroite l, comprenant tous ces points, puis une autre bande très étroite m comprenant les points z_0, x qui sont des points critiques pour l'intégrale $\Pi_{z_0 x}$. Nous supposons qu'aucun des points considérés n'est infiniment rapproché du contour de T'; dès lors on peut choisir les bandes l et m de façon qu'elles ne soient pas coupées par le contour de T' et qu'elles ne se rencontrent pas non plus.

Soit T'' l'aire obtenue en enlevant les portions de la surface T' situées à l'intérieur de l'une ou l'autre des bandes l et m. T'' est une aire à plusieurs contours dans laquelle chacune des fonctions

$$\Pi_{z_0 x}, \quad \frac{d}{dz}\mathrm{Log}\,F(z)$$

reste holomorphe. En appliquant à cette aire le théorème de Cauchy, nous trouvons

$$\int_{T'} \Pi_{z_0 x}(z)\, d\,\mathrm{Log}\,F(z) - \int_l \Pi_{z_0 x}(z)\, d\,\mathrm{Log}\,F(z) - \int_m \Pi_{z_0 x}\, d\,\mathrm{Log}\,F(z) = 0,$$

chacune des intégrales étant prise dans le sens positif le long du contour de l'aire correspondante.

Nous allons calculer les deux dernières intégrales. Prenons d'abord celle qui se rapporte à la bande l. On peut réduire cette bande à des cercles infiniment petits $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \ldots, \mathfrak{O}_g$ entourant les points $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_g$ et à des coupures formés de lignes infiniment rapprochées allant de l'un à l'autre de ces petits cercles : on vérifie alors aisément que l'on a

$$\int_l \Pi_{z_0 x}\, d\operatorname{Log} F = \int_{\mathfrak{O}_1} \Pi_{z_0 x}\, d\operatorname{Log} F + \int_{\mathfrak{O}_2} \Pi_{z_0 x}\, d\operatorname{Log} F + \int_{\mathfrak{O}_g} \Pi_{z_0 x}\, d\operatorname{Log} F,$$

puis

$$\int_l \Pi_{z_0 x}\, d\operatorname{Log} F = 2\pi\sqrt{-1} \sum_{j=1}^{j=g} \mu_j \Pi_{z_0 x}(\eta_j),$$

μ_j étant le nombre entier positif ou négatif qui indique l'ordre de la fonction $F(z)$ au point η_j.

Pour évaluer l'intégrale relative à la bande m, nous commencerons par intégrer par parties

$$\int_m \Pi_{z_0 x} z\, d\operatorname{Log} F(z) = [\Pi_{z_0 x}(z) \operatorname{Log} F(z)]_m - \int_m \operatorname{Log} F(z)\, d\Pi_{z_0 x},$$

afin de n'avoir plus sous le signe $\int$ que des pôles au lieu de points critiques logarithmiques ; comme, dans l'aire T″, chacune des fonctions $\Pi_{z_0 x}(z)$ et $\log F(z)$ est uniforme, l'égalité précédente se réduit à

$$\int_m \Pi_{z_0 x}\, d\operatorname{Log} F = -\int_m (\operatorname{Log} F)\, d\Pi_{z_0 x}.$$

On peut réduire la bande m à des cercles infiniment petits c_0 et c entourant les points z_0 et x et à une coupure formée de deux lignes infiniment voisines réunissant ces deux petits cercles. Le long de cette coupure, l'intégrale de troisième espèce $\Pi_{z_0 x}$ admet comme période $2\pi\sqrt{-1}$; quand on traverse la coupure, la dérivée de $\Pi_{z_0 x}$ garde la même valeur, $\operatorname{Log} F(z)$ garde aussi la même valeur, et, par suite, les bords opposés de la coupure donnent dans l'intégrale des termes qui se détruisent. Il reste

$$\int_m (\operatorname{Log} F)\, d\Pi_{z_0 x} = \int_{c_0} (\operatorname{Log} F)\, d\Pi_{z_0 x} + \int_c (\operatorname{Log} F)\, d\Pi_{z_0 x}.$$

Les coefficients différentiels des deux dernières intégrales admettent comme pôles dans les aires correspondantes les points z_0 et x avec les résidus

$$-\operatorname{Log} F(z_0), \quad \operatorname{Log} F(x).$$

On a donc

$$\int_m [\operatorname{Log} F(z)]\, d\Pi_{z_0 x} = 2\pi\sqrt{-1}\, [\operatorname{Log} F(x) - \operatorname{Log} F(z_0)],$$

et, comme le premier membre de cette égalité changé de signe donne la valeur de $\int_m \Pi_{z_0 x}\, d \operatorname{Log} F$,

$$\int_m \Pi_{z_0 x}(z)\, d \operatorname{Log} F(z) = -2\pi\sqrt{-1} \times \operatorname{Log} \frac{F(x)}{F(z_0)}.$$

Remplaçons par leurs valeurs les intégrales relatives aux bandes l et m, nous trouvons

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{T'} \Pi_{z_0 x}(z)\, d \log F(z) = \sum_{j=1}^{j=g} \mu_j \Pi_{z_0 x}(\eta_j) - \operatorname{Log} \frac{F(x)}{F(z_0)}.$$

Mais l'on a déjà, par un calcul direct, obtenu une expression de l'intégrale qui figure dans le premier membre; en la substituant dans l'égalité précédente nous obtenons enfin la formule que nous voulions trouver comme généralisation du théorème d'Abel :

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{Log} \frac{F(x)}{F(z_0)} - \sum_{j=1}^{j=g} \mu_j \Pi_{z_0 x}(\eta_j) \\ &= \sum_{k=1}^{k=p} n'_k u^{(k)}(x) - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{k=1}^{k=p} \left[B_k^{(1)} \int_{b_k} \Pi_{z_0 x}(\rho)\, du^{(1)} + B_k^{(2)} \int_{b_k} \Pi_{z_0 x}(\rho)\, du^{(2)} + \ldots + \int_{b_k} \Pi_{z_0 x}\, du^{(p)} \right]. \end{aligned}\right.$$

11. Dans le cas particulier où les multiplicateurs sont constants, le nombre des zéros est égal au nombre des infinis; désignons les

infinis par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, les zéros par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$. La formule précédente devient

$$\operatorname{Log}\frac{F(x)}{F(x_0)} = \sum_{i=1}^{i=q}[\Pi_{z_0x}(\beta_i) - \Pi_{z_0x}(\alpha_i)] + \sum_{i=1}^{i=p} n'_i u^{(i)}(x).$$

D'après le théorème sur l'échange du paramètre et de l'argument, on a, à une constante près,

$$\Pi_{z_0x}(\beta_i) - \Pi_{z_0x}(\alpha_i) = \Pi_{\alpha_i\beta_i}(x).$$

En tenant compte de cette égalité, la formule précédente devient

$$F(x) = C e^{\Pi_{\alpha_1\beta_1}(x)+\Pi_{\alpha_2\beta_2}(x)+\ldots+\Pi_{\alpha_q\beta_q}(x)} + e^{\lambda_1 u^{(1)}(x)+\lambda_2 u^{(2)}(x)+\ldots+\lambda_p u^{(p)}(x)},$$

C désignant une constante, $\lambda_1\ \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des nombres entiers positifs ou négatifs. On retrouve ainsi une formule de M. Appell [*Mémoire sur les fonctions à multiplicateurs*, p. 13, formule (13)] pour la décomposition en facteurs simples d'une fonction F dont on donne les multiplicateurs supposés constants, les zéros et les infinis.

DEUXIÈME PARTIE.

12. La dérivée logarithmique $\Phi(z)$ de l'une des fonctions $F(z)$ qui viennent d'être étudiées est une fonction uniforme sur la surface T' et admettant, le long des coupures $a_k b_k$, des *périodes* définies par des égalités de la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Le long de } a_k \ldots\ldots\ldots && \Phi(\lambda) - \Phi(\rho) = \omega_k(\rho), \\ &\text{Le long de } b_k \ldots\ldots\ldots && \Phi(\lambda) - \Phi(\rho) = \psi_k(\rho), \end{aligned}$$

$\omega_k(z)$ et $\psi_k(z)$ étant des fonctions composées linéairement avec les dérivées des intégrales de première espèce. Nous allons étudier le cas plus général où, dans les égalités qui définissent les périodes, les fonctions $\omega_k(z)$ et $\psi_k(z)$ sont des fonctions rationnelles quelconques du point analytique (z, s).

Montrons d'abord qu'on peut toujours ramener le cas général au cas où les périodes relatives aux coupures a_k sont toutes nulles; il suffit de poser

$$\Phi_1(z) = \Phi(z) - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} u^{(1)}(z)\,\omega_1(z)$$
$$- \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} u^{(2)}(z)\,\omega_2(z) - \ldots - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} u^{(p)}(z)\,\omega^{(p)}(z).$$

En effet, le long de la coupure a_1,

$$\begin{aligned}\Phi_1(\lambda) - \Phi_1(\rho) &= \omega_k(\rho) - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[u^{(1)}(\lambda)\,\omega_1(\lambda) - u^{(1)}(\rho)\,\omega_1(\rho)\right] \\ &= \omega_k(\rho) - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left\{\left[2\pi\sqrt{-1} + u^{(1)}(\rho)\right]\omega_1(\rho) - u^{(1)}(\rho)\,\omega_1(\rho)\right\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

La vérification se fait de même pour les coupures $a_2, \ldots, a_p$. Le long de la coupure b_k la partie de l'accroissement $\Phi_1(\lambda) - \Phi_1(\rho)$ qui provient du terme

$$- \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} u^{(i)}(z)\,\omega^{(i)}(z)$$

est égale, puisque $\omega^{(i)}(\lambda) = \omega^{(i)}(\rho)$, à

$$- \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left\{\left[u^{(i)}(\rho) + b_{ik}\right]\omega^{(i)}(\rho) - u^{(i)}(\rho)\,\omega^{(i)}(\rho)\right\},$$

ou bien

$$- \frac{b_{ik}}{2\pi\sqrt{-1}}\,\omega^{i}(\rho),$$

de sorte que, le long de la coupure b_k,

$$\Phi_1(\lambda) - \Phi_1(\rho) = \psi_k(\rho) - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{k=1}^{p} b_{ik}\,\omega^{(i)}(\rho).$$

La période de $\Phi_1(z)$ le long de chacune des coupures b_k reste donc une fonction rationnelle du point analytique correspondant au point où la coupure est traversée par la variable.

D'après cela, nous supposerons dans tout ce qui suit (du moins dans la deuxième partie) les périodes définies par les égalités suivantes :

$$\text{Le long de } a_k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Phi(\lambda) - \Phi(\rho) = 0,$$
$$\text{Le long de } b_k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Phi(\lambda) - \Phi(\rho) = \psi_k(\rho),$$

les fonctions $\psi_k(z)$ étant des fonctions rationnelles du point analytique (z, s).

Nous supposons de plus que la fonction $\Phi(z)$ est régulière en tout point de la surface T', sauf en un nombre limité de points qu'elle admet comme pôles.

13. Soit $\Phi(z)$ une fonction répondant à cette définition; proposons-nous d'évaluer l'intégrale

$$I = \int_{T'} \Phi(z)\, d\,U(z),$$

U désignant une intégrale abélienne attachée à la surface de Riemann T et l'intégrale étant prise le long du contour de la surface simplement connexe T'. En répétant un raisonnement analogue à celui du n° 6, on trouvera pour la somme des intégrales partielles données par les bords opposés de la coupure a_k l'expression

$$(a_k) = -\int_{a_k} [\Phi(\lambda)\, d\,U(\lambda) - \Phi(\rho)\, d\,U(\rho)],$$

le point ρ se déplaçant dans le sens indiqué par une flèche sur la *fig.* 2 et le point λ étant assujetti à rester constamment en face du point ρ.

Mais le long de a_k

$$\Phi(\lambda) = \Phi(\rho),$$
$$d\,U(\lambda) = d\,U(\rho).$$

Donc, on a déjà

$$(a_k) = 0.$$

Évaluons maintenant la somme des deux termes de I donnés par les bords opposés de la coupure b_k.

On a d'abord

$$(b_k) = -\int_{b_k} [\Phi(\lambda)\, d\,U(\lambda) - \Phi(\rho)\, d\,U(\rho)],$$

l'intégration ayant lieu dans le sens indiqué sur la figure pour le mouvement du point ρ, et le point λ restant constamment en face du point ρ. En tenant compte de l'égalité

$$d\,\mathrm{U}(\lambda) = d\,\mathrm{U}(\rho),$$

on met d'abord (b_k) sous la forme

$$(b_k) = -\int_{b_k} [\Phi(\lambda) - \Phi(\rho)]\, d\,\mathrm{U}(\rho),$$

puis, en introduisant la période relative à la coupure b_k,

$$(b_k) = -\int_{b_k} \psi_k(\rho)\, d\,\mathrm{U}(\rho).$$

Des expressions obtenues pour (a_k) et (b_k), on déduit l'égalité

$$\int_{\mathrm{T}'} \Phi(z)\, d\,\mathrm{U}(z) = -\int_{b_1} \psi_1(\rho)\, d\mathrm{U} - \int_{b_2} \psi_2(\rho)\, d\mathrm{U} - \ldots - \int_{b_p} \psi_p(\rho)\, d\mathrm{U}.$$

D'autre part, d'après le théorème de Cauchy étendu à la surface simplement connexe T', l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathrm{T}'} \Phi(z)\, d\,\mathrm{U}(z)$$

est égale à la somme des résidus de la fonction

$$\Phi(z)\,\mathrm{U}'(z).$$

Les seuls points singuliers de ce produit pour lesquels le résidu puisse être différent de zéro sont les pôles de $\Phi(z)$. Soient c_i l'un des pôles dont nous supposons l'ordre égal à l'unité et R_i le résidu correspondant de $\Phi(z)$; pour le produit $\Phi(z)\,\mathrm{U}'(z)$, le résidu correspondant au pôle c_i sera

$$\mathrm{R}_i\,\mathrm{U}'(c_i).$$

Alors, en écrivant que la somme des résidus multipliée par $2\pi\sqrt{-1}$ est égale à la valeur que nous avons obtenue pour l'intégrale

$$\int_{\mathrm{T}'} \Phi\, d\mathrm{U},$$

on trouve la relation

$$(7)\quad 2\pi\sqrt{-1}\sum R_i U'(c_i) = -\int_{b_1}\psi_1(\rho)\,dU - \int_{b_2}\psi_2(\rho)\,dU - \ldots - \int_{b_p}\psi_p(\rho)\,dU.$$

14. En remplaçant dans cette égalité U successivement par chacune des intégrales normales de première espèce, et en désignant par $u'_k(z)$ la dérivée de $u^{(k)}(z)$, on obtient les p relations suivantes entre les pôles et les résidus correspondants d'une fonction Φ :

$$(8)\quad 2\pi\sqrt{-1}\sum R_i\, u'_k(c_i) = -\int_{b_1}\psi_1(\rho)\,du^{(k)} - \int_{b_2}\psi_2(\rho)\,du^{(k)} - \ldots - \int_{b_p}\psi_p(\rho)\,du^{(k)},$$

pour

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Dans le cas particulier où la fonction $\Phi(z)$ est une fonction rationnelle du point analytique (z, s), $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, ..., $\psi_p(z)$ sont identiquement nulles; les relations précédentes deviennent les relations connues entre les pôles et les résidus correspondants d'une fonction algébrique.

Considérons encore le cas où $\Phi(z)$ est une intégrale abélienne normale de seconde espèce avec le pôle simple $z = c$ et désignons par $\mathfrak{B}_k$ le module de périodicité de cette intégrale le long de la coupure b_k, la relation précédente devient

$$2\pi\sqrt{-1}\, u'_k(c) = -\mathfrak{B}_1\int_{b_1} du^{(k)}(\rho) - \ldots - \mathfrak{B}_k\int_{b_k} du^{(k)}(\rho) - \ldots - \mathfrak{B}_p\int_{b_p} du^{(k)}(\rho);$$

dans le second membre, toutes les intégrales sont nulles, sauf celle qui correspond à la coupure b_k et qui est égale à $2\pi\sqrt{-1}$, de sorte que, dans le cas actuel, les p égalités deviennent les suivantes

$$\mathfrak{B}_k = -u'_k(c) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Elles font donc connaître les modules de périodicité de l'intégrale normale de deuxième espèce; ou, si l'on suppose connus ces modules de périodicité, elles se réduisent à des identités.

15. Nous nous proposons maintenant d'obtenir l'expression d'une fonction Φ dont on donne les périodes, les pôles et les résidus correspondants.

Considérons l'intégrale

$$\int_{T'} \Phi(z)\, d\,\Pi_{z_0 x}(z),$$

$\Pi_{z_0 x}(z)$ désignant l'intégrale normale de troisième espèce dont la dérivée devient infinie :

$$\text{Dans le voisinage du point } x \text{ comme } \quad \frac{1}{z-x},$$

$$\text{»} \qquad\qquad z_0 \quad \text{»} \qquad -\frac{1}{z-z_0}.$$

La fonction, sous le signe somme

$$\Phi(z)\,\Pi'_{z_0 x}(z),$$

est uniforme sur la surface T'. Les seuls pôles de cette fonction, admettant un résidu différent de zéro, sont les points z_0, x pôles du facteur $\Pi'_{z_0 x}(z)$ et les pôles de la fonction $\Phi(z)$; soient

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_g$$

les pôles de $\Phi(z)$ et

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_g$$

les résidus correspondants. Entourons chacun des points z_0, x ; c_1, $c_2, \ldots, c_g$ d'un cercle infiniment petit. On sait que l'intégrale prise le long du contour de T' est égale à la somme des intégrales prises le long des contours des petits cercles, si l'on intègre, dans le sens positif, le long du contour de chacune de ces aires. Nous pouvons écrire cette égalité de la façon suivante

$$\int_{T'} \Phi(z)\, d\Pi_{z_0 x}(z) = \int_{(z_0)} \Phi(z)\, d\Pi_{z_0 x} + \int_{(x)} \Phi(z)\, d\Pi_{z_0 x} + \Sigma \int_{(c_i)} \Phi(z)\, d\Pi_{z_0 x}.$$

Or, on a

$$\int_{(c_i)} \Phi(z)\,\Pi'_{z_0 x}(z)\, dz = \quad 2\pi\sqrt{-1}\; R_i\,\Pi'_{z_0 x}(c_i),$$

$$\int_{(x)} \Phi(z)\,\Pi'_{z_0 x}(z)\, dz = \quad 2\pi\sqrt{-1}\; \Phi(x),$$

$$\int_{(z_0)} \Phi(z)\,\Pi'_{z_0 x}(z)\, dz = -2\pi\sqrt{-1}\; \Phi(z_0).$$

D'autre part, d'après le calcul fait pour une intégrale abélienne quelconque (n° 13),

$$\int_{T'} \Phi(z)\, d\Pi_{z_0 x}(z) = -\sum_{k=1}^{k=p} \int_{b_k} \psi_k(\rho)\, d\Pi_{z_0 x}.$$

En remplaçant, dans la relation fournie par le théorème de Cauchy, les intégrales par les valeurs que nous venons de rappeler, nous obtiendrons une formule donnant l'expression cherchée de $\Phi(x)$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi(x) - \Phi(z_0) + \sum R_i \Pi'_{z_0 x}(c_i) \\ &= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_1} \psi_1(\rho)\, d\Pi_{z_0 x} - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_2} \psi_2(\rho)\, d\Pi_{z_0 x} - \ldots - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_p} \psi_p(\rho)\, d\Pi_{z_0 x}.\end{aligned}\right.$$

16. Dans le cas particulier d'une fonction algébrique, la formule devient

$$\Phi(x) - \Phi(z_0) = -\sum R_i \Pi'_{z_0 x}(c_i).$$

Pour retrouver la formule connue donnant la décomposition en éléments simples d'une fonction algébrique, il suffit de remarquer que l'on a :

$$-\Pi'_{z_0 x}(z) = Z(x, z),$$

en désignant par $Z(x, z)$ l'intégrale normale de seconde espèce qui devient infinie comme $\frac{1}{x - z}$, quand la variable x se rapproche du point z; on le vérifie en dérivant par rapport à z deux membres de l'égalité

$$\int_{z_0}^{z} d\Pi_{z_0 x} = \int_{z_0}^{x} d\Pi_{z_0 z},$$

que fournit le théorème sur l'échange du paramètre et de l'argument et en se rappelant que l'intégrale normale de seconde espèce changée de signe est la dérivée par rapport au paramètre de l'intégrale normale de troisième espèce. En tenant compte des résultats que nous venons de rappeler, la formule donnant l'expression de $\Phi(x)$ devient, dans le cas d'une fonction algébrique,

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = R_1 Z(x, c_1) + R_2 Z(x, c_2) + \ldots + R_g Z(x, c_g),$$

et il convient de rapprocher de cette formule les p relations

$$R_1 u'_k(c_1) + R_2 u'_k(c_2) + \ldots + R_g u'_k(c_g) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p),$$

à l'aide desquelles on vérifie aisément que l'accroissement de la fonction $\Phi(x)$ est nul, quand le point x traverse une coupure b_k.

L'examen de ce cas particulier nous conduira à écrire, dans le cas général, la formule sous la forme suivante

$$\left\{\begin{aligned}\Phi(x) - \Phi(z_0) = {} & \sum R_i Z(x, c_i) \\ & - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_1} \psi_1(\rho)\, d\Pi_{z_0 x} - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_2} \psi_2(\rho)\, d\Pi_{z_0 x} - \ldots - \int_{b_p} \psi_p(\rho)\, d\Pi_{z_0 x}\end{aligned}\right.$$

et à rapprocher de cette formule les p relations

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}\sum R_i u'_k(c_i) = {} & - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_1} \psi_1(\rho)\, du^{(k)} \\ & - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_2} \psi_2(\rho)\, du^{(k)} - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_p} \psi_p(\rho)\, du^{(k)}.\end{aligned}\right.$$

Vérifions encore cette formule dans le cas où la fonction $\Phi(x)$ est une intégrale de seconde espèce n'admettant que des pôles simples, et dont les périodes, le long des coupures a_k, sont toutes nulles. Dans ce cas, $\psi_k(z)$ se réduit à une constante ; l'intégrale

$$\int_{b_k} \psi_k(\rho)\, d\Pi_{z_0 x} = \psi_k \int_{b_k} d\Pi_{z_0 x}(\rho)$$

contient en facteur l'accroissement que reçoit l'intégrale normale $\Pi_{z_0 x}(z)$, quand la variable traverse la coupure a_k. Cet accroissement étant nul, l'intégrale correspondante disparaît et $\Phi(z)$ se réduit à une somme d'intégrales normales de seconde espèce multipliées par des constantes.

Ces constantes sont, d'ailleurs, arbitraires, puisque les relations entre les pôles d'une fonction Φ et les résidus correspondants se réduisent, dans le cas actuel, à des identités, quand on y remplace par leur valeur connue les périodes de l'intégrale normale de seconde espèce.

17. Nous allons vérifier que l'expression donnée pour $\Phi(x)$ par la formule (10) admet bien les périodes de la fonction $\Phi(x)$, pourvu qu'il existe entre les pôles et les résidus correspondants les relations (8), et ceci nous donnera la solution du problème : *Construire une fonction $\Phi(z)$ uniforme sur la surface T' et dont les périodes se définissent à l'aide de fonctions données $\psi_k(z)$, assujetties seulement à la condition d'être des fonctions rationnelles du point analytique (z, s).* Nous aurons à nous appuyer, pour cela, sur le lemme suivant :

Lemme. — *L'intégrale*

$$Z(x) = \int_C \frac{dz}{z - x},$$

prise sur un plan simple le long d'un arc de courbe C, et considérée comme fonction de x, admet la ligne C comme coupure : en désignant par λ et ρ les affixes de deux points situés de part et d'autre de la courbe C sur une normale à cette courbe et à une même distance infiniment petite du pied de la normale, on a

$$Z(\lambda) - Z(\rho) = \pm 2\pi\sqrt{-1}.$$

Soient Ox, Oy les axes rectangulaires auxquels la courbe C est rapportée, z_1 l'affixe du pied de la normale, α l'angle de Ox avec la tangente au point z_1 (*fig.* 5), en prenant comme direction positive sur la tangente la direction qui correspond au sens d'intégration et le sens positif pour les angles étant le sens de rotation du système d'axes Ox, Oy. Sur la normale, considérons comme direction positive la direction définie par l'angle

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2},$$

et supposons le point λ pris sur la demi-droite, issue du point z_1 qui correspond à l'angle θ, le point ρ sur la demi-droite de direction opposée, les deux points λ et ρ étant à la même distance r du pied de la normale. On a

$$\lambda = z_1 + re^{\theta\sqrt{-1}},$$
$$\rho = z_1 - re^{\theta\sqrt{-1}}.$$

Il suffit évidemment de considérer un arc de courbe très petit comprenant le point z_1; si z est l'affixe d'un point de ce petit arc, on a

$$z = z_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 (s - s_1) + \ldots,$$

en désignant par s l'arc de la courbe C compté à partir d'une origine arbitraire dans le sens choisi pour sens d'intégration, par s_1 la valeur de l'arc correspondant au point z_1, et par $\left(\frac{dz}{ds}\right)_1$ la valeur de $\frac{dz}{ds}$ au même point.

Remarquons que

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)_1 = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}.$$

Alors, en posant $s - s_1 = \sigma$ et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, nous trouvons

$$z = z_1 + \sigma e^{\alpha\sqrt{-1}},$$
$$dz = e^{\alpha\sqrt{-1}}\, d\sigma,$$

puis

$$\frac{dz}{z-\lambda} = \frac{dz}{z - z_1 - (\lambda - z_1)} = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}\, d\sigma}{\sigma e^{\alpha\sqrt{-1}} - re^{\theta\sqrt{-1}}} = \frac{d\sigma}{\sigma - re^{(\theta-\alpha)\sqrt{-1}}}$$

et, comme $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{dz}{z-\lambda} = \frac{d\sigma}{\sigma - r\sqrt{-1}};$$

on aurait de même

$$\frac{dz}{z-\rho} = \frac{d\sigma}{\sigma + r\sqrt{-1}}.$$

On en conclut

$$Z(\lambda) - Z(\rho) = \int_{-\sigma'}^{\sigma''} \left(\frac{1}{\sigma - r\sqrt{-1}} - \frac{1}{\sigma + r\sqrt{-1}}\right) d\sigma,$$

en désignant par σ'' et $-\sigma'$ les valeurs de σ qui correspondent aux extrémités du petit arc considéré. En réduisant au même dénominateur sous le signe $\int$, on trouve

$$Z(\lambda) - Z(\rho) = 2\sqrt{-1}\int_{-\sigma'}^{\sigma''} \frac{r\, d\sigma}{\sigma^2 + r^2}$$

et, en intégrant,

$$Z(\lambda) - Z(\rho) = 2\sqrt{-1}\left(\text{arc tang}\,\frac{\sigma''}{r} - \text{arc tang}\,\frac{-\sigma'}{r}\right).$$

σ' et σ'' sont des quantités positives très petites que nous laissons fixes; r est positif et tend vers zéro quand on suppose que les points λ et ρ se rapprochent indéfiniment de la courbe. On a donc, dans cette hypothèse,

$$Z(\lambda) - Z(\rho) = 2\sqrt{-1}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

et enfin

$$Z(\lambda) - Z(\rho) = 2\pi\sqrt{-1}.$$

Dans cette formule, on suppose qu'un sens positif sur la normale est défini d'après la règle suivante : On mène la tangente à la courbe C dans le sens d'intégration, et l'on fait tourner la demi-droite ainsi obtenue d'un angle égal à un droit dans le sens de rotation du système des axes de coordonnées; le point λ (*fig.* 5) est pris sur la direction

Fig. 5.

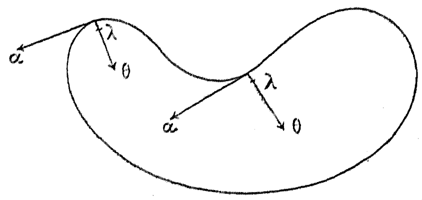
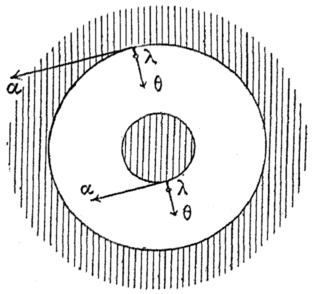


Fig. 5 *bis*.



positive de la normale. Dans le cas d'une courbe fermée décrite dans le sens positif pour passer du point ρ au point λ (*fig.* 6), on pénètre dans l'aire limitée par la courbe.

Si maintenant on considère l'intégrale

$$\Psi(x) = \int_C \psi(z)\frac{dz}{Z-x},$$

où $\psi(z)$ désigne une fonction rationnelle du point analytique (z, s), on démontre aisément que

$$\Psi(\lambda) - \Psi(\rho) = 2\pi\sqrt{-1}\,\psi(\rho),$$

les positions des points λ et ρ étant définies comme précédemment.

Dans le cas où la courbe C est fermée, on a une vérification à l'aide du théorème de Cauchy qui donne comme valeur de l'intégrale précédente, lorsque la courbe C est supposée décrite dans le sens positif,

$$2\pi\sqrt{-1}\,\psi(x) \quad \text{ou zéro},$$

suivant que le point x est intérieur ou extérieur à l'aire limitée par la courbe. En effet, quand le point x passe de l'extérieur à l'intérieur en restant très voisin de la courbe, l'accroissement de l'intégrale est bien

$$2\pi\sqrt{-1}\,\psi(x).$$

Mais il est bon de faire remarquer que le résultat précédent a pu être établi directement, indépendamment des théorèmes sur les intégrales de Cauchy.

18. Ce lemme démontré, revenons à la formule

$$\Phi(x) - \Phi(z_0) = \sum R_i Z(x, c_i)$$
$$- \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_1} \psi_1(\rho)\, d\Pi_{z_0 x} - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_2} \psi_2(\rho)\, d\Pi_{z_0 x} - \ldots - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_p} \psi_p(\rho)\, d\Pi_{z_0 \lambda}.$$

Nous mettrons d'abord chacune des intégrales du second membre sous une forme plus simple, en remarquant que, la fonction sous le signe somme

$$\psi_k(z)\, \Pi'_{z_0 x}(z)$$

étant une fonction rationnelle du point analytique (z, s), le seul changement qui se produit quand on remplace le point ρ par le point λ (*fig.* 1) est un changement dans le sens d'intégration, de sorte que

$$- \int_b \psi_k(\rho)\, d\Pi_{z_0 x} = \int_b \psi_k(\lambda)\, \Pi_{z_0 x}.$$

Nous écrirons alors la formule

$$\Phi(x)-\Phi(z_0)=\sum \mathrm{R}_i \mathrm{Z}(x,c_i)$$
$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{b_1}\psi_1(z)\,d\Pi_{z_0 x}(z)+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{b_2}\psi_2(z)\,d\Pi_{z_0 x}+\ldots+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{b_p}\psi_p(z)\,d\Pi_{z_0 x},$$

le sens d'intégration sur chaque coupure étant le sens correspondant au bord positif de la coupure (ce sens est indiqué par une flèche sur la *fig.* 1).

Cela fait, nous allons supposer que x traverse la coupure b_1, calculer l'accroissement qui en résulte pour chacun des termes du second membre et en déduire ce qu'on obtient ainsi pour la différence

$$\Phi(\lambda)-\Phi(\rho).$$

Considérons d'abord l'intégrale de seconde espèce $\mathrm{Z}(x, c_i)$; le module de périodicité de cette intégrale correspondant à la coupure b_1 est égal à $-u'_1(c_i)$, de sorte que l'accroissement de $\Sigma \mathrm{R}_i \mathrm{Z}(x, c_i)$ est

$$-\Sigma \mathrm{R}_i u'_1(c_i).$$

Quant aux intégrales prises le long des coupures b_k, réservons la première dont le chemin d'intégration est traversé par le point x; l'accroissement de chacune des autres s'obtient aisément en se rappelant que, d'après le théorème sur l'échange du paramètre et de l'argument,

$$\Pi_{z_0\lambda}(z)-\Pi_{z_0\rho}(z)=u^{(1)}(z).$$

Alors, z se déplaçant le long de la coupure b_2 par exemple, on a

$$d\Pi_{z_0\lambda}(z)-d\Pi_{z_0\rho}(z)=du^{(1)}(z),$$

de sorte que l'accroissement de l'intégrale $\int_{b_2}\psi_2(z)\,d\Pi_{z_0 x}(z)$ est

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{b_2}\psi_2(z)\,du^{(1)}(z),$$

et l'on a de même l'accroissement des intégrales correspondant aux coupures $b_3 \ldots, b_p$.

Nous avons réservé l'intégrale

$$\int_{b_1} \psi_1(z)\, d\Pi_{z_0 x}(z),$$

dont le chemin d'intégration est traversé par le point x, point critique de l'intégrale $\Pi_{z_0 x}$.

Prenons sur le bord positif de la coupure b_1 un arc très petit b'_1 contenant le pied de la normale sur laquelle se trouvent les points λ et ρ et soit b''_1 le reste du bord positif de la coupure b_1, nous avons à considérer la somme

$$\int_{b'_1} \psi_1(z)\, d\Pi_{z_0 x}(z) + \int_{b''_1} \psi_1(z)\, d\Pi_{z_0 x}(z).$$

L'accroissement de l'intégrale correspondant à l'arc b''_1 s'obtient comme celui de l'intégrale correspondant à l'une des coupures $b_2, \ldots, b_p$, puisque le chemin b''_1 n'est pas traversé par le point x. Cet accroissement est

$$\int_{b''_1} \psi_1(z)\, du^{(1)}(z);$$

il diffère très peu de

$$\int_{b_1} \psi_1(z)\, du^{(1)}(z),$$

puisque $\psi_1(z)\, u'_1(z)$ reste fini sur l'arc b'_1 qui forme le complément de b''_1 et que cet arc b'_1 est très petit.

Il reste à trouver l'accroissement de l'intégrale

$$\int_{b'_1} \psi_1(z)\, d\Pi_{z_0 x}(z).$$

Or, dans le voisinage du point $z = x$, on a

$$\frac{d\Pi_{z_0 x}(z)}{dz} = \frac{1}{z - x} + \text{fonct. rég. de } z;$$

au lieu de l'intégrale précédente, nous pouvons considérer

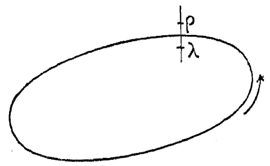
$$\Psi_1(x) = \int_{b_1} \psi_1(z) \frac{dz}{z - x},$$

et, d'après le lemme que nous avons démontré, on a

$$\Psi_1(\lambda) - \Psi_1(\rho) = 2\pi\sqrt{-1}\,\psi_1(\rho),$$

On vérifie que le signe du second membre est bien choisi en se rappelant que le sens d'intégration est celui qui correspond au bord positif de la coupure b_1 (*fig.* 6).

Fig. 6.



En résumé, quand x traverse la coupure b_1, le second membre de la formule (10) donne pour

$$\Phi(\lambda) - \Phi(\rho)$$

l'expression

$$\sum R_i u_1'(c_i) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{b_1}\psi_1(\lambda)\,du^{(1)} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{b_2}\psi_2(\lambda)\,du^{(1)} + \ldots + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{b_p}\psi_p(\lambda)\,du^{(1)}$$
$$+ \psi_1(\rho).$$

(On a mis λ au lieu de z dans chacune des intégrales pour rappeler que le sens d'intégration est ici le sens correspondant au bord positif de la coupure.) Cette expression se réduit bien à $\psi_1(\rho)$ si l'on tient compte de l'une des relations (8) qui doivent exister entre les pôles et les résidus correspondants.

19. Nous pouvons maintenant résoudre le problème suivant :

Construire une fonction Φ dont on se donne à l'avance les périodes, les pôles et les résidus correspondants.

Pour se définir les périodes sur les coupures b_k, on se donne p fonctions rationnelles d'un point analytique (z, s). Désignons par $\psi_k(z)$ la fonction qui correspond à la coupure b_k. Soient

$$c_1,\quad c_2,\quad \ldots,\quad c_g$$

les points qui doivent être des pôles (nous supposons d'abord que ces pôles doivent être du premier ordre) et

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_g$$

les résidus correspondants. On suppose que les pôles et les résidus vérifient les p relations

$$-\sum R_i u'_k(c_i) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_k} \psi_1(\lambda)\, du^{(k)} + \ldots + \int_{b_k} \psi_p(\lambda)\, du^{(k)} = 0,$$

pour $k = 1, 2, \ldots, p$.

La fonction cherchée est donnée par la formule

$$\Phi(x) - \Phi(z_0) = \sum_{i=1}^{i=g} R_i Z(x, c_i)$$
$$+ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_1} \psi_1(z)\, d\Pi_{z_0 x}(z) + \ldots + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{b_p} \psi_p(z)\, d\Pi_{z_0 x}(z),$$

l'intégration le long de chacune des coupures b_k se faisant dans le sens correspondant au bord positif de cette coupure.

Pour vérifier que la fonction $\Phi(x)$ définie par cette formule répond bien à la question, il n'y a qu'à reprendre les raisonnements qui ont été faits dans le cas où on admettait l'existence de la fonction Φ, puisque la seule restriction imposée aux fonctions $\psi_k(z)$ d'une part, et aux quantités

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_g,$$
$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_g,$$

d'autre part, était que les p relations (8) devaient être vérifiées.

20. Si le point c_i, au lieu d'être un pôle du premier ordre devait être un pôle d'ordre q, on devrait remplacer dans la formule le terme $R_i Z(x, c_i)$ par la somme

$$R_i Z(x, c_i) + R'_i Z'(x, c_i) + \ldots + R_i^{(q-1)} Z^{(q-1)}(x, c_i).$$

Il convient de remarquer que, si l'on veut remonter de la fonction $\Phi(x)$ à une fonction $F(x)$ admettant $\Phi(x)$ comme dérivée logarithmique, on a deux cas très différents suivant que l'ordre d'un pôle c est égal à 1 ou que cet ordre est supérieur à 1.

Dans le premier cas, on a, dans le voisinage du point c,

$$\Phi(x) = \frac{r}{x-c} + \text{fonct. rég. de } x;$$

en intégrant puis en passant des logarithmes aux fonctions, on trouve successivement

$$F(x) = (x-c)^r P(x),$$

$P(x)$ désignant une fonction de x régulière dans le voisinage du point $x = c$, de sorte que c est, ou un pôle, ou un point singulier dans le voisinage duquel la fonction ne reste plus uniforme.

Dans le cas où c est un pôle dont l'ordre de multiplicité est supérieur à 1, égal à 2 par exemple, on a

$$\Phi(x) = \frac{r}{x-c} + \frac{r'}{(x-c)^2} + \text{fonct. rég. de } x.$$

On en déduit successivement

$$\operatorname{Log} F(x) = r \operatorname{Log}(x-c) - \frac{r'}{x-c} + \text{fonct. rég. de } x,$$

$$F(x) = (x-c)^r e^{-\frac{r'}{x-c}} P(x),$$

$P(x)$ étant une fonction régulière de x. On voit que dans ce cas, si la fonction $F(x)$ reste uniforme dans le voisinage du point c, ce point est un point singulier essentiel.

21. On peut, à l'aide d'intégrales abéliennes et de fonctions rationnelles du point analytique (z, s), composer une fonction Φ admettant le long des coupures a_k et b_k des périodes rationnelles données. Supposons d'abord que les périodes correspondant aux coupures a_k doivent être toutes nulles et que l'on doive avoir

le long de la coupure b_k......... $\Phi(\lambda) - \Phi(\rho) = \psi_k(\rho)$

pour $k = 1, 2, \ldots, p$.

Considérons p intégrales normales de seconde espèce

$$Z(z, c_1), \quad Z(z, c_2), \quad \ldots, \quad Z(z, c_p).$$

Multiplions-les respectivement par des fonctions rationnelles de z

pour le moment indéterminées

$$Q_1(z),\quad Q_2(z),\quad \ldots,\quad Q_p(z)$$

et ajoutons les produits ainsi obtenus. Soit $\Phi(z)$ leur somme

$$\Phi(z) = Q_1(z)Z(z, c_1) + Q_2(z)Z(z, c_2) + \ldots + Q_p(z)Z(z, c_p).$$

On aura le long de la coupure b_k, en posant $\frac{d}{dz}u^{(k)}(z) = \varphi_k(z)$

$$-[\Phi(\lambda) - \Phi(\rho)] = Q_1(\rho)\varphi_k(c_1) + Q_2(\rho)\varphi_k(c_2) + \ldots + Q_p(\rho)\varphi_k(c_p).$$

En écrivant que le second membre doit être égal à $-\psi_k(\rho)$ et en faisant succcessivement $k = 1, 2, \ldots, p$, on est conduit aux p relations

$$\begin{aligned}
&Q_1(z)\varphi_1(c_1) + Q_2(z)\varphi_1(c_2) + \ldots + Q_p(z)\varphi_1(c_p) = -\psi_1(z),\\
&Q_1(z)\varphi_2(c_1) + Q_2(z)\varphi_2(c_2) + \ldots + Q_p(z)\varphi_2(c_p) = -\psi_2(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&Q_1(z)\varphi_p(c_1) + Q_2(z)\varphi_p(c_2) + \ldots + Q_p(z)\varphi_p(c_p) = -\psi_p(z).
\end{aligned}$$

Ces relations pourront être résolues par rapport aux fonctions $Q_1(z), Q_2(z), \ldots, Q_p(z)$. Si le déterminant

$$\Delta(c_1 c_2 \ldots c_p) = \begin{vmatrix} \varphi_1(c_1) & \varphi_1(c_2) & \ldots & \varphi_1(c_p) \\ \varphi_2(c_1) & \varphi_2(c_2) & \ldots & \varphi_2(c_p) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_p(c_1) & \varphi_p(c_2) & \ldots & \varphi_p(c_p) \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, ce qu'on peut toujours supposer, puisqu'on a choisi arbitrairement $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

Si les périodes, le long des coupures a_k, au lieu d'être nulles, doivent être définies par les relations

$$\text{le long de } a_k \ldots\ldots\ldots \quad \Phi(\lambda) - \Phi(\rho) = \omega_k(\rho)$$

on ramène la question au cas précédent en retranchant de Φ la somme

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}[\omega_1(z)u^{(1)}(z) + \omega_2(z)u^{(2)}(z) + \ldots + \omega_p(z)u^{(p)}(z)].$$

$\Phi_1(z)$ étant une fonction particulière, répondant aux conditions énoncées, l'expression générale des fonctions $\Phi(z)$ est donnée par la formule

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \text{fonct. rat. de } (z, s).$$

L'expression de la fonction $\Phi(z)$ que nous avons déduite plus haut de l'intégrale

$$\int \Phi \, d\Pi_{z_0 x}$$

a l'avantage de mettre en évidence les pôles et les parties principales correspondantes.

TROISIÈME PARTIE.

22. Les fonctions Φ uniformes sur toute la surface T′ et dont les périodes se définissent à l'aide de fonctions rationnelles d'un point analytique se rattachent aux équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles d'un point analytique.

Supposons les périodes définies par les égalités

$$\text{le long de } a_k \ldots\ldots\ldots \quad \Phi(\lambda) - \Phi(\rho) = \varphi_k(\rho)$$
$$\text{le long de } b_k \ldots\ldots\ldots \quad \Phi(\lambda) - \Phi(\rho) = \psi_k(\rho)$$

Si l'on détermine les coefficients d'une équation différentielle d'ordre $2p$ avec second membre par la condition que l'intégrale générale doit être

$$\Phi + \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_p \varphi_p + \mu_1 \psi_1 + \ldots + \mu_p \psi_p,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$; $\mu_1, \ldots, \mu_p$ désignant des constantes arbitraires, on vérifie que les coefficients sont uniformes sur la surface T′. Pour détailler les calculs, nous nous bornerons au cas de $p = 2$.

Soit

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + P_1 \frac{d^3 v}{dz^3} + P_2 \frac{d^2 v}{dz^2} + P_3 \frac{dv}{dz} + P_4 v = V.$$

Remarquons d'abord qu'en égalant le premier membre à zéro, on a une équation différentielle dont l'intégrale générale doit être

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \mu_1\psi_1 + \mu_2\psi_2.$$

Nous avons ainsi, pour déterminer P_1, P_2, P_3, P_4, les équations linéaires

$$\begin{aligned}
&\frac{d^4\varphi_1}{dz^4} + P_1\frac{d^3\varphi_1}{dz^3} + P_2\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + P_3\frac{d\varphi_1}{dz} + P_4\varphi_1 = 0,\\
&\frac{d^4\varphi_2}{dz^4} + P_1\frac{d^3\varphi_2}{dz^3} + P_2\frac{d^2\varphi_2}{dz^2} + P_3\frac{d\varphi_2}{dz} + P_4\varphi_2 = 0,\\
&\frac{d^4\psi_1}{dz^4} + P_1\frac{d^3\psi_1}{dz^3} + P_2\frac{d^2\psi_1}{dz^2} + P_3\frac{d\psi_1}{dz} + P_4\psi_1 = 0,\\
&\frac{d^4\psi_2}{dz^4} + P_1\frac{d^3\psi_2}{dz^3} + P_2\frac{d^2\psi_2}{dz^2} + P_3\frac{d\psi_2}{dz} + P_4\psi_2 = 0.
\end{aligned}$$

Ces équations peuvent être résolues par rapport à P_1, P_2, P_3, P_4 si l'on n'a pas

$$\begin{vmatrix}
\frac{d^3\varphi_1}{dz^3} & \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} & \frac{d\varphi_1}{dz} & \varphi_1\\
\frac{d^3\varphi_2}{dz^3} & \frac{d^2\varphi_2}{dz^2} & \frac{d\varphi_2}{dz} & \varphi_2\\
\frac{d^3\psi_1}{dz^3} & \frac{d^2\psi_1}{dz^2} & \frac{d\psi_1}{dz} & \psi_1\\
\frac{d^3\psi_2}{dz^3} & \frac{d^2\psi_2}{dz^2} & \frac{d\psi_2}{dz} & \psi_2
\end{vmatrix} = 0.$$

Mais ce cas d'exception ne se présente pas si les fonctions φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 sont linéairement indépendantes [*voir* un Mémoire de M. J. Tannery, *Sur les intégrales des équations linéaires* (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. IV, p. 121)]. Les quatre équations précédentes donnent, pour P_1, P_2, P_3, P_4, des expressions qui sont évidemment des fonctions rationnelles du point analytique (z, s).

Il reste à déterminer V, mais V doit être identique au résultat de la substitution de Φ dans le premier membre de l'équation différentielle, c'est-à-dire à

$$\frac{d^4\Phi}{dz^4} + P_1\frac{d^3\Phi}{dz^3} + P_2\frac{d^2\Phi}{dz^2} + P_3\frac{d\Phi}{dz} + P_4\Phi.$$

La fonction ainsi définie est uniforme sur la surface T'; en effet, quand on traverse la coupure a_1, elle se reproduit augmentée de

$$\frac{d^4\varphi_1}{dz^4} + P_1\frac{d^3\varphi_1}{dz^3} + P_2\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + P_3\frac{d\varphi_1}{dz} + P_4\varphi_1,$$

et cette expression est identiquement nulle, puisque c'est le premier membre de l'une des équations qui ont servi à déterminer P_1, P_2, P_3, P_4; il en est de même pour chacune des autres coupures.

Donc la fonction V est uniforme sur la surface T', et l'on voit que l'équation différentielle du quatrième ordre avec second membre admettant comme intégrale générale

$$\Phi + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4$$

est telle que ses coefficients sont des fonctions rationnelles d'un point analytique.