ÉMILE BOREL

Sur quelques points de la théorie des fonctions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 9-55
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__9_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS,

PAR M. ÉMILE BOREL,
MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

INTRODUCTION.

L'intégrale de Cauchy a été le premier exemple d'une expression analytique égale à zéro dans une certaine région du plan et à une fonction déterminée dans une autre région. Dès lors, on a dû se poser la question suivante : Étant données deux fonctions d'une variable complexe, définies, l'une lorsque la variable est dans un certain domaine, l'autre lorsqu'elle est dans un domaine différent, dans quels cas peut-on dire que *c'est la même fonction?* Avant les travaux de Cauchy, cette question aurait paru à peu près dénuée de sens ou tout au moins résolue immédiatement : on a la même fonction, pensait-on, lorsqu'on a la même expression analytique. Il est clair que l'existence d'expressions analytiques telles que l'intégrale de Cauchy ou certaines séries qui en ont été déduites par M. P. Appell (1) conduirait,

(1) P. APPELL, *Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle* (*Acta mathematica*, t. I).

en partant de cette idée, à des conséquences au moins bizarres : l'expression *même fonction dans plusieurs régions du plan* aurait un sens tellement large qu'elle ne signifierait plus rien.

La notion de fonction prolongée analytiquement, obtenue à l'aide de la série de Taylor, a jeté beaucoup de lumière sur ce point et joué un grand rôle en Analyse; il est inutile de rappeler ici en quoi elle consiste, ni quelle en est l'importance. Remarquons simplement que cette importance est due surtout à ce théorème fondamental : *Deux fonctions analytiques qui coïncident dans une région du plan coïncident dans tout le plan ou, du moins, dans toutes les régions que l'on peut atteindre par voie de prolongement.*

Mais, dans le cas où une fonction admet une ligne singulière essentielle fermée, nous ne savons pas ce que l'on doit appeler *prolongement analytique de la fonction au delà de cette ligne.* M. H. Poincaré a même cru pouvoir affirmer que cette expression est nécessairement dénuée de sens (1).

J'ai repris la question à un point de vue un peu différent, et j'ai montré qu'il est possible, dans certains cas, de donner du prolongement analytique au delà d'une ligne singulière essentielle fermée une définition qui ne soit contradictoire, ni avec elle-même, ni avec les notions antérieures. J'ai fait voir comment les difficultés signalées par M. H. Poincaré (*loc. cit.*) tiennent à la définition que l'on donne usuellement de l'uniformité des fonctions. C'est la difficulté de définir l'uniformité d'une fonction ayant une ligne singulière essentielle qui m'a empêché d'étendre à des cas plus généraux la notion de prolongement analytique, notamment au cas de certaines fonctions à espace lacunaire signalées d'abord par M. H. Poincaré (*Acta Societatis fennicæ*, t. XII) et que j'étudie avec quelque détail. Là se termine la première Partie de ce travail.

Dans la seconde Partie j'indique comment la considération des fonctions à espace lacunaire dont je viens de parler m'a conduit à un théorème sur une classe très intéressante de fonctions d'une variable réelle. Je veux parler des fonctions qui, dans un intervalle donné, ont *toutes*

---

(1) *Voir* notamment : H. Poincaré, *Sur les fonctions à espace lacunaire* (*American Journal of Mathematics*, t. XIV).

leurs dérivées finies (et, par suite, continues) et qui, cependant, ne sont développables en série de Taylor pour aucun point de l'intervalle. Je donne pour ces fonctions une expression analytique (la somme d'une série de puissances et d'une série de Fourier) telle que les expressions analytiques des dérivées de tous les ordres de la fonction s'en déduisent immédiatement par la différentiation des séries, terme à terme.

Pour obtenir ce résultat, j'ai dû compléter sur quelques points la théorie d'un système d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, théorie dont l'importance a été indiquée d'abord par M. G. Darboux (1) et qui a fait l'objet de quelques courtes Notes de M. H. Poincaré (2). Je donne, en terminant, quelques applications de cette théorie.

Dans la conclusion, j'essaye de montrer comment les deux parties, en apparence assez distinctes, de ce travail ont été écrites en partant des mêmes idées, et je cherche à faire voir quelle importance elles peuvent avoir dans les applications, notamment en Physique mathématique.

J'ai rejeté dans une Note la démonstration de quelques propositions qui se rattachent à la théorie des ensembles et de l'approximation des irrationnelles, dans le double but de ne pas interrompre les raisonnements au milieu desquels j'en ai fait usage et de pouvoir leur donner quelques-uns des développements qu'elles me semblaient comporter (3).

---

(1) *Œuvres de Fourier*, t. I.

(2) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XIII et XIV.

(3) Les principaux résultats contenus dans ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences (séance du 12 février 1894).

PREMIÈRE PARTIE.

Les expressions analytiques qui se présentent les premières, après les fonctions rationnelles et algébriques, sont les séries de fractions rationnelles qui comprennent, comme cas particulier, les séries de polynomes. Nous appellerons *pôle* d'une telle série toute valeur de la variable (nous dirons souvent *tout point*), qui rend infini l'un des termes, et *point singulier* tout point dans le voisinage duquel se trouve une infinité de pôles. Dans tout ceci, le point à l'infini est traité comme un point ordinaire.

L'ordre d'un pôle sera le degré de multiplicité le plus élevé de ce pôle dans les divers termes qu'il rend infinis. Nous supposerons essentiellement cet ordre fini; le cas où il est infini conduit, si le point correspondant est isolé, à ce que l'on appelle ordinairement *un point singulier essentiel*.

Dans le Mémoire cité plus haut, M. P. Appell a montré qu'on pouvait former des séries ayant des singularités de ce dernier genre, et représentant, dans des régions différentes, les fonctions les plus diverses; c'est pourquoi nous excluons ces singularités de nos considérations.

Enfin nous appellerons *ordre de la série*, la limite supérieure des ordres de ses divers pôles; nous supposerons aussi cet ordre fini; il est clair que cette hypothèse n'est pas une conséquence nécessaire de la précédente; mais l'étude des séries dans lesquelles l'ordre de chaque pôle est fini, sans cependant être limité pour la série entière, paraît plus compliquée qu'intéressante. Nous nous contentons de la signaler; on verra sans peine dans quelle mesure les considérations qui suivent s'appliquent à ce cas particulier.

Nous allons faire encore une hypothèse restrictive sur les séries d'ordre fini que nous étudierons; nous admettrons que la série obtenue en décomposant les diverses fractions rationnelles en éléments simples est absolument convergente en *au moins un* point non singulier. Il est d'ailleurs facile d'en conclure qu'elle est absolument convergente en tous les points non singuliers.

Il existe des fonctions très simples pour lesquelles cette hypothèse n'est pas vérifiée; tel est le cas, par exemple, pour la dérivée logarithmique d'une fonction holomorphe de genre supérieur à zéro : c'est la définition même du genre. Cet exemple suffit pour faire voir quel est le caractère de notre hypothèse; quand elle est vérifiée, la fonction peut être considérée comme déterminée quand on donne ses pôles, et la manière dont elle devient infinie en chacun d'eux. Par exemple, une fonction admettant pour pôles simples les points $z = n^2$, le résidu correspondant étant égal à l'unité, est nécessairement de la forme

$$A + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{z - n^2},$$

A étant une constante; on suppose, bien entendu, que le point à l'infini n'est pas lui-même un pôle, mais seulement ce que nous avons appelé *un point singulier*, c'est-à-dire dans le voisinage duquel il y a une infinité de pôles. Au contraire, une fonction admettant pour pôles simples les points $z = \sqrt{n}$, les résidus étant encore égaux à l'unité, n'est nullement déterminée; la série semi-convergente

$$\sum_{1}^{+\infty}{}_{n} \frac{1}{z - \sqrt{n}}$$

peut, en effet, représenter diverses fonctions suivant l'ordre dans lequel on écrit ses termes; si on la rend absolument convergente par le procédé de M. Weierstrass, on est obligé d'introduire une infinité de polynomes en z ne formant pas une série absolument convergente; dans certains cas, le degré de ces polynomes, ici fini, pourrait dépasser toute limite. On voit que le point à l'infini est alors un point singulier d'une nature toute particulière. A ce point de vue-là et en modifiant un peu la terminologie en usage, nous pourrions dire que les séries satisfaisant à notre hypothèse restrictive sont des fonctions n'ayant sur toute la sphère d'autre singularité que des pôles, les points limites de pôles, que nous avons appelés *points singuliers*, n'étant pas singuliers en eux-mêmes, mais seulement en tant que limites de pôles. Nous éviterons d'ailleurs autant que possible de modifier le sens des locutions admises; néanmoins, nous conserverons souvent le nom de *pôles* à ceux d'entre eux dans le voisinage desquels s'en trouve une infinité d'autres, c'est-à-dire qui sont en même temps des points singuliers.

En résumé, nous considérons les séries de la forme

$$\sum \frac{A_n}{(z-a_n)^{m_n}},$$

et nous supposons : d'abord que les exposants entiers m_n sont au plus égaux à un nombre fixe m, l'ordre de la série; ensuite que la série est absolument convergente pour au moins un point $z=c$ ne coïncidant avec aucun pôle ni point singulier. Comme nous l'avons déjà remarqué, la série est alors absolument convergente en tout point non singulier; il est clair, en effet, que le rapport des termes correspondants des deux séries à termes positifs

$$\sum \left|\frac{A_n}{(z-a_n)^{m_n}}\right|, \qquad \sum \left|\frac{A_n}{(c-a_n)^{m_n}}\right|$$

est compris entre deux nombres fixes, les m_n étant finis et z et c n'étant pas infiniment voisin des points a_n.

Il est visible, d'ailleurs, que notre série se transforme en une série analogue lorsqu'on effectue sur z une transformation homographique; si tous les points du plan ne sont pas singuliers, on pourra choisir cette transformation, de manière que le point à l'infini soit un point ordinaire pour la nouvelle fonction. Dès lors, en conservant les mêmes notations pour cette nouvelle fonction, on voit assez aisément que la condition de convergence revient à celle-ci : la série $\sum |A_n|$ doit être convergente. Nous poserons alors

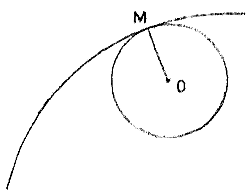
$$\varphi(z) = \sum \frac{A_n}{(z-a_n)^{m_n}};$$

la série $\varphi(z)$ est absolument convergente dans toute aire S ne renfermant à son intérieur aucun pôle et uniformément convergente dans toute aire S′ intérieure à S; si S′ est d'un seul tenant, elle définit dans S′ une fonction analytique bien déterminée. La question que nous avons à résoudre maintenant est la suivante : Deux aires telles que S′ étant séparées par des lignes ou des aires de points singuliers, peut-on regarder les deux fonctions analytiques définies par la série dans ces deux aires comme le prolongement l'une de l'autre? Nous allons d'abord traiter en détail la question en faisant une hypothèse particulière sur la distribution des points singuliers; nous nous occuperons un peu ensuite du cas général.

Nous désignerons d'une manière générale par a les pôles et par a' les points singuliers ou points limites de pôles; l'ensemble des points a' est ce que l'on appelle l'*ensemble dérivé de l'ensemble des points* a. Nous supposerons d'abord que les points a' forment au plus des lignes L, et que les points a non situés sur ces lignes L sont isolés ou ont des points limites isolés. De plus, nous supposons que, sauf en des points isolés, les lignes L admettent un rayon de courbure ou que tout au moins il est possible, M étant un point quelconque d'une de ces lignes, de construire deux cercles tangents extérieurement en M et tels que la portion de la ligne L voisine du point M soit extérieure à ces deux cercles.

Considérons maintenant un point M situé sur une ligne L et qui ne soit, ni un point singulier de cette ligne, ni un pôle de $\varphi(z)$; d'après

Fig. 1.



nos hypothèses, il est possible de tracer de chaque côté de L un cercle passant par M et ne renfermant à son intérieur, ni sur sa circonférence, aucun pôle de $\varphi(z)$; supposons que le point z tende vers M en suivant le rayon OM de ce cercle; désignons par α l'affixe de M et par ρ le module de $z-\alpha$. Je dis que, m étant de l'ordre déjà défini de la fonction $\varphi(z)$, $\rho^m \varphi(z)$ tend vers zéro lorsque z tend vers M. Nous allons constater, en effet, que le module de $\rho^m \varphi(z)$ peut être rendu inférieur à un nombre positif arbitraire 2ε. Écrivons $\varphi(z)$ sous la forme

$$\varphi(z) = \sum_1^\infty \frac{A_n}{(x-a_n)^{m_n}} \qquad (m_n \leqq m).$$

Par hypothèse la série

$$\sum |A_n|$$

étant convergente, nous pouvons déterminer un entier r, tel que l'on ait

$$\sum_{n=r+1}^{n=\infty} |A_n| < \varepsilon.$$

r étant ainsi choisi, écrivons

$$\varphi(z) = \varphi_r(z) + \psi_r(z),$$

en posant

$$\varphi_r(z) = \sum_1^r \frac{A_n}{(x-a_n)^{m_n}},$$

$$\psi_r(z) = \sum_{r+1}^\infty \frac{A_n}{(x-a_n)^{m_n}}.$$

Il est clair que, z étant sur le rayon OM, $\varphi_r(z)$ a un module maximum H; d'ailleurs, on a

$$|\psi_r(z)| < \sum_{r+1}^\infty \frac{|A_n|}{|x-a_n|^{m_n}} < \frac{\sum\limits_{r+1}^\infty |A_n|}{\rho^m} < \frac{\varepsilon}{\rho^m}$$

(en supposant $\rho < 1$), puisque l'on a visiblement

$$|x - a_n| > \rho \qquad \text{et} \qquad m_n \leqq m.$$

On a donc

$$\rho^m |\varphi(z)| < \text{H}\rho^m + \varepsilon,$$

et il suffira de prendre $\rho^m < \frac{\varepsilon}{H}$ pour avoir enfin

$$\rho^m |\varphi(z)| < 2\varepsilon.$$

La proposition énoncée est donc démontrée.

Supposons maintenant que M soit un pôle d'ordre m de $\varphi(z)$, c'est-à-dire qu'il y ait dans $\varphi(z)$ des termes de la forme

$$R(z) = \frac{B_m}{(z-\alpha)^m} + \frac{B_{m-1}}{(z-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \frac{B_1}{z-\alpha},$$

B_m étant certainement différent de zéro; on a

$$\varphi(z) = \theta(z) + R(z)$$

et, d'après ce que nous venons de voir,

$$\lim (z-\alpha)^m \theta(z) = 0$$

lorsque z se rapproche du point α en suivant le chemin OM; dans les mêmes conditions, on a visiblement

$$\lim (z-\alpha)^m R(z) = B_m$$

et, par suite,

$$\lim (z-\alpha)^m \varphi(z) = B_m.$$

Le procédé de raisonnement que nous venons d'employer est dû à M. E. Goursat (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1887).

Ces propositions vont nous permettre de définir, dans certains cas, le prolongement analytique d'une fonction au delà d'une ligne singulière essentielle fermée. Il est clair en effet qu'une fonction telle que $\varphi(z)$ ne peut pas être nulle dans une aire quelconque sans être identiquement nulle; car il résulte des propriétés des fonctions analytiques qu'elle est alors nulle dans toute aire que l'on peut atteindre sans traverser une ligne L, en particulier dans le cercle O que nous avons considéré, et l'égalité

$$\lim (z-\alpha)^m \varphi(z) = B_m$$

montre alors que tous les coefficients sont nuls. Or il est clair que tout polynome par rapport aux fonctions telles que $\varphi(z)$ et leurs dérivées est une fonction de même nature; s'il est nul dans une région du plan, il sera identiquement nul; c'est-à-dire que : *si une relation algébrique entre des fonctions $\varphi(z)$ et leurs dérivées est vraie dans une portion quelconque du plan, c'est une identité, et elle est par suite vraie dans tout le plan.*

Ce qui précède suffirait pour rendre légitime la convention suivante : nous dirons que la série $\varphi(z)$ représente la *même fonction* en tous les points où elle est convergente; nous introduisons ainsi une certaine classe de fonctions, qui ont des propriétés parfaitement déterminées et ne renfermant point de contradiction. Mais cette définition pourrait, tout en n'étant pas contradictoire avec elle-même, l'être avec la notion ordinaire de prolongement analytique, ce qui serait un grave inconvénient; il est aisé de voir qu'il n'en est rien; l'égalité fondamentale déjà deux fois écrite montre que $\varphi(z)$ admet effectivement les lignes L comme lignes singulières essentielles et par suite, si l'une de ces lignes est fermée, ne peut pas être analytiquement prolongée au delà. M. E. Goursat avait déjà obtenu ce résultat dans la Note citée plus haut, mais sans chercher à en tirer les conséquences qui, à notre point de vue, en constituent véritablement l'importance.

De plus, l'égalité que nous avons obtenue va nous donner le moyen théorique de reconnaître si une fonction donnée par un développement de Taylor appartient à la classe des fonctions $\varphi(z)$ et, dans le cas de l'affirmative, de calculer les a et les A.

Supposons qu'une fonction donnée par un développement de Taylor admette une ligne singulière essentielle L (fermée ou non); une première condition est nécessaire pour qu'elle soit une fonction φ; sur tout arc de L, il doit y avoir une infinité de points a tels que la fonction augmente indéfiniment lorsque la variable tend vers un de ces points en suivant la normale. Il doit ensuite exister un nombre entier positif m, tel que, dans les mêmes conditions, le produit de la fonction par $(z-\alpha)^m$, α étant l'affixe de a, tende en général vers zéro, sauf en des points isolés pour lesquels il peut se comporter d'une manière quelconque et en un certain nombre de points $a_1, a_2, \ldots$, formant une suite dénombrable pour chacun desquels il a une limite déterminée, limites que nous désignerons respectivement par $A_1, A_2, \ldots$.

La série $|A_1| + |A_2| + \ldots$ doit être convergente, dans le cas où les A sont en nombre infini; en retranchant de la fonction donnée la fonction

$$\sum \frac{A_i}{(z - a_i)^m},$$

on doit obtenir une fonction ayant les mêmes propriétés, le nombre m étant remplacé par $m - 1$. En continuant ainsi, si l'on arrive, après des soustractions successives à une fonction n'admettant plus L comme ligne singulière, on aura défini le prolongement de la fonction au delà de cette ligne; nous allons voir d'ailleurs que cela peut présenter un intérêt, même si la ligne L n'est pas fermée.

Il est, en effet, indispensable de dire quelques mots d'une objection que M. H. Poincaré a faite par avance à toute tentative de prolongement d'une fonction au delà d'une ligne singulière essentielle fermée. M. H. Poincaré considère (*loc. cit.*) une fonction $\varphi(z)$ admettant une ligne singulière essentielle L et donnée à l'intérieur de cette ligne, et une autre fonction $\psi(z)$ assujettie à la seule condition d'être donnée à l'extérieur de L et d'admettre aussi L comme ligne singulière essentielle. Cela posé, il démontre qu'il est possible de trouver deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ admettant respectivement pour lignes singulières essentielles deux arcs différents de L (formant à eux deux le contour L tout entier), pouvant, par suite, être prolongées analytiquement dans tout le plan, et telles que l'on ait

$$f + g = \varphi \quad \text{à l'intérieur de L},$$
$$f + g = \psi \quad \text{à l'extérieur de L}.$$

M. H. Poincaré conclut de là que la notion de prolongement analytique d'une fonction en dehors d'un espace limité par une ligne singulière essentielle est nécessairement dénuée de sens.

Les résultats que nous avons obtenus sur les fonctions $\varphi(z)$ semblant indiquer que, pour certaines fonctions tout au moins, il existait une sorte de prolongement ayant des propriétés fort simples et bien déterminées, j'ai recherché la cause du fait singulier signalé par M. Poincaré.

Désignant par $g(z)$ une fonction uniforme et n'admettant que des singularités isolées dans tout le plan, considérons la fonction $g(z)\log z$. C'est une fonction multiforme, dont les diverses déterminations en un point z diffèrent de la quantité $2ki\pi\, g(z)$, k étant un entier arbitraire. Riemann a d'ailleurs indiqué comment on pourrait artificiellement rendre une telle fonction uniforme; il suffit de tracer une ligne allant du point zéro au point infini, par exemple la partie négative Ox' (*fig.* 2) de l'axe des quantités réelles, et assujettir la variable à ne pas

Fig. 2.

traverser cette coupure. Mais l'uniformité ainsi obtenue n'est qu'apparente : la fonction peut être prolongée analytiquement au delà de cette coupure, et l'on constate alors qu'elle n'est pas uniforme.

Soit maintenant $\varphi(z)$ une fonction admettant effectivement la demi-droite Ox' comme ligne singulière essentielle; ce sera, par exemple, la fonction

$$\varphi(z) = \sum \frac{e^{-p-q}}{pz+q} \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots, \infty).$$

Considérons la fonction

$$\psi(z) = \varphi(z) + g(z)\log z.$$

Devrons-nous la regarder comme uniforme? Évidemment oui, si nous conservons la définition usuelle des fonctions uniformes; il est bien clair, en effet, que si cette fonction nous est donnée par son développement en série de Taylor, en un point du plan, nous ne pourrons jamais, par prolongements analytiques successifs, trouver en aucun point deux valeurs différentes de la fonction. La présence de $\varphi(z)$ nous empêche, en effet, de traverser Ox'; la coupure artificielle est devenue naturelle.

Nous voyons ainsi comment *le simple fait analytique de la superposition de deux coupures, l'une artificielle, l'autre naturelle, peut rendre uniforme la somme d'une fonction uniforme et d'une fonction non uniforme.*

Cette simple remarque suffira pour nous montrer combien est naturel le fait, en apparence si bizarre, signalé par M. H. Poincaré. Considérons, en effet, une fonction admettant pour ligne singulière essentielle la partie positive Ox de l'axe des quantités réelles; par exemple, $\varphi(-z) = \varphi_1(z)$, et formons la fonction

$$\psi_1(z) = \varphi_1(z) - g(z)\log z,$$

en prenant dans la moitié supérieure du plan la même détermination de $\log z$ que pour la fonction $\psi(z)$ déjà étudiée. Il est clair que l'on a, dans la partie supérieure du plan,

$$\psi(z) + \psi_1(z) = \varphi(z) + \varphi_1(z),$$

et, dans la partie inférieure,

$$\psi(z) + \psi_1(z) = \varphi(z) + \varphi_1(z) - 2i\pi g(z),$$

puisque les déterminations du logarithme y diffèrent de $2i\pi$. C'est là un fait tout pareil à celui que signale M. Poincaré; doit-il nous empêcher de dire que l'expression $\varphi(z) + \varphi_1(z)$ (qui satisfait aux conditions énoncées plus haut) représente la même fonction dans les deux moitiés du plan? Évidemment non, et il est impossible de soutenir que c'est aussi bien $\varphi + \varphi_1 - 2i\pi g$ qui est le prolongement analytique dans la partie inférieure du plan de la fonction égale à $\varphi + \varphi_1$ dans la partie supérieure. On ne peut arriver à cette idée qu'en introduisant des fonctions uniformes en apparence seulement, mais en réalité multiformes, telles que

$$\psi(z) = \varphi(z) + g(z)\log z.$$

Ainsi, lorsqu'une fonction admet une ligne singulière essentielle, la définition des fonctions uniformes, obtenue à l'aide du développement de Taylor, est insuffisante et incomplète; ce qui précède permet de la compléter dans certains cas; si, par exemple, on applique à la fonction $\psi(z)$ le procédé indiqué dans les pages précédentes, on sera amené à considérer la différence $\psi(z) - \varphi(z)$, différence qui n'admet plus de ligne singulière essentielle et qui n'est pas uniforme; on en conclura que l'uniformité de $\psi(z)$ n'était qu'apparente.

Dans les cas où le procédé que nous avons indiqué ne réussit pas, il est actuellement impossible de dire si une fonction à ligne singulière essentielle est véritablement uniforme; cette expression n'a même pas de sens précis; pour lui en donner un dans des cas plus étendus, il serait nécessaire d'étudier d'autres expressions analytiques au point de vue auquel nous venons d'étudier les séries $\varphi(z)$.

Les observations que nous avons faites sur la définition de l'uniformité vont nous être utiles dans l'étude du cas général, c'est-à-dire du cas où l'on ne fait aucune hypothèse sur la distribution des a. Supposons en effet, par exemple, que les a admettent comme points limites tous les points d'un arc AMB, mais en étant tous situés d'un même côté de cet arc, et non sur l'arc lui-même. Rien dans ce qui précède ne nous autorise à dire que la fonction définie par la série du côté de AB où ne se trouvent pas les points a ne peut pas être prolongée au delà de AB; supposons qu'elle puisse l'être et que l'on atteigne ainsi un point N dans le voisinage duquel la série représente une fonction holomorphe : il est clair qu'*il n'y a aucune raison pour que cette fonction coïncide dans le voisinage de* N *avec la fonction obtenue par le prolongement*. L'admettre reviendrait à admettre que la fonction définie comme somme d'une série formée de fonctions uniformes est uniforme au sens usuel du mot, c'est-à-dire au sens qui résulte de la théorie du prolongement analytique : or c'est là un point qui n'est nullement évident et qui paraît même malaisé à démontrer.

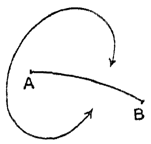
Aussi les conclusions qu'a cru pouvoir énoncer M. Pringsheim dans un Mémoire récent [1] ne paraissent-elles pas démontrées par lui. M. A. Pringsheim considère le cas où les points a admettent comme points limites les points d'une ligne AB, à l'exclusion de tout autre point dans le voisinage de AB; d'ailleurs ils sont tous situés d'un même côté de AB, et non sur la ligne. Dans ces conditions il est clair que la série représente, à une distance aussi petite que l'on veut de AB, du côté où sont les points a, une fonction analytique parfaitement déterminée, admettant tous ces points comme points singuliers, puisqu'ils sont isolés. M. Pringsheim admet que, si la fonction analytique

---

[1] *Zur Theorie der Taylor'schen Reihe* (*Mathematische Annalen*, t. XLII, p. 168).

définie par la série de l'autre côté de AB peut être prolongée au delà de cette ligne, elle y coïncide avec la fonction dont il vient d'être question; dès lors, il est évident que ce prolongement est impossible; mais le point admis est précisément celui dont la démonstration paraît devoir être le plus difficile. On pourrait facilement former des exemples de fonctions analytiques qui ne peuvent être prolongées au delà d'un arc, lorsqu'on s'approche de cet arc par un certain côté, mais qui,

Fig. 3.



si on contourne l'arc de manière à chercher à le traverser dans l'autre sens, se prolongent sans difficulté; il est clair que le prolongement ainsi obtenu ne coïncide pas avec la fonction qui ne pouvait être prolongée; celle-ci n'est pas uniforme. Il suffirait de prendre la fonction

$$\sum A_n \frac{\log z - \log a_n}{z - a_n},$$

la série $\sum |A_n|$ étant convergente et les a_n admettant comme points limites les points d'un arc dont une extrémité coïncide avec le point $z = 0$; il est clair que, si l'on choisit convenablement les déterminations des logarithmes, la fonction analytique que l'on définit ainsi peut ou ne peut pas être prolongée au delà de cet arc suivant le côté où l'on se présente, ou le chemin qu'on a suivi.

Ainsi dans le cas où les a ont pour points limites tous les points d'un arc sans être sur cet arc, ou tous les points d'une aire sans se trouver sur son contour, il serait nécessaire de démontrer directement que la série de Taylor obtenue en un point a un rayon de convergence égal à la limite inférieure des rayons de convergence des développements des diverses fractions, en nombre infini, qui figurent dans la série donnée. Or ce théorème n'est pas exact dans le cas où cette limite inférieure est égale à zéro, comme nous en verrons des exemples plus loin; de plus, il n'est pas vrai que, si l'on considère des séries de

Taylor quelconques, le rayon de convergence de leur somme soit égal à la limite inférieure de leurs rayons de convergence; enfin le procédé de M. Goursat ne s'applique évidemment pas ici.

Aussi semble-t-il bien difficile de résoudre la question en général, c'est-à-dire sans rien préciser sur la distribution des points a. Nous allons, au contraire, pouvoir démontrer, sans aucune hypothèse à ce sujet, un théorème intéressant au point de vue de la notion de l'uniformité, notion dont nous avons vu l'importance; nous verrons ainsi que, avec des hypothèses peu rectrictives sur les A, si les fonctions que nous considérons ne sont pas uniformes, ce n'est pas en tous les cas de la même manière que la fonction $\psi(z)$ citée plus haut.

Considérons la série

$$\sum \frac{A_n}{(z - a_n)^{m_n}},$$

et supposons qu'il existe une série convergente à termes positifs

$$\sum u_n,$$

telle que la série

$$\sum \frac{|A_n|}{u_n^{m_n}}$$

soit convergente. Il suffit pour cela que la série à termes positifs

$$\sum \sqrt[m_n+1]{|A_n|}$$

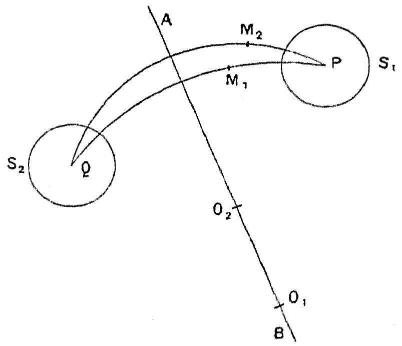
soit convergente, et il est aisé de voir que cette condition suffisante est en même temps nécessaire; en particulier, si l'ordre de la série est égal à l'unité, la série $\sum \sqrt{|A_n|}$ doit être convergente.

Cela posé, nous allons montrer qu'étant donnés deux points P et Q ne coïncidant ni avec un point a, ni avec un point a', on peut toujours les réunir par une ligne continue PMQ, telle que sur cette ligne la série considérée soit absolument et *uniformément* convergente.

Remarquons d'abord que l'hypothèse faite sur les points P et Q revient à celle-ci : il est possible de tracer deux cercles S_1 et S_2 ayant respectivement pour centres P et Q et ne renfermant à leur intérieur aucun point a.

Considérons maintenant les cercles C passant par P et Q et dont les centres O sont situés sur un segment déterminé AB, d'ailleurs quel-

Fig. 4.



conque, de la perpendiculaire au milieu de PQ. Il est clair que C_1 et C_2 étant deux de ces cercles, ayant pour centres les points O_1 et O_2, si M_1 et M_2 sont deux points pris respectivement sur C_1 et C_2, et dont l'un au moins est extérieur à S_1 et à S_2, on a

$$\overline{M_1 M_2} > k\,\overline{O_1 O_2},$$

k étant un nombre fixe dépendant uniquement de la distance PQ, du segment AB et des rayons des deux cercles S_1 et S_2.

Désignons par l la longueur de AB; la série Σu_n étant convergente, nous pouvons choisir n de manière que l'on ait

$$2\sum_{n+1}^{\infty} u_i < l.$$

Soient maintenant M_i l'affixe du point a_i $(i > n)$ et O_i le centre du cercle C_i passant par les points P, Q, M_i. Prenons sur la droite AB, de part et d'autre du point O_i, deux longueurs O_iA_i, O_iB_i égales à u_i, de telle sorte que le segment A_iB_i soit égal à $2u_i$; la somme de tous les segments (en nombre infini), tels que A_iB_i, tous situés sur le segment AB ou sur son prolongement, est inférieure à la longueur l de AB; donc il existe sur AB une infinité non dénombrable de points n'appartenant à aucun de ces segments [1]; soient ω un de ces points qui ne coïncide avec aucun des points O_i d'indice inférieur à n, et Γ le cercle de centre ω passant par les points P et Q; je dis que ce cercle Γ a les propriétés requises, c'est-à-dire que la série $\sum \frac{A_n}{(z-a_n)^{m_n}}$ est uniformément convergente sur ce cercle. En effet, ce cercle ne passant par aucun des points a_i, nous pouvons faire abstraction des n premiers termes de la série; soit $\frac{A_i}{(z-a_i)^{m_i}}$ un terme de rang supérieur à n; le point affixe de z étant un point du cercle Γ et le point M_i, affixe de a_i, étant un point du cercle C_i extérieur aux deux cercles S_1 et S_2, on a, d'après une remarque déjà faite,

$$|z-a_i| > k\,O_i\omega,$$

et puisque le point ω est, par hypothèse, extérieur au segment A_iB_i, de longueur $2u_i$, qu'on a pris autour de O_i, $O_i\omega$ est supérieur à u_i et, par suite,

$$|z-a_i| > ku_i.$$

Donc

$$\left|\frac{A_i}{(z-a_i)^{m_i}}\right| < \frac{1}{k^{m_i}}\frac{|A_i|}{u_i^{m_i}}.$$

Or, par hypothèse, la série

$$\sum \frac{|A_i|}{u_i^{m_i}}$$

est convergente, donc *la série*

$$\sum \left|\frac{A_i}{(z-a_i)^{m_i}}\right|$$

est uniformément convergente sur le cercle Γ; la série

$$\sum \frac{A_i}{(z-a_i)^{m_i}}$$

représente donc sur ce cercle une fonction continue de z.

Avant de développer les conséquences de cette proposition, remar-

---

[1] Pour la démonstration rigoureuse de ce point, *voir* la note.

quons que, pour l'établir, nous n'avons utilisé des points P et Q et des cercles C que la propriété exprimée par l'inégalité

$$\overline{M_1 M_2} > k \overline{O_1 O_2}.$$

Il en résulte que si, plus généralement, on a une famille quelconque de courbes, dépendant d'un paramètre λ, et telles que M_1 et M_2 désignant deux points situés respectivement sur les courbes qui correspondent aux valeurs λ_1 et λ_2 du paramètre, l'un au moins de ces deux points étant un point a, on ait l'inégalité

$$\overline{M_1 M_2} > k|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

dans laquelle k désigne un nombre fixe, on peut affirmer qu'il existe une infinité non dénombrable de courbes de la famille sur chacune desquelles la série est uniformément convergente (¹).

En particulier, comme famille de courbes C ayant la propriété indiquée, on peut citer les courbes parallèles à une courbe donnée, au moins dans un certain voisinage d'un arc ne présentant pas de singularités. On peut citer aussi les familles de courbes algébriques dont les points d'intersection sont fixes, à condition que ces points ne soient ni des points a, ni des points a'; c'est dans ce dernier cas que rentre la famille des cercles C.

Ce qui fait pour nous le principal intérêt de cette proposition, c'est qu'elle nous montre à quel titre on peut taxer d'uniformes les fonctions auxquelles elle s'applique. En effet, il est clair que si à une telle fonction φ on ajoute une fonction de la forme $g(z)\log\frac{z-c}{z-d}$, la ligne cd étant une ligne singulière essentielle de φ, et non de $g(z)$, on obtient une fonction ne présentant plus les mêmes caractères. On peut, en effet, prendre pour famille de courbes des courbes orthogonales à cd et on en conclut immédiatement que cette ligne devrait présenter une

(¹) Lorsqu'on donne le nombre k et les limites entre lesquelles peut varier λ, ces dernières pouvant être choisies arbitrairement, on détermine une infinité de courbes sur *l'ensemble* desquelles la convergence est uniforme; mais si l'on restreint l'intervalle dans lequel varie λ, on a toujours une infinité de courbes dans tout intervalle, si petit qu'il soit, mais la convergence n'est plus uniforme si l'on considère simultanément les courbes correspondant à des intervalles de plus en plus petits.

infinité non dénombrable de points pour lesquels $g(z)$ est discontinu, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, nous pouvons affirmer que, si *nous convenons* d'appeler *fonctions uniformes* les fonctions pour lesquelles a lieu la propriété définie par l'existence des courbes C, la somme d'une fonction uniforme et d'une fonction non uniforme est une fonction non uniforme.

Malheureusement, nous ne sommes pas assuré que cette définition concorde avec la définition de l'uniformité obtenue à l'aide du développement de Taylor. Les considérations suivantes vont néanmoins rendre ce fait très vraisemblable, dans le cas du moins où les A vérifient certaines inégalités supplémentaires.

Une conséquence importante du fait que la série

$$\sum \frac{A_n}{(z - a_n)^{m_n}}$$

est absolument et uniformément convergente sur une courbe C est, en effet, celle-ci : On peut le long de la courbe C intégrer la série terme à terme et son intégrale est absolument et uniformément convergente et représente l'intégrale de la fonction. On en conclut le théorème suivant, qu'on peut considérer comme presque évident, mais qui ne semble pas aisé à démontrer directement : si les a sont condensés à l'intérieur d'une aire, il est impossible que, dans un espace E aussi petit que l'on veut de cette aire, les valeurs que prend la fonction sur les diverses courbes C que l'on peut tracer dans cet espace E coïncident avec les valeurs d'une fonction holomorphe sur ces mêmes courbes C. En effet, l'intégrale de la fonction le long d'un contour fermé quelconque compris à l'intérieur de cette aire serait nulle; on en conclurait que la somme des résidus de la fonction ([1]) relatifs aux pôles compris à l'intérieur de ce contour serait nulle. Or, on peut tracer un contour tel que C, aussi voisin que l'on veut d'un contour quelconque donné à l'avance; de ce fait et de celui que la série des modules des A est convergente, on conclut immédiatement que tous les résidus sont nuls. Des intégrations répétées montreraient de même

---

([1]) C'est-à-dire des numérateurs des fractions dont le dénominateur est élevé à la première puissance.

que les autres A (compris à l'intérieur de l'espace E) sont nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Une autre application est relative à la dérivation de la série; on sait qu'il est nécessaire pour qu'une série puisse être dérivée terme à terme que la série des dérivées des termes soit absolument et uniformément convergente; il est ici aisé d'écrire la condition suffisante pour qu'il en soit ainsi; il suffit d'augmenter d'une unité l'ordre de chaque terme (le facteur qui s'introduit par la dérivation ne joue aucun rôle, comme il est aisé de le voir).

Dans le cas où, en conservant les notations employées plus haut, la série

$$(1) \qquad \sum \left| \sqrt[m_n+k+1]{A_n} \right|,$$

est convergente, il existe des courbes C_k sur lesquelles la fonction est continue ainsi que ses k premières dérivées. Au sujet de l'infinité des courbes C_k, nous ne pourrions que répéter ce qui a été dit au sujet des courbes C.

Dans le cas où la série (1) est convergente quel que soit le nombre k, il existe des courbes C sur lesquelles la série est absolument et uniformément convergente ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à un ordre quelconque déterminé à l'avance; mais, comme ces courbes C varient lorsque l'ordre de dérivation augmente, on ne peut pas en conclure qu'il existe des courbes C sur lesquelles la série est absolument et uniformément convergente, ainsi que *toutes* ses dérivées. Nous démontrerons l'existence de ces courbes C en supposant convergente la série

$$(2) \qquad \sum \frac{1}{\log^h |A_n|},$$

le logarithme ayant son sens arithmétique et h étant un nombre positif arbitraire [1].

En effet, il suffit de procéder comme nous l'avons fait plus haut, en prenant pour les u les termes de cette série; nous déterminerons ainsi

---

[1] Il est bien évident que l'on suppose que A_n tend vers zéro; la série pourrait être aussi convergente si A_n augmentait indéfiniment.

les courbes C en fonction seulement des termes de cette série et sur une de ces courbes les termes de la dérivée d'ordre k seront, à partir d'un certain rang, inférieurs en valeur absolue aux termes de la série

$$\sum A_n \log^{(m_n+k)h} |A_n|,$$

série évidemment absolument convergente en même temps que la série (2).

Cette proposition rend particulièrement intéressantes les fonctions pour lesquelles la série (2) est convergente; on voit, en effet, qu'en un certain sens elles se comportent, même dans les aires où sont condensés des points a, comme des fonctions uniformes n'ayant que des discontinuités polaires. On comprend qu'il soit bien difficile d'étudier ces fonctions en général, c'est-à-dire sans rien supposer sur la disposition des points a; lorsque ces points sont donnés suivant une loi déterminée, il est quelquefois possible de préciser encore davantage les propositions que nous avons démontrées.

Considérons, par exemple, la fonction [1]

$$\varphi(z) = \sum \frac{e^{-n}}{z - \dfrac{p+qi}{n}}.$$

On suppose que n varie de 1 à l'infini et que pour chaque valeur de n, les entiers p et q prennent respectivement toutes les valeurs inférieures à n. Si l'on suppose que p et q prennent respectivement les valeurs *zéro* et n, il est certain, d'après ce qui précède, que la fonction définie par cette série admet un carré (de côté égal à l'unité) comme espace lacunaire.

Il est facile de démontrer directement l'existence de certaines lignes analogues aux courbes C; considérons, par exemple, la ligne $x = \xi$, ξ étant un nombre irrationnel tel que les quotients incomplets de son développement en fraction continue soient tous inférieurs à un nombre fixe N. On démontre immédiatement que la série est absolument et

[1] C'est un cas particulier d'une fonction signalée par M. Poincaré (*loc. cit.*); nos considérations s'appliqueraient au cas général.

uniformément convergente ainsi que toutes ses dérivées sur la droite $x = \xi$. Ceci rentre dans les propositions précédentes; mais voici en quoi nous pouvons les généraliser; considérons un point ayant des coordonnées de la forme

$$x = \alpha + \beta\xi, \qquad y = \alpha_1 + \beta_1\xi,$$

$\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ étant rationnels et ξ le nombre irrationnel déjà défini. Il est facile de montrer que la série et toutes ses dérivées sont absolument et uniformément convergentes sur toute droite *de coefficient angulaire rationnel* passant par le point x, y. On voit que l'on peut ainsi mener par une infinité de points, compris à l'intérieur de l'espace dit *lacunaire*, une infinité de lignes différant entre elles aussi peu que l'on veut et telles que la fonction ait *la même dérivée* pour un déplacement le long d'une quelconque de ces lignes. Ce caractère présente une très grande analogie avec la définition donnée par Cauchy des fonctions d'une variable complexe.

Dans le cas général, tout ce que nous pourrions affirmer, c'est qu'il y a des points par lesquels passent *deux* courbes ayant cette propriété; car deux courbes C, appartenant à deux réseaux différents, se coupent nécessairement, si ces réseaux sont convenablement choisis. On peut, par exemple, supposer ces deux réseaux formés de parallèles aux axes; de sorte que nous voyons qu'il y a une infinité de points pour lesquels la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction vérifient l'équation de Laplace. Pour la fonction de M. Poincaré, nous pourrions ajouter que cette équation est vérifiée pour une infinité de directions rectangulaires.

Nous allons terminer cette première Partie en montrant que les fonctions holomorphes définies dans diverses régions séparées du plan, par des séries analogues à la précédente, ne sont pas, au moins dans certains cas, sans avoir quelque relation entre elles.

Pour cela, nous allons d'abord supposer les points a et a' situés tous à distance finie et ne coïncidant pas avec l'origine; de plus, nous supposerons la fonction homogène, c'est-à-dire tous les termes de la série de même degré par rapport à l'ensemble des lettres z et a. Nous examinerons d'ailleurs en premier lieu le cas où ce degré est égal à *moins* *un*. Nous considérons donc une série de la forme

$$\sum \frac{A_n}{z - a_n},$$

les points a étant tous compris à l'intérieur d'une couronne circulaire ayant pour centre le point $z = 0$. Quant aux A, nous supposons simplement pour l'instant que la série $\sum |A_p|$ est convergente; nous verrons quelles hypothèses accessoires nous devrons faire.

Nous nous proposons, étant admis que le développement en série de Taylor de la fonction proposée à l'intérieur du petit cercle de la couronne est identiquement nul, de chercher ce qu'on en peut conclure pour le développement à l'extérieur du grand cercle. Posons

$$\sum_{n+1}^{\infty} |A_p| = \varepsilon_n;$$

ε_n désigne l'erreur que l'on commet en s'arrêtant au $n^{\text{ième}}$ terme dans le calcul de la somme des modules des A.

Cela étant, nous avons, en désignant par x_n l'inverse de a_n,

$$\frac{1}{a_n - z} = \frac{x_n}{1 - x_n z} = \sum_{p=1}^{p=\infty} x_n^p z^{p-1}$$

et, par suite,

$$\sum \frac{A_n}{a_n - z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{p=1}^{p=\infty} A_n x_n^p z^{p-1}.$$

Nous avons donc par hypothèse, quel que soit p,

$$\sum A_n x_n^p = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Désignons par $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$ les rayons des deux cercles qui limitent la couronne; on a

$$\beta < |x_n| < \alpha$$

et, par suite,

$$\left| \sum_{h=n+1}^{h=\infty} A_h x_h^p \right| < \varepsilon_n \alpha^p.$$

Nous avons donc, θ_p ayant un module inférieur à l'unité,

$$\begin{aligned}
A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n &= \theta_1 \alpha \varepsilon_n,\\
A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_n^2 &= \theta_2 \alpha^2 \varepsilon_n,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots,\\
A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + \ldots + A_n x_n^n &= \theta_n \alpha^n \varepsilon_n.
\end{aligned}$$

Posons

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = x^n + u_1 x^{n-1} + u_2 x^{n-2} + \ldots + u_n.$$

Nous conclurons facilement de ce qui précède qu'en désignant par σ_n la somme $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, on a

$$\varepsilon_n[\theta_n \alpha^n + u_1 \theta_{n-1} \alpha^{n-1} + u_2 \theta_{n-2} \alpha^{n-2} + u_3 \theta_{n-3} \alpha^{n-3} + \ldots + u_{n-1} \theta_1 \alpha] + u_n \sigma_n = 0.$$

Or on a visiblement

$$|u_n| > \beta^n,$$

$$|\theta_n \alpha^n + u_1 \theta_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + u_{n-1} \theta_1 \alpha| < \alpha^n + |u_1| \alpha^{n-1} + \ldots + |u_{n-1}| \alpha + |u_n|.$$

Or le second membre de cette inégalité est évidemment inférieur à

$$(\alpha + |x_1|)(\alpha + |x_2|)\ldots(\alpha + |x_n|) < (2\alpha)^n.$$

Nous avons donc finalement

$$|\sigma_n| < \varepsilon_n \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^n.$$

Donc, si nous supposons que l'on ait

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^n = 0,$$

la série $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ aura pour somme zéro. Dans ces conditions nous démontrerons absolument de même que la série

$$\frac{A_1}{x_1} + \frac{A_2}{x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x_n} + \ldots$$

a pour somme zéro; il suffit, en effet, de poser $\frac{A_p}{x_p} = A'_p$ et de raisonner sur les A' comme nous venons de le faire sur les A; les ε seront multipliés par un facteur compris entre α et β, et la condition (1) continuera à être vérifiée. Nous démontrerons donc que, quel que soit h, on a

$$\frac{A_1}{x_1^h}+\frac{A_2}{x_2^h}+\ldots+\frac{A_n}{x_n^h}+\ldots=0.$$

Il en résulte que le développement de la série

$$\sum\frac{A_n}{a_n-z}$$

suivant les puissances décroissantes de z, développement valable pour les points extérieurs à la couronne considérée, est identiquement nul.

Il est clair que la condition (1) est vérifiée si le rayon de convergence de la série

$$\sum A_n Z_n$$

est supérieur à $\frac{2\alpha}{\beta}$. Nous allons, pour plus de netteté, supposer cette série convergente dans tout le plan de la variable Z. Il est alors aisé de voir que la fonction

$$\varphi(z)=\sum\frac{A_n}{z-a_n}$$

ne peut pas être nulle dans une portion du plan où elle est holomorphe sans être nulle dans tout le plan. En effet, soient C_1 et C_2 deux contours à l'intérieur desquels elle est holomorphe, et C' un contour assez grand pour ne renfermer à son extérieur aucun point a. Nous tracerons deux cercles concentriques, l'un extérieur à C_1, l'autre extérieur à C' et deux autres cercles concentriques, l'un intérieur à C_2, l'autre extérieur à C'. D'après ce que nous avons vu, la fonction supposée nulle à l'intérieur de C_1, par exemple, le sera à l'extérieur de C' et, par suite, à l'intérieur de C_2; ce qu'il fallait établir.

Ces résultats s'étendent sans difficulté au cas où les termes de la série sont d'un même degré différent du premier; il suffit, en effet, d'une intégration ou de plusieurs intégrations successives pour rentrer dans le cas que nous venons de traiter; on voit aisément que les constantes introduites par l'intégration sont nulles, car on pourrait évidemment conclure de ce qui précède que la série $\varphi(z)$ ne peut pas être égale à un polynome en z.

On voit combien ces résultats sont moins généraux que ceux que nous avions pu obtenir en faisant des restrictions sur la distribution des points a.

DEUXIÈME PARTIE.

On a signalé déjà des fonctions d'une variable réelle continues, ainsi que toutes leurs dérivées, et n'étant cependant développables en aucun point par la série de Taylor. De nombreux exemples en ont été donnés par M. Pringsheim dans le Mémoire déjà cité (nous avons vu quelles restrictions on devait faire sur certains d'entre eux); mais il semble que le théorème qui fournisse le plus aisément de telles fonctions est celui-ci, dû à M. Hadamard [1] : *Si dans une série*

$$\Sigma b_\mu x^{c_\mu}$$

le rapport $\frac{c_{\mu+1} - c_\mu}{c_\mu}$ *est constamment supérieur à un nombre fixe* s *plus grand que un, la série admet son cercle de convergence comme coupure.* Il est clair, en effet, que, les c étant donnés, on peut toujours choisir les b de manière que, la série et toutes ses dérivées convergent sur le cercle de convergence; on a ainsi défini sur ce cercle une fonction de variable réelle ayant la propriété requise. Il serait, d'ailleurs, facile de choisir convenablement les b et les c de manière à pouvoir calculer directement l'ordre de grandeur des dérivées et démontrer ainsi, d'une façon tout à fait élémentaire, la divergence de la série de Taylor. Posons $u_n = 2^{2^n}$, et soit

$$\varphi(z) = \sum \frac{1}{u_n^{u_{n-2}}} z^{u_n}.$$

Il est facile de voir que dans la dérivée d'ordre $u_{n-1} + 1$ de $\varphi(z)$ le

(1) J. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* (*Journal de Mathématiques;* 1892).

premier terme qui subsistera sera extrêmement grand par rapport à tous les autres, et en calculant l'ordre de grandeur de son quotient par $(u_{n-1}+1)!$ on verra que la série de Taylor ne peut pas être convergente, le module de z étant égal à l'unité.

D'ailleurs, on sait comment, par un changement de variable classique, on déduit d'une fonction définie sur le cercle de rayon *un* une fonction périodique d'une variable réelle. D'autre part, il est clair que la recherche des fonctions *périodiques* d'une variable réelle qui admettent des dérivées de tout ordre sans être développables par la série de Taylor se ramène immédiatement à celle des fonctions de variable imaginaire admettant leur cercle de convergence comme coupure et convergentes sur ce cercle ainsi que toutes leurs dérivées.

La considération des fonctions de variables réelles définies sur les courbes C, dont il a été question dans la première Partie, m'a conduit à penser que toutes les fonctions de variable réelle admettant des dérivées de tout ordre dans un intervalle peuvent se mettre sous la forme de la somme d'une fonction périodique et d'une fonction holomorphe.

Considérons, en effet, une série

$$\varphi(z)=\sum\frac{A_n}{z-a_n}$$

que nous supposons absolument convergente ainsi que ses dérivées pour les valeurs réelles de z, les points de l'axe réel pouvant être des points limites de points a. Désignons par α ceux des a dont la partie réelle est comprise entre $-\frac{h\pi}{2}$ et $+\frac{h\pi}{2}$ et considérons la fonction

$$\psi(z)=\frac{1}{h}\sum\cot\frac{z-\alpha}{h};$$

c'est une fonction de z admettant, ainsi que toutes ses dérivées, la période $h\pi$ (h est un nombre réel quelconque). D'ailleurs, la fonction $\varphi(z)-\psi(z)$ est manifestement holomorphe pour toutes les valeurs de z dont la partie réelle est inférieure à $\frac{h\pi}{2}$ en valeur absolue; en particulier, elle peut être représentée par une série ayant pour rayon de convergence $\frac{h\pi}{2}$.

Le principal avantage qu'il y a à considérer des fonctions périodiques, c'est que c'est seulement pour elles que la représentation par la série de Fourier est pratique lorsqu'on a des dérivations à effectuer. Une fonction telle que $\psi(z)$ peut se mettre sous la forme d'une série de Fourier convergente ainsi que toutes ses dérivées, lesquelles représenteront les dérivées de la fonction. Notre fonction $\varphi(z)$ se trouve ainsi mise sous la forme de la somme d'une fonction holomorphe et d'une série de Fourier, les dérivées de tout ordre de la fonction s'obtenant en dérivant les séries terme à terme. C'est ce résultat que j'ai cherché à étendre, sans rien supposer sur la nature analytique de la fonction donnée $\varphi(z)$, laquelle admet des dérivées de tout ordre dans un intervalle donné. Si $-\pi$ et $+\pi$ sont les limites de cet intervalle, la condition nécessaire et suffisante pour que le développement en série de la dérivée soit la dérivée du développement de la fonction est que l'on ait

$$\varphi(\pi) = \varphi(-\pi).$$

Ce résultat est bien connu; mais, comme d'habitude, lorsqu'on considère des fonctions admettant des dérivées de tout ordre, on les suppose développables par la formule de Taylor, on est amené à l'énoncé suivant : les dérivées successives du développement représentent les dérivées de la fonction sous la condition nécessaire et suffisante que la fonction soit périodique. Nous devons remplacer cette condition par celle-ci : les dérivées de tous ordres de la fonction doivent prendre la même valeur pour $z = -\pi$ et $z = +\pi$.

Nous sommes donc ramené au problème suivant : Trouver une fonction $f(z)$ de la variable complexe z, holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon π et telle que l'on ait, quel que soit n,

$$f^{(n)}(\pi) - f^{(n)}(-\pi) = \varphi^{(n)}(\pi) - \varphi^{(n)}(-\pi).$$

En effet, la fonction $\varphi(z) - f(z) = \psi(z)$ admettra des dérivées de tout ordre dans l'intervalle $-\pi$, $+\pi$ et ces dérivées auront la même valeur pour $z = \pm\pi$. Il est bon de remarquer que les dérivées dont il s'agit pour $f(z)$ et, par suite, pour $\psi(z)$ sont définies seulement pour z réel et, *à droite*, pour $z = -\pi$, *à gauche* pour $z = +\pi$; cela suffit, d'ailleurs, pour que l'on puisse appliquer en toute rigueur la formule d'intégration par parties qui conduit au résultat rappelé

$$\varphi(\pi) = \varphi(-\pi).$$

Nous sommes ainsi ramené à chercher une fonction $f(z)$ développable en série de Taylor convergente pour $z = \pm\pi$ ainsi que ses dérivées, et telle que l'on ait

$$(1) \qquad f^{(n)}(\pi) - f^{(n)}(-\pi) = C_n,$$

les C_n étant des quantités réelles données. Si les C étaient imaginaires, on pourrait poser $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$, f_1 et f_2 étant réels.]

Pour simplifier nos équations, posons

$$f(\pi z) = g(z^2) + z g_1(z^2),$$

g et g_1 étant des séries entières en z^2. Il est clair que les équations (1) permettent de calculer de proche en proche les valeurs des dérivées des fonctions $g(y)$ et $g_1(y)$ pour $y = 1$, de sorte que nous pourrons les remplacer par les deux systèmes

$$g^{(n)}(1) = G_n, \qquad g_1^{(n)}(1) = G_n^{(1)}.$$

Il suffit d'indiquer comment on pourra résoudre l'un de ces systèmes.

La résolution du premier serait immédiate si la série

$$\sum \frac{G_n Z^n}{n!}$$

avait un rayon de convergence au moins égal à *deux;* il est clair, en effet, qu'en posant

$$g(y) = \sum \frac{G_n(y-1)^n}{n!},$$

on a

$$g^{(n)}(1) = G_n;$$

d'ailleurs, d'après l'hypothèse faite, le développement de $g(y)$ suivant les puissances croissantes de y que l'on déduit de la série précédente a un rayon de convergence au moins égal à *un*.

Cette remarque est pour nous fort importante; il est clair, en effet, que si l'on a deux fonctions $h(z)$ et $k(z)$ telles que l'on ait

$$h^{(n)}(1) = \mathrm{H}_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$
$$k^{(n)}(1) = \mathrm{K}_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

si l'on pose

$$\mathrm{G}_n = \mathrm{H}_n + \mathrm{K}_n,$$

on aura

$$g^{(n)}(1) = \mathrm{G}_n,$$

en prenant

$$g(z) = h(z) + k(z).$$

Il en résulte que, pour résoudre les équations

$$g^{(n)}(1) = \mathrm{G}_n,$$

il suffit de savoir les résoudre avec une certaine approximation. Supposons, en effet, que l'on ait trouvé une fonction $h(z)$ telle que l'on ait

$$|h^{(n)}(1) - \mathrm{G}_n| < \frac{n!}{c^n},$$

c étant une constante quelconque supérieure à *deux;* posons

$$h^{(n)}(1) - \mathrm{G}_n = \mathrm{K}_n.$$

La série $\sum \frac{\mathrm{K}_n \mathrm{Z}^n}{n!}$ aura un rayon de convergence supérieur à deux; nous saurons donc résoudre les équations

$$k^{(n)}(1) = \mathrm{K}_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dès lors la fonction $g(z) = h(z) + k(z)$ satisfera visiblement aux conditions données.

Il nous suffit donc de trouver une fonction $h(z)$ vérifiant, au moins à partir d'une certaine valeur de n, les inégalités

$$|h^{(n)}(1) - \mathrm{G}_n| < \frac{n!}{c^n}.$$

Nous allons même montrer que l'on peut déterminer $h(z)$ de manière à vérifier les inégalités

$$|h^{(n)}(1) - \mathrm{G}_n| < \mathrm{A},$$

A étant un nombre fixe; les inégalités précédentes seront alors vérifiées *a fortiori* au moins pour n suffisamment grand.

Posons

$$h(z) = \Sigma u_k z^k.$$

On a

$$h^{(n)}(1) = \Sigma k(k-1)\ldots(k-n+1)u_k.$$

Désignons par

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$$

une série divergente à termes positifs décroissants, telle que la série

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots$$

soit convergente; on peut supposer, par exemple, $x_n = \frac{1}{n}$.

Prenons maintenant la première de nos inégalités

$$|h(1) - G_0| < A.$$

La série $x_1 + x_2 + \ldots$ étant divergente, nous pouvons prendre un nombre suffisant p_0 de termes à partir du premier pour avoir une somme dont la différence avec la valeur absolue de G_0 soit moindre qu'une quantité assignable η. Nous avons

$$h(1) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.$$

Nous prendrons

$$\begin{gathered} |u_0| = x_0, \\ |u_1| = x_1, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ |u_{p_0}| = x_{p_0}, \end{gathered}$$

et nous choisirons le signe des u conformément à celui de G_0.

Passons à la seconde inégalité

$$|h'(1) - G_1| < A,$$

on a

$$h'(1) = u_1 + 2u_2 + \ldots + p_0 u_{p_0} + \ldots.$$

Nous poserons

$$G_1 - (u_1 + 2u_2 + \ldots + p_0 u_{p_0}) = G'_1,$$

et nous prendrons dans la série des x, $p_1 - p_0$ termes suivant celui dont le rang est p_0, en choisissant le nombre p_1 de manière que la somme de ces termes diffère de moins de η de la valeur absolue de G'_1. Nous poserons, m étant compris entre p_0 et p_1,

$$m|u_m| = x_m,$$

le signe des u étant ici déterminé par le signe de G'_1.

Nous continuerons de même en passant à l'inégalité suivante; on a

$$h''(1) = 2u_2 + 2.3u_3 + \ldots + (p_1 - 1)p_1 u_{p_1} + \ldots;$$

nous poserons

$$G'_2 = G_2 - [2u_2 + 2.3u_3 + \ldots + (p_1 - 1)p_1 u_{p_1}],$$

et nous prendrons dans la série divergente des x, $p_2 - p_1$ termes suivant ceux qui ont déjà été pris et tels que leur somme diffère de $|G'_2|$ d'une quantité moindre que η; nous prendrons alors, m étant compris entre p_1 et p_2,

$$m(m-1)|u_m| = x_m,$$

les u ayant ici le signe de G'_2, et l'on aura

$$|2u_2 + 2.3u_3 + \ldots + p_2(p_2 - 1)u_{p_2} - G_2| < \eta.$$

Nous continuerons de même, de sorte que l'on a, m étant compris entre p_{k-1} et p_k,

$$m(m-1)\ldots(m-k+1)|u_m| = x_m.$$

Il est maintenant facile d'évaluer la différence

$$h^{(n)}(1) - G_n.$$

Nous pouvons écrire

$$h^{(n)}(1) = \Sigma + \Sigma_{n+1} + \Sigma_{n+2} + \ldots,$$

en désignant par Σ les termes qui correspondent aux u dont l'indice est inférieur ou égal à p_n, par Σ_{n+1} ceux dont l'indice est compris entre p_n et p_{n+1}, etc.

Nous avons déjà

$$|\Sigma - G_n| < \eta.$$

D'ailleurs on a visiblement

$$\left|\sum_{n+1}\right| = \sum_{p_n+1}^{p_{n+1}} m(m-1)\ldots(m-n+1)\,|u_m| = \sum_{p_n+1}^{p_{n+1}} \frac{x_m}{m-n}.$$

De même

$$\left|\sum_{n+2}\right| = \sum_{p_{n+1}+1}^{p_{n+2}} \frac{x_m}{(m-n)(m-n-1)}.$$

On a donc

$$\left|\sum_1 + \sum_2 + \ldots\right| < \sum_{p_n+1}^{\infty} \frac{x_m}{m-n} < \sum_{p_n}^{\infty} \frac{x_{m-n}}{m-n},$$

puisque les x décroissent quand leur indice croît. Le second membre est inférieur à la somme M de la série convergente $\sum \frac{x_n}{n}$ et l'on a finalement

$$|h^{(n)}(1) - G_n| < \eta + M.$$

C'est le résultat que nous voulions obtenir.

Ainsi, toute fonction d'une variable réelle qui admet dans un intervalle donné des dérivées de tout ordre peut être représentée par la somme d'une série uniformément convergente, les séries obtenues en prenant les dérivées de ses termes étant aussi uniformément convergentes et représentant, par suite, les dérivées de la fonction. Cette série est de la forme

$$\Sigma(A_k z^k + B_k \cos kz + C_k \sin kz),$$

et les expressions $k^n A_k$, $k^n B_k$, $k^n C_k$ tendent vers zéro lorsque k augmente indéfiniment quel que soit le nombre fixe n. On voit que la convergence de ces séries est assez rapide.

La méthode que nous avons employée pour résoudre avec une approximation donnée un système d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues s'applique à tout système à coefficients réels de la forme

$$\sum^{n=\infty} a_n^{(h)} u_n = A^{(h)}, \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

dans lequel nous supposons que l'on a, sous la condition $k > h$,

$$\frac{a_n^{(k)}}{a_n^{(h)}} > b_n,$$

b_n augmentant indéfiniment avec n.

En effet, il résulte de cette dernière hypothèse que l'on peut trouver des quantités positives x_n satisfaisant aux conditions suivantes :

1° La série Σx_n est convergente et a une somme inférieure à un nombre donné à l'avance ε;

2° La série $\Sigma b_n x_n$ est divergente, mais chacun de ses termes est inférieur à ε.

Il suffira dès lors d'opérer comme précédemment, la série $\Sigma b_n x_n$ jouant ici le rôle que jouait tout à l'heure la série Σx_n et l'on verra que les équations peuvent être résolues avec l'approximation 2ε, par l'emploi de cette série.

Cette méthode est surtout intéressante dans le cas où l'on sait, comme dans l'exemple traité plus haut, résoudre les équations pour des valeurs suffisamment petites des A. Il est clair, en effet, qu'il suffit alors de savoir les résoudre avec une certaine approximation pour savoir les résoudre exactement en général.

Considérons, par exemple, les équations

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^h u_n = \mathrm{A}_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, \infty),$$

dans lesquelles nous supposons que a_n augmente indéfiniment avec n; les conditions requises sont alors vérifiées. D'autre part, il est facile de résoudre ces équations lorsque les A sont finis. Soit en effet

$$g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

une fonction entière admettant pour zéros les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; posons

$$\frac{g(z)}{z - a_n} = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} z + \ldots.$$

On a visiblement

$$g'(a_n)\,u_n = c_0^{(n)}\,A_0 + c_1^{(n)}\,A_1 + \ldots,$$

si l'on suppose :

1° Que les séries écrites dans les seconds membres sont absolument convergentes ;

2° Que les séries doubles que l'on obtient en substituant ces valeurs des u_n dans les équations proposées sont absolument convergentes.

Si les A sont finis, ces conditions sont vérifiées sous la condition que la série $\sum\left|\frac{a_n^h}{g'(a_n)}\right|$ soit convergente quel que soit h. Or nous pouvons remplacer $g(z)$ par $g(z)\,\theta(z)$, $\theta(z)$ étant une fonction entière, $g'(a_n)$ est remplacé par $g'(a_n)\,\theta(a_n)$ et l'on voit qu'il suffit de prendre pour $\theta(z)$ une fonction croissant assez rapidement pour que la série

$$\sum\left|\frac{a_n^h}{g'(a_n)\,\theta(a_n)}\right|$$

soit convergente quel que soit l'entier h; cela est toujours possible.

Donc on saura résoudre d'une manière générale les équations considérées. Prenons, comme exemple, le système

$$\begin{aligned} &\Sigma\, n^{2p}\quad a_n = A_p,\\ &\Sigma\, n^{2p+1}\, b_n = B_p, \end{aligned}$$

que l'on rencontre lorsqu'on exprime que la série

$$\Sigma\, a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

a, ainsi que ses dérivées, des valeurs données pour $x = 0$. En prenant pour inconnue nb_n au lieu de b_n on a ici deux systèmes auxquels on pourrait appliquer les méthodes précédentes pour les résoudre d'abord avec une certaine approximation, ensuite exactement. On voit ainsi qu'il y a des solutions quels que soient A_p et B_p, c'est-à-dire que l'*on peut trouver une fonction périodique d'une variable réelle x admettant des dérivées de tout ordre, ces dérivées ayant des valeurs quelconques données pour $x = 0$.*

On peut procéder d'une manière un peu différente pour résoudre le système considéré, dans le cas où la série

$$\varphi(x) = \sum \left[\frac{A_p}{2p!} x^{2p} + \frac{B_p}{(2p+1)!} x^{2p+1} \right]$$

a un rayon de convergence égal ou supérieur à π. Si cette fonction $\varphi(x)$ était périodique, il suffirait de lui appliquer les formules de Fourier pour avoir a_n et b_n. Supposons qu'elle ne le soit pas et considérons la fonction

$$\psi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \theta(x),$$

$\theta(x)$ étant aussi une série entière. Il est facile d'écrire les égalités

$$\begin{aligned} \psi(\pi) + \varphi(\pi) &= \psi(-\pi) + \varphi(-\pi), \\ \psi'(\pi) + \varphi'(\pi) &= \psi'(-\pi) + \varphi'(-\pi), \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

Ces égalités permettent de déterminer la fonction $\theta(x)$ de la même manière que des égalités analogues nous ont permis de déterminer plus haut la fonction que nous appelions $f(z)$. Dès lors on voit que la fonction

$$\varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}} \theta(x).$$

ayant des dérivées égales pour $x = \pm \pi$ se développe en série de Fourier de la même manière que les fonctions périodiques, c'est-à-dire de façon que les dérivées du développement représentent les dérivées de la fonction. Pour $x = 0$ celles-ci sont précisément égales aux dérivées de $\varphi(x)$, puisque les dérivées de $e^{-\frac{1}{x^2}}\theta(x)$ sont toutes nulles. On a donc ainsi obtenu des solutions des équations

$$\Sigma n^{2p} a_n = A_p, \qquad \Sigma n^{2p+1} b_n = B_p.$$

Indiquons enfin que l'on obtiendrait des solutions, qui ne seraient certainement pas identiquement nulles, des équations

$$\Sigma n^{2p} a_n = 0, \qquad \Sigma n^{2p+1} b_n = 0,$$

en déterminant les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de manière que la fonction

$$F(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}} \psi(x)$$

ait des dérivées égales pour $x = \pm \pi$. On peut se donner φ arbitrairement et chercher ψ par le procédé déjà employé. On prendra ensuite

$$a_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{F}(x) \cos nx \, dx, \qquad b_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{F}(x) \sin nx \, dx.$$

On voit combien est grande la multiplicité des solutions, résultat qui concorde d'ailleurs tout à fait avec les recherches déjà citées de M. Poincaré sur la résolution d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

Voici enfin une dernière application de la résolution du système

$$(1) \qquad \Sigma n^p a_n = \mathrm{A}_p.$$

Ces équations expriment que la série

$$\varphi(z) = \sum \frac{a_n}{1 - nz},$$

développée suivant les puissances croissantes de z, prend la forme

$$\mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 z + \ldots + \mathrm{A}_p z^p + \ldots.$$

Or on peut supposer que cette dernière série représente une fonction holomorphe à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre l'origine, ou même dans tout le plan; il suffit d'avoir convenablement choisi les A. Il est clair que cette fonction n'a aucune relation avec la fonction $\varphi(z)$, laquelle admet des points singuliers se rapprochant de plus en plus de l'origine. Leur seul point commun, c'est qu'elles ont toutes leurs dérivées égales pour $z = 0$, la dérivée de $\varphi(z)$ n'étant pas définie, bien entendu, suivant *une* direction issue de ce point.

Ainsi on peut à toute fonction holomorphe faire correspondre une fonction, et même une infinité, du genre de $\varphi(z)$; d'ailleurs les mêmes relations ont lieu entre ces fonctions qu'entre les fonctions holomorphes correspondantes; mais la correspondance n'est pas univoque puisqu'à une fonction $\varphi(z)$ correspond une seule fonction holomorphe (et quelquefois aucune, si la série est divergente), tandis qu'à toute fonction holomorphe correspond une infinité de fonctions $\varphi(z)$.

On voit par cet exemple (dont des cas particuliers avaient été signalés par M. Pringsheim) que la somme de séries de Taylor dont le rayon de convergence tend vers zéro peut avoir un rayon de convergence fini (ou même infini); mais alors *elle n'a plus aucun rapport avec la somme des fonctions que représentaient les séries*. On comprend bien pourquoi; et il est certain que si le même phénomène peut se produire pour des séries dont le rayon de convergence a une limite inférieure R autre que zéro, la somme ne coïncidera pas nécessairement au delà du cercle de rayon R avec la somme des fonctions que représentaient les séries (sauf dans les régions où le prolongement analytique direct est possible).

CONCLUSION.

Le but de ce travail était de montrer qu'il existe des fonctions intéressantes et ayant des propriétés simples, en dehors des fonctions analytiques proprement dites (définies en tous les points du plan par des développements de Taylor, qui se *prolongent* mutuellement). La plupart des travaux faits jusqu'ici sur les fonctions non analytiques, aussi bien les travaux sur les fonctions à espace lacunaire que sur les fonctions non analytiques d'une variable, étaient faits dans le but de découvrir à ces fonctions des propriétés compliquées ou, plutôt, de rechercher jusqu'à quel degré de complication pouvait conduire l'idée de fonction, lorsqu'on lui imposait peu ou point de restrictions. Certaines des recherches faites dans cette voie sont d'ailleurs fort intéressantes et ont puissamment contribué à donner de la netteté et de la rigueur aux raisonnements de l'analyse. Mais il semble qu'on ne se soit pas souvent proposé d'étudier celles des fonctions non analytiques qui sont les plus simples et de rechercher leurs propriétés générales. Aussi connaît-on bien peu de propriétés aux fonctions non analytiques; on peut même affirmer qu'elles ont bien peu de propriétés communes, car, une propriété étant donnée, un analyste habile saura souvent fabriquer une fonction ne la possédant pas; c'est ainsi que l'on a construit des fonctions continues n'admettant pas de dérivée, ou admettant une dérivée seulement pour des valeurs commensurables de la variable. Parmi les propriétés communes à toutes les fonctions de variable réelle, on ne peut guère citer que le théorème de M. Darboux sur l'intégration et le théorème de M. Weierstrass sur la représentation par une série de polynomes. En restreignant la généralité des fonctions employées, on a la théorie des séries de Fourier.

Mais le grave inconvénient de ces modes de représentation très généraux, c'est que, lorsque la fonction a une propriété simple, cette propriété n'apparaît pas sur le développement; il suffit de citer le développement de x en série trigonométrique. J'ai montré comment, par l'addition d'une fonction holomorphe convenable, on pouvait s'arranger de manière à n'employer que des développements de Fourier dont les dérivées représentent les dérivées des fonctions, lorsque celles-ci en possèdent. Il est inutile d'indiquer quels peuvent être les avantages de l'emploi exclusif de tels développements. Nous avons ainsi une représentation analytique bien déterminée pour les fonctions de variable réelle admettant des dérivées de tout ordre, expression analytique qui met en évidence l'existence des dérivées et permet de les calculer. De plus, on peut ainsi poser d'une façon précise la question de savoir à quelles conditions la formule de Taylor s'applique aux fonctions de variables réelles, car on a une expression générale des fonctions admettant des dérivées de tout ordre et qui sont les seules auxquelles elle est susceptible de s'appliquer; la résolution de cette question nécessiterait des recherches dans le genre de celles de M. Hadamard, mais il est clair qu'en transformant simplement la condition fondamentale, que le reste de la formule de Taylor limitée doit tendre vers zéro, sans se donner une représentation analytique précise de la fonction, on ne peut aboutir qu'à de simples tautologies.

D'ailleurs ces diverses fonctions n'ont peut-être pas de l'intérté seulement pour les analystes. Il semble qu'elles peuvent fort bien jouer un rôle considérable en Physique, où on ne les a pas introduites jusqu'ici simplement parce qu'elles n'étaient pas connues (ou du moins peu connues). On voit bien en effet, si l'on considère une fonction définie physiquement, par exemple la fonction qui exprime l'indice de réfraction au moyen de la longueur d'onde, on voit bien les raisons, un peu vagues et de sentiment, il est vrai, qui conduisent à admettre que cette fonction admet des dérivées de tous les ordres. Mais ce que, pour ma part, je ne vois pas *du tout*, c'est la *moindre raison plausible* pour admettre que la formule de Taylor s'applique à cette fonction de variable réelle. La formule de Taylor joue un grand rôle dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire; il n'est pas question de lui enlever ce rôle, bien que son importance ait peut-être été parfois exagérée; mais ce qui est malheureux, c'est que cette idée acquise dans l'étude des fonctions d'une variable complexe, que la série de Taylor est valable pour toute fonction qui a des dérivées bien définies dans un domaine, se soit imprimée dans l'esprit au point de faire corps avec lui et apparaisse comme une notion aussi simple que la notion de continuité, pour les fonctions de variable réelle que l'on rencontre en Physique.

Il est bien entendu que l'on peut user des formules que l'on veut comme formules d'approximation; mais souvent on cherche à tirer des conséquences théoriques de la forme d'une formule, formule qui a été obtenue en supposant gratuitement que la série de Taylor s'appliquait à une fonction physique.

Il est d'ailleurs aisé de se rendre compte combien il est peu probable, au contraire, que la formule de Taylor soit applicable aux fonctions que l'on rencontre en Physique. Si l'on cherche, en effet, à exprimer le potentiel d'un corps formé d'un très grand nombre de molécules, on obtient une somme de la forme

$$V(x, y, z) = \sum \frac{m_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 + (z-c_i)^2}}.$$

On se rapprochera le plus possible de l'hypothèse moléculaire, en supposant le nombre des molécules infini, la masse et le volume de chacune d'elles restant finis ainsi que la masse totale. La série qui représente $V(x, y, z)$ est alors tout à fait analogue aux séries que nous avons considérées dans la première Partie de ce travail; on verra qu'il existe, même au milieu des molécules, des surfaces continues sur lesquelles la série est absolument et uniformément convergente, etc. Il est clair que, si l'on écrit des équations quelconques relatives à un corps solide ainsi compris, les fonctions de variable réelle qui pourront en résulter seront analogues à ces fonctions définies sur les courbes C, dont nous avons dit un mot à la fin de la première Partie.

On pourrait, comme autre hypothèse sur la structure des solides, considérer la densité en chaque point comme définie par une fonction de la forme $V(x, y, z)$. Il est facile de voir que la masse pourrait rester finie, bien qu'il y ait en une infinité de points une densité infinie; ces points joueraient le rôle des molécules.

Il est d'ailleurs évident que toutes ces hypothèses ne peuvent avoir la prétention d'être exactes; mais l'essentiel, en Physique mathématique, c'est que l'on puisse bâtir un groupe de théories mathématiques ayant avec un groupe de phénomènes un certain nombre d'analogies grâce auxquelles on peut en découvrir d'autres. Cela suffit pour que la théorie soit utile. Or il ne serait pas bien difficile de choisir les coefficients de la fonction

$$V(x, y, z) = \sum \frac{m_i}{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2},$$

supposée représenter la densité d'un corps solide, pour que les surfaces sur lesquelles cette densité est finie et est la plus faible soient des plans parallèles à une certaine direction, ce qui correspondrait à la notion des plans de clivage; si l'on suppose, par exemple, que les a_i, b_i, c_i prennent toutes les valeurs rationnelles, tous les plans dont les coefficients de direction sont proportionnels à des nombres entiers et passant par des points convenablement choisis, sont des plans sur lesquels la densité est finie; mais cette densité est d'autant plus forte, si les m sont convenablement choisis, que les nombres entiers auxquels sont proportionnels les coefficients de direction sont plus élevés.

Je n'insiste pas sur ces idées, qu'on pourrait rattacher aux recherches de M. Cantor sur le mouvement continu dans un espace discontinu, et je me contente de répéter ce qui n'est pas hypothétique : c'est que, aucune démonstration n'ayant jamais été donnée du fait qu'on peut appliquer la formule de Taylor aux fonctions qu'on rencontre en Physique, on n'a pas le droit de s'en servir, même si l'on suppose l'existence des dérivées de tous les ordres. J'ajoute qu'il est évidemment *impossible* de décider par l'expérience si la série de Taylor s'applique à une fonction expérimentale.

NOTE.

Nous nous sommes appuyés (p. 26) sur ce lemme que, si l'on a une infinité d'intervalles partiels donnés sur une droite, dont la somme est inférieure à un intervalle total également donné, il existe au moins un point de l'intervalle total n'appartenant à aucun des intervalles partiels. Il est d'abord clair que, s'il y a sûrement un tel point, il en existe une infinité non dénombrable, car, s'il y en avait une infinité dénombrable, on pourrait les enfermer dans des intervalles dont la somme serait aussi petite que l'on veut et pourrait être choisie de manière que, en ajoutant ces intervalles à ceux qui sont déjà donnés, on ait une somme inférieure à l'intervalle total; il devrait donc y avoir un point de la droite n'appartenant à aucun de ces intervalles.

De plus, on peut supposer que l'on entend par point appartenant à l'intervalle tout point compris entre les extrémités et ne coïncidant pas avec elles; car il est possible d'agrandir chaque intervalle, par ses deux extrémités, d'une fraction suffisamment faible de sa propre longueur pour que la somme des intervalles reste inférieure à l'intervalle total. Il est clair qu'après cet agrandissement les points intérieurs aux anciens intervalles et leurs extrémités sont intérieurs aux nouveaux intervalles au sens restreint du mot.

On peut considérer ce lemme comme à peu près évident; néanmoins, à cause de son importance, je vais en donner une démonstration reposant sur un théorème intéressant par lui-même; il en existe d'autres démonstrations plus simples. Voici ce théorème : *Si l'on a sur une droite une infinité d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, on peut déterminer effectivement un* NOMBRE LIMITÉ *d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété* (*tout point de la droite est intérieur à au moins l'un d'eux*). Il est bien entendu que le mot *intérieur* est toujours pris dans le sens restreint qui exclut les extrémités; il est aisé de s'assurer que, sans cela, le théorème ne serait pas vrai. On pourrait démontrer directement que tout point de la droite est nécessairement à l'intérieur d'un intervalle de rang limité (en supposant les intervalles numérotés suivant une loi quelconque), mais la démonstration suivante paraît être davantage dans la nature des choses.

Partons d'une extrémité A de la droite, soit $A_i B_i$ un des intervalles qui comprennent le point A; soit de même $A_{i_1} B_{i_1}$ un des intervalles qui comprennent le point B_i, $A_{i_2} B_{i_2}$ un des intervalles qui comprennent le point B_{i_1}, etc. Nous supposons, bien entendu, que A désigne toujours l'extrémité gauche des intervalles, B l'extrémité droite. Les points $B_{i_1}, B_{i_2}, B_{i_3}, \ldots$, s'ils n'atteignent pas l'extrémité B de la droite, ont une limite B_{i_ω} et ce point est compris dans un intervalle $A_{i_{\omega+1}}B_{i_{\omega+1}}$ tel que $A_{i_{\omega+1}}$ tombe, par exemple, entre $B_{i_{m-1}}$ et B_{i_m}; nous pourrons alors ne pas tenir compte des intervalles $A_{i_{m+k}}B_{i_{m+k}}$, et nous aurons tout de même une suite ininterrompue d'intervalles sur la droite. Nous continuerons de même, en passant à la limite lorsque cela sera nécessaire et montrant alors qu'on peut conserver seulement un nombre fini des intervalles déjà considérés. Je dis que nous atteindrons nécessairement l'extrémité B de la droite, car, si on ne l'atteignait pas, on définirait une série d'intervalles ayant pour extrémités

$$B_{i_1}, \quad B_{i_2}, \quad \ldots, \quad B_{i_\omega}, \quad B_{i_{2\omega}}, \quad \ldots, \quad B_{i_{\omega^2}}, \quad \ldots, \quad B_{i_{\omega^\omega}}, \quad \ldots,$$

les indices étant *tous* les nombres de la seconde classe de nombres (définis par M. Cantor). Mais ces indices sont aussi dans un certain ordre, les nombres naturels, en tout ou en partie. C'est là une contradiction puisque la seconde classe de nombres constitue un ensemble de seconde puissance.

Ainsi on arrivera nécessairement, en employant le procédé régulier indiqué, à *déterminer effectivement* un nombre fini d'intervalles qui recouvriront toute la droite. On voit que le principe de la démonstration repose sur ce que $A_{i_{\omega+1}}$ est nécessairement à gauche de B_{i_ω} et ne peut pas coïncider avec B_{i_ω}, ce qu'on ne pourrait affirmer si le mot *intérieur* s'étendait aux extrémités; il est d'ailleurs facile de voir directement que le théorème n'est pas vrai dans ce cas.

Il est clair qu'il en résulte immédiatement que, dans le cas où tout point de la droite appartient à l'un au moins des intervalles, leur somme est plus grande que la longueur de la droite, puisqu'un nombre fini suffit pour la recouvrir. Notre lemme est précisément cette proposition énoncée sous forme négative. Parmi les conséquences qui s'en déduisent immédiatement on peut citer celle-ci : Si u_q désigne un nombre positif tel que la série $\sum \frac{u_q}{q}$ soit convergente, on peut trouver dans tout intervalle une infinité de nombres irrationnels ξ, tels que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{u_q}{q^2}$$

ne puisse être vérifiée que pour un nombre fini de fractions $\frac{p}{q}$ à termes entiers. Si, au contraire, on supposait $u_q = 1$, ξ étant quelconque, toutes les réduites de son développement en fraction continue vérifieraient cette inégalité. On peut faire à ce dernier cas une application curieuse de notre théorème : si l'on entoure tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ d'un intervalle égal à $\frac{2}{q^2}$ et dont il occupe le milieu, tout nombre irrationnel appartient à un nombre illimité de ces intervalles; mais, si l'on se borne aux fractions $\frac{p}{q}$ irréductibles, tout nombre rationnel n'appartient qu'à un nombre limité; considérons toutes les fractions $\frac{p}{q}$, *irréductibles ou non,* comprises entre 0 et 1 (q varie de 1 à l'infini et p et de 0 à q); alors tous les nombres rationnels et irrationnels appartiennent à une infinité d'intervalles. On en conclut aisément, en procédant comme dans la démonstration précédente, qu'il est possible de classer toutes ces fractions en une infinité de Tableaux, en comprenant chacun un nombre fini et tels que ξ étant un nombre quelconque compris entre 0 et 1, il y ait dans chaque Tableau une fraction au moins et deux au plus vérifiant l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Cette proposition est assez curieuse, parce qu'il existe entre les divers nombres irrationnels des différences très grandes au sujet de la manière dont augmentent les termes des réduites de leurs développements en fraction continue. Cette notion joue même un grand rôle dans l'étude de la fonction citée à la fin de la première Partie,

$$\sum \frac{e^{-n}}{z - \frac{p+qi}{n}}.$$

Nous avons déjà dit que la série est convergente (absolument et uniformément) sur la ligne $x = \xi$, si ξ est un nombre irrationnel tel que les quotients incomplets de son développement en fraction continue sont tous inférieurs à un nombre fixe N. Soit, en effet, $\frac{P_n}{Q_n}$ une réduite; on sait que l'on a

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \xi\right| > \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}\right|.$$

Or

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}\right| = \left|\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} - \frac{1}{Q_{n+1} Q_{n+2}}\right| = \frac{Q_{n+2} - Q_n}{Q_n Q_{n+1} Q_{n+2}}.$$

Or, d'après nos hypothèses, on a $Q_{n+1} < NQ_n$, $Q_{n+2} < NQ_{n+1}$; donc

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \xi\right| > \frac{N^2 - 1}{N^3 Q_n^2}.$$

D'ailleurs, q étant compris entre Q_n et Q_{n+1}, on a

$$\left|\frac{p}{q} - \xi\right| > \left|\frac{P_n}{Q_n} - \xi\right| > \frac{N^2 - 1}{N^3 Q_n^2} > \frac{N^2 - 1}{N^3 q^2}.$$

On en conclut que le module du terme

$$\frac{e^{-n}}{z - \dfrac{p + qi}{n}}$$

est, la partie réelle de x étant égale à ξ, inférieur à

$$\frac{N^3}{N^2 - 1} n^2 e^{-n}.$$

Il y a d'ailleurs n^2 termes correspondant à la même valeur de n; la série des modules a donc une somme inférieure à celle de la série très convergente

$$\frac{N^3}{N^2 - 1} \sum n^4 e^{-n}.$$

La série serait aussi convergente si le nombre ξ était tel que chaque quotient incomplet soit inférieur à une puissance déterminée du dénominateur de la réduite précédente. Mais supposons que tous les quotients incomplets (ou seulement une infinité d'entre eux) soient égaux à l'entier immédiatement supérieur à e^{Q_n}, Q_n étant le dénominateur de la réduite précédemment formée; on aura

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \xi\right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2 e^{Q_n}},$$

et l'on voit que, pour $z = \xi + i\frac{\beta_n}{Q_n}$, le terme

$$\frac{e^{-Q_n}}{z - \frac{P_n + i\beta_n}{Q_n}}$$

devient supérieur à Q_n^2. Il n'est donc pas possible que la série soit convergente s'il y a une infinité de telles valeurs de Q_n.

On sait, depuis Liouville, que les nombres irrationnels, qui peuvent ainsi être approchés par des nombres rationnels avec une approximation beaucoup plus grande que ne l'indique la théorie des fractions continues, ne peuvent être algébriques. La série considérée est donc convergente, en particulier pour tous les nombres algébriques.

Signalons enfin que l'on pourrait trouver des nombres irrationnels définissant des lignes sur lesquelles la série serait convergente, mais non toutes ses dérivées; il suffirait, par exemple, de prendre pour chaque quotient incomplet la partie entière de $e^{\frac{Q_n}{h}}$, Q_n étant le dénominateur de la réduite précédemment formée, et h un nombre entier arbitraire; la fonction admettrait des dérivées sur la ligne considérée jusqu'à l'ordre h exclusivement.

Enfin il est clair que toutes ces propriétés ne dépendent que de la manière dont se comporte à l'infini la fraction continue représentant le nombre; on peut donc disposer des premiers termes pour le rendre aussi voisin que l'on veut de tout nombre donné.