

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. BRIOSCHI

## Sur une classe d'équations du cinquième degré

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 12 (1895), p. 337-342

<[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1895\\_3\\_12\\_\\_337\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__337_0)>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DU CINQUIÈME DEGRÉ,

PAR M. F. BRIOSCHI.

1. On sait que l'équation du sixième degré

$$(1) \quad (z-a)^6 - 4a(z-a)^5 + 10b(z-a)^3 - 4c(z-a) + 5b^2 - 4ac = 0$$

est résoluble par les fonctions elliptiques en deux cas : si  $a = 0$ ,  $b$ ,  $c$  étant certaines fonctions du module; ou si  $b = 0$  et  $a$ ,  $c$  fonctions du module.

Soient  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  les racines d'une équation du cinquième degré, et  $\varphi_\infty$  une fonction cyclique de ces racines, fonction qui se reproduit, changée de signe, lorsqu'on opère sur elle la substitution  $\begin{pmatrix} r \\ 4r \end{pmatrix}$ . Soient encore  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  les fonctions qu'on déduit de  $\varphi_\infty$  par la substitution  $\begin{pmatrix} r \\ 3r^3+s \end{pmatrix}$  ( $s = 0, 1, 2, 3, 4$ ); si l'on pose

$$(2) \quad \sqrt{z_\infty} = \frac{1}{2} \Sigma \varphi + \omega \varphi_\infty,$$

où

$$\Sigma \varphi = \varphi_\infty + \varphi_0 + \dots + \varphi_4, \quad \omega = \frac{\sqrt{5-1}}{2},$$

et si l'on indique par  $\sqrt{z_0}, \sqrt{z_1}, \dots, \sqrt{z_4}$  les fonctions qu'on peut déduire de  $\sqrt{z_\infty}$  par la même substitution  $\begin{pmatrix} r \\ 3r^3+s \end{pmatrix}$ ; les quantités  $z_\infty, z_0, \dots, z_4$  ainsi obtenues sont, comme il est connu, racine d'une équation (1).

Soit

$$f = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)(x, 1)^5 = 0$$

l'équation du cinquième degré, dont les racines sont  $x_0, x_1, \dots, x_4$ . En désignant avec  $u_\infty$  la fonction cyclique

$$u_\infty = a_0^2 (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_0) = a_0^2 \quad (01234),$$

fonction laquelle se reproduit, changée de signe, par la substitution  $\begin{pmatrix} r \\ 4r \end{pmatrix}$ ; et si l'on désigne avec  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$  les fonctions qu'on en déduit par la substitution  $\begin{pmatrix} r \\ 3r^3 + s \end{pmatrix}$ , on a un type de fonctions  $\varphi$ .

Si enfin l'on désigne avec  $v_\infty$  la fonction qu'on déduit de  $u_\infty$  au moyen de la substitution  $\begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix}$ , et l'on observe qu'elle aura la même propriété de  $u_\infty$  quant à la substitution  $\begin{pmatrix} r \\ 4r \end{pmatrix}$ , on obtiendra de la manière indiquée les fonctions  $v_0, v_1, \dots, v_4$ .

Ces douze fonctions  $u, v$  ont des propriétés remarquables que je résume en renvoyant pour la démonstration à des travaux connus <sup>(1)</sup>. On a, en premier lieu,

$$(3) \quad \Sigma u = 2(u_\infty + v_\infty), \quad \Sigma v = 2u_\infty,$$

desquelles on déduit dix relations, en opérant avec la substitution  $\begin{pmatrix} r \\ 3r^3 + s \end{pmatrix}$ .

De même

$$(4) \quad \begin{cases} \Sigma u^2 = -u_\infty^2 - v_\infty^2 + \frac{3}{2}(l - 3\delta)u_\infty + \frac{3}{2}(l - \delta)v_\infty, \\ \Sigma v^2 = -u_\infty^2 + 3v_\infty^2 + \frac{3}{2}(l + \delta)u_\infty - \frac{3}{2}(l + 3\delta)v_\infty, \end{cases}$$

et enfin

$$(5) \quad \begin{cases} \Sigma u^3 = 2u_\infty^3 + 2v_\infty^3 - \frac{5}{2}(l - 3\delta)u_\infty^2 - \frac{5}{2}(l + \delta)v_\infty^2 \\ \quad + \frac{5}{4}(l - 3\delta)^2 u_\infty + \frac{5}{4}(l - 3\delta)(l - \delta)v_\infty, \\ \Sigma v^3 = 2u_\infty^3 - \frac{5}{2}(l - \delta)u_\infty^2 + \frac{5}{2}(l + 3\delta)v_\infty^2 \\ \quad + \frac{5}{4}(l + 3\delta)(l + \delta)u_\infty - \frac{5}{4}(l + 3\delta)^2 v_\infty, \end{cases}$$

---

<sup>(1)</sup> Sur l'équation du cinquième degré, par M. Hermite; 1866.

et les relations correspondantes obtenues par la substitution mentionnée.

La quantité  $l$  est, sauf un coefficient numérique, l'invariant du quatrième degré de  $f$ ; et  $\delta$  est la racine carrée du discriminant (sauf un coefficient numérique), et l'on a

$$(6) \quad u_{\infty} v_{\infty} = u_0 v_0 = \dots = u_4 v_4 = -\delta.$$

Les coefficients  $u_{\infty}^2, u_0^2, \dots, u_4^2$  sont racines de l'équation suivante, dans laquelle  $k$  est un invariant du douzième degré de  $f$ :

$$(7) \quad \begin{cases} u^{12} - (l - 3\delta)u^{10} + \frac{1}{4}(l^2 - 2l\delta + 5\delta^2)u^8 - ku^6 \\ + \frac{1}{4}(l^2 + 2l\delta + 5\delta^2)\delta^2 u^4 - (l + 3\delta)\delta^4 u^2 + \delta^6 = 0. \end{cases}$$

2. Supposons que la relation entre invariants

$$(8) \quad k = \frac{1}{2}\delta(l^2 - 4l\delta + 9\delta^2)$$

soit satisfaite; on voit tout de suite que dans ce cas le premier membre de l'équation (7) a pour facteur  $u^2 - \delta$ , et, en conséquence, l'une des six fonctions  $u$  sera égale à  $\pm \delta^{\frac{1}{2}}$ , et, à cause des relations (6), on aura la fonction correspondante  $v$  égale à  $\mp \delta^{\frac{1}{2}}$ .

Soient  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{11}$  douze indéterminées, et posons

$$\begin{aligned} \varphi = & \lambda_0 u^5 + \lambda_1 v^5 + (\lambda_2 l + \lambda_3 \delta) u^3 + (\lambda_4 l + \lambda_5 \delta) v^3 \\ & + (\lambda_6 l^2 + \lambda_7 l\delta + \lambda_8 \delta^2) u + (\lambda_9 l^2 + \lambda_{10} l\delta + \lambda_{11} \delta^2) v, \end{aligned}$$

$u, v$  étant deux quelconques fonctions correspondantes. Au moyen des relations (3), (4), (5), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma \varphi = & l_0 u^5 + l_1 v^5 + (l_2 l + l_3 \delta) u^3 + (l_4 l + l_5 \delta) v^3 \\ & + (l_6 l^2 + l_7 l\delta + l_8 \delta^2) u + (l_9 l^2 + l_{10} l\delta + l_{11} \delta^2) v, \end{aligned}$$

les  $l_0, l_1, \dots$  étant des fonctions linéaires de  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ .

En posant  $l_r + \omega \lambda_r = t_r$ , on aura

$$\begin{cases} \sqrt{z} = t_0 u^5 + t_1 v^5 + (t_2 l + t_3 \delta) u^3 + (t_4 l + t_5 \delta) v^3 \\ + (t_6 l^2 + t_7 l\delta + t_8 \delta^2) u + (t_9 l^2 + t_{10} l\delta + t_{11} \delta^2) v. \end{cases}$$

et l'on trouve que

$$\begin{aligned} t_1 &= \omega t_0, & t_2 &= \frac{5}{2}(\omega - 1)t_0 - (2\omega - 1)t_4, & t_3 &= \frac{5}{2}(3\omega - 1)t_0 - (2\omega - 1)t_5, \\ t_9 &= -\frac{5}{4}(2\omega - 1)t_0 + \frac{3}{2}(\omega - 1)t_4 + \omega t_6, \\ t_{10} &= -\frac{5}{2}\omega t_0 - \frac{3}{2}(3\omega - 1)t_4 + \frac{3}{2}(\omega - 1)t_5 + \omega t_7, \\ t_{11} &= \frac{1}{4}(4\omega - 3)t_0 - \frac{3}{2}(3\omega - 1)t_5 + \omega t_8. \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'une des expressions (9), pour  $\sqrt{z}$ , s'annule lorsqu'on pose  $u = \delta^{\frac{1}{2}}$ ,  $v = -\delta^{\frac{1}{2}}$ ; les indéterminées  $t_0, t_1, \dots$  doivent dans ce cas satisfaire les trois conditions

$$t_0 - t_1 + t_3 - t_5 + t_8 - t_{11} = 0, \quad t_2 - t_4 + t_7 - t_{10} = 0, \quad t_6 - t_9 = 0.$$

Les indéterminées se réduisent dans ce cas à deux :

$$t_0 = p, \quad t_4 l + t_5 \delta = q,$$

et l'expression  $\sqrt{z}$  prend la forme

$$\sqrt{z} = (P + Q\sqrt{5})p + (L + M\sqrt{5})q,$$

étant

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}v^5 + \frac{5}{4}lu^3 + \frac{1}{4}\delta u^3 - \frac{5}{8}l^2(u+v) - \frac{5}{4}l\delta u - \frac{1}{8}\delta^2(5u - 21v), \\ P &= -Q + u^5 - \frac{5}{2}(l+\delta)u^3 - \frac{5}{2}l\delta v - \frac{1}{2}\delta^2(23u + 25v), \\ L &= 2u^3 + v^3 - \frac{3}{2}l(u+v) + \delta(u+2v), \quad M = -u^3 - \frac{1}{2}\delta(u+3v), \end{aligned}$$

et les polynômes P, Q, L, M s'annulent pour  $u = -v = \delta^{\frac{1}{2}}$ .

On est ainsi arrivé à ce résultat : qu'une des racines  $z_0, z_1, \dots, z_4$  de l'équation (1) est nulle, et que la somme des autres peut s'annuler en disposant de l'indéterminée  $p : q$ .

En effet, l'addition des racines  $z$  donne

$$\Sigma z = \alpha p^2 + 2\beta pq + \gamma q^2,$$

$\alpha, \beta, \gamma$  étant des invariants des degrés 20<sup>e</sup>, 16<sup>e</sup>, 12<sup>e</sup>.

La condition (8) entre invariants d'une équation du 5<sup>e</sup> degré conduit donc à une résolvante jacobienne (1), pour laquelle sont

$$\alpha = 0, \quad b = 0,$$

et vu que dans ce cas la résolvante même se réduit à l'équation binôme

$$z^5 - 4c = 0.$$

On a le théorème :

*Les équations du 5<sup>e</sup> degré, pour lesquelles la relation (8) est satisfaite, sont résolubles algébriquement.*

3. Un cas particulier de ce type d'équations est donné par la théorie des fonctions elliptiques, en considérant la division des périodes par onze.

Si l'on pose

$$\frac{2\omega}{11} = m$$

et

$$(9) \quad x_0 = p(m), \quad x_1 = p(2m), \quad x_2 = p(4m), \quad x_3 = p(4m), \quad x_4 = p(5m)$$

de la formule pour la multiplication des fonctions elliptiques (1)

$$p(nu) - p(u) = - \frac{\psi_{n-1}\psi_{n+1}}{\psi_n^2},$$

on déduit que

$$u_0 = (03412) = \frac{\psi_7\psi_9}{\psi_2^3\psi_3^2\psi_4^3\psi_5^2}, \quad v_0 = (04231) = - \frac{\psi_6^2\psi_7\psi_8}{\psi_2^2\psi_3^3\psi_4^3\psi_5^4};$$

mais, étant dans ce cas  $\psi_{11} = 0$ , on a

$$\psi_7 = \frac{\psi_4\psi_6^3}{\psi_5^3}, \quad \psi_8 = \frac{\psi_3\psi_5^5}{\psi_5^5}, \quad \psi_9 = \frac{\psi_2\psi_6^7}{\psi_5^7},$$

en conséquence

$$u_0 = -v_0,$$

et l'équation du 5<sup>e</sup> degré, dont les racines sont les  $x_0, x_1, \dots$  (9), est résoluble algébriquement, comme il est connu.

---

(1) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, I<sup>re</sup> Partie, p. 100.

4. En désignant par A, B, C les invariants des 4<sup>e</sup>, 8<sup>e</sup>, 12<sup>e</sup> degrés d'une forme binaire du 5<sup>e</sup> ordre, on a

$$I = 5^4 \cdot A, \quad \delta^2 = 5^3 (A^2 - 128B),$$

$$K = \frac{4 \cdot 5^3}{3} (3A^3 - 3^2 \cdot 4^2 \cdot AB + 5 \cdot 4^4 \cdot C).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (8), on obtient la relation de condition pour la classe d'équations du 5<sup>e</sup> degré considérée, formée avec les invariants A, B, C.

