Annales scientifiques de l'É.N.S.

P. Duhem

De l'influence que les actions capillaires exercent sur un corps flottant

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 211-226
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__211_0>

DE L'INFLUENCE

QUE

LES ACTIONS CAPILLAIRES

EXERCENT

SUR UN CORPS FLOTTANT,

Par P. DUHEM.

§ I. — Préliminaires.

Imaginons qu'à la surface de séparation de deux fluides incompressibles 1 et 2, flotte un corps solide 3. Soit S_{12} l'aire de la surface de contact des deux fluides 1 et 2; soient S_{13} et S_{23} les aires des surfaces de contact du solide 3 avec les fluides 1 et 2. La partie variable du potentiel thermodynamique interne du système se réduira, selon l'analyse bien connue de Gauss, à

$$\mathcal{F} = A_{12}S_{12} + A_{13}S_{13} + A_{23}S_{23}, \tag{1}$$

A_{pq} étant une quantité qui dépend uniquement de la nature des deux corps p et q. Cette formule suppose invariable la surface qui limite extérieurement les fluides 1 et 2.

Lorsque nous voudrons appliquer au système le principe des travaux virtuels, nous serons amené à étudier la variation infiniment petite

$$\delta\mathcal{F} = A_{12}\delta S_{12} + A_{13}\delta S_{13} + A_{23}\delta S_{23}, \tag{2}$$

qu'éprouve la quantité $\mathcal{F}$ au cours d'une modification virtuelle imposée au système. Cette étude se ramènera à mettre sous une forme commode les quantités δS.

Soit S' l'aire de la surface en laquelle la surface S s'est transformée par la modification : à chaque point M de S faisons correspondre un point M′ de S′, cette correspondance étant assujettie seulement aux conditions suivantes :

1° A toute figure tracée sur S correspond, sur S′, une figure infiniment peu différente.

2° A tout point du bord de l'aire S correspond un point du bord de l'aire S′.

Si les coordonnées du point M sont désignées par x, y, z, celles du point M′ seront désignées par $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$.

Faisons choix, sur la surface S, d'un côté dit positif; soient, en un point M de cette surface, N la demi-normale menée du côté positif, et R et R′ les rayons de courbure principaux, chacun d'eux étant compté positivement lorsque, pour aller de la surface au centre de courbure correspondant, on marche dans le sens de la normale N.

Soient dl un élément du contour de l'aire S; n une demi-droite, normale à dl, tangente à la surface S, et dirigée vers l'intérieur de l'aire S.

On sait que l'on a

$$
(3) \quad \begin{aligned} \delta S = &- \mathbf{S}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)[\cos(N, x)\,\delta x + \cos(N, y)\,\delta y + \cos(N, z)\,\delta z]\,dS \\ &- \int [\cos(n, x)\,\delta x + \cos(n, y)\,\delta y + \cos(n, z)\,\delta z]\,dl. \end{aligned}
$$

Nous désignerons par ρ_1 et ρ_2 les densités invariables des fluides 1 et 2; nous admettrons que les forces extérieures auxquelles sont soumis les divers éléments de ces fluides admettent une fonction potentielle Ψ.

Nous désignerons par X, Y, Z les composantes de la résultante générale, et par L, M, N les composantes de l'axe du couple résultant, auxquelles peuvent se réduire les forces extérieures appliquées au corps solide.

Le travail effectué par les forces extérieures appliquées au système pourra s'écrire

$$
(4) \quad \begin{aligned} d\mathcal{C}_e = &- \int \rho_1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\,\delta z\right) dv_1 \\ &- \int \rho_2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\,\delta z\right) dv_2 \\ &+ X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\,\delta\zeta + L\,\delta\lambda + M\,\delta\mu + M\,\delta\nu. \end{aligned}
$$

Dans cette égalité :

δx, δy, δz sont les composantes du déplacement du point matériel, appartenant à l'un des fluides, dont x, y, z sont les coordonnées initiales;

$\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ sont les composantes de la translation élémentaire suivant les axes Ox, Oy, Oz, et $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ les composantes de la rotation élémentaire autour des axes Ox, Oy, Oz, translation et rotation imposées au solide.

Ces points de départ admis, on peut démontrer, par des méthodes qui sont exposées dans tous les Traités et que nous nous contentons de rappeler, les propositions suivantes :

1° Il existe une fonction $\Pi_1(x, y, z)$, variable d'une manière continue à l'intérieur du fluide 1, telle que l'on ait, en tout point de ce fluide,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} + \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0,\\ &\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} + \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right.$$

Il existe une fonction $\Pi_2(x, y, z)$, variable d'une manière continue à l'intérieur du fluide 2, telle que l'on ait, en tout point de ce fluide,

$$(5\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi_2}{\partial x} + \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} + \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0,\\ &\frac{\partial \Pi_2}{\partial z} + \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right.$$

2° Si l'on prend pour côté positif de la surface S_{12} le côté qui confine au fluide 1, convention que rappellera l'indice 1 affecté aux rayons de courbure, on a, en tout point de la surface S_{12},

$$(6)\qquad \Pi_1 - \Pi_2 = k + A_{12}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}\right),$$

k étant une constante; cette égalité peut encore s'écrire d'une autre manière.

D'après les égalités (5), on a, à l'intérieur du fluide 1,

$$\Pi_1 + \rho_1 \Psi = C_1,$$

C_1 étant une constante; d'après les égalités (5 *bis*), on a, à l'intérieur du fluide 2,

$$\Pi_2 + \rho_2 \Psi = C_2,$$

C_2 étant une constante. Si l'on pose

$$K = C_1 - C_2 - k,$$

l'égalité (6) peut s'écrire

$$(\rho_1 - \rho_2)\Psi + A_{12}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1'}\right) = K. \tag{6 bis}$$

Soit i l'angle de raccordement du fluide 1 avec le solide 3, compté suivant les conventions habituellement acceptées dans l'étude de la capillarité; on aura

$$\cos i = \frac{A_{23} - A_{13}}{A_{12}}. \tag{7}$$

Ces résultats préliminaires rappelés, nous allons aborder le problème dont la solution fait l'objet de ce travail.

§ II. — Équilibre d'un corps flottant à la surface de séparation de deux fluides.

Imaginons que l'on donne au corps solide un déplacement infiniment petit, composé d'une rotation $(\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu)$ et d'une translation $(\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta)$. Un point (x, y, z) de la surface du solide éprouve un déplacement $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ dont les composantes sont

$$\left\{\begin{aligned} \Delta x &= \Delta\xi + z\,\delta\mu - y\,\delta\nu, \\ \Delta y &= \Delta\eta + x\,\delta\nu - z\,\delta\lambda, \\ \Delta z &= \Delta\zeta + y\,\delta\lambda - x\,\delta\mu, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Les fluides, en même temps, se déforment d'une manière quelconque; nous supposerons seulement que la ligne suivant laquelle les fluides 1 et 2 se raccordent avec le solide soit entraînée dans le mouvement du solide; les composantes du déplacement en un point de cette ligne seront alors données par les égalités (8); en outre, les aires S_{13}, S_{23} demeureront invariables.

Nous aurons donc

$$\delta\mathcal{F} = -A_{12} \mathbf{S} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}\right) [\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\, dS_{12}$$
$$- A_{12} \int [\cos(n, x)\,\delta x + \cos(n, y)\,\delta y + \cos(n, z)\,\delta z]\, dl,$$

dl étant un élément de la ligne de raccordement et n la demi-droite normale à cet élément, tangente à la surface S_{12} et dirigée vers l'intérieur de l'aire S_{12}.

En chacun des points de la ligne l, nous pouvons prendre

$$\delta x = \Delta x, \qquad \delta y = \Delta y, \qquad \delta z = \Delta z$$

et écrire, par conséquent, au lieu de l'égalité précédente,

$$(9)\quad \delta\mathcal{F} = -A_{12} \mathbf{S} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1}\right) [\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\, dS_{12}$$
$$\begin{aligned} - A_{12} \int \Big\{ & \cos(n, x)\,\delta\xi + \cos(n, y)\,\delta\eta + \cos(n, z)\,\delta\zeta \\ & + [y\cos(n, z) - z\cos(n, y)]\,\delta\lambda \\ & + [z\cos(n, x) - x\cos(n, z)]\,\delta\mu \\ & + [x\cos(n, y) - y\cos(n, x)]\,\delta\nu \Big\}\, dl. \end{aligned}$$

Les forces extérieures effectuent un travail donné par l'égalité (4); cette égalité peut se transformer. On a, en effet,

$$\begin{aligned} & -\int \rho_1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\,\delta z\right) dv_1 \\ & = \mathbf{S} \rho_1 \Psi [\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\, dS_{12} \\ & + \mathbf{S} \rho_1 \Psi [\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\, dS_{13} \\ & + \int \rho_1 \Psi \left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right) dv_1. \end{aligned}$$

Mais, comme le fluide 1 est incompressible, on a, en tout point du fluide 1,

$$\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z} = 0.$$

En outre, en tout point de la surface S_{12}, on a

$$\begin{aligned}&\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z\\&+ \cos(N_3, x)\,\Delta x + \cos(N_2, y)\,\Delta y + \cos(N_3, z)\,\Delta z = 0.\end{aligned}$$

L'égalité considérée peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}(10)\qquad -\int \rho_1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\,\delta z\right) dv_1&\\
= \mathsf{S}\,\rho_1 \Psi\,[\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\,dS_{12}&\\
- \delta\xi\,\mathsf{S}\,\rho_1 \Psi \cos(N_3, x)\,dS_{13} - \delta\eta\,\mathsf{S}\,\rho_1 \Psi \cos(N_3, y)\,dS_{13}&\\
- \delta\zeta\,\mathsf{S}\,\rho_1 \Psi \cos(N_3, z)\,dS_{13}&\\
- \delta\lambda\,\mathsf{S}\,\rho_1 \Psi\,[y \cos(N_3, z) - z \cos(N_3, y)]\,dS_{13}&\\
- \delta\mu\,\mathsf{S}\,\rho_1 \Psi\,[z \cos(N_3, x) - x \cos(N_3, z)]\,dS_{13}&\\
- \delta\nu\,\mathsf{S}\,\rho_1 \Psi\,[x \cos(N_3, y) - y \cos(N_3, x)]\,dS_{13}.&\end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned}(10\ bis)\qquad \int \rho_2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\partial x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\partial y + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\,\partial z\right) dv_2&\\
= \mathsf{S}\,\rho_2 \Psi\,[\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\,dS_{12}&\\
+ \delta\xi\,\mathsf{S}\,\rho_2 \Psi \cos(N_3, x)\,dS_{23} + \delta\eta\,\mathsf{S}\,\rho_2 \Psi \cos(N_3, y)\,dS_{23}&\\
+ \delta\zeta\,\mathsf{S}\,\rho_2 \Psi \cos(N_3, z)\,dS_{23}&\\
+ \delta\lambda\,\mathsf{S}\,\rho_2 \Psi\,[y \cos(N_3, z) - z \cos(N_3, y)]\,dS_{23}&\\
+ \delta\mu\,\mathsf{S}\,\rho_2 \Psi\,[z \cos(N_3, x) - x \cos(N_3, z)]\,dS_{23}&\\
+ \delta\nu\,\mathsf{S}\,\rho_2 \Psi\,[x \cos(N_3, y) - y \cos(N_3, x)]\,dS_{22}.&\end{aligned}$$

Écrivons maintenant la condition d'équilibre

$$-\delta\mathfrak{F} + d\mathfrak{T}_e = 0,$$

en tenant compte des égalités (4), (6 *bis*), (9), (10) et (10 *bis*). Nous aurons

$$\begin{aligned}
(11)\quad & K \mathbf{S}\left[\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z\right] dS_{12} \\
& + \delta\xi\left[X + A_{12}\int \cos(n, x)\,dl - \mathbf{S}\rho_1 \Psi \cos(N_3, x)\,dS_{13} - \mathbf{S}\rho_2 \Psi \cos(N_3, x)\,dS_{23}\right] \\
& + \delta\eta\left[Y + A_{12}\int \cos(n, y)\,dl - \mathbf{S}\rho_1 \Psi \cos(N_3, y)\,dS_{13} - \mathbf{S}\rho_2 \Psi \cos(N_3, y)\,dS_{23}\right] \\
& + \delta\zeta\left[Z + A_{12}\int \cos(n, z)\,dl - \mathbf{S}\rho_1 \Psi \cos(N_3, z)\,dS_{13} - \mathbf{S}\rho_2 \Psi \cos(N_3, z)\,dS_{23}\right] \\
& + \delta\lambda\Big\{ L + A_{12}\int [y\cos(n, z) - z\cos(n, y)]\,dl \\
& \qquad\qquad - \mathbf{S}\rho_1 \Psi [y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\,dS_{13} \\
& \qquad\qquad - \mathbf{S}\rho_2 \Psi [y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\,dS_{23}\Big\} \\
& + \delta\mu\Big\{ M + A_{12}\int [z\cos(n, x) - x\cos(n, z)]\,dl \\
& \qquad\qquad - \mathbf{S}\rho_1 \Psi [z\cos(N_3, x) - x\cos(N_3, z)]\,dS_{13} \\
& \qquad\qquad - \mathbf{S}\rho_2 \Psi [z\cos(N_3, x) - x\cos(N_3, z)]\,dS_{23}\Big\} \\
& + \delta\nu\Big\{ N + A_{12}\int [x\cos(n, y) - y\cos(n, x)]\,dl \\
& \qquad\qquad - \mathbf{S}\rho_1 \Psi [x\cos(N_3, y) - y\cos(N_3, x)]\,dS_{13} \\
& \qquad\qquad - \mathbf{S}\rho_2 \Psi [x\cos(N_3, y) - y\cos(N_3, x)]\,dS_{23}\Big\} = 0.
\end{aligned}$$

Cette égalité ne doit pas avoir lieu *identiquement;* le volume de chacun des fluides 1 et 2 doit demeurer invariable, condition qui s'exprime, on le voit aisément, par l'égalité

$$(12)\quad \mathop{\mathrm{S}} [\cos(N_1, x)\,\delta x + \cos(N_1, y)\,\delta y + \cos(N_1, z)\,\delta z]\,dS_{12}$$
$$- \delta\xi \mathop{\mathrm{S}} \cos(N_3, x)\,dS_{13} - \delta\eta \mathop{\mathrm{S}} \cos(N_3, y)\,dS_{13} - \delta\zeta \mathop{\mathrm{S}} \cos(N_3, z)\,dS_{13}$$
$$- \delta\lambda \mathop{\mathrm{S}} [y\cos(N_3\, z) - z\cos(N_3, y)]\,dS_{13}$$
$$- \delta\mu \mathop{\mathrm{S}} [z\cos(N_3, x) - x\cos(N_3, z)]\,dS_{13}$$
$$- \delta\nu \mathop{\mathrm{S}} [x\cos(N_3, y) - y\cos(N_3, x)]\,dS_{13} = 0.$$

En vertu de cette égalité (12), le premier membre de l'égalité (11) devient une expression linéaire et homogène en $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$; cette expression doit être égale à 0, quelles que soient les six variables dont elle dépend, ce qui donne les égalités suivantes :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
0 &= X + A_{12}\int \cos(n, x)\,dl - \mathop{\mathrm{S}} (\rho_1\Psi - K)\cos(N_3, x)\,dS_{13} \\
&\qquad - \mathop{\mathrm{S}} \rho_2\Psi \cos(N_3, x)\,dS_{23}, \\
0 &= Y + A_{12}\int \cos(n, y)\,dl - \mathop{\mathrm{S}} (\rho_1\Psi - K)\cos(N_3, y)\,dS_{13} \\
&\qquad - \mathop{\mathrm{S}} \rho_2\Psi \cos(N_3, y)\,dS_{23}, \\
0 &= Z + A_{12}\int \cos(n, z)\,dl - \mathop{\mathrm{S}} (\rho_1\Psi - K)\cos(N_3, z)\,dS_{13} \\
&\qquad - \mathop{\mathrm{S}} \rho_2\Psi \cos(N_3, z)\,dS_{23}.
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}
0 &= L + A_{12}\int [y\cos(n, z) - z\cos(n, y)]\,dl - \mathop{\mathrm{S}} (\rho_1\Psi - K)[y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\,dS_{13} \\
&\qquad - \mathop{\mathrm{S}} \rho_2\Psi[y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\,dS_{23}, \\
0 &= M + A_{12}\int [z\cos(n, x) - x\cos(n, z)]\,dl - \mathop{\mathrm{S}} (\rho_1\Psi - K)[z\cos(N_3, x) - x\cos(N_8, z)]\,dS_{13} \\
&\qquad - \mathop{\mathrm{S}} \rho_2\Psi[z\cos(N_3, x) - x\cos(N_3, z)]\,dS_{23}, \\
0 &= N + A_{12}\int [x\cos(n, y) - y\cos(n, x)]\,dl - \mathop{\mathrm{S}} (\rho_1\Psi - K)[x\cos(N_3, y) - y\cos(N_3, x)]\,dS_{13} \\
&\qquad - \mathop{\mathrm{S}} \rho_2\Psi[x\cos(N_3, y) - y\cos(N_3, x)]\,dS_{23}.
\end{aligned}$$

Telles sont les conditions d'équilibre d'un solide qui flotte à la surface de séparation de deux fluides incompressibles.

Les formules (13) ont été données par divers auteurs; on les trouve, en particulier, dans la *Mechanik* de G. Kirchhoff et dans le *Traité de Capillarité* de E. Mathieu; les formules (14) sont nouvelles.

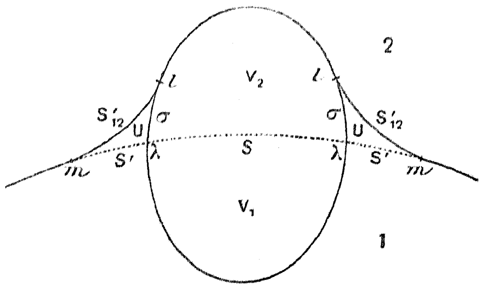
§ III. — Interprétation des conditions précédentes.

Les conditions précédentes sont susceptibles d'une interprétation très simple dans le cas particulier qui est défini par les deux hypothèses suivantes :

1° Dans la région où se trouve le flotteur, les surfaces de niveau $\Psi =$ const. ont une courbure très petite par rapport à la courbure que présente, au voisinage de la ligne d'affleurement du flotteur, la surface de contact des deux fluides.

2° On peut tracer autour du flotteur, sur la surface S_{12} une ligne m (*fig.* 1) au delà de laquelle la surface S_{12} a une très petite courbure;

Fig. 1.



en vertu de l'égalité (6 *bis*), la surface S_{12}, en dehors de la ligne m, coïncidera sensiblement avec la surface de niveau

$$(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K = 0. \tag{15}$$

On pourra, si l'on veut, regarder la surface S_{12} comme se raccordant tangentiellement, le long de la ligne m, avec cette surface de niveau.

Prolongeons la surface de niveau définie par l'égalité (15); elle coupe la surface du solide suivant une ligne λ.

Soient

S l'aire dessinée par la ligne λ sur la surface définie par l'égalité (15);

S' l'aire de la couronne comprise entre les lignes m et λ, sur la même surface;

S'_{12} l'aire de la couronne comprise, sur la surface de contact des deux fluides, entre les lignes l et m;

σ l'aire de la couronne comprise, sur la surface du solide, entre les lignes l et λ.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que l'aire σ fasse partie de l'aire S_{13}; nous désignerons par Σ_{13} ce qui reste de S_{13} lorsqu'on en retranche la couronne σ et par Σ_{23} l'aire S_{23} augmentée de la couronne σ, en sorte que nous aurons

$$\Sigma_{13} = S_{13} - \sigma, \qquad \Sigma_{23} = S_{23} + \sigma.$$

Nous désignerons par V_1 le volume compris entre les surfaces S et Σ_{13}, et nous conviendrons de le nommer *volume déplacé par le solide au sein du liquide* 1.

Nous désignerons par V_2 le volume compris entre les surfaces S et Σ_{23} et nous conviendrons de le nommer *volume déplacé par le solide au sein du liquide* 2.

Nous désignerons par U le volume annulaire limité par les trois couronnes S'_{13}, S', σ; dans le cas où la couronne σ est contiguë au fluide 1, nous le nommerons *volume soulevé par le corps solide;* dans le cas contraire, nous le nommerons *volume déprimé par le corps solide.* Nous raisonnerons dans le premier cas; dans le second cas, il faudrait changer le signe des termes relatifs au volume U que nous introduirons dans nos formules.

Nous aurons évidemment

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\mathop{\mathbf{S}}_{S_{13}} (\rho_1 \Psi - K) \cos(N_3, x)\, dS_{13} + \mathop{\mathbf{S}}_{S_{23}} \rho_2 \Psi \cos(N_3, x)\, dS_{23} \\ &\quad = \mathop{\mathbf{S}}_{\Sigma_{13}} (\rho_1 \Psi - K) \cos(N_3, x)\, d\Sigma_{13} + \mathop{\mathbf{S}}_{\Sigma_{23}} \rho_2 \Psi \cos(N_3, x)\, d\Sigma_{23} \\ &\qquad - \mathop{\mathbf{S}}_{\sigma} [(\rho_1 - \rho_2) \Psi - K] \cos(N_3, x)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Désignons par ν_1, ν_2 les demi-normales à la surface S dirigées respectivement vers l'intérieur des volumes V_1, V_2. Nous aurons

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{\Sigma_{13}} (\rho_1 \Psi - K) \cos(N_3, x)\, d\Sigma_{13} + \mathbf{S}_S (\rho_1 \Psi - K) \cos(\nu_1, x)\, dS = - \int_{V_1} \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} dV_1, \\
&\mathbf{S}_{\Sigma_{23}} \rho_2 \Psi \cos(N_3, x)\, d\Sigma_{23} + \mathbf{S}_S \rho_2 \Psi \cos(\nu_2, x)\, dS = - \int_{V_2} \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} dV_2.
\end{aligned}$$

On a, d'ailleurs, en tout point de la surface S,

$$\cos(\nu_1, x) + \cos(\nu_2, x) = 0, \qquad (\rho_1 - \rho_2)\Psi - K = 0,$$

en sorte que l'égalité (16) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
(17) \quad &\mathbf{S}_{S_{13}} (\rho_1 \Psi - K) \cos(N_3, x)\, dS_{13} + \mathbf{S}_{S_{23}} \rho_2 \Psi \cos(N_3, x)\, dS_{23} \\
&= - \int_{V_1} \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} dV_1 - \int_{V_2} \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} dV_2 + \mathbf{S}_\sigma [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K] \cos(N_3, x)\, d\sigma.
\end{aligned}$$

D'autre part, nous aurons

$$\begin{aligned}
\int_U (\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial \Psi}{\partial x} dU = &\ \mathbf{S}_\sigma [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K] \cos(N_3, x)\, d\sigma \\
&+ \mathbf{S}_{S'} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K] \cos(\nu_1, x)\, dS' \\
&+ \mathbf{S}_{S'_{12}} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K] \cos(N_2, x)\, dS'_{12}.
\end{aligned}$$

Mais l'égalité (6 *bis*) est vérifiée en tout point de la surface S'_{12} et l'égalité (15) en tout point de la surface S'; l'égalité précédente peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}
(18) \quad \int_U (\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial \Psi}{\partial x} dU = &\ \mathbf{S}_\sigma [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K] \cos(N_3, x)\, d\sigma \\
&+ A_{12} \mathbf{S}_{S'_{12}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right) \cos(N_1, x)\, dS'_{12}.
\end{aligned}$$

Imaginons maintenant que tous les points de la couronne S'_{12} éprouvent une même translation parallèle à l'axe des x; l'aire de cette couronne demeurera invariable; exprimons cette condition en faisant usage de l'égalité (3) et nous trouverons l'égalité

$$(19) \quad \mathbf{S}_{S'_{12}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right) \cos(N_1, x)\, dS'_{12} + \int_l \cos(n, x)\, dl + \int_m \cos(n, x)\, dm = 0.$$

La demi-droite n est, en tout point du contour m, normale à l'élément dm, tangente à la surface S_{12} et dirigée vers l'intérieur de l'aire S'_{12}.

Imaginons de même que tous les points de la couronne S' éprouvent une même translation parallèle à l'axe des x; l'aire de cette couronne demeurera invariable; exprimons cette condition en faisant usage de l'égalité (3) et en observant :

1° Que, par hypothèse, la courbure de la surface S' est négligeable;

2° Que les deux surfaces S'_{12}, S' se touchent le long de la ligne m, en sorte qu'en tout point de la ligne m *la même* demi-droite n est normale à la ligne m, tangente aux deux surfaces S_{12}, S', et dirigée à la fois vers l'intérieur de l'aire S'_{12} et vers l'intérieur de l'aire S'.

Nous trouverons l'égalité

$$\int_m \cos(n, x)\, dm + \int_\lambda \cos(n, x)\, d\lambda = 0. \tag{20}$$

En tout point de la ligne λ, la demi-droite n est normale à l'élément $d\lambda$, tangente à la surface S et dirigée vers l'*intérieur* de l'aire S', c'est-à-dire vers l'intérieur de l'aire S.

Les égalités (18), (19), (20) nous donnent l'égalité

$$\begin{aligned}\int_U (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dU = A_{12}\int_\lambda \cos(n, x)\, d\lambda - A_{12}\int_l \cos(n, x)\, dl \\ + \mathbf{S}_\sigma [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K] \cos(N_3, x)\, d\sigma.\end{aligned} \tag{21}$$

En vertu des égalités (17) et (21), la première des égalités (13) devient la première des égalités

$$\left\{\begin{aligned}
0 &= X + \int_{V_1} \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dV_1 + \int_{V_2} \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dV_2 - \int_U (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dU + A_{12}\int_\lambda \cos(n, x)\, d\lambda, \\
0 &= Y + \int_{V_1} \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\, dV_1 + \int_{V_2} \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\, dV_2 - \int_U (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial \Psi}{\partial y}\, dU + A_{12}\int_\lambda \cos(n, y)\, d\lambda, \\
0 &= Z + \int_{V_1} \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\, dV_1 + \int_{V_2} \rho_2 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\, dV_2 - \int_U (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial \Psi}{\partial z}\, dU + A_{12}\int_\lambda \cos(n, z)\, d\lambda.
\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Les deux autres se déduisent d'une manière analogue des deux dernières égalités (13).

Transformons de même les égalités (14).

Nous aurons évidemment, par un raisonnement analogue à celui qui a fourni l'égalité (17),

$$
\begin{aligned}
(23)\qquad & \mathop{\mathbf{S}}_{S_{13}} (\rho_1 \Psi - K)[y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\, dS_{13} \\
& \quad + \mathop{\mathbf{S}}_{S_{23}} \rho_2 \Psi [y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\, dS_{23} \\
& = -\int_{V_1} \rho_1 \left(y\frac{\partial \Psi}{\partial z} - z\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dV_1 - \int_{V_2} \rho_2 \left(y\frac{\partial \Psi}{\partial z} - z\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dV_2 \\
& \quad + \mathop{\mathbf{S}}_{\sigma} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K][y\cos(N_2, z) - z\cos(N_3, y)]\, d\sigma.
\end{aligned}
$$

D'autre part, nous aurons

$$
\begin{aligned}
& \int_U (\rho_1 - \rho_2) \left(y\frac{\partial \Psi}{\partial z} - z\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dU \\
& = \mathop{\mathbf{S}}_{\sigma} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K][y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\, d\sigma \\
& \quad + \mathop{\mathbf{S}}_{S'} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K][y\cos(\nu_1, z) - z\cos(\nu_1, y)]\, dS' \\
& \quad + \mathop{\mathbf{S}}_{S'_{12}} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K][y\cos(N_2, z) - z\cos(N_2, y)]\, dS'_{12}.
\end{aligned}
$$

L'égalité (6 *bis*) étant vérifiée en tout point de la surface S'_{12} et l'égalité (15) en tout point de la surface S', l'égalité précédente peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
(24)\qquad & \int_U (\rho_1 - \rho_2) \left(y\frac{\partial \Psi}{\partial z} - z\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dU \\
& = \mathop{\mathbf{S}}_{\sigma} [(\rho_1 - \rho_2)\Psi - K][y\cos(N_3, z) - z\cos(N_3, y)]\, d\sigma \\
& \quad + A_{12} \mathop{\mathbf{S}}_{S'_{12}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} \right) [y\cos(N_1, z) - z\cos(N_1, y)]\, dS'_{12}.
\end{aligned}
$$

Exprimons maintenant qu'une rotation autour de l'axe des x n'altère ni l'aire de la couronne S'_{12}, ni l'aire de la couronne S', et nous trouverons les deux égalités

$$\mathrm{S}_{S'_{12}}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R'_1}\right)[y\cos(N_1,z)-z\cos(N_1,y)]\,dS'_{12}$$
$$+\int_l [y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,dl+\int_m [y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,dm=0$$

et

$$\int_m [y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,dm+\int_\lambda [y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,d\lambda=0.$$

Moyennant ces égalités, l'égalité (24) devient

$$(25)\quad \int_U(\rho_1-\rho_2)\left(y\frac{\partial\Psi}{\partial z}-z\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dU$$
$$=\mathrm{S}_\sigma[(\rho_1-\rho_2)\Psi-K][y\cos(N_3,z)-z\cos(N_3,y)]\,d\sigma$$
$$+A_{12}\int_\lambda [y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,d\lambda-A_{12}\int_l [y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,dl.$$

En vertu des égalités (23) et (25), la première des égalités (14) devient la première des égalités

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
0=L&+\int_{V_1}\rho_1\left(y\frac{\partial\Psi}{\partial z}-z\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dV_1+\int_{V_2}\rho_2\left(y\frac{\partial\Psi}{\partial z}-z\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dV_2\\
&-\int_U(\rho_1-\rho_2)\left(y\frac{\partial\Psi}{\partial z}-z\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dU+A_{12}\int_\lambda [y\cos(n,z)-z\cos(n,y)]\,d\lambda,\\
0=M&+\int_{V_1}\rho_1\left(z\frac{\partial\Psi}{\partial x}-x\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dV_1+\int_{V_2}\rho_2\left(z\frac{\partial\Psi}{\partial x}-x\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dV_2\\
&-\int_U(\rho_1-\rho_2)\left(z\frac{\partial\Psi}{\partial x}-x\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dU+A_{12}\int_\lambda [z\cos(n,x)-x\cos(n,z)]\,d\lambda,\\
0=N&+\int_{V_1}\rho_1\left(x\frac{\partial\Psi}{\partial y}-y\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dV_1+\int_{V_2}\rho_2\left(x\frac{\partial\Psi}{\partial y}-y\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dV_2\\
&-\int_U(\rho_1-\rho_2)\left(x\frac{\partial\Psi}{\partial y}-y\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dU+A_{12}\int_\lambda [x\cos(n,y)-y\cos(n,x)]\,d\lambda.
\end{aligned}\right.$$

Les deux autres se déduisent de même des deux dernières égalités (14).

Les égalités (22) et (26) mettent en évidence le théorème suivant que nous avions en vue de démontrer :

Lorsqu'un solide flotte à la surface de séparation de deux fluides incompressibles, soumis aux forces capillaires, il peut être regardé comme éprouvant, de la part de ces fluides, des actions qui se partagent en trois groupes :

1° Actions du premier groupe. — *Pour les obtenir, on remplit avec le fluide* 1 *le volume* V_1 *que le solide déplace à l'intérieur du fluide* 1, *et avec le fluide* 2, *le volume* V_2 *que le solide déplace à l'intérieur du fluide* 2; *on détermine les actions extérieures de fonction potentielle* Ψ, *auxquelles seraient soumis les divers éléments de volume de ces fluides; on renverse le sens de ces actions et on les compose comme si elles agissaient sur le corps solide*. Ces actions sont celles que donnerait la généralisation du principe d'Archimède.

2° Actions du second groupe. — *Pour les obtenir, on remplace le volume* U *du liquide* 1, *que le solide soulève, par un corps solide ayant pour densité* $(\rho_1 - \rho_2)$, *et l'on détermine les actions que ce solide, supposé invariablement lié au solide* 3, *subit de la part de forces extérieures ayant pour fonction potentielle* Ψ. *Dans le cas où le solide déprime le fluide* 1, *le sens de ces actions doit être changé.*

3° Actions du troisième groupe. — *Pour les obtenir, on applique une force, de grandeur* $A_{12}\,d\lambda$, *à chaque élément de la ligne* λ *suivant laquelle la surface de niveau* S *coupe le solide; cette force est normale à l'élément* $d\lambda$, *tangente à la surface* S, *et dirigée de l'intérieur du solide vers l'extérieur.*

Dans le cas où les forces extérieures agissantes se réduisent à la pesanteur, les actions du troisième groupe n'ont pas de composante verticale; pour calculer la poussée verticale éprouvée par le solide, il suffit de tenir compte des actions des deux premiers groupes; on retrouve alors un théorème que Laplace avait donné pour un corps cylindrique à axe vertical, que Poisson avait étendu à un corps de révolution à axe vertical, et que E. Mathieu avait démontré d'une manière entièrement générale.

Non seulement, dans ce cas, les actions du troisième groupe n'ont pas de composante verticale, mais encore on démontre aisément qu'elles se font équilibre; l'action du fluide sur le corps solide se réduit donc à la poussée verticale calculée par Laplace, Poisson et E. Mathieu; ce théorème n'avait pas été démontré jusqu'ici, du moins à notre connaissance.