ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. GRÉVY

Étude sur les équations fonctionnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 11 (1894), p. 249-323

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1894_3_11__249_0>

ÉTUDE

SUR LES

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES,

PAR M. A. GRÉVY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

1. La suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ est dite converger régulièrement vers une limite x, lorsqu'à un nombre positif ε, aussi petit que l'on voudra, on peut en faire correspondre un autre N_ε, assez grand pour que, sous la seule condition $p \geqq N_\varepsilon$, on ait

$$|\alpha_p - x| < \varepsilon.$$

Lorsque la suite proposée ne présente pas ce caractère, mais que la suite que l'on en déduit, en prenant les termes de k en k, le présente, on dit que la suite converge périodiquement vers la limite x; k est la période.

2. Soit une fonction $\varphi(z)$ uniforme dans tout l'intérieur d'une région R du plan et jouissant de la propriété que, si z est l'affixe d'un point intérieur à cette région, $z_1 = \varphi(z)$ est également l'affixe d'un point intérieur à la région; si nous posons $z_{i+1} = \varphi(z_i)$, les points dont les affixes sont

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_p, \quad \ldots$$

sont tous intérieurs à la région R.

M. Kœnigs a établi à l'égard de cette fonction la proposition suivante, qui sert de base à ce travail :

Lorsque la suite $z_1, z_2, \ldots, z_p$ converge régulièrement vers une limite x, qui n'est pas pour $\varphi(z)$ un point essentiel, x est une racine de la fonction $\varphi(z) - z$ et cette racine doit vérifier l'inégalité

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

Réciproquement, soit x une racine de $\varphi(z) - z$, vérifiant l'inégalité $|\varphi'(x)| < 1$, le point d'affixe x est centre d'un cercle C_x, à l'intérieur duquel : 1° $\varphi(z)$ est holomorphe; 2° le module de $\frac{\varphi(z) - x}{z - x}$ reste constamment inférieur à l'unité et diffère même de l'unité d'une quantité qui reste finie.

En appelant H une quantité comprise entre 0 et 1, on peut poser

$$\left|\frac{z_1 - x}{z - x}\right| < \mathrm{H}, \quad \ldots, \quad \left|\frac{z_{p+1} - x}{z_p - x}\right| < \mathrm{H},$$

d'où l'on déduit

$$\left|\frac{z_{p+1} - x}{z - x}\right| < \mathrm{H}^{p+1}, \qquad |z_{p+1} - x| < \mathrm{H}^{p+1} r,$$

r étant le rayon du cercle C_x.

Or, ε étant une quantité positive si petite que l'on voudra, posons

$$\mathrm{N}_\varepsilon = \text{partie entière de } \frac{\mathrm{L}\dfrac{r}{1+\varepsilon}}{\mathrm{L}\dfrac{1}{\mathrm{H}}}.$$

Si l'on prend $p \geqq \mathrm{N}_\varepsilon$, le module de $z_p - x$ sera constamment inférieur à x, ce qui démontre la convergence régulière de la suite $z_1, z_2, \ldots, z_p$.

3. Ce qui précède conduit à une notion importante, dont nous ferons usage dans la suite.

Soit Γ_ε un cercle concentrique au cercle C_x et de rayon ε inférieur à r; après N_ε substitutions relatives à un point intérieur à C_x, on trouvera un point d'affixe $z_{\mathrm{N}_\varepsilon}$ intérieur au cercle Γ_ε.

Le nombre N_ε de substitutions nécessaires et suffisantes pour conduire d'un point z du cercle C_x à un point intérieur au cercle Γ_ε s'appelle la hauteur du point z par rapport au cercle Γ_ε; ce nombre est fini et parfaitement déterminé pour chaque point intérieur au cercle C_x.

Si une fonction $\theta(z)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle Γ_ε, la fonction $\theta(z_i)$ sera holomorphe dans tout le cercle C_x, si i est au moins égal à la hauteur maxima des points intérieurs au cercle C_x par rapport au cercle Γ_ε.

4. Je vais montrer comment on peut déterminer le cercle C_x en choisissant un exemple simple, dont nous aurons à nous occuper plus tard.

Considérons la fonction

$$\varphi(z) = \frac{bz}{1 - \frac{z}{r}},$$

b étant une constante de module inférieur à l'unité; je supposerai même, ce qui ne changera rien aux résultats que j'ai en vue, que b est un nombre compris entre o et 1.

L'équation $\varphi(x) = x$ a pour solutions

$$0 \quad \text{et} \quad r(1-b),$$

et l'on a

$$\varphi'(0) = b, \qquad \varphi'[r(1-b)] = \frac{1}{b}.$$

Le seul point limite à convergence régulière est ici l'origine; l'autre solution donnerait un point limite pour la substitution inverse.

Si l'on suppose r réel et positif, la fonction $\varphi(z)$ est holomorphe dans le cercle C du rayon r dont le centre est l'origine.

Cherchons maintenant le rayon du cercle C_x; pour tous les points intérieurs à ce cercle, on doit avoir

$$\left| \frac{bz}{1 - \frac{z}{r}} \right| < |z|,$$

$$br < |r - z|.$$

Le point d'affixe z doit donc être extérieur à un cercle de rayon br et dont le centre A est le point d'affixe r.

On voit donc que tous les points intérieurs à un cercle de centre O et de rayon $r(1-b)$ sont tels que $\varphi(z)$ est holomorphe et que $|z_1|<|z|$.

Ce cercle est donc le cercle C_x; car, si l'on prend un cercle de centre O et de rayon supérieur à $r(1-b)$, les deux propriétés précédentes ne subsistent pas pour tous les points intérieurs à ce second cercle.

Nous pouvons d'ailleurs calculer aisément les valeurs de $z_1, z_2, \ldots, z_p$; on trouve ainsi

$$z_n = \frac{b^{n+1}z}{1-\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}\dfrac{z}{r}}.$$

Cette fonction, holomorphe dans le cercle C_x, a ses dérivées holomorphes dans le même cercle; de plus, pour $z=0$, cette fonction a ses dérivées toujours positives.

On sait, d'après les résultats obtenus par M. Kœnigs, qu'il existe une fonction holomorphe dans le cercle C_x, qui satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f\left(\frac{bz}{1-\dfrac{z}{r}}\right) = bf(z).$$

Cette fonction est, à un facteur constant près,

$$\frac{bz}{1-\dfrac{z}{r(1-b)}}.$$

5. Généralisant ces résultats, nous allons former une fonction holomorphe dans le cercle C_x et satisfaisant à une équation linéaire homogène par rapport à cette fonction et ses transformées au moyen de la fonction $\varphi(z)$.

Posons

$$f(z) = \frac{1}{1-\dfrac{z}{r(1-b)}},$$

$$f(z_1) = \frac{1-\dfrac{z}{r}}{1-\dfrac{z}{r(1-b)}},$$

et d'une façon générale

$$f(z_n) = \frac{1 - \frac{z}{r}\frac{1-b^n}{1-b}}{1 - \frac{z}{r(1-b)}},$$

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ étant les transformés de z.

Pour trouver $f(z_n)$, supposons que l'on ait

$$f(z_{n-1}) = \frac{1 - \frac{z}{r}\frac{1-b^{n-1}}{1-b}}{1 - \frac{z}{r(1-b)}}.$$

Substituant z_1 à z, on trouve

$$f(z_n) = \frac{1 - \frac{1-b^{n-1}}{1-b}\frac{bz}{r\left(1-\frac{z}{r}\right)}}{1 - \frac{bz}{r(1-b)}\frac{1}{1-\frac{z}{r}}} = \frac{1 - \frac{z}{r}\left[1 + \frac{b-b^n}{1-b}\right]}{1 - \frac{z}{r}\left[1 + \frac{b}{(1-b)}\right]} = \frac{1 - \frac{z}{r}\frac{1-b^n}{1-b}}{1 - \frac{z}{r(1-b)}}.$$

Cette relation, ayant lieu pour $n = 1$, aura lieu pour $n = 2, \ldots,$ et sera générale.

Soient maintenant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des constantes dont la somme est égale à 1; on a identiquement

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{r(1-b)}} = \frac{\lambda_1}{1 - \frac{z}{r}} \frac{1 - \frac{z}{r}}{1 - \frac{z}{r(1-b)}} + \ldots + \frac{\lambda_n}{1 - \frac{z}{r}\frac{1-b^n}{1-b}} \frac{1 - \frac{z}{r}\frac{1-b^n}{1-b}}{1 - \frac{z}{r(1-b)}}$$

ou

$$f(z) = \frac{\lambda_1}{1-\frac{z}{r}} f(z_1) + \ldots + \frac{\lambda_n}{1 - \frac{z}{r}\frac{1-b^n}{1-b}} f(z_n),$$

les coefficients de $f(z_1), \ldots, f(z_n)$ étant holomorphes dans le cercle C_x et tels que la somme de leurs valeurs pour $z = 0$ soit égale à 1.

Nous pouvons, de plus, remarquer que les fonctions

$$\frac{1}{1-\frac{z}{r}\frac{1-b^i}{1-b}},$$

égales à l'unité pour $z=0$, ont pour cette même valeur de z leurs dérivées toutes positives, le coefficient $\frac{1-b^i}{1-b}$ étant positif.

Supposons de plus que les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ soient toutes positives; nous aurons alors formé une fonction

$$f(z)=\frac{1}{1-\frac{z}{r(1-b)}}.$$

Satisfaisant à une équation fonctionnelle

$$f(z)=P_1 f(z_1)+P_2 f(z_1)+\ldots+P_n f(z_n)$$

dont les coefficients holomorphes dans le cercle C_x sont, ainsi que leurs dérivées, positifs pour la valeur $z=0$.

De plus, la fonction de transformation $\varphi(z)=\frac{bz}{1-\frac{z}{r}}$ a ses dérivées toutes positives pour cette même valeur $z=0$.

CHAPITRE I.

1. Soit $\varphi(z)$ une fonction de transformation et x un point limite à convergence régulière; nous nous proposons de rechercher s'il existe une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle C_x satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$p_0(z)f(z_0)+p_1(z)f(z_1)+\ldots+p_n(z)f(z_n)=0,$$

dans laquelle $p_0, \ldots, p_n$ sont des fonctions holomorphes dans le cercle C_x.

La recherche de telles fonctions repose sur le théorème suivant :

Si le coefficient $p_0(z)$ ne s'annule pas au point x, et si l'on a la relation

$$p_0(x)+p_1(x)+\ldots+p_n(x)=0,$$

si, de plus, il n'existe aucune relation de la forme

$$p_0(x)+p_1(x)\,\varphi'^{\alpha}(x)+p_2(x)\,\varphi'^{2\alpha}(x)+\ldots+p_n(x)\,\varphi'^{n\alpha}(x)=0,$$

α étant entier positif, l'équation fonctionnelle admet une solution holomorphe dans le domaine du point x et ne s'annulant pas en ce point; sa valeur en ce point est d'ailleurs arbitraire.

Avant d'établir cette proposition, je remarque que je puis, sans restreindre la généralité, supposer que le point x est l'origine, en prenant alors pour z la valeur $z'+x$; cela revient à faire un changement d'origine; les transformés $z'_1, z'_2, \ldots$ seront

$$z'_1=z_1-x, \qquad z'_2=z_2-x, \qquad \ldots,$$
$$z'_1=\varphi(z'+x)-x, \qquad z'_2=\varphi(z'_1+x)-x.$$

Dans ces conditions, la fonction de transformation est nulle à l'origine.

Je mettrai de plus l'équation fonctionnelle sous la forme

$$(1) \qquad y=\pi_1(z)y_1+\pi_2(z)y_2+\ldots+\pi_n(z)y_n,$$

en posant

$$y_i=f(z_i), \qquad \pi_i=-\frac{p_i}{p_0}.$$

S'il existe une fonction holomorphe y satisfaisant à cette équation, nous pourrons la développer en série ordonnée suivant les puissances entières, positives de z et, pour avoir les coefficients de cette série, il suffira de connaître les quantités

$$y(0), \quad y'(0), \quad \ldots, \quad y^{(i)}(0), \quad \ldots.$$

Nous pouvons, en supposant toujours y holomorphe, différentier les deux membres de l'équation (1).

En différentiant i fois par rapport à z, nous obtenons des relations entre les fonctions $y, y_1, \ldots, y_n$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre i; cherchons les termes qui contiennent les dérivées d'ordre i, dans la dernière de ces relations; en différentiant $\pi_j y_j$, on trouve

$$\pi_j \frac{d^i y_j}{dz^i} + i \frac{d\pi_j}{dz} \frac{d^{i-1} y_j}{dz^{i-1}} + \ldots.$$

Le premier terme donne seul la dérivée d'ordre i de y_j; on a d'ailleurs

$$\frac{d^i y_j}{dz^i} = \frac{d^i y_j}{dz_j^i} \left(\frac{dz_j}{dz_{j-1}} \frac{dz_{j-1}}{d_{j-2}} \cdots \frac{dz_1}{dz} \right)^i + \mathrm{P},$$

P ne contenant que des dérivées de y_j d'ordre inférieur à i, et les contenant linéairement.

Si l'on fait ensuite dans l'équation obtenue $z = 0$, on a

$$\left(\frac{d^i y_j}{dz_j^i} \right)_0 = \left(\frac{d^i y}{dz^i} \right)_0, \qquad \left(\frac{dz_j}{dz_{j-1}} \right) = \varphi'(0).$$

On voit donc que, en réunissant les dérivées de même ordre, la quantité $\left(\frac{d^i y}{dz^i} \right)_0$ est fonction linéaire et homogène des quantités

$$y_0, \quad \left(\frac{dy}{dz} \right)_0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{d^{i-1} y}{dz^{i-1}} \right)_0$$

Si donc on connaît $y_0, \left(\frac{dy}{dz} \right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{i-1} y}{dz^{i-1}} \right)_0$, on pourra calculer $\left(\frac{d^i y}{dz^i} \right)_0$, à moins que la relation trouvée ne se réduise à une identité; il est aisé de voir que cela n'a pas lieu en général; calculons, en effet, le coefficient de $\left(\frac{d^i y}{dz^i} \right)_0$. Le terme $\pi_j y_j$ fournit le coefficient

$$\pi_j(0) \left(\frac{dz_j}{dz_{j-1}} \right)_0^i \cdot \left(\frac{dz_{j-1}}{dz_{j-2}} \right)_0^i \cdots \left(\frac{dz_1}{dz} \right)_0^i = \pi_j(0) \varphi'^{ji}(0).$$

Réunissant ces coefficients dans le premier membre, on voit que le coefficient de $\left(\frac{d^i y}{dz^i} \right)_0$ est

$$1 - \pi_1(0) \varphi'^i(0) - \ldots - \pi_j(0) \varphi'^{ij}(0) - \ldots - \pi_n(0) \varphi'^{ni}(0),$$

quantité qui a été supposée différente de zéro.

Ainsi, nous pouvons calculer $\left(\frac{d^i y}{dz^i}\right)_0$ par récurrence.

Il suffit de connaître y_0 pour en déduire les valeurs des dérivées pour $z = 0$.

Pour avoir y_0, il semble que l'on doive faire $z = 0$ dans l'équation fonctionnelle, il vient alors

$$y_0[1 - \pi_1(0) - \pi_2(0) - \ldots - \pi_n(0)] = 0;$$

la quantité entre crochets étant nulle, on voit que y_0 est arbitraire; toutefois, nous prendrons pour y_0 une valeur différente de zéro, sans quoi, les dérivées y'_0, ... seraient nulles, et il n'y aurait pas de fonction satisfaisant à l'équation fonctionnelle.

2. Après avoir ainsi calculé les coefficients de la série y, il faut établir que cette série est absolument convergente dans le domaine du point origine : elle représentera alors une fonction holomorphe dans cette région; il restera à montrer que la fonction ainsi définie vérifie l'équation fonctionnelle.

Pour établir que la série formée est absolument convergente, il suffira, suivant une méthode classique, de la comparer à une série de même nature, et que l'on sait être absolument convergente.

La fonction $\frac{1}{1 - \frac{z}{r(1-b)}}$, holomorphe dans un cercle de rayon $r(1-b)$ et dont le centre est l'origine, est développable en série absolument convergente dans ce cercle; cette fonction satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\text{(2)} \qquad Y = P_1 Y_1 + P_2 Y_2 + \ldots + P_n Y_n,$$

dans laquelle $P_i = \frac{\lambda_i}{1 - \frac{z}{r}\frac{1-b^i}{1-b}}$.

Nous pouvons d'ailleurs calculer les coefficients de la série au moyen de l'équation (2) par le procédé indiqué plus haut; les valeurs trouvées étant uniques, nous sommes assurés que ce seront bien les coefficients du développement de $\frac{1}{1 - \frac{z}{r(1-b)}}$, si l'on donne à $Y(0)$ la valeur 1.

Nous voyons que les relations qui fournissent

$$\left(\frac{d^i Y}{dz^i}\right)_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^i y}{dz^i}\right)_0$$

ne diffèrent que par le changement de P_i en π_i et de $\dfrac{bz}{1-\dfrac{z}{r}}$ en $\varphi(z)$.

Je poserai, pour simplifier, $\Phi(z) = \dfrac{bz}{1-\dfrac{z}{r}}$ et je supposerai $b > |\varphi'(0)|$, ce qui est possible, $\varphi'(0)$ ayant un module inférieur à l'unité et b étant quelconque et assujetti à la seule condition d'être inférieur à l'unité.

Ceci posé, comparons les valeurs trouvées pour

$$\left(\frac{d^i Y}{dz^i}\right)_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^i y}{dz^i}\right)_0.$$

Le coefficient de $\left(\dfrac{d^i Y}{dz^i}\right)_0$ est

$$1 - P_1(0)b^i - P_2(0)b^{2i} - \ldots - P_n(0)b^{ni}.$$

$P_1(0), \ldots, P_n(0)$ étant par hypothèse des quantités positives, la quantité $P_1(0)b^i + \ldots + P_n(0)b^{ni}$ décroît constamment quand i augmente, puisque b est inférieur à l'unité et cette quantité, égale à 1 si $i = 0$, est constamment positive; le coefficient considéré est donc toujours inférieur à 1, croît avec i et tend vers l'unité si i augmente indéfiniment.

Le coefficient de $\left(\dfrac{d^i y}{dz^i}\right)_0$ est

$$1 - p_1(0)\varphi'^i(0) - \ldots - p_n(0)\varphi'^{ni}(0).$$

Ce coefficient n'est jamais nul par hypothèse, si i est différent de zéro; d'autre part, il diffère de zéro d'une quantité qui reste finie; en effet, i étant un nombre fini, le polynome en $\varphi'(0)$ n'est pas nul : il diffère donc de zéro d'une quantité finie; son module est supérieur à un certain nombre α; si i augmente indéfiniment, ce module diffère de l'unité de moins en moins; on peut donc écrire

$$|1 - p_1(0)\varphi'^i(0) - \ldots - p_n(0)\varphi'^{ni}(0)| > \alpha > \alpha|1 - P_1(0)b^i - \ldots - P_n(0)b^{ni}|.$$

Examinons maintenant les numérateurs des expressions de

$$\left(\frac{d^i Y}{dz^i}\right)_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^i y}{dz^i}\right)_0.$$

Les termes de ces numérateurs diffèrent par le changement de P en π et de Φ en φ.

Soit ρ le rayon d'un cercle de centre O dans lequel $\pi_1, \ldots, \pi_n$ sont holomorphes, et appelons M_j le module maximum de π_j dans ce cercle, on a

$$\left|\frac{d^k \pi_j}{dz^k}\right|_0 < \frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{M_j}{1-\frac{z}{\rho}}\right)_0 < 1.2\ldots k\frac{M_j}{\rho^k}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{M_j}{\lambda_j}\left(\frac{d^k P_j}{dz^k}\right)_0 = M_j 1.2\ldots k\frac{1}{r^k\left(\frac{1-b}{1-b^j}\right)^k}.$$

Posons

$$\frac{1}{\rho^k} < \frac{1}{r^k\left(\frac{1-b}{1-b^j}\right)^k}.$$

On aura alors

$$\left|\frac{d^k \pi_j}{dz^k}\right|_0 < \left|\frac{d^k}{dz^k}\,\frac{M_j P_j}{\lambda_i}\right|_0.$$

L'inégalité écrite plus haut sera vérifiée pour toutes les valeurs de j, si l'on a

$$r \leqq \rho.$$

Nous pouvons établir une relation du même genre entre φ et Φ; remarquons que le module maximum de φ est ρ : on a donc

$$\left|\frac{d^k \varphi}{dz^k}\right|_0 < \frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{\rho}{1-\frac{z}{\rho}}\right)_0 < 1.2\ldots k\frac{\rho}{\rho^k},$$

$$\left|\frac{d^k \Phi}{dz^k}\right|_0 = 1.2\ldots k\frac{br}{r^k}.$$

Posons

$$\frac{br}{r^k} > \frac{\rho}{\rho^k},$$

inégalité toujours satisfaite, si l'on prend

$$r < \rho b,$$

sauf pour $k = 1$; mais, dans ce cas, nous savons que $|\varphi'(0)| < b$; on a donc bien dans tous les cas

$$\left|\frac{d^k\varphi}{dz^k}\right|_0 < \left|\frac{d^k\Phi}{dz^k}\right|_0.$$

Ces inégalités étant établies, désignons par M le plus grand des nombres $\frac{M_k}{\lambda_k}$ et donnons à y_0 une valeur dont le module ne soit pas supérieur à l'unité; la valeur de y'_0 sera de la forme $\frac{\mu_1}{\nu_1}$; celle de Y'_0 sera de la forme $\frac{\mu'_1}{\nu'_1}$. Si l'on remarque que le module de la somme est plus grand que la somme des modules et que tous les termes de μ'_1 sont positifs, et que ceux de μ_1 renferment π_i et les dérivées linéairement, on peut écrire

$$|\nu_1| > \alpha\nu'_1, \qquad |\mu_1| < M\mu'_1, \qquad \left|\frac{\mu_1}{\nu_1}\right| < \frac{\mu'_1}{\nu'_1}\frac{M}{\alpha},$$

$$|y'_0| < Y'_0\frac{M}{\alpha}.$$

Le numérateur de y''_0 renferme linéairement π et ses dérivées, ainsi que y'_0; mais il renferme les produits de y'_0 par π ou ses dérivées, de telle sorte que les termes du numérateur de Y''_0 sont supérieurs aux modules des termes de y''_0 multipliés par $\frac{\alpha}{M}\frac{1}{M} = \frac{\alpha}{M^2}$. On aura donc

$$|y''_0| < \frac{M^2}{\alpha^2}Y''_0,$$

et d'une façon générale on a

$$|y_0^{(k)}| < \frac{M^k}{\alpha^k}Y_{(0)}^{(k)}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de comparer les deux séries formées.

La série

$$y_0 + z\frac{y'_0}{1} + z^2\frac{y''_0}{1.2} + \ldots$$

a ses termes de module respectivement inférieurs à ceux de la série

$$Y_0 + z\frac{Y'_0 M}{1\,\alpha} + \frac{z^2}{1.2}\,\frac{Y''_0 M^2}{\alpha^2} + \ldots.$$

Cette seconde série étant convergente dans le cercle de rayon

$$\frac{r(1-b)\alpha}{M} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho b(1-b)\alpha}{M},$$

il en sera de même pour la série proposée, qui représente dès lors une fonction holomorphe dans ce cercle.

3. Pour démontrer complètement notre proposition, il reste à établir que la fonction définie plus haut est une solution de l'équation fonctionnelle.

Les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n$, étant des fonctions holomorphes de z dans le cercle C_x, sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières, positives de z, dans ce cercle et par suite dans le cercle de convergence de la série y formée plus haut.

Soit

$$z_i = a_1^i z + a_2^i z^2 + \ldots + a_k^i z^k + \ldots,$$

$z_1, z_2 \ldots, z_n$ ayant un module inférieur à celui de z, la série

$$y_i = y_0 + \frac{z_i}{1} y'_0 + \frac{z_i^2}{1.2} y''_0 + \ldots$$

est absolument convergente dans le cercle considéré; cette série, considérée comme série à double entrée, est donc une série absolument convergente ordonnée suivant les puissances positives, entières de z.

Les termes $\pi_i y_i$, produits de deux séries absolument convergentes, sont des séries absolument convergentes, et le second membre de l'équation est alors développable en série absolument convergente; quant au premier membre, il se réduit à la série

$$y_0 + \frac{z}{1} y'_0 + \frac{z^2}{1.2} y''_0 + \ldots.$$

Voyons s'il y a identité entre les séries qui figurent dans les deux membres de l'équation fonctionnelle.

Nous aurons

$$y_0 = \Sigma \pi_i y_0,$$
$$y'_0 = \Sigma \pi_i(0) y'_0 a_1^i + \Sigma \pi'_i(0) y_0 = \Sigma \pi_i(0) y'_0 [\varphi'_i(0)]^i + \Sigma \pi'_i(0) y_0.$$

Ce sont les équations qui nous ont fourni les valeurs y_0, y'_0, ...

4. L'existence d'une fonction holomorphe non nulle à l'origine est donc établie dans un cercle de Γ de rayon $\rho \frac{(1-b)b_\alpha}{M}$, b étant un nombre inférieur à 1 et supérieur à $|\varphi'(0)|$; on peut étendre cette définition de la fonction y à tout le cercle C_ρ de rayon ρ, intérieur au cercle C_x et dans lequel les coefficients π_i sont holomorphes; C_ρ peut d'ailleurs coïncider avec C_x.

Soit z un point de hauteur égale à l'unité par rapport au cercle Γ, ce point étant intérieur au cercle C_ρ; les points z_1, z_2, ... sont tous intérieurs au cercle Γ; la fonction $f(z)$ définie plus haut est donc définie pour les points z_1, ..., z_n; les expressions

$$f(z_1), \quad f(z_2), \quad \ldots, \quad f(z_n)$$

ont un sens bien déterminé et sont holomorphes dans les domaines z_1, z_2, ..., z_n; la fonction

$$\pi_1(z) f(z_1) + \ldots + \pi_n(z) f(z_n)$$

est définie et est holomorphe dans le domaine du point z, pourvu que tous les points de ce domaine aient une hauteur au plus égale à 1 par rapport au cercle Γ.

Désignons cette fonction par $F(z)$; pour établir que cette fonction satisfait à l'équation fonctionnelle, il suffit de montrer que l'on a

$$F(z_1) = f(z_1).$$

Formons $F(z_1)$

$$F(z_1) = \pi_1(z_1) f(z_2) + \pi_2(z_1) f(z_3) + \ldots + \pi_n(z_1) f(z_{n+1});$$

d'autre part, la fonction $f(z_1)$ satisfaisant à l'équation

$$f(z_1) = \pi_1(z_1) f(z_2) + \ldots + \pi_n(z_1) f(z_{n+1}),$$

on a bien l'identité

$$F(z_1) = f(z_1).$$

Ce raisonnement peut être alors appliqué aux points de hauteur 2, 3, ... par rapport au cercle Γ et montre que l'on peut étendre à tout le cercle C_ρ la définition de la fonction $f(z)$.

5. Nous avons supposé jusqu'ici que les coefficients $\pi_1(z)$, ..., $\pi_n(z)$ étaient holomorphes dans le cercle C_ρ; si C_ρ coïncide avec C_x, le théorème est complètement établi; si C_ρ est intérieur à C_x, il nous reste à examiner ce que devient la fonction $f(x)$ dans l'aire comprise entre ces deux cercles.

Soit A un point singulier (pôle ou point essentiel) des coefficients $\pi_1(z)$, ..., $\pi_n(z)$; je suppose qu'il n'existe aucun point singulier de module inférieur; décrivons un cercle Γ' concentrique à C_ρ, comprenant A à son intérieur et tel que la hauteur maxima des points de ce cercle soit égale à 1 par rapport au cercle C_ρ.

Dans l'aire comprise entre C_ρ et Γ' il peut y avoir plusieurs singularités telles que A; nous admettrons d'abord que π_1, ..., π_n sont uniformes, c'est-à-dire que les points A sont ou des pôles, ou des points singuliers essentiels.

Pour tous les points autres que A, la fonction $f(z)$ est holomorphe, comme on l'a vu plus haut; considérons maintenant un point A et faisons décrire à la variable z un contour fermé entourant A et intérieur à l'aire limitée par Γ' et C_ρ; z_1, ..., z_n décriront des contours fermés entourant les transformées A_1, A_2, ..., A_n de A, et tous ces contours seront intérieurs à C_ρ; les fonctions $f(z_1)$, ..., $f(z_n)$, étant uniformes dans ce cercle, reprendront les mêmes valeurs quand z_1, ..., z_n et, par suite, z seront revenus à leur point de départ; il en sera de même pour $\pi_1(z)$, ..., $\pi_n(z)$ supposées uniformes; on en conclut donc que la fonction

$$\pi_1(z)f(z_1)+\pi_2(z)f(z_2)+\ldots+\pi_n(z)f(z_n)$$

est une fonction uniforme de z dans tout le cercle Γ'; si, d'autre part, on désigne par $F(z)$ cette fonction, on sait que, sauf peut-être aux points singuliers de $\pi_1(z)$, ..., $\pi_n(z)$, on a identiquement

$$F(z_1)=f(z_1).$$

D'après le théorème de Riemann, les fonctions $F(z_1)$ et $f(z_1)$ coïncident dans tout le cercle, et la fonction $f(z)$ satisfait à l'équation fonctionnelle et n'admet que les singularités des coefficients; d'ailleurs, si plusieurs coefficients admettent la même singularité, la fonction $f(z)$ peut être holomorphe dans tout le cercle.

Ainsi, la fonction $\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{r(1-b)}}$ holomorphe dans tout le cercle est solution des équations, à coefficients non holomorphes,

$$f(z)=\left[\frac{1}{z-a}-2\,\frac{\dfrac{1}{z-a}\left(1-\dfrac{z}{r}\right)-1}{1-\dfrac{z}{r}(1-b)}\right]f(z_1)+\frac{\dfrac{1}{z-a}\left(1-\dfrac{z}{r}\right)-1}{1-\dfrac{z}{r}(1-b)}f(z_2),$$

$$f(z)=\left[e^{\frac{1}{z-a}}-2\,\frac{e^{\frac{1}{z-a}}\left(1-\dfrac{z}{r}\right)-1}{1-\dfrac{z}{r}(1-b)}\right]f(z_1)+\frac{e^{\frac{1}{z-a}}\left(1-\dfrac{z}{r}\right)-1}{1-\dfrac{z}{r}(1-b)}f(z_2),$$

dans lesquelles on suppose $|a|<r(1-b)$, la fonction $\varphi(z)$ étant ici $\dfrac{bz}{1-\dfrac{z}{r}}$.

6. On voit aisément qu'en un point z quelconque du cercle C_x, qui n'est pas un point singulier pour les coefficients et dont les transformés $z_1, z_2, \ldots$ ne sont pas singuliers pour ces coefficients, la fonction $f(z)$ est holomorphe; en tout autre point, elle est ou holomorphe, ou affectée de singularités analogues à celles des coefficients en ce point ou en ses transformés.

En particulier, si A est un pôle, ainsi que ses transformés $A_i, A_j, \ldots, A_l$, l'ordre maximum du pôle de la fonction $f(z)$ au point A sera la somme des ordres des pôles $A, A_i, \ldots, A_l$ des coefficients.

7. Examinons en dernier lieu l'hypothèse de points critiques pour les coefficients.

Si l'on a adopté pour les coefficients une branche déterminée des fonctions π, on définit une fonction $f(z)$ dans le cercle C_ρ.

Soit B le premier point critique que l'on rencontre; si on l'entoure d'un cercle de hauteur 1 par rapport au cercle C_ρ, dans lequel les coefficients sont holomorphes, les chemins transformés de ce cercle ramènent pour $f(z_1), \ldots, f(z_n)$ les valeurs initiales; la fonction

$$F(z) = \pi_1(z) f(z_1) + \ldots + \pi_n(z) f(z_n)$$

devient alors

$$F'(z) = \pi'_1(z) f(z_1) + \ldots + \pi'_n(z) f(z_n),$$

$\pi'_1(z), \ldots, \pi'_n(z)$ étant les nouvelles valeurs des coefficients après une relation autour de B; si la fonction non uniforme, ainsi définie, satisfaisait à l'équation fonctionnelle, on aurait, en revenant du point B à son premier transformé,

$$F'(z_1) = \pi'(z_1) f(z_2) + \ldots + \pi'_n(z_1) f(z_{n+1})$$

et

$$F(z_1) = \pi_1(z_1) f(z_2) + \ldots + \pi_n(z_1) f(z_{n+1}),$$

ce qui n'a pas lieu généralement.

Cela peut avoir lieu si l'on suppose, par exemple, que le point B est tel que

$$\frac{\pi'_1(z)}{\pi_1(z)} = \ldots = \frac{\pi'_n(z)}{\pi_n(z)} = k,$$

k étant une constante; on a alors

$$F'(z) = k F(z).$$

CHAPITRE II.

1. On a, dans ce qui précède, établi l'existence d'une fonction holomorphe dans un certain cercle, dont le centre est un point limite x à convergence régulière de la fonction de transformation; mais il a fallu supposer que les coefficients π_i étaient holomorphes au point x,

satisfaisaient à la relation

$$1 = \pi_1(x) + \pi_2(x) + \ldots + \pi_n(x)$$

et ne satisfaisaient à aucune relation de la forme

$$1 = \pi_1(x)\varphi'(x)^k + \pi_2(z)\varphi'(x)^{2k} + \ldots + \pi_n(x)\varphi'(x)^{nk},$$

dans laquelle k est entier positif.

Nous allons déduire de ce théorème un moyen d'obtenir la solution la plus générale de l'équation fonctionnelle

$$p_0 y + p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n = 0,$$

dans laquelle p_0, p_1, ..., p_n sont des fonctions holomorphes de z dans le domaine du point limite x et en supposant, de plus, que $p_0(x)$ et $p_n(x)$ ne sont pas nuls.

Rappelons d'abord quelques résultats obtenus par M. Kœnigs (¹).

L'équation fonctionnelle

$$f(z_1) = \varphi'(x) f(z)$$

admet une solution holomorphe dans le cercle C_x; cette solution, désignée par $B(z)$, est la limite du rapport

$$\frac{z_p - x}{[\varphi'(x)]^p}$$

pour p infini.

De la relation

$$B(z_1) = \varphi'(x) B(z),$$

on déduit

$$B^\alpha(z_1) = \varphi'^\alpha(x) B^\alpha(z),$$

α étant une quantité quelconque.

On en déduit encore, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$\log B(z_1) = \log B(z) + \log \varphi'(x).$$

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1884.

La fonction

$$b(z) = \frac{\log B(z)}{\log \varphi'(x)}$$

satisfait à l'équation fonctionnelle

$$b(z_1) = b(z) + 1.$$

Enfin la solution la plus générale de l'équation

$$f(z_1) = \varphi'^{\alpha}(x) f(z)$$

est

$$B^{\alpha}(z)\, \Omega[b(z)],$$

Ω étant une fonction périodique dont la période est égale à l'unité.

Tous ces résultats supposent $\varphi'(x) \neq 0$; c'est ce que nous ferons d'abord, nous réservant d'examiner ensuite le cas où $\varphi'(x)$ est nul.

2. Ces résultats étant rappelés, considérons l'équation algébrique

$$(1) \qquad p_0(x) + p_1(x)t + p_2(x)t^2 + \ldots + p_n(x)t^n = 0,$$

que nous appellerons *équation caractéristique;* nous allons montrer comment à une racine de cette équation correspond une fonction qui satisfait à l'équation fonctionnelle.

Soit a une racine de l'équation caractéristique; posons

$$a = \varphi'^{\alpha}(x), \qquad \alpha = \frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} \varphi'(x)};$$

et supposons qu'il n'existe aucune autre racine de la forme $\varphi'^{\alpha+k}(x)$, k étant un entier positif.

Posons (¹)

$$y = Y\, B^{\alpha}(z);$$

l'équation fonctionnelle à laquelle satisfait Y est alors

$$p_0 Y\, B^{\alpha}(z) + p_1 Y_1\, B^{\alpha}(z_1) + \ldots + p_n Y_n\, B^{\alpha}(z_n) = 0$$

ou

$$B^{\alpha}(z)\, [p_0 Y + p_1 \varphi'^{\alpha}(x) Y_1 + \ldots + p_n \varphi'^{n\alpha}(x) Y_n] = 0.$$

(¹) On peut d'ailleurs établir toute cette théorie, sans avoir recours à la fonction $B(z)$ en faisant la substitution $y = Y z^{\alpha}$; ceci permet même d'obtenir $B(z)$ comme conséquence de ce qui précède; toutefois, l'introduction de $B(z)$ évitant d'étudier les singularités relatives aux zéros de $\varphi(z)$, nous avons préféré suivre la voie indiquée plus haut.

L'équation caractéristique correspondante

$$(2)\qquad p_0(x) + p_1(x)\varphi'^{\alpha}(x)t + \ldots + p_n(x)\varphi'^{n\alpha}(x)t^n = 0$$

admet pour racines les racines de l'équation (1) multipliées par $\varphi'^{-\alpha}(x)$; elle admet donc la racine 1 et aucune racine $\varphi'^{k}(x)$, k étant un entier positif.

On en conclut, d'après le théorème fondamental, qu'il existe une fonction Y non nulle à l'origine, et holomorphe dans le domaine du point x, qui satisfait à l'équation

$$p_0(z)\mathrm{Y} + p_1(z)\varphi'^{\alpha}(x)\mathrm{Y}_1 + \ldots + p_n(z)\varphi'^{n\alpha}(x)\mathrm{Y}_n = 0.$$

Nous voyons, en particulier, que, si α est entier positif, l'équation proposée admet une solution holomorphe dans le domaine du point x cette solution admet le point limite comme zéro d'ordre α.

Si α est entier négatif, il y a une solution méromorphe au point limite, qui est pôle d'ordre α.

Si α est fractionnaire, le point limite est un point critique algébrique.

Nous pouvons maintenant partager les racines de l'équation caractéristique en groupes tels que les racines d'un même groupe soient les produits de l'une d'entre elles par une puissance entière positive de $\varphi'(x)$.

A chacun de ces groupes correspondra une fonction de la forme $\mathrm{B}^{\alpha}(z)\mathrm{Y}$; nous avons donc déjà autant de solutions que de tels groupes; mais on peut aller plus loin et trouver une solution qui corresponde à une racine quelconque de l'équation caractéristique, si cette racine est simple; l solutions correspondantes à la racine de l'équation caractéristique, si cette racine est multiple d'ordre l.

3. Pour trouver la forme de ces fonctions, il est nécessaire d'étudier quelques équations du premier ordre, qui sont des généralisations des équations d'Abel et de M. Schrœder.

Premier exemple : $y = py_1$.

Si $p(x)$ est différent de zéro, on peut poser

$$p(x) = [\varphi'(x)]^{\alpha};$$

il existe une solution de la forme

$$[B(z)]^\alpha Y,$$

Y étant holomorphe dans le domaine du point x et ne s'annulant pas en ce point.

La solution générale est alors

$$[B(z)]^\alpha Y \Omega[b(z)],$$

Ω étant une fonction périodique de période égale à l'unité.

Dans le cas particulier où $p(x)$ est une constante égale à l'unité, la solution se réduit à $\Omega[b(z)]$.

Deuxième exemple : $y_1 - y = u$, u étant une fonction holomorphe dans le domaine du point x.

Pour ramener cet exemple au précédent, posons

$$y = \log v, \qquad y_1 = \log v_1,$$

$$\log v_1 - \log v = u, \qquad \log \frac{v_1}{v} = u, \qquad v = v_1 e^{-u};$$

e^{-u} est une fonction holomorphe dans le domaine du point x; nous pouvons alors distinguer deux cas :

1° $u(x) = 0$.

L'équation caractéristique a alors la racine 1, car on a

$$e^{-u(x)} = 1.$$

Laissant de côté le cas où $u(x)$ serait constant [cas qui se résout au moyen de la fonction $\lambda b(z)$, λ étant constant], on voit qu'il existe une fonction v, holomorphe et non nulle au point x, qui satisfait à l'équation

$$v = v_1 e^{-u(z)}.$$

Prenons une détermination de la fonction $\log v$; v ne s'annulant pas au point x, on peut choisir le domaine de ce point de façon que $\operatorname{Log} v$ soit une fonction uniforme dans ce domaine; la fonction $\operatorname{Log} v_1$ sera alors parfaitement déterminée, et l'on aura ainsi vérifié l'équation

$$\operatorname{Log} v_1 - \operatorname{Log} v = u$$

ou

$$y_1 - y = u.$$

2° $u(x) \neq 0$.

La racine de l'équation caractéristique, qui correspond à l'équation

$$v = v_1 e^{-u(z)},$$

est alors

$$e^{u(x)}.$$

Posons

$$\alpha = \frac{u(x)}{\operatorname{Log}\varphi'(x)}.$$

Il existe une fonction v de la forme

$$[B(z)]^{\alpha} V,$$

V étant holomorphe et non nulle au point x.

La fonction $y = \operatorname{Log}[B(z)]^{\alpha} V$ admet en x un point logarithmique. Si l'on fait décrire à la variable un chemin qui n'entoure pas l'origine, et si l'on suppose que le domaine du point x ne contienne aucune racine de $B(z)$, on peut définir la fonction

$$y_1 = \operatorname{Log}[B(z)]^{\alpha} V(z_1);$$

l'équation

$$y_1 - y = u(z)$$

admet donc une solution de la forme

$$\alpha \operatorname{Log}\varphi'(x) . b(z) + \operatorname{Log} V(z),$$

Log $V(z)$ étant holomorphe au point x.

Troisième exemple : $y_1 - y = b^{n-1}(z)$.

Posons

$$\begin{aligned} y &= \alpha_0 b^n(z) + \alpha_1 b^{n-1}(z) + \ldots + \alpha_{n-1} b(z), \\ y_1 &= \alpha_0[b(z)+1]^n + \alpha_1[b(z)+1]^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}[b(z)+1]. \end{aligned}$$

Voyons si l'on peut déterminer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, de façon à vérifier l'équation

$$y_1 - y = b^{n-1}(z),$$

$$\alpha_0 \frac{n(n-1)}{1.2} + \alpha_1 \frac{n-1}{1} = 0,$$

$$\alpha_0 \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \alpha_1 \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \alpha_2 \frac{n-2}{1} = 0,$$

De ces équations, on tire successivement α_1, α_2, ... en fonctions de α_0; quant au coefficient de $b^{n-1}(z)$, il est égal à $n\alpha_0$; il suffira donc de prendre pour α_0 la valeur $\frac{1}{n}$.

4. Des exemples qui précèdent, on peut en déduire quelques autres dont la solution se déduit aisément des solutions que nous venons d'obtenir; on y parvient à l'aide d'une formule analogue à celle de l'intégration par parties.

Si nous désignons par Δy la fonction $y_1 - y$ et par ∇y une fonction t satisfaisant à l'équation $t_1 - t = y$, nous avons identiquement

$$\Delta uv = u_1 v_1 - uv = (u_1 - u)v_1 + (v_1 - v)u = (u_1 - u)(v + \Delta v) + (v_1 - v)u,$$

ou

$$\Delta uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

D'autre part, si entre les fonctions α, β, γ, δ, existe la relation

$$(1) \qquad \Delta\alpha = \Delta\beta + \Delta\gamma + \Delta\delta,$$

on en déduit

$$\alpha = \beta + \gamma + \delta,$$

en négligeant le terme $\Omega[b(z)]$.

La relation (1) peut s'écrire en effet

$$\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 - \delta_1 = \alpha - \beta - \gamma - \delta.$$

Cette équation admet pour solution générale la fonction $\Omega[b(z)]$; on voit donc que la relation (1) équivaut à la relation

$$\alpha = \beta + \gamma + \delta + \Omega[b(z)].$$

De l'identité que nous avons écrite plus haut, on conclut l'identité

$$uv = \nabla(v\Delta u) + \nabla(u\Delta v) + \nabla(\Delta u \Delta v) + \Omega[b(z)].$$

Nous allons appliquer cette formule à quelques exemples.

Premier exemple :

$$y_1 - y = ub(z),$$
$$y = \nabla ub(z).$$

Remplaçant dans la formule précédente u par ∇u et φ par $b(z)$, on trouve, en tenant compte de la relation $b(z_1) - b(z) = 1$,

$$b(z)\nabla u = \nabla u\, b(z) + \nabla[b(z_1) - b(z)]\nabla u + \nabla u[b(z_1) - b(z)] + \Omega[b(z)],$$
$$b(z)\nabla u = \nabla u\, b(z) + \nabla\nabla u + \nabla u + \Omega[b(z)],$$
$$\nabla u\, b(z) = [b(z) - 1]\nabla u - \nabla\nabla u - \Omega[b(z)].$$

Si $u(x)$ est nul, ∇u est une fonction holomorphe dans le domaine du point x; si $u(x) \neq 0$, ∇u est de la forme

$$\alpha \log\varphi'(x).b(z) + f(z),$$

$f(z)$ étant une fonction holomorphe.

On a alors

$$\nabla\nabla u = \nabla\alpha \operatorname{Log}\varphi'(x).b(z) + \nabla f(z) = \alpha_1 b^2(z) + \beta_1 b(z) + f_1(z),$$

α_1, β_1 étant des constantes et $f_1(z)$ une fonction holomorphe.

On voit donc que $\nabla u b(z)$ est de la forme

$$\lambda b^2(z) + \mu b(z) + \psi(z)$$

λ_1 étant une constante, μ et $\psi(z)$ des fonctions holomorphes; la solution générale est la précédente augmentée de $\Omega[b(z)]$.

Deuxième exemple :

$$y_1 - y = ub^n(z) \qquad y = \nabla u b^n(z).$$

Remplaçant dans la formule u par ∇u et φ par $b^n(z)$, on trouve

$$\begin{aligned} b^n(z)\nabla u &= \nabla u b^n(z) + \nabla\{\nabla u[b^n(z_1) - b^n(z)]\} + \nabla\{u[b^n(z_1) - b^n(z)]\} \\ &= \nabla u b^n(z) + \nabla\{[nb^{n-1}(z) + \ldots + 1]\nabla u\} + \nabla\{u[nb^{n-1}(z) + \ldots + 1]\}. \end{aligned}$$

∇u est de la forme $\alpha b(z) + f(z)$, α étant une constante. Si l'on met cette expression à la place de ∇u, on voit que l'on a

$$\begin{aligned} b^n(z)\nabla u &= \nabla u b^n(z) + \nabla n\alpha b^n(z) \\ &\quad + \nabla\left[nf(z) + nu + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha\right] b^{n-1}(z) + \ldots. \end{aligned}$$

De cette relation, on déduit

$$\nabla(u + n\alpha)\, b^n(z) = b^n(z)\nabla u - \nabla \mathrm{F}(z)$$

$F(z)$ étant un polynome de degré $n-1$ en $b(z)$, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de z.

Si l'on admet que $\nabla F(z)$ est un polynome de degré n en $b(z)$ à coefficients holomorphes, on voit que

$$\nabla u\, b^n(z) = b^n(z)\nabla u - \nabla F(z) - \nabla n\alpha b^n(z)$$

est un polynome de degré $n+1$ en $b(z)$ à coefficients holomorphes. Ce théorème ayant été établi pour un polynome $F(z)$ du premier degré en $b(z)$ est ainsi démontré dans le cas général; on a donc

$$\nabla u\, b^n(z) = f_0(z)\, b^{n+1}(z) + \ldots + f_i(z)\, b^{n-i+1}(z) + \ldots + f_{n+1}(z).$$

On peut remarquer d'ailleurs que le coefficient de $b^{n+1}(z)$ est une constante, et les coefficients suivants des fonctions holomorphes de z au point x.

De la résolution de cette équation, on déduit celle de l'équation

$$y_1 - y = u \operatorname{Log}\varphi \operatorname{Log}\varphi' \ldots \operatorname{Log}\varphi^{(n)},$$

$u, \varphi', \ldots, \varphi^{(n)}$ étant des fonctions holomorphes qui peuvent être nulles au point x.

φ étant de la forme $(z-x)^k V\ [V(x)] \neq 0$, on peut écrire

$$\operatorname{Log}\varphi = \operatorname{Log}(z-x)^k V + \operatorname{Log} B^k(z) - \operatorname{Log} B^k(z),$$

$$\operatorname{Log}\varphi = \operatorname{Log} V + \operatorname{Log}\left[\frac{z-x}{B(z)}\right]^k + \operatorname{Log} B^k(z),$$

$$\operatorname{Log}\varphi = \operatorname{Log} V\left[\frac{z-x}{B(z)}\right]^k + \operatorname{Log} B^k(z) = \operatorname{Log} V'(z) + k \operatorname{Log}\varphi'(x).b(z),$$

$\operatorname{Log} V'(z)$ étant une fonction holomorphe dans le domaine du point x.

Le produit $u \operatorname{Log}\varphi . \operatorname{Log}\varphi' \ldots \operatorname{Log}\varphi^{(n)}$ est donc un polynome de degré $n+1$ en $b(z)$ à coefficients holomorphes et y sera un polynome de degré $n+2$ en $b(z)$ à coefficients holomorphes.

5. Nous avons jusqu'à présent étudié des équations de la forme

$$y_1 - y = u\, b^n(z),$$

dans lesquelles u est holomorphe; nous aurons besoin pour l'étude des groupes de racines de l'équation fonctionnelle homogène d'ordre n

de connaître la forme de la solution d'équations de même forme dans lesquelles u admet un pôle au point x; il nous reste à examiner de telles équations.

Premier exemple :

$$y_1 - y = \frac{\alpha}{B^k(z)} + \frac{\alpha_1}{B^{k-1}(z)} + \ldots + \frac{\alpha_{k-1}}{B(z)},$$

α, α_1, ..., α_{k-1} étant des constantes.

Posons

$$y = \frac{\lambda}{B^k(z)} + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{B(z)},$$

$$y_1 = \frac{\lambda}{\varphi'^k(x)}\,\frac{1}{B^k(z)} + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{\varphi'(x)}\,\frac{1}{B(z)},$$

$$y_1 - y = \frac{\lambda}{B^k(z)}\left[\frac{1}{\varphi'^k(x)} - 1\right] + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{B(z)}\left[\frac{1}{\varphi'(x)} - 1\right].$$

Nous aurons résolu l'équation proposée en posant

$$\lambda\left[\frac{1}{\varphi'^k} - 1\right] = \alpha,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda_{k-1}\left[\frac{1}{\varphi'} - 1\right] = \alpha_{k-1},$$

équations qui fournissent les valeurs de λ, ..., λ_{k-1}, puisque $\varphi'(x)$ est supposé compris entre zéro et l'unité.

Deuxième exemple :

$$y_1 - y = \frac{u}{(z-x)^k},$$

la fonction u étant supposée holomorphe et non nulle au point x.

Si l'on pose

$$y = t + \frac{\lambda}{B^k(z)} + \frac{\lambda_1}{B^{k-1}(z)} + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{B(z)},$$

l'équation devient

$$t_1 - t + \frac{\lambda}{B^k(z)}\left[\frac{1}{\varphi'^k} - 1\right] + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{B(z)}\left[\frac{1}{\varphi'} - 1\right] = \frac{u}{(z-x)^k}.$$

On a d'ailleurs

$$u = a_0 + a_1(z - x) + a_2(z - x)^2 + \ldots + a_k(z - x)^k + \ldots,$$

$$\frac{1}{B^i(z)} = \frac{\alpha_0^i}{(z - x)^i} + \frac{\alpha_1^i}{(z - x)^{i-1}} + \ldots + \alpha_i^i + \alpha_{i+1}^i(z - x) + \ldots.$$

Nous pouvons alors déterminer les coefficients λ de façon à faire disparaître les termes qui contiennent $z - x$ en dénominateur; il suffit de poser

$$\lambda\left[\frac{1}{\varphi'^k} - 1\right]\alpha_0^k = a_0,$$

$$\lambda\left[\frac{1}{\varphi'^k} - 1\right]\alpha_1^k + \lambda_1\left[\frac{1}{\varphi'^{k-1}} - 1\right]\alpha_0^{k-1} = a_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On tire de ces relations les valeurs de λ, λ_1, ...; on voit facilement que les coefficients α_0^k, α_0^{k-1}, ... sont différents de zéro, sans quoi $\frac{1}{B^i(z)}$ n'aurait pas le point x comme pôle d'ordre i.

t est alors une fonction de la forme

$$\mu\, b(z) + f(z),$$

μ étant une constante et $f(z)$ une fonction holomorphe.

On voit que l'équation

$$y_1 - y = \frac{u}{(z - x)^k}$$

admet une solution de la forme

$$\frac{\lambda}{B^k(z)} + \frac{\lambda_1}{B^{k-1}(z)} + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{B(z)} + \mu\, b(z) + f(z)$$

ou

$$\frac{P(z)}{(z - x)^k} + \mu\, b(z),$$

$P(z)$ étant une fonction holomorphe en x, et non nulle.

Troisième exemple :

$$y_1 - y = \frac{u\, b(z)}{(z - x)^k}.$$

Appliquons ici la formule

$$uv = \nabla(v\Delta u) + \nabla(u\Delta v) + \nabla(\Delta u\, \Delta v),$$

en remplaçant u par $\nabla \frac{u}{(z-x)^k}$ et v par $b(z)$.

$$b(z)\nabla \frac{u}{(z-x)^k} = \nabla \frac{u\,b(z)}{(z-x)^k} + \nabla\nabla \frac{u}{(z-x)^k} + \nabla \frac{u}{(z-x)^k},$$

$$\nabla \frac{u}{(z-x)^k} = \frac{P(z)}{(z-x)^k} + \mu b(z),$$

$$\nabla\nabla \frac{u}{(z-x)^k} = \frac{Q(z)}{(z-x)^k} + \mu_1 b^2(z) + \mu_2 b(z),$$

$$b(z)\nabla \frac{u}{(z-x)^k} = \frac{P(z)\,b(z)}{(z-x)^k} + \mu' b^2(z).$$

L'équation a donc une solution de la forme

$$\frac{P_1(z) + P_2(z)\,b(z)}{(z-x)^k} + v\,b^2(z),$$

P_1 et P_2 étant des fonctions holomorphes, v une constante, $P_2(x)$ étant différent de zéro.

Quatrième exemple :

$$y_1 - y = \frac{u\,b^n(z)}{(z-x)^k}.$$

Admettons que l'on ait

$$\nabla \frac{u\,b^{n-1}(z)}{(z-x)^k} = \frac{P_1(z) + P_2(z)\,b(z) + \ldots + P_n(z)\,b^{n-1}(z)}{(z-x)^k} + v\,b^n(z),$$

nous allons montrer que la loi de formation est encore vraie pour l'équation

$$y_1 - y = \frac{u\,b^n(z)}{(z-x)^k}.$$

Dans la formule déjà employée, remplaçons u par $\nabla \frac{u}{(z-x)^k}$ et v par $b^n(z)$

$$b^n(z)\nabla \frac{u}{(z-x)^k} = \nabla b^n(z) \frac{u}{(z-x)^k} + \nabla[b^n(z_1) - b^n(z)]\nabla \frac{u}{(z-x)^k} + \nabla \frac{u}{(z-x)^k}[b^n(z_1) - b^n(z)],$$

$$\nabla b^n(z) \frac{u}{(z-x)^k} = b^n(z)\nabla \frac{u}{(z-x)^k} - \nabla(nb^{n-1}(z) + \ldots)\nabla \frac{u}{(z-x)^k} - \nabla \frac{u}{(z-x)^k}[n^n\, b^{-1}(z) + \ldots].$$

On a

$$\nabla \frac{u}{(z-x)^k} = \frac{P(z)}{(z-x)^k} + \mu b(z).$$

Le second membre contient donc des termes de la forme

$$\nabla \frac{F_1(z)\, b^{n-1}(z)}{(z-x)^k}, \quad \nabla \frac{F_2(z)\, b^{n-2}(z)}{(z-x)^k}, \quad \ldots,$$

dont les valeurs sont de la forme

$$\frac{P_1(z) + \ldots + P_n(z)\, b^{n-1}(z)}{(z-x)^k} + \nu\, b^n(z),$$

et le terme

$$\sigma\, b^{n+1}(z) + \frac{P(z)\, b^n(z)}{(z-x)^k},$$

dans lequel $P(x)$ est différent de zéro, de telle sorte que l'on a bien

$$\nabla \frac{u b^n(z)}{(z-x)^k} = \frac{Q_0 + Q_1 b(z) + \ldots + Q_n b^n(z)}{(z-x)^k} + \rho\, b^{n+1}(z),$$

ce qui établit le théorème d'une façon générale.

Remarquons que $Q_n(x)$ n'est pas nul.

CHAPITRE III.

1. Soit l'équation fonctionnelle

$$p_0(z)y + p_1(z)y_1 + \ldots + p_n(z)y_n = 0,$$

dont l'équation caractéristique

$$p_0(x) + p_1(x)t + \ldots + p_n(x)t^n = 0$$

admet la racine a d'ordre p.

Posant $a = [\varphi'(x)]^\alpha$, à toute solution y correspond une solution Y de l'équation

$$p_0(z)Y + p_1(z)[\varphi'(x)]^\alpha Y_1 + \ldots + p_n(z)[\varphi'(x)]^{n\alpha} Y_n = 0;$$

réciproquement à toute solution Y correspond une fonction y solution de la première équation; entre ces fonctions, on a la relation

$$y = Y[B(z)]^\alpha.$$

Au lieu de rechercher les solutions de la première équation, nous allons chercher celles de la seconde; l'équation caractéristique relative à cette seconde équation, ayant pour racines celles de la première équation caractéristique divisées par $[\varphi'(x)]^\alpha$, admettra la racine 1 comme racine d'ordre p.

Ce sont les fonctions qui correspondent à cette racine que nous allons étudier.

2. Nous savons déjà qu'il existe une fonction holomorphe non nulle au point x qui satisfait à l'équation en Y; soit Y' cette fonction; si nous posons $Y = Y'V$, l'équation devient

$$P_0(z)Y'V + P_1(z)Y'_1 V_1 + \ldots + P_n(z)Y'_n V_n = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$P_i(z) = p_i(z)[\varphi'(x)]^{i\alpha},$$

ou, en tenant compte de la relation

$$P_0(z)Y' + P_1(z)Y'_1 + \ldots + P_n(z)Y'_n = 0,$$

$$\begin{aligned} &P_0(z)Y'V + P_1(z)Y'_1V_1 + \ldots \\ &\quad - [P_0(z)Y' + P_1(z)Y'_1 + \ldots + P_{n-1}(z)Y'_{n-1}]V_n = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P_0(z)Y'(V - V_n) + P_1(z)Y'_1(V - V_{n-1}) + \ldots \\ &\qquad + P_{n-1}(z)Y'_{n-1}(V_{n-1} - V_n) = 0. \end{aligned}$$

Prenant maintenant comme fonction

$$\begin{aligned} u &= V_1 - V, \\ u_1 &= V_2 - V_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{n-1} &= V_n - V_{n-1}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&V_n - V_{n-1} = u_{n-1},\\
&V_n - V_{n-2} = u_{n-1} + u_{n-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&V_n - V \quad = u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_1 + u.
\end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi la nouvelle équation

$$\begin{aligned}
&P_0(z)\,Y'(u + u_1 + \ldots + u_{n-1})\\
&\quad + P_1(z)\,Y'_1(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}) + \ldots + P_{n-1}(z)\,Y'_{n-1}\,u_{n-1} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P_0(z)\,Y'\,u + [P_0(z)\,Y' + P_1(z)\,Y'_1]\,u_1 + \ldots\\
&\qquad + [P_0(z)\,Y' + P_1(z)\,Y'_1 + \ldots + P_{n-1}(z)\,Y'_{n-1}]\,u_{n-1} = 0,
\end{aligned}$$

équation fonctionnelle d'ordre $n-1$ en u; les coefficients sont holomorphes et le coefficient de u n'est pas nul au point x. Cette équation est donc bien de la forme déjà étudiée.

Formons son équation caractéristique

$$\begin{aligned}
&P_0(x)\,Y'(x) + [P_0(x)\,Y'(x) + P_1(x)\,Y'_1(x)]\,t + \ldots\\
&\qquad + [P_0(x)\,Y'(x) + \ldots + P_{n-1}(x)\,Y'_{n-1}(x)]\,t^{n-1} = 0.
\end{aligned}$$

Remarquons que l'on a

$$Y'(x) = Y'_1(x) = \ldots = Y'_{n-1}(x).$$

L'équation caractéristique peut s'écrire

$$P_0(x) + [P_0(x) + P_1(x)]\,t + \ldots + [P_0(x) + P_1(x) + \ldots + P_{n-1}(x)]\,t^{n-1} = 0.$$

Le premier membre de cette équation étant le quotient par $t-1$ de

$$-[P_0(x) + P_1(x)\,t + \ldots + P_n(x)\,t^n],$$

cette équation admet encore la racine 1 à l'ordre $p-1$. L'équation fonctionnelle en u admet alors une solution holomorphe non nulle au point x.

A cette fonction correspond donc une fonction $V = \nabla u$ de la forme

$$k\,b(z) + f(z),$$

k étant une constante, $f(z)$ une fonction holomorphe au point x.

L'équation en Y admet donc les deux solutions

$$Y', \quad Y'[k\,b(z)+f(z)],$$

et l'équation donnée admet les deux solutions

$$Y'[B(z)]^{\alpha}, \quad Y'[B(z)]^{\alpha}[k\,b(z)+f(z)].$$

Si la racine a est double, nous avons ainsi deux solutions correspondant à cette racine.

Admettons qu'à une racine a d'ordre $p-1$ correspondent les $p-1$ solutions

$$Y'[B(z)]^{\alpha}, \quad Y'[B(z)]^{\alpha}[k_1 b(z)+f_1(z)], \quad \ldots,$$
$$Y[B(z)]^{\alpha}[k_{p-2}b^{p-2}(z)+f_{p-2,1}(x)b^{p-3}(z)+\ldots+f_{p-2,p-2}(z)].$$

Nous allons démontrer qu'à une racine a d'ordre p, correspondent les p solutions

$$Y'[B(z)]^{\alpha}, \ \ldots \ Y'[B(z)]^{\alpha}[k'_{p-1}b^{p-1}(z)+f'_{p-1,1}(z)b^{p-2}(z)+\ldots+f'_{p-1,p-1}(z)],$$

Si nous admettons le théorème pour la racine $p-1$, l'équation en u a les solutions

$$u, \quad u[m_1 b(z)+\psi_1(z)], \quad \ldots,$$
$$u[m_{p-2}b^{p-2}(z)+\psi_{p-2,1}(z)b^{p-3}(z)+\ldots+\psi_{p-1,p-2}(z)].$$

A ces $p-1$ solutions correspondent pour V les solutions

$$\nabla u, \quad \nabla\{u[m_1 b(z)+\psi_1(z)]\}, \quad \ldots,$$

qui sont de la forme

$$k'_1 b(z)+f_1(z), \quad k'_2 b^2(z)+f_{2,1}(z)b(z)+f_{2,2}(z), \quad \ldots,$$
$$k'_{p-1}b^{p-1}(z)+f'_{p-1,1}(z)b^{p-2}(z)+\ldots+f'_{p-1,p-1}(z).$$

L'équation en y a donc bien p solutions de la forme indiquée; nous remarquons que $k'_1, \ldots, k'_{p-1}$ sont des constantes, $f'_1(z), \ldots, f'_{p-1,p-1}(z)$ des fonctions holomorphes.

Nous voyons d'ailleurs que les constantes $k'_1, \ldots, k'_{p-1}$ ne peuvent être nulles; on peut, en effet, par le procédé employé obtenir une série de transformées de l'équation jusqu'à ce que l'on parvienne à une équation fonctionnelle dont l'équation caractéristique admette la racine simple 1; l'équation précédente a alors pour solutions une fonction holomorphe non nulle en x et une fonction qui a la forme d'un polynome du premier degré en $b(z)$, le coefficient de $b(z)$ étant différent de zéro au point x.

Le terme en $b^2(z)$ de l'équation qui précède sera dans les mêmes conditions, puisqu'il provient uniquement du terme en $b(z)$; en continuant ainsi, on voit aisément que les constantes $k'_1, \ldots, k'_{p-1}$ sont différentes de zéro.

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante :

A une racine $[\varphi'(x)]^\alpha$ d'ordre p de l'équation caractéristique correspondent p racines, qui sont les produits d'une fonction $[B(z)]^\alpha Y'$ par des polynomes de degré $0, 1, \ldots, p-1$ en $b(z)$; les coefficients de ces polynomes sont, ainsi que Y', des fonctions holomorphes de z dans le voisinage du point x, les coefficients de la plus haute puissance de $b(z)$ étant des constantes différentes de zéro.

Nous avons négligé constamment les termes $\Omega[b(z)]$, mais nous voulions simplement obtenir p solutions correspondant à une racine d'ordre p de l'équation caractéristique; nous verrons plus tard comment on peut trouver la solution générale de l'équation au moyen de solutions particulières.

3. La méthode que nous venons d'employer permet également de trouver les solutions qui correspondent aux groupes de racines indiquées plus haut.

Soient $[\varphi'(x)]^\alpha$, $[\varphi'(x)]^{\alpha-k_1}$, $\ldots$, $[\varphi'(x)]^{\alpha-k_{p-1}}$ p racines de l'équation caractéristique, $k_1, \ldots, k_{p-1}$ étant des nombres entiers positifs, qui ne vont pas en décroissant.

A la racine $[\varphi'(x)]^\alpha$ de l'équation caractéristique correspond une fonction $[B(z)]^\alpha Y'$ de l'équation fonctionnelle; l'équation fonctionnelle à laquelle satisfait Y' étant

$$P_0(z)Y + P_1(z)Y_1 + \ldots + P_n(z)Y_n = 0,$$

$P_0, P_1, \ldots, P_n$ étant les fonctions

$$p_0(z)[\varphi'(x)]^\alpha, \quad \ldots, \quad p_n(z)[\varphi'(x)]^{n\alpha}.$$

Les racines de l'équation caractéristique correspondant à l'équation en Y sont, relativement au groupe considéré,

$$1, \quad [\varphi'(x)]^{-k_1}, \quad \ldots, \quad [\varphi'(x)]^{-k_{p-1}}.$$

Si nous formons la transformée en u, en posant

$$Y = Y'V, \qquad V_1 - V = u,$$

nous trouvons l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} P_0(z)Y'u + [P_0(z)Y' + P_1(z)Y'_1]u_1 + \ldots \\ + [P_0(z)Y' + \ldots + P_{n-1}(z)Y'_{n-1}]u_{n-1} = 0, \end{aligned}$$

dont l'équation caractéristique admet les racines

$$[\varphi'(z)]^{-k_1}, \quad \ldots, \quad [\varphi'(x)]^{-k_{p-1}}.$$

Il existe donc une solution u de la forme

$$[B(z)]^{-k_1}u,$$

u étant une fonction holomorphe au point x, et non nulle.

La fonction V correspondante sera

$$V = \nabla \frac{u}{[B(z)]^{k_1}} = \nabla \frac{u'}{(z-x)^{k_1}},$$

u étant holomorphe au point x.

On a donc

$$V = \frac{P(z)}{(z-x)^{k_1}} + \mu b(z),$$

μ étant une constante, $P(z)$ n'étant pas nulle au point x.

L'équation proposée a donc les solutions

$$Y'[B(z)]^{\alpha}, \quad Y'[B(z)]^{\alpha}\left[\frac{P(z)}{(z-x)^{k_1}} + \mu b(z)\right]$$

ou

$$(z-x)^{\alpha}f_1(z), \quad (z-x)^{\alpha-k_1}f_{2,1}(z) + (z-x)^{\alpha}b(z)f_{2,2}(z),$$

f_1, $f_{2,1}$, $f_{2,2}$ étant holomorphes; $f_1(x)$ et $f_{2,1}(x)$ n'étant pas nulles.

Admettons que, à un groupe de $p-1$ racines, correspondent $p-1$ solutions qui ont la forme de polynomes en $b(z)$ de degrés 0, 1, j,

$p-2$; les coefficients de ces polynomes étant les produits de fonctions holomorphes par les binomes $(z-x)^{\alpha_{j+i}}$, α_{j+i} correspondant à $[b(z)]^i$, $[\varphi'(x)]^{\alpha_i}$ étant la $(i)^{\text{ième}}$ racine, en supposant ces racines rangées par ordre de croissance des exposants.

Dans cette hypothèse, une solution de l'équation en u sera

$$(z-x)^{-k_i}\psi_1(z)+(z-x)^{-k_{i-1}}\psi_2(z)b(z)+\ldots+(z-x)^{-k_1}\psi_i(z)b^{i-1}(z),$$

on a

$$\begin{aligned} V=\nabla u &= \sum_{j=1}^{j=i}\nabla(z-x)^{-k_j}\psi_{i-j+1}(z)b^{i-j}(z)\\ &= \sum_{j=1}^{j=i}\frac{Q_0+Q_1 b(z)+\ldots+Q_{i-j}[b(z)]^{i-j}}{(z-x)^{k_j}}-\rho b^{i-j+1}(z)\end{aligned}$$

et

$$y=Y'[B(z)]^\alpha\sum_{j=1}^{j=i}\frac{Q_0+Q_1 b(z)+\ldots+Q_{i-j}[b(z)]^{i-j}}{(z-x)^{k_j}}+\rho b^{i-j+1}(z).$$

Les seuls binomes qui soient en dénominateurs de $[b(z)]^{i-j}$ sont $(z-x)^{k_j}$, $(z-x)^{k_{j-1}}$, ..., $(z-x)^{k_1}$; de sorte que l'on peut écrire

$$y=Y'[B(z)]^\alpha\left\{\frac{\psi'(z)}{(z-x)^{k_i}}+\frac{\psi'_1(z)\,b(z)}{(z-x^{k_{i-1}}}+\ldots+\frac{\psi'_{i-1}[b(z)]^{i-1}}{(z-x)^{k_1}}+\mu[b(z)]^i\right\}$$

ou

$$y=f'_1(z)(z-x)^{\alpha-k_i}+f'_2(z)(z-x)^{\alpha-k_{i-1}}b(z)+\ldots+f'_{i+1}(z)(z-x)^\alpha[b(z)]^i.$$

En donnant successivement à i les valeurs 1, 2, ..., $p-1$, nous aurons, outre la solution $Y'[B(z)]^\alpha$, les solutions

$$f_{2,1}(z)(z-x)^{\alpha-k_1}+f_{2,2}(z)(z-x)^\alpha b(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_{p,1}(z)(z-x)^{\alpha-k_{p-1}}+f_{p,2}(z)(z-x)^{\alpha-k_{p-2}}b(z)+\ldots+f_{p,p}(z)(z-x)^\alpha[b(z)]^{p-1}.$$

Si, dans ce qui précède, on suppose différentes quantités k égales entre elles, tout ce que nous avons dit subsiste.

Si, aux conditions déjà énoncées, nous ajoutons que la fonction $p_n(z)$ ne s'annule pas au point x, nous voyons qu'une racine quelconque de l'équation caractéristique peut être mise sous la forme $[\varphi'(x)]^\alpha$, et nous pouvons énoncer le théorème général suivant :

A une racine simple $[\varphi'(x)]^\alpha$ de l'équation caractéristique correspond une solution de la forme

$$(z-x)^\alpha f(z).$$

A un groupe de racines $[\varphi'(x)]^{\alpha_1}$, $[\varphi'(x)]^{\alpha_2}$, ..., $[\varphi'(x)]^{\alpha_p}$ dont les exposants ne vont pas en croissant et sont égaux ou diffèrent d'un nombre entier, correspondent les p solutions

$$\begin{array}{l}(z-x)^{\alpha_1} f_1(z),\\ (z-x)^{\alpha_2} f_{2,1}(z)+(z-x)^{\alpha_1} f_{2,2}(z)\,b(z),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ (z-x)^{\alpha_p} f_{p,1}(z)+(z-x)^{\alpha_{p-1}} f_{p,2}(z)\,b(z)+\ldots+(z-x)^{\alpha_1} f_{p,p}(z)\,b^{p-1}(z),\end{array}$$

$b(z)$ étant une fonction qui admet au point x un point logarithmique, $f_1(z)$, ..., $f_{p,p}(z)$ étant des fonctions holomorphes en x.

Remarquons en terminant que certaines de ces fonctions peuvent être identiquement nulles, comme cela a lieu pour les équations à coefficients constants, que nous étudierons plus tard, les fonctions f_1, $f_{2,1}$, ..., $f_{p,1}$ n'étant pas nulles à l'origine, si toutes les racines sont simples.

Examinons d'un peu plus près la composition de ces solutions lorsque des racines du groupe sont multiples; supposons $[\varphi'(x)]^{\alpha_1}$ racine d'ordre λ_1, $[\varphi'(x)^{\alpha_2}$ d'ordre λ_2, ...

A la racine α_1 correspondent λ_1 solutions

$$[B(z)]^{\alpha_1}[f_{i,1}(z)+f_{i,2}(z)\,b(z)+\ldots+f_{i,i}(z)\,b^{i-1}(z)],$$

i pouvant prendre les valeurs 1, 2, ..., λ; $f_{i,i}(x)$ est différent de zéro.

En appliquant la méthode déjà employée, nous serons amené à considérer une série d'équations fonctionnelles, les α_1-1 premières conduisant aux λ_1 solutions précédentes, la $\alpha_1^{\text{ième}}$ ayant une équation caractéristique n'admettant plus la racine $[\varphi'(x)]^{\alpha_1}$, mais ayant la racine $[\varphi'(x)]^{\alpha_2-\alpha_1}$ à l'ordre λ_2. Cette équation fonctionnelle a donc des solutions de la forme

$$B[(z)]^{\alpha_2-\alpha_1}[f'_{i,1}(z)+f'_{i,2}\,b(z)+\ldots+f'_{i,i}(z)\,b^{i-1}(z)],$$

$f_{i,i}(z)$ n'étant pas nulle au point x.

L'équation fonctionnelle de rang $\alpha_1 - 1$ admettait alors la solution

$$\mathrm{Y}\nabla[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_2-\alpha_1}[f'_{i,1}(z) + \ldots + f'_{i,i}(z)\, b^{i-1}(z)].$$

Nous savons que $\nabla \dfrac{f'_{i,i}\, b^{i-1}(z)}{[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_1-\alpha_2}}$ est de la forme

$$\frac{\mathrm{P}_0 + \mathrm{P}_1 b(z) + \ldots + \mathrm{P}_{i-1} b^{i-1}(z)}{[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_1-\alpha_2}} + \mu b^i(z),$$

μ pouvant être nul, mais $\mathrm{P}_{i-1}(x)$ ne l'étant pas, $f'_{i,i}$ étant supposé différent de zéro.

L'expression $\nabla[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_2-\alpha_1}[f'_{i,i}(z) + \ldots]$ contient donc un terme $\dfrac{\mathrm{P}_{i-1}\, b^{i-1}(z)}{[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_2-\alpha_1}}$; le terme en $b^{i-2}(z)$ peut fournir également un terme en $b^{i-1}(z)$, mais, son coefficient étant une constante, on voit que le coefficient de

$$\frac{b^{i-1}(z)}{[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_2-\alpha_1}}$$

sera une fonction holomorphe non nulle au point x.

La solution de l'équation de rang $\alpha_1 - 1$ est alors

$$\frac{f(z) + f_1(z)\, b(z) + \ldots + f_i(z)\, b^{i-1}(z) + f_{i+1}(z)\, b^i(z)}{[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_1-\alpha_2}},$$

$f_i(x)$ étant différent de zéro et $f_{i+1}(x)$ étant nul; on a

$$f_{i+1}(z) = \mu \mathrm{Y}[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_1-\alpha_2}.$$

Si l'on remonte à l'équation de rang $\alpha_1 - 2$, les termes $\dfrac{b^{i-1}(z)}{[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_1-\alpha_2}}$ qui proviennent de $\dfrac{f(z) + f_1(z)\, b(z) + \ldots + f_i(z)\, b^{i-1}(z)}{[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_1-\alpha_2}}$ donnent un terme en $\dfrac{b^{i-1}(z)}{[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_1-\alpha_2}}$ dont le coefficient ne s'annule pas au point x; le terme $\mu \mathrm{Y} b^i(z)$ peut donner un terme en $b^{i-1}(z)$; mais le coefficient de ce terme étant holomorphe, le terme en $\dfrac{b^{i-1}(z)}{[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_1-\alpha_2}}$ que l'on en déduit aura un coefficient nul au point x; on en conclut que dans la solution de l'équation de rang $\alpha_1 - 2$, le coefficient du terme $\dfrac{b^{i-1}(z)}{[\mathrm{B}(z)]^{\alpha_1-\alpha_2}}$ ne s'annule pas à l'origine.

Nous pouvons répéter ce raisonnement et nous arriverons finalement à trouver pour l'équation proposée une solution de la forme

$$[B(z)]^{\alpha_2}[F_1(z)+F_2(z)\,b(z)+\ldots+F_i(z)\,b^{i-1}(z)]+[B(z)]^{\alpha_1}[\ldots],$$

$F_i(z)$ n'étant pas nulle au point x.

Il est manifeste que, si l'on considère les solutions qui correspondent à la racine $[\varphi'(x)]^{\alpha_3}$ d'ordre λ_3, ces solutions correspondent à des solutions de la $\alpha_1^{\text{ième}}$ équation d'une forme analogue, le coefficient de la puissance de $b^{i-1}(z)$ étant différent de zéro, les coefficients suivants contenant en facteur $[B(z)]^{\alpha_2-\alpha_3}$, tandis que les coefficients des puissances $[b(z)]^0$, $[b(z)]'$, ..., $[b(z)]^{i-1}$ ne contiennent pas le facteur $[B(z)]^{\alpha}$.

En remontant à la première équation, on trouvera

$$[B(z)]^{\alpha_3}[F'_1(z)+F'_2(z)\,b(z)+\ldots+F'_i(z)\,b^{i-1}(z)] \\ +[B(z)]^{\alpha_2}[\ldots]+[B(z)]^{\alpha_1}\ldots.$$

Nous pouvons alors préciser la forme des solutions qui correspondent à un groupe de racines; pour cela, nous supposerons que la racine multiple d'ordre λ est remplacée par λ racines; ces racines seront évidemment égales, mais nous les distinguerons, pour la commodité du langage, en leur assignant un rang.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$ les exposants de $\varphi'(x)$; une solution de l'équation fonctionnelle sera de la forme

$$[B(z)]^{\alpha_i}[f_1(z)+f_2(z)\,b(z)+\ldots+f_j(z)\,b^{j-1}(z)]+[B(z)]^{\alpha_{i-1}}[\ldots]+\ldots,$$

si elle correspond à la $j^{\text{ième}}$ racine $[\varphi'(x)]^{\alpha_i}$, et α_i étant inférieur à $\alpha_{i-1}\ldots\alpha_1$.

Le coefficient $f_j(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas au point x.

CHAPITRE IV.

1. Le théorème général sur l'existence d'une fonction holomorphe non nulle satisfaisant à l'équation fonctionnelle, sous la condition

$$p_0(x)+p_1(x)+\ldots+p_n(x)=0,$$

suppose simplement que $\varphi(x)$ a un module inférieur à l'unité; mais, dans l'étude qui a été faite ensuite de l'équation, on a supposé que $\varphi'(x)$ n'était pas nul, en faisant correspondre à un nombre $[\varphi'(x)]^k$ une solution de l'équation fonctionnelle. En supposant $\varphi'(x)=0$, nous allons chercher à former une fonction analogue à la fonction $B(z)$; cette fonction ne sera pas holomorphe dans le domaine du point x, ainsi qu'on peut le voir aisément *a priori;* pour trouver cette fonction, nous établirons les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si la fonction $\varphi(z)$ est de la forme*

$$x+c(z-x)^{\alpha}[1+\psi(z)],$$

α étant un entier positif, c une constante, $\psi(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine du point x et nulle en ce point, il existe une fonction holomorphe unique satisfaisant à l'équation

$$y_1=c(z-x)^{\alpha-1}y.$$

Cette fonction a le point x comme zéro simple.

Posons $y=(z-x)Y$, la fonction Y doit satisfaire à l'équation

$$(z_1-x)Y_1=c(z-x)^{\alpha-1}(z-x)Y,$$

$$Y=\frac{c(z-x)^{\alpha}}{c(z-x)^{\alpha}}[1+\psi(z)]Y_1,$$

$$Y=[1+\psi(z)]Y_1.$$

Cette équation fonctionnelle admet une solution holomorphe dans le domaine du point x et cette solution n'est pas nulle en ce point; on en conclut qu'il existe une solution $y=(z-x)Y$ satisfaisant à l'équation

$$y_1=c(z-x)^{\alpha-1}y.$$

Cette solution est seule holomorphe ou, du moins, les autres solutions holomorphes sont le produit de y par une constante.

Le raisonnement que nous venons de faire suppose $\psi(x)$ non nul identiquement; dans le cas où l'on aurait

$$\varphi(z)-x=c(z-x)^{\alpha},$$

on voit de suite que la solution holomorphe unique y est

$$z-x.$$

Cette fonction holomorphe est d'ailleurs la limite du rapport

$$\frac{z_n-x}{c^n(z-x)^{\alpha-1}(z_1-x)^{\alpha-1}\ldots(z_{n-1}-x)^{\alpha-1}};$$

on le voit facilement en multipliant membre à membre les identités

$$\begin{aligned} y_1&=c(z-x)^{\alpha-1}y,\\ y_2&=c(z_1-x)^{\alpha-1}y_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ y_n&=c(z_{n-1}-x)^{\alpha-1}y_{n-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$y_n=c^n(z-x)^{\alpha-1}\ldots(z_{n-1}-x)^{\alpha-1}y.$$

Posant $y=(z-x)Y$, on trouve

$$(z_n-x)Y_n=c^n(z-x)^{\alpha-1}\ldots(z_{n-1}-x)^{\alpha-1}y,$$

$$y=\frac{z_n-x}{c^n(z-x)^{\alpha-1}\ldots(z_{n-1}-x)^{\alpha-1}}Y_n.$$

Si n augmente indéfiniment, Y_n a pour limite une constante et le rapport considéré a une limite qui est à un facteur près la fonction y.

On pourrait, en suivant une marche analogue à celle qu'a adoptée M. Kœnigs pour la fonction $B(z)$, montrer que le rapport

$$\frac{z_n-x}{c^n(z-x)^{\alpha-1}\ldots(z_{n-1}-x)^{\alpha-1}}$$

représente pour n infini une fonction holomorphe dans le domaine du point x, et en déduire que ce rapport est solution de l'équation

$$y_1 = c(z-x)^{\alpha-1}y.$$

On voit d'ailleurs que $z_n - x$ est divisible par $(z-x)^{\alpha^n}$; le dénominateur est divisible par

$$[(z-x)(z-x)^{\alpha}\ldots(z-x)^{\alpha^{n-1}}]^{\alpha-1} \quad \text{ou} \quad (z-x)^{\alpha^n-1},$$

en sorte que le rapport est divisible par $z-x$.

Théorème II. — *$\varphi(z)$ étant de la forme indiquée dans le théorème précédent, il existe une fonction holomorphe unique dans le domaine du point x, telle que l'on ait*

$$y_1 = \frac{\varphi'(z)}{\alpha}y.$$

Cette fonction est nulle au point x, qui est racine simple.

L'équation peut s'écrire

$$y_1 = \frac{c(z-x)^{\alpha-1}}{\alpha}\{\alpha[1+\psi(z)] + (z-x)\psi'(z)y\},$$

$$y_1 = c(z-x)^{\alpha-1}\left[1+\psi(z)+\frac{z-x}{\alpha}\psi'(z)\right]y.$$

Soit Y la fonction holomorphe solution de l'équation

$$Y_1 = c(z-x)^{\alpha-1}Y;$$

le rapport $\frac{y}{Y}$ devra satisfaire à l'équation

$$\left(\frac{y}{Y}\right)_1 = \left[1+\psi(z)+\frac{z-x}{\alpha}\psi'(z)\right]\left(\frac{y}{Y}\right),$$

équation qui admet une solution holomorphe unique et non nulle au point x.

Il existe donc bien une solution holomorphe y en x, le point x étant comme pour Y un zéro simple.

Cette fonction est la limite du rapport

$$\frac{\alpha^n(z_n - x)}{z'_n z'_{n-1} \ldots z'_1},$$

z'_i désignant la dérivée de $z_i - x$ par rapport à z_{i-1}.

Théorème III. — *L'équation fonctionnelle*

$$y_1 = \alpha y$$

admet, dans les mêmes conditions que précédemment, une solution ayant au point x un point logarithmique. Il n'existe aucune solution holomorphe ou méromorphe au point x.

Nous avons, dans le théorème précédent, établi l'existence d'une fonction holomorphe Y, dont le point x est un zéro simple, solution de l'équation

$$Y_1 = \frac{\varphi'(z)}{\alpha} Y.$$

La fonction $\frac{1}{Y}$ est donc solution de l'équation

$$\left(\frac{1}{Y}\right)_1 \varphi'(z) = \alpha \left(\frac{1}{Y}\right);$$

$$\left(\frac{1}{Y}\right)_1 = \frac{\alpha}{\varphi'(z)} \left(\frac{1}{Y}\right),$$

le point x étant un pôle simple de cette fonction.

Considérons l'intégrale prise entre deux points x_0 et z du domaine du point x

$$F(z) = \int_{x_0}^{z} \frac{1}{Y} dz.$$

C'est une fonction holomorphe pour tout point qui n'annule pas Y; si, dans cette fonction, nous faisons la substitution $|z, \varphi(z)|$, nous obtenons

$$F(z_1) = \int_{x_0}^{z_1} \frac{1}{Y} dz,$$

fonction holomorphe, si Y ne s'annule pas, x variant de x_0 à z_1.

On peut écrire

$$\int_{x_0}^{z_1} \frac{1}{Y} dz = \int_{x_0}^{z_1} \frac{1}{Y(z_1)} dz_1$$

et, en posant $z_1 = \varphi(z)$, $x_0 = \varphi(x'_0)$,

$$F(z_1) = \int_{x'_0}^{z} \frac{1}{Y[\varphi(z)]} \varphi'(z)\, dz = \alpha \int_{x'_0}^{z} \frac{1}{Y(z)} dz = \alpha \int_{x_0}^{z} \frac{1}{Y} dz + \alpha \int_{x'_0}^{x_0} \frac{1}{Y} dz.$$

La fonction $F(z)$, ainsi définie, vérifie donc l'équation fonctionnelle

$$F(z_1) = \alpha F(z) + \alpha \int_{x'_0}^{x_0} \frac{1}{Y} dz = \alpha F(z) + \alpha m,$$

m étant une constante.

Posons alors

$$y = F(z) + k,$$

k étant une constante arbitraire,

$$y_1 = F(z_1) + k = \alpha F(z) + \alpha m + k = \alpha y + \alpha m - (\alpha - 1) k.$$

Si l'on détermine k par la condition

$$\alpha m - (\alpha - 1) k = 0,$$

on a formé une fonction y vérifiant l'équation

$$y_1 = \alpha y.$$

La détermination de k est possible dans le cas actuel, puisque, par hypothèse, α est supérieur à 1.

Nous avons supposé que l'on ne passait par aucun point racine de Y et de Y_1; ceci est toujours possible, le point x n'étant pas un point singulier essentiel; il reste à examiner ce qui arrive si l'on décrit un contour entourant le point x; laissons de côté la constante $\int_{x'_0}^{x_0} \frac{1}{Y} dz$ que l'on peut obtenir en allant de x'_0 et x_0 sans entourer le point x, et supposons que z partant de x_0 entoure l'origine. Soient c et c' le contour primitif et le contour actuel; on a

$$\int_{c'} \frac{1}{Y} dz = \int_c \frac{1}{Y} dz + \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\theta}}{Y[\rho e^{i\theta}]} d\theta,$$

en posant $z - x = \rho e^{i\theta}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\theta}\, d\theta}{Y} = A \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\theta}\, d\theta}{\rho e^{i\theta}} + \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\theta}}{Y'} d\theta,$$

$\frac{1}{Y'}$ étant une fonction holomorphe au point x, A étant le résidu de $\frac{1}{Y}$; on a donc

$$\int_{c'} \frac{1}{Y} dz = \int_c \frac{1}{Y} dz + 2 i\pi A.$$

On a, d'autre part, c'_1 et c'_1 étant les contours relatifs à z_1

$$\int_{c'_1} \frac{1}{Y_1} dz_1 = \int_{c_1} \frac{1}{Y_1} dz_1 + A \int_0^{2\alpha\pi} \frac{\rho i e^{i\theta}\, d\theta}{\rho i e^{i\theta}} = \int_{c_1} \frac{1}{Y_1} dz_1 + 2 i\pi\alpha A;$$

car le contour c_1 est formé de α contours fermés entourant le point x, en vertu de la relation

$$z_1 = c(z - x)^\alpha [1 + \psi(z)];$$

chacun de ces contours étant décrit quand l'argument de z varie de $\frac{2\pi}{\alpha}$.

La fonction $F(z)$ admet le point x comme point logarithmique, et l'on a encore la relation

$$y_1 = \alpha y.$$

Il est facile d'établir qu'il n'existe aucune fonction holomorphe ou méromorphe vérifiant l'équation

$$y_1 = \alpha y.$$

Si l'on suppose d'abord que cette fonction ne soit pas nulle et soit holomorphe, on doit avoir $y_1(x) = y(x)$ ou $\alpha = 1$; et on sait d'après le théorème général (Chap. I) que cette fonction est alors une constante; si x est racine d'ordre k, $y_1(z)$ admet x comme racine d'ordre αk et il ne peut y avoir identité entre y_1 et αy; il en est évidemment de même, si x est pôle d'ordre k.

THÉORÈME IV. — *Il existe une fonction satisfaisant à l'équation fonctionnelle*

$$y_1 - y = 1.$$

Cette fonction est le quotient par $\log \alpha$ du logarithme de la fonction qui satisfait à l'équation

$$y_1 = \alpha y.$$

Je désignerai dorénavant par

$A(z)$	la solution de	$y_1 = c(z-x)^{\alpha-1} y,$
$D(z)$	»	$y_1 = \dfrac{\varphi'(z)}{\alpha} y,$
$C(z)$	»	$y_1 = \alpha y,$
$c(z)$	»	$y_1 - y = 1.$

Remarque. — Si $\Omega(z)$ désigne une fonction périodique de période égale à l'unité, les solutions générales des équations précédentes sont

$$\begin{array}{l} A(z)\ \ \Omega[c(z)], \\ D(z)\ \ \Omega[c(z)], \\ C(z)\ \ \Omega[c(z)], \\ c(z)+\Omega[c(z)]. \end{array}$$

Exemple. — Prenons comme exemple le cas où la fonction $\varphi(z)$ est égale à z^α; le point limite est ici 0 et le cercle C_x est de rayon 1.

Les fonctions $A(z)$ et $D(z)$ sont égales à z; leur définition s'étend donc à tout le plan.

La fonction $C(z)$ est $\int_{x_0}^{z} \frac{1}{z}\,dz$, sa transformée étant $\int_{x_0}^{z^\alpha} \frac{1}{z_1}\,dz_1$; on peut prendre $x_0 = 1$ et la fonction $\operatorname{Log} z$ satisfait dans tout le plan à la relation

$$\operatorname{Log} z_1 = \alpha \operatorname{Log} z.$$

Enfin, dans cette même hypothèse, on a

$$c(z) = \frac{\operatorname{Log}\operatorname{Log} z}{\operatorname{Log}\alpha},$$

2. Les fonctions $C(z)$ et $c(z)$ sont analogues aux fonctions $B(z)$ et $b(z)$ de M. Kœnigs; elles donnent, comme ces dernières, la solution de quelques équations particulières, au moyen desquelles on peut résoudre l'équation fonctionnelle d'ordre n.

Si nous remarquons que l'équation

$$y = p y_1,$$

dans laquelle $p(x)$ est égal à l'unité, admet une solution holomorphe non nulle au point x, et que les résultats obtenus (Chap. II, n^os 3, 4) dépendent non de la forme des fonctions $B(z)$, $b(z)$, mais de la propriété qui a servi à leur définition, on en conclut que ces résultats sont applicables au cas qui nous occupe; nous pouvons donc écrire de suite les solutions des équations fonctionnelles suivantes :

Premier exemple. — 1° L'équation $y = p y_1$, dans laquelle $p(x) = \alpha^{-k}$ a pour solution le produit d'une fonction holomorphe non nulle au point x par la fonction $[C(z)]^k$.

2° L'équation $y_1 - y = u$, u étant une fonction holomorphe au point x, admet une solution holomorphe en ce point si $u(x)$ est nul.

Cette équation admet une solution de la forme

$$\lambda c(z) + f(z),$$

$f(z)$ étant holomorphe et λ une constante, lorsque $u(x)$ est différent de zéro.

3° L'équation $y_1 - y = c^n(z)$ a pour solution un polynome entier de degré $n + 1$ en $c(z)$, les coefficients de ce polynome étant des constantes.

4° L'équation $y_1 - y = u[c(z)]^n$, dans laquelle u est une fonction holomorphe au point x, admet une solution de la forme

$$f_0(z)[c(z)]^{n+1} + f_1(z)[c(z)]^n + \ldots + f_{n+1}(z),$$

$f_1, \ldots, f_{n+1}$ étant des fonctions holomorphes au point x; f_0 étant une constante.

5° L'équation $y_1 - y = \frac{\lambda}{[C(z)]^k}$, λ étant une constante, a pour solution $\frac{\lambda}{[C(z)]^k} \frac{\alpha^k}{1 - \alpha^k}$.

6° Soit l'équation $y_1 - y = \frac{u}{C(z)}$, u holomorphe au point x.

La méthode employée (Chap. II, n° 5, 2°) n'est plus applicable ici; nous verrons, d'ailleurs, que la solution ne renferme pas la fonction $c(z)$ analogue à $b(z)$.

Posant $y = \frac{v}{C(z)}$, il vient

$$\frac{v_1}{C(z_1)} - \frac{v}{C(z)} = \frac{u}{C(z)},$$

$$\frac{v_1}{\alpha} - v = u.$$

Dérivons les deux membres de cette équation

$$\frac{1}{\alpha} \frac{dv_1}{dz_1} \varphi'(z) - \frac{dv}{dz} = u',$$

$\frac{dv_1}{dz_1}$ étant la transformée de $\frac{dv}{dz}$ par la substitution $|z, \varphi(z)|$. Si l'on pose alors

$$\frac{dv}{dz} = \frac{t}{D(z)},$$

on trouve, pour déterminer la fonction, l'équation

$$\frac{1}{\alpha} \frac{t_1}{D(z_1)} \varphi'(z) - \frac{t}{D(z)} = u',$$

ou

$$t_1 - t = u' D(z),$$

en tenant compte de la relation

$$D(z_1) = \frac{\varphi'(z)}{\alpha} D(z).$$

Le second membre de l'équation fonctionnelle en t est holomorphe dans le domaine du point x et est nul en ce point en même temps que la fonction $D(z)$; il existe donc une fonction holomorphe t vérifiant l'équation (2, 2°).

Cette fonction étant définie à une constante près, on peut supposer qu'elle est nulle au point x; de telle sorte que le rapport $\frac{t}{D(z)}$ soit holomorphe au point x; l'intégrale v de ce rapport représente alors une fonction holomorphe dans le domaine x. On en conclut que l'équation proposée admet comme solution le quotient par $C(z)$ d'une fonction holomorphe.

7° Équation $y_1 - y = \frac{u}{[C(z)]^k}$, u holomorphe.

Faisons la transformation $y = \frac{v}{[C(z)]^k}$:

$$\frac{v_1}{[C(z_1)]^k} - \frac{v}{[C(z)]^k} = \frac{u}{[C(z)]^k},$$

$$\frac{v_1}{\alpha^k} - v = u.$$

Dérivons cette équation

$$\frac{1}{\alpha^k}\frac{dv_1}{dz_1}\varphi'(z) - \frac{dv}{dz} = u'.$$

En prenant comme fonction inconnue la fonction t définie par

$$\frac{dv}{dz} = \frac{t}{D},$$

on trouve

$$\frac{t_1}{\alpha^{k-1}} - t = u'D.$$

En opérant sur cette équation comme sur l'équation en v, on trouve

$$\frac{dt}{dz} = \frac{w}{D},$$

$$\frac{w_1}{\alpha^{k-2}} - w = (u'D)'D.$$

En continuant ainsi, nous arriverons à une équation

$$S_1 - S = (\{[(u'D)'D]'D\}'\ldots)D,$$

dont le second membre holomorphe est nul au point x, puisqu'il contient le facteur $D(z)$.

Si nous remontons successivement aux fonctions qui satisfont à des équations de la forme

$$\frac{f(z_1)}{\alpha^{k-2}} - f(z) = F(z)D,$$

nous aurons à prendre les intégrales de fonctions holomorphes au point x; une quelconque $f^{(i)}$ de ces fonctions est donnée par la relation

$$f^{(i)}(z) = \int \frac{f^{(i+1)}(z)}{\mathrm{D}}.$$

Or, $f^{(i+1)}(z)$ étant déterminée à une constante près, puisque c'est une intégrale, on peut supposer que $f^{(i+1)}(x) = 0$, et alors le quotient $\frac{f^{i+1}(z)}{\mathrm{D}(z)}$ sera holomorphe au point x.

Nous arriverons ainsi finalement à une fonction holomorphe V, de telle sorte que l'équation fonctionnelle proposée a pour solution le quotient par $[\mathrm{C}(z)]^k$ d'une fonction holomorphe au point x.

8° $y_1 - y = \frac{uc(z)}{[\mathrm{C}(z)]^k}$, u étant une fonction holomorphe dans le domaine du point x.

Appliquons la formule

$$uv = \nabla(u\Delta v) + \nabla(v\Delta u) + \nabla(\Delta u \Delta v)$$

en remplaçant u par $\nabla \frac{u}{[\mathrm{C}(z)]^k}$ et v par $c(z)$

$$c(z)\nabla\frac{u}{[\mathrm{C}(z)]^k} = \nabla\nabla\frac{u}{[\mathrm{C}(z)]^k} + \nabla\frac{uc(z)}{[\mathrm{C}(z)]^k} + \nabla\frac{u}{[\mathrm{C}(z)]^k},$$

en tenant compte de l'identité

$$c(z_1) - c(z) = 1 \qquad \text{ou} \qquad \nabla c(z) = 1.$$

On tire de la relation précédente

$$\nabla\frac{uc(z)}{[\mathrm{C}(z)]^k} = c(z)\nabla\frac{u}{[\mathrm{C}(z)]^k} - \nabla\frac{u}{[\mathrm{C}(z)]^k} - \nabla\nabla\frac{u}{[\mathrm{C}(z)]^k},$$
$$\nabla\frac{uc(z)}{[\mathrm{C}(z)]^k} = \frac{f(z)\,c(z)}{[\mathrm{C}(z)]^k} + \frac{f_1(z)}{[\mathrm{C}(z)]^k},$$

$f(z)$ et $f_1(z)$ étant des fonctions holomorphes dans le domaine du point x.

9° $y_1 - y = \frac{u[c(z)]^n}{[\mathrm{C}(z)]^k}$, u holomorphe.

Appliquons la formule employée précédemment, en remplaçant u par $\nabla \frac{u}{[C(z)]^k}$ et v par $[c(z)]^n$

$$[c(z)]^n \nabla \frac{u}{[C(z)]^k} = \nabla [c^n(z_1) - c^n(z)] \nabla \frac{u}{[C(z)]^k}$$

$$+ \nabla c^n(z) \frac{u}{[C(z)]^k} + \nabla \frac{u}{[C(z)]^k} [c^n(z_1) - c^n(z)],$$

$$\nabla \frac{uc^n(z)}{[C(z)]^k} = [c(z)]^n \nabla \frac{u}{[C(z)]^k} - \nabla P_{n-1} \nabla \frac{u}{[C(z)]^k} - \nabla P_{n-1} \frac{u}{[C(z)]^k},$$

P_{n-1} étant un polynome en $c(z)$ à coefficients constants, et de degré $n - 1$.

$\nabla \frac{u}{[C(z)]^k}$ est de la forme $\frac{f(z)}{[C(z)]^k}$, $f(z)$ étant une fonction holomorphe.

On voit donc que, si l'on admet que $\nabla \frac{uc^{n-1}(z)}{[C(z)]^k}$ est le quotient par $[C(z)]^k$ d'un polynome de degré $n - 1$ en $c(z)$ à coefficients holomorphes, on a

$$\nabla \frac{uc^n(z)}{[C(z)]^n} = \frac{[c(z)]^n f(z)}{[C(z)]^k} + \frac{Q_{n-1}}{[C(z)]^n},$$

Q_{n-1} étant un polynome de degré $n - 1$ en $c(z)$ à coefficients holomorphes.

L'équation a donc pour solution le quotient par $[C(z)]^k$ d'un polynome de degré n en $c(z)$, à coefficients holomorphes.

CHAPITRE V.

1. Nous pouvons maintenant trouver la forme des solutions d'une équation fonctionnelle d'ordre n dans le voisinage d'un point à convergence régulière de la fonction de transformation, en supposant toujours que les coefficients p_0, p_n ne s'annulent pas au point x.

Rappelons que, si l'on a la relation

$$p_0(x) + p_1(x) + \ldots + p_n(x) = 0, \tag{1}$$

sans qu'il existe aucune relation de la forme (m entier, positif)

$$p_0(x) + p_1(x)[\varphi'(x)]^m + \ldots = 0, \tag{2}$$

il existe une fonction holomorphe au point x, non nulle en ce point, vérifiant

$$p_0(z)y + p_1(z)y_1 + \ldots + p_n(z)y_n = 0;$$

cette fonction peut d'ailleurs se réduire à une constante (Chap. I, n° 1).

Dans le cas actuel, $\varphi'(x)$ étant nul, on sait qu'il n'existe aucun nombre entier positif m tel que la relation (2) soit vérifiée; le premier membre de cette relation se réduit à $p_0(x)$, que nous avons supposé différent de zéro.

2. Considérons en même temps que l'équation fonctionnelle

$$p_0 y + p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n = 0,$$

l'équation algébrique *caractéristique*

$$p_0(x) + p_1(x)t + p_2(x)t^2 + \ldots + p_n(x)t^n = 0.$$

Soit a une racine de cette équation; posons $a = \alpha^k$, α étant l'exposant de la plus haute puissance du binome $z - x$, qui divise $\varphi(z) - x$.

Si nous admettons l'existence d'une fonction y correspondant à cette racine, nous pouvons poser

$$y = Y[C(z)]^k,$$

Y étant une fonction qui doit satisfaire à l'équation

$$p_0(z)Y[C(z)]^k + p_1(z)Y_1[C(z_1)]^k + \ldots = 0,$$

ou (Chap. III, Th. III)

$$[C(z)]^k[p_0(z)Y + p_1(z)\alpha^k Y_1 + \ldots + p_n(z)\alpha^{nk} Y_n] = 0.$$

L'équation en Y a ses coefficients holomorphes, les coefficients extrêmes étant différents de zéro au point x; de plus, son équation caractéristique admet la racine 1; on en conclut (Chap. I, n° 1) qu'il existe une fonction Y non nulle au point x et holomorphe, qui vérifie l'équation; ceci établit l'existence de la fonction y, qui est le produit par $[C(z)]^k$ d'une fonction holomorphe.

Ainsi, à toute racine simple correspond une solution; il n'y a pas lieu ici de considérer les groupes de racines; il reste simplement à examiner le cas des racines multiples de l'équation caractéristique; nous suivrons la marche déjà adoptée pour le cas de $\varphi'(x) \neq 0$ (Chap. III, n° 2).

Nous pouvons supposer que la racine multiple est la racine 1, la transformation qui précède permettant toujours de ramener à cette hypothèse l'hypothèse d'une racine quelconque.

Soit Y' la solution holomorphe non nulle, qui vérifie l'équation

$$p_0 y + p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n = 0.$$

Si nous faisons les transformations

$$y = Y' t, \qquad t_1 - t = u,$$

on trouve (Chap. III, n° 2), pour déterminer la fonction u, l'équation fonctionnelle

$$p_0 Y' u + (p_0 Y' + p_1 Y'_1) u + \ldots + (p_0 Y' + \ldots + p_{n-1} Y'_{n-1}) u_{n-1} = 0,$$

équation à coefficients holomorphes, dont les termes extrêmes ont des coefficients différents de zéro.

L'équation caractéristique de cette équation admet la racine 1 à l'ordre $m - 1$, si la précédente avait la racine 1 de l'ordre m (Chap. III, n° 2).

Nous voyons que l'on peut appliquer ici tous les raisonnements employés dans le Chapitre III; les équations que l'on aura à résoudre ne diffèrent de celles que l'on a employées que par le changement de $b(z)$ en $c(z)$; comme nous avons vu que ces équations s'intègrent de la même façon, nous pouvons étendre au cas actuel les résultats obtenus dans l'hypothèse $\varphi'(x) \neq 0$; nous énoncerons alors la proposition suivante :

A une racine α^k d'ordre m de l'équation caractéristique correspondent m solutions de l'équation fonctionnelle; ces solutions sont les produits de $Y'[C(z)]^k$ par des polynomes en $c(z)$ à coefficients holomorphes; les degrés de ces polynomes sont $0, 1, \ldots, m-1$, et, dans chacun d'eux, le coefficient de la plus haute puissance de $b(z)$ est constant; $Y'(z)$ est une fonction holomorphe, non nulle au point x.

Nous avons ainsi formé n solutions de l'équation fonctionnelle d'ordre n, puisque l'équation caractéristique a n racines, dont aucune n'est nulle, ni infinie; de telle sorte que l'on peut toujours mettre une quelconque de ces racines sous la forme α^k; il reste à montrer comment de ces solutions on peut déduire la solution générale de l'équation fonctionnelle.

CHAPITRE VI.

Après avoir établi l'existence de fonctions solutions d'une équation fonctionnelle, nous allons étudier les relations qui lient ces solutions; les résultats sont les mêmes, que l'on suppose $\varphi'(x)$ nul ou non, et, de même que l'on a pu remarquer l'analogie entre la forme des solutions déjà trouvées et celle des solutions de l'équation différentielle linéaire et homogène, nous allons voir que cette analogie se poursuit, quand on associe différentes solutions.

1. *Si n fonctions $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ sont telles que le déterminant*

$$\begin{vmatrix} y' & y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_{n-1} \\ y'' & y''_1 & y''_2 & \cdots & y''_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(n)} & y^{(n)}_1 & y^{(n)}_2 & \cdots & y^{(n)}_{n-1} \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul, il existe entre ces n fonctions une relation linéaire et homogène, dont les coefficients sont des fonctions périodiques, de période 1, *des fonctions $b(z)$ ou $c(z)$, suivant que $\varphi'(x)$ est différent de zéro ou est nul.*

Ce déterminant étant nul, il existe des fonctions $C', \ldots, C^{(n)}$ telles que l'on ait

$$\begin{aligned} C'y' + C''y'' + \ldots + C^{(n)}y^{(n)} &= 0, \\ C'y'_1 + C''y''_1 + \ldots + C^{(n)}y^{(n)}_1 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ C'y'_{n-1} + C''y''_{n-1} + \ldots + C^{(n)}y^{(n)}_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Dans ces relations, faisons la substitution $|z, \varphi(z)|$ et désignons par $C_1^{(i)}$ la valeur de $C^{(i)}[\varphi(z)]$; nous avons les nouvelles relations

$$\begin{aligned}
&C'_1 y'_1 \quad + C''_1 y''_1 + \ldots \quad + C_1^{(n)} y_1^{(n)} = 0,\\
&C'_1 y'_2 \quad + C''_2 y''_2 + \ldots \quad + C_1^{(n)} y_2^{(n)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&C'_1 y'_{n-1} + C''_1 y''_{n-1} + \ldots + C_1^{(n)} y_{n-1}^{(n)} = 0,\\
&C'_1 y'_n \quad + C''_1 y''_n \quad + \ldots + C_1^{(n)} y_n^{(n)} = 0.
\end{aligned}$$

Si nous comparons les $n - 1$ premières équations de ce système aux $n - 1$ dernières équations du système précédent, nous voyons que les valeurs C', ..., $C^{(n)}$ sont proportionnelles aux valeurs C'_1, C''_1, ..., $C_1^{(n)}$

$$\frac{C'_1}{C'} = \frac{C''_1}{C''} = \ldots = \frac{C_1^{(n)}}{C^n} = \lambda(z).$$

Les fonctions C', C'', ..., $C^{(n)}$ sont donc solutions de l'équation fonctionnelle

$$f(z_1) = \lambda(z) f(z).$$

Si $f(z)$ est solution de cette équation, toute solution est le produit de $f(z)$ par une fonction périodique de période 1 de $b(z)$ ou de $c(z)$ suivant que l'on a $\varphi'(x) \neq 0$, ou $\varphi'(x) = 0$.

La relation trouvée peut alors s'écrire

$$f(z)[\Omega_1 . y' + \Omega_2 y'' + \ldots + \Omega_n y^{(n)}] = 0,$$

ce qui établit la proposition.

La réciproque de ce théorème est évidente, les fonctions Ω étant inaltérées par la substitution $|z, \varphi(z)|$.

2. Si $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ sont n solutions d'une équation d'ordre n entre lesquelles n'existe aucune relation de la forme indiquée dans le théorème précédent, nous dirons qu'elles constituent un système fondamental de solutions.

Nous allons, relativement à un tel système, établir un théorème analogue au théorème de Liouville :

Le déterminant d'ordre n formé avec les n solutions d'un système fondamental d'une équation fonctionnelle d'ordre n satisfait à une équation *fonctionnelle du premier ordre à coefficients holomorphes, non nuls, au point x.*

Soit le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} y' & y'_1 & \dots & y'_{n-1} \\ y'' & y''_1 & \dots & y''_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \dots & y_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Si l'on fait la substitution $|z, \varphi(z)|$, on trouve

$$D_1 = \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

ou, tenant compte de l'équation fonctionnelle,

$$D_1 = \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \dots & y'_{n-1} & -\frac{p_0}{p_n}y' - \frac{p_1}{p_n}y'_1 & \dots & -\frac{p_{n-1}}{p_n}y'_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_{n-1}^{(n)} & -\frac{p_0}{p_n}y^{(n)} - \frac{p_1}{p_n}y_1^{(n)} & \dots & -\frac{p_{n-1}}{p_n}y_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

En tenant compte des colonnes identiques, on voit que ce déterminant se réduit à

$$D_1 = \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & \dots & y'_{n-1} & -\frac{p_0}{p^n}y' \\ y''_1 & y''_2 & \dots & y''_{n-2} & -\frac{p_0}{p^n}y'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_{n-1}^{(n)} & -\frac{p_0}{p^n}y^{(n)} \end{vmatrix} = (-1)^n \frac{p_0}{p^n} D.$$

Le déterminant D est donc solution de l'équation

$$D_1 p_n - (-1)^n p_0 D = 0.$$

Ce sera une fonction de la forme

$$[B(z)]^k \delta \quad \text{ou} \quad [C(z)]^k \delta,$$

k étant la somme des exposants des racines de l'équation caractéristique; on voit, en effet, que la racine de l'équation caractéristique de l'équation

$$p_0 D - (-1)^n p_n D_1 = 0$$

est

$$(-1)^n \frac{p_0(x)}{p^n(x)},$$

c'est-à-dire le produit des racines de l'équation

$$p_0(x) + p_1(x)t + \ldots + p_n(x)t^n = 0.$$

3. *Si $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ forment un système fondamental, toute solution de l'équation fonctionnelle sera de la forme*

$$\Omega_1 y' + \Omega_2 y^n + \ldots + \Omega_n y^{(n)},$$

$\Omega, \ldots, \Omega_n$ *étant des fonctions périodiques de $b(z)$ ou de $c(z)$ de période* 1.

Soit, en effet, $y^{(n+1)}$ une solution de cette équation; on a les identités

$$\begin{array}{lllll} p_0 y' & + p_1 y'_1 & + \ldots + p_n y'_n & = 0, \\ p_0 y'' & + p_1 y''_1 & + \ldots + p_n p''_n & = 0, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, \\ p_0 y^{(n)} & + p_1 y_1^{(n)} & + \ldots + p_n y_n^{(n)} & = 0, \\ p_0 y^{(n+1)} & + p_1 y_1^{(n+1)} & + \ldots + p_n y_n^{(n+1)} & = 0. \end{array}$$

Ces équations linéaires en $p_0, \ldots, p_n$ ont un système de solutions différentes de zéro; le déterminant formé des coefficients de $y', \ldots, y'_{n-1}, \ldots, y^{(n)}, \ldots, y_{n-1}^{(n)}$ étant, par hypothèse, différent de zéro, on a

$$\begin{vmatrix} y' & y'_1 & \ldots & y'_{n-1} & y'_n \\ y'' & y''_1 & \ldots & y''_{n-1} & y''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \ldots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \\ y^{(n+1)} & y_1^{(n+1)} & \ldots & y_{n-}^{(n+1)} & y_n^{(n+1)} \end{vmatrix} = 0.$$

On en conclut la relation

$$y^{(n+1)} = \Omega_1 y' + \Omega_2 y'' + \ldots + \Omega_n y^{(n)}.$$

4. *Tout système de solutions* $Y', Y'', \ldots, Y^{(n)}$ *est fondamental ou non,*

suivant que le déterminant des coefficients Ω est différent de zéro ou est nul.

Ce théorème se démontre immédiatement en remarquant que le déterminant relatif au système Y est le produit du déterminant relatif au système y par le déterminant des coefficients Ω.

5. *Les solutions trouvées précédemment (Chap. III et V) constituent un système fondamental.*

Je supposerai $\varphi'(x) \neq 0$, la démonstration étant la même que $\varphi'(x)$ soit nul ou non; si $[\varphi'(x)]^{k_1}, \ldots, [\varphi(x)]^{k_n}$ sont les racines de l'équation caractéristique, une solution quelconque est de la forme

$$B(z)^{k_i}[u^{(1)} + u^{(2)} b(z) + \ldots],$$

$u^{(1)}, \ldots$ étant des fonctions holomorphes qui peuvent être nulles au point x, à l'exception du coefficient de la plus haute puissance de $b(z)$, si l'on suppose $[\varphi'(x)]^{k_i}$ racine multiple ne faisant pas partie d'un groupe.

Dans tous les cas, le déterminant formé avec les solutions et leurs transformées contiendra en facteur $[B(z)]^{k_1+k_2+\ldots+k_n}$, et sera de la forme

$$[B(z)]^{k_1+\ldots+k_n}[Q_0(z) + Q_1(z)\, b(z) + \ldots],$$

Q_0, Q_1 étant des fonctions holomorphes au point x.

La quantité entre crochets ne peut être identiquement nulle que si l'on a [1]

$$Q_0(z) = Q_1(z) = \ldots = 0.$$

Pour établir que nous avons ici un système fondamental, il suffit de montrer que l'un des coefficients $Q_0(z)$ n'est pas nul identiquement, et, en particulier, pour $z = x$; il sera alors différent de zéro dans un domaine du point x. A une racine $[\varphi'(x)]^k$ d'ordre λ de l'équation caractéristique correspondent, si cette racine ne fait pas partie d'un groupe, λ solutions de la forme

$$y = f(z) = [B(z)]^k \{ u^{(i,1)} + u^{(i,2)} b(z) + \ldots + u^{(i,i)} [b(z)]^{i-1} \}, \qquad i = 1, \ldots, \lambda,$$

(1) TANNERY, *Annales de l'École Normale*, p. 145; 1875.

les fonctions $u^{(1,1)}, \ldots, u^{(i,i)}, \ldots, u^{(\lambda,\lambda)}$ ne s'annulant pas au point x, non plus que leurs transformées (Chap. III, n° 2).

Les transformées de la solution écrite ici sont

$$y_j = f(z_j) = [B(z)]^k [\varphi'(x)]^{jk} \left\{ u_j^{(i,1)} + u_j^{(i,2)}[b(z)+j] + \ldots + u_j^{(i,i)}[b(z)+j]^{i-1} \right\}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Les λ lignes du déterminant Q_0, qui proviennent de ces λ solutions, sont constituées par les termes indépendants de $b(z)$ dans ces solutions et leurs transformées; ce seront des lignes de la forme

$$\begin{array}{lllll}
u^{(1,1)} & u_1^{(1,1)}[\varphi'(x)]^k & u_2^{(1,1)}[\varphi'(x)]^{2k} & \ldots & u_{n-1}^{(1,1)}[\varphi'(x)]^{(n-1)k}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
u^{(\lambda,1)} & [u_1^{(\lambda,1)} + \ldots + u^{(\lambda,\lambda)}][\varphi'(x)]^k & \ldots & & [u_{n-1}^{(\lambda,1)} + (n-1)u_{n-1}^{(\lambda,2)} + \ldots + (n-1)^{\lambda-1}u_{n-1}^{(\lambda,\lambda)}][\varphi'(x)]^{(n-1)k}.
\end{array}$$

en supprimant les facteurs $B(z)$.

Si l'on fait $z = x$, on remarque que l'on a

$$u^{i,j}(x) = u_1^{(i,j)}(x) = \ldots = u_{n-1}^{(i,j)}(x).$$

Supprimant alors dans ces lignes les termes qui fourniraient des lignes identiques en développant les termes polynomes, on voit que, à un facteur $u^{(1,1)}u^{(2,2)}\ldots$ près, on peut écrire

$$\begin{array}{llll}
1 & [\varphi'(x)]^k & \ldots & [\varphi'(x)]^{(n-1)k}, \\
0 & [\varphi'(x)]^k & \ldots & (n-1)[\varphi'(x)]^{(n-1)k}, \\
. & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 & [\varphi'(x)]^k & \ldots & (n-1)^{\lambda-1}[\varphi'(x)]^{(n-1)k},
\end{array}$$

les facteurs négligés étant différents de zéro.

Si la racine $[\varphi'(x)]^k$ fait partie d'un groupe de racines et est multiple d'ordre μ, toute solution, ainsi que ses transformées, qui correspond à cette racine, est une somme de termes ayant en facteur $[B(z)]^k$ et d'autres termes ayant en facteur une puissance de $B(z)$ d'exposant $k+l$, l étant entier positif; de telle sorte que si, après avoir divisé chaque ligne par $[B(z)]^k$, on fait $z = x$, les termes de la seconde partie disparaissent et il ne reste que des termes analogues à ceux que nous avons trouvés plus haut; ici encore, les coefficients des plus hautes puissances de $b(z)$ ne s'accumulent pas pour $z = x$; nous voyons alors que, sans s'occuper des groupes, si

$$[\varphi'(x)]^{k_1} = a_1, \qquad [\varphi'(x)]^{k_2} = a_2, \qquad \ldots, \qquad [\varphi'(x)]^{k_i} = a_i$$

sont les racines d'ordre $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ de l'équation caractéristique, on a

$$Q_0(x) = A \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_1 & 2a_1^2 & \ldots & \ldots & (n-1)a_1^{n-1} \\ 0 & a_1 & 2^2 a_1^2 & \ldots & \ldots & (n-1)^2 a_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & a_1 & 2^{\lambda_1-1} a_1^2 & \ldots & \ldots & (n-1)^{\lambda_1-1} a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & \ldots & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & a_2 & 2^{\lambda_2-1} a_2 & \ldots & \ldots & (n-1)^{\lambda_2-1} a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant, qui présente la plus grande analogie avec celui de Vandermonde, ne s'annule que si deux des quantités a_i, a_j sont égales, ce qui est contraire à l'hypothèse; d'autre part, A étant différent de zéro, on voit que $Q_0(x)$ n'est pas nul : c'est ce que nous voulions établir.

Il est manifeste que tout ce qui vient d'être dit subsiste, quand on suppose $\varphi'(x) = 0$; il suffit de remplacer $B(z)$ par $C(z)$ et $b(z)$ par $c(z)$.

6. Le procédé qui nous a permis de trouver les solutions qui correspondent à une racine multiple permet de ramener le problème à celui de la recherche d'une solution d'une équation fonctionnelle d'ordre moindre d'une unité; nous pouvons ainsi parvenir à une équation du premier ordre; la difficulté du problème résidera alors dans la résolution d'équations de la forme

$$y_1 - y = u,$$

u étant une solution de l'équation obtenue en faisant disparaître de l'équation une solution connue; cette méthode est celle qui permet d'abaisser l'ordre d'une équation différentielle linéaire et homogène, connaissant une intégrale de cette équation; supposons que l'on sache résoudre toutes les équations (1), les solutions de l'équation fonctionnelle seront

$$Y, \quad Y\nabla u, \quad Y\nabla u \nabla v, \quad \ldots.$$

Ce système de u solutions est un *système fondamental*.

Supposons, en effet, qu'il existe une relation de la forme

$$\Omega y + \Omega' y \nabla u + \Omega'' Y \nabla u \nabla v + \ldots = 0$$

ou

$$\Omega + \Omega' \nabla u + \Omega'' \nabla u \nabla v + \ldots = 0.$$

Faisons sur le premier membre l'opération Δ.

On a

$$\Omega_1 - \Omega + [\Omega'_1 (\nabla u)_1 - \Omega' \nabla u] + \ldots = 0.$$

$\Omega, \ldots$ étant fonctions périodiques de $b(z)$ ou $c(z)$ de période 1, on a

$$\Omega_1 = \Omega, \qquad \Omega'_1 = \Omega', \qquad \ldots,$$

$$\Omega'[(\nabla u)_1 - (\nabla u)] + \Omega''[(\nabla u \nabla v)_1 - (\nabla u \nabla v)] + \ldots = 0,$$

$$\Omega' u + \Omega u \nabla v + \ldots = 0.$$

On peut opérer sur cette relation comme sur la précédente et l'on arrivera facilement à $\Omega^{(n)} = 0$; les autres quantités Ω devront alors être nulles, comme on le verrait en reprenant ces diverses relations en sens inverse.

Le système considéré est donc fondamental.

7. Nous avons trouvé plus haut un système de i fonctions correspondantes à une racine d'ordre i de l'équation caractéristique; ces fonctions sont des polynomes en $b(z)$ ou en $c(z)$; il existe entre les coefficients des puissances de $b(z)$ ou de $c(z)$ des relations simples, qui feront ressortir davantage l'analogie avec les solutions d'une équation différentielle linéaire, homogène, dans le voisinage d'un point critique.

Supposons que la racine multiple ne fasse pas partie d'un groupe et supposons, pour simplifier, que la racine de l'équation caractéristique soit l'unité, le cas général se ramenant à celui-ci en introduisant le facteur $[B(z)]^{\alpha}$.

Soient alors deux solutions

$$Y + Y' b(z) + Y'' b^2(z) + \ldots + Y^{(i)} \quad [b(z)]^i.$$
$$y + y' b(z) + y'' b^2(z) + \ldots + y^{(i+1)} [b(z)]^{i+1}.$$

Admettons que les coefficients y soient liés aux coefficients X par les relations, l'indice étant supérieur à $i - j$,

$$\begin{aligned}
y^{(i+1)} &= \alpha_{i+1,\,i}\, Y^{(i)},\\
y^{(i)} &= \alpha_{i,\,i-1}\, Y^{(i-1)} + \alpha_{i,\,i}\, Y^{(i)},\\
y^{(i-1)} &= \alpha_{i-1,\,i-2}\, Y^{(i-2)} + \alpha_{i-1,\,i-1}\, Y^{(i-1)} + \alpha_{i-1,\,i}\, Y^{(i)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y^{(i-j+1)} &= \alpha_{i-j+1,\,i-j}\, Y^{(i-j)} + \alpha_{i-j+1,\,i-j+1}\, Y^{(i-j+1)} + \ldots + \alpha_{i-j+1,\,i}\, Y^{(i)},
\end{aligned}$$

les coefficients α étant des constantes telles que le rapport de deux coefficients qui, dans deux lignes consécutives, ont même rang, soit égal au rapport des indices du coefficient de la ligne supérieure; c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\alpha_{i-j+1,\,i-j}}{\alpha_{i-j+2,\,i-j+1}} = \frac{i-j+2}{i-j+1}, \qquad \frac{\alpha_{i-j+1,\,i-j+1}}{\alpha_{i-j+2,\,i-j+2}} = \frac{i-j+2}{i-j+2},$$
$$\frac{\alpha_{i-j+2,\,i-j+1}}{\alpha_{i-j+3,\,i-j+2}} = \frac{i-j+3}{i-j+2}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \frac{\alpha_{i-1,\,i-1}}{\alpha_{i,\,i}} = \frac{i}{i},$$
$$\frac{\alpha_{i,\,i-1}}{\alpha_{i+1,\,i}} = \frac{i+1}{i}.$$

On conclut d'abord de ces relations que, si deux coefficients ont même rang, leur rapport est égal au rapport inverse de leurs premiers indices :

$$\frac{\alpha_{i-j+1,i-j}}{\alpha_{i+1,\,i}} = \frac{i+1}{i-j+1};$$

remarquons que tous les seconds coefficients ont même valeur. Ceci admis, nous allons montrer qu'il en est de même pour l'expression de $y^{(i-j)}$ et que l'on a (j étant inférieur à i)

$$\begin{aligned}
y^{(i-j)} = {}& \alpha_{i-j,\,i-j-1}\, Y^{(i-j-1)} + \alpha_{i-j,\,i-j}\, Y^{(i-j)}\\
&+ \alpha_{i-j,\,i-j+1}\, Y^{(i-j+1)} + \ldots + \alpha_{i-j,\,i}\, Y^{(i)},
\end{aligned}$$

avec les relations

$$\frac{\alpha_{i-j,\,i-j-1}}{\alpha_{i-j+1,\,i-j}} = \frac{i-j+1}{i-j},$$
$$\frac{\alpha_{i-j,\,i-j}}{\alpha_{i-j+1,\,i-j+1}} = \frac{i-j+1}{i-j+1},$$
$$\frac{\alpha_{i-j,\,i-j+1}}{\alpha_{i-j,\,i-j+2}} = \frac{i-j+1}{i-j+2},$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{\alpha_{i-j,\,i-1}}{\alpha_{i-j+1,\,i}} = \frac{i-j+1}{i},$$

$\alpha_{i-j,i}$ étant arbitraire.

Pour établir cette relation, écrivons que les fonctions

$$\begin{gathered} Y + Y' b(z) + \dots + Y^{(i)} [b(z)]^i, \\ y + y' b(z) + \dots + y^{(i+1)} [b(z)]^{i+1} \end{gathered}$$

vérifient l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} 0 = p_0 &\{Y + Y' b(z) + \dots + Y^{(i)} [b(z)]^i\} \\ &+ p_1 \{Y_1 + Y'_1 [b(z)+1] + \dots + Y_1^{(i)} [b(z)+1]^i\} + \dots \\ &+ p_n \{Y_n + Y'_n [b(z)+n] + \dots + Y_n^{(i)} [b(z)+n]^i\}, \\ 0 = p_0 &\{y + y' b(z) + \dots + y^{(i+1)} b(z)^{i+1}\} + \dots \\ &+ p_n \{y_n + y'_n [b(z)+n] + \dots + y_n^{(i+1)} [b(z)+n]^{i+1}\}. \end{aligned}$$

Ces deux équations, dont les seconds membres sont des polynomes en $b(z)$ à coefficients holomorphes, ne peuvent être vérifiées que si ces seconds membres sont identiquement nuls, ce qui nous donne les relations

$$\begin{aligned} &p_0 Y^{(i)} + p_1 Y_1^{(i)} + \dots + p_n Y_n^{(i)} = 0, \\ &p_0 Y^{(i-1)} + p_1 Y_1^{(i-1)} + \dots + p_n Y_n^{(i-1)} + C_{i,1} (p_1 Y_1^{(i)} + 2 p_2 Y_2^{(i)} + \dots + n p_n Y_n^{(i)}) = 0, \\ &p_0 Y^{(i-2)} + p_1 Y_1^{(i-2)} + \dots + p_n Y_n^{(i-2)} \\ &\qquad + C_{i-1,1} (p_1 Y_1^{(i-1)} + 2 p_2 Y_2^{(i-1)} + \dots + n p_n Y_n^{(i-1)}) \\ &\qquad\qquad + C_{i,2} (p_1 Y_1^{(i)} + \dots + n^2 p_n Y_n^{(i)}) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &p_0 Y^{(i-j)} + \dots + p_n Y_n^{(i-j)} \\ &\quad + C_{i-j+1,1} (p_1 Y_1^{(i-j+1)} + 2 p_2 Y_2^{(i-j+1)} + \dots + n p_n Y_n^{(i-j+1)}) \\ &\quad + C_{i-j+2,2} (p_1 Y_1^{(i-j+2)} + \dots + n^2 p_n Y_n^{(i-j+2)}) + \dots \\ &\quad + C_{i-1,j-1} (p_1 Y_1^{(i-1)} + \dots + n^{j-1} p_n Y_n^{(i-1)}) + C_{i,j} (p_1 Y_1^{(i)} + \dots + n^j p_n Y_n^{(i)}) = 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_0 Y^{(i-j-1)} &+ \ldots + p_n y_n^{(i-j-1)} \\
&+ C_{i-j,1}(p_1 Y_1^{(i-j)} + \ldots + n p_n Y_n^{(i-j)}) \\
&+ C_{i-j+1,2}(p_1 Y_1^{(i-j+1)} + \ldots + n^2 p_n Y_n^{(i-j+1)}) + \ldots \\
&+ C_{i-1,j}(p_1 Y_1^{(i-1)} + \ldots + n^j p_n Y_n^{(i-1)}) + C_{i,j+1}(p_1 Y_1^{(i)} + \ldots + n^{j+1} p_n Y_n^{(i)}) = 0,
\end{aligned}
$$

. . . .

Relativement à y, on aurait les mêmes relations; écrivons seulement la relation

$$
\begin{aligned}
p_0 y^{(i-j)} + p_1 y_1^{(i-j)} \quad &+ \ldots + p_n y_n^{(i-j)} \\
+ C_{i-j+1,1}(p_1 y_1^{(i-j+1)} &+ \ldots + n p_n y_n^{(i-j+1)}) \\
+ C_{i-j+2,2}(p_1 y_1^{(i-j+2)} &+ \ldots + n^2 p_n y_n^{(i-j+2)}) + \ldots \\
+ C_{i-j+k,k}(p_1 y_1^{(i-j+k)} &+ \ldots + n^k y_n^{(i-j+k)}) \quad + \ldots \\
+ C_{i+1,j+1}(p_1 y_1^{(i+1)} \quad &+ \ldots + n^{i+1} p_n y_n^{(i+1)}) \qquad = 0.
\end{aligned}
$$

Remplaçons dans cette équation $y^{(i+1)}, \ldots, y^{(i-j+1)}$ par leurs valeurs en faisant des Y; nous aurons

$$
\begin{aligned}
& p_0 y^{(i-j)} + p_1 y^{j(i-j)} + \ldots + p_n y_n^{(i-1)} \\
& + C_{i-j+1,1} \left\{
\begin{aligned}
& \alpha_{i-j+1,i-j} \quad (p_1 Y_1^{(i-j)} \quad + \ldots + n p_n Y_n^{(i-j)}) \\
& + \alpha_{i-j+1,i-j+1}(p_1 Y_1^{(i-j+1)} + \ldots + n p_n Y_n^{(i-j+1)}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \alpha_{i-j+1,i-j+k}(p_1 Y_1^{(i-j+k)} + \ldots + n p_n Y_n^{(i-j+k)}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \alpha_{i-j+1,i} \qquad (p_1 Y_1^{(i)} \qquad + \ldots + n p_n Y_n^{(i)})
\end{aligned}
\right\} \\
& + C_{i-j+2,2} \left\{
\begin{aligned}
& \alpha_{i-j+2,i-j+1}(p_1 Y_1^{(i-j+1)} + \ldots + n^2 p_n Y_n^{(i-j+1)}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \alpha_{i-j+2,i-j+k}(p_1 Y_1^{(i-j+k)} + \ldots + n^2 p_n Y_n^{(i-j+k)}) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \alpha_{i-j+2,i} \qquad (p_1 Y_1^{(i)} \qquad + \ldots + n^2 p_n Y_n^{(i)})
\end{aligned}
\right\} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + C_{i+1,j+1} \quad + \alpha_{i+1,i} \qquad (p_1 Y_1^{(i)} \qquad + \ldots + n^{j+1} p_n Y_n^{(i)}) \qquad = 0.
\end{aligned}
$$

Retranchons de cette équation les produits des premiers membres des équations en Y par

$$
\frac{C_{i-j+1,1}}{C_{i-j,1}} \alpha_{i-j+1,i-j}, \quad \frac{C_{i-j+1,1}}{C_{i-j+1,1}} a_{i-j+1,i-j+1}, \quad \ldots, \quad \frac{C_{i-j+1,1}}{C_{i,1}} \alpha_{i-j+1,i};
$$

les termes facteurs de $C_{i-j+1,1}$ disparaissent; nous allons montrer qu'il en est de même des autres termes en Y.

Le groupe qui renferme en facteur $C_{i-j+k,k}$ est

$$C_{i-j+k,k}\left\{\begin{array}{l} \alpha_{i-j+k,i-j+k-1}(p_1 Y_1^{(i-j+k-1)}+\ldots+n^k p_n Y_n^{(i-j+k-1)}) \\ +\alpha_{i-j+k,i-j+k}(p_1 Y_1^{(i-j+k)} \quad +\ldots+n^k p_n Y_n^{(i-j+k)}) \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\alpha_{i-j+k,i}(p_1 Y_1^{(i)} \qquad +\ldots+n^k p_n Y_n^{(i)}) \end{array}\right\}.$$

On a retranché de ce groupe

$$\begin{array}{l} \dfrac{C_{i-j+1,1}}{C_{i-j,1}}\alpha_{i-j+1,i-j}\,C_{i-j+k-1,k}(p_1 Y_1^{(i-j+k-1)}+\ldots+n^k p_n Y_n^{(i-j+k-1)}) \\ +\dfrac{C_{i-j+1,1}}{C_{i-j+1,1}}\alpha_{i-j+1,i-j+1}\,C_{i-j+k,k}(p_1 Y_1^{(i-j+k)} \quad +\ldots+n^k p_n Y_n^{(i-j+k)}) \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\dfrac{C_{i-j+1,1}}{C_{i-k+1,1}}\alpha_{i-j+1,i-k+1}\,C_{i,k}(p_1 Y_1^{(i)} \qquad +\ldots+n^k p_n Y_n^{(i)}). \end{array}$$

Cette différence est identiquement nulle; pour le voir, il suffit de remarquer que l'on a

$$\alpha_{i-j+k,i-j+k-1}C_{i-j+k,k}-\frac{C_{i-j+1,1}}{C_{i-j,1}}\alpha_{i-j+1,i-j}\,C_{i-j+k-1,k}=0$$

ou

$$\frac{\alpha_{i-j+1,i-j}}{\alpha_{i-j+k,i-j+k-1}}=\frac{C_{i-j+k,k}}{C_{i-j+k-1,k}}\,\frac{C_{i-j,1}}{C_{i-j+1,1}}=\frac{i-j+k}{i-j+1}.$$

relation que nous avons supposée vraie.

On a d'une façon générale

$$\left(\alpha_{i-j+k,i-j+k'}C_{i-j+k,k}-\frac{C_{i-j+1,1}}{C_{i-j+k'-k+1,1}}\alpha_{i-j+1,i-j+k'-k+1}\,C_{i-j+k',k}\right) \\ \times(p_1 Y_1^{(i-j+k')}+\ldots+n^k p_n Y_1^{(i-j+k')})$$

Le coefficient peut s'écrire en supprimant des facteurs non nuls

$$\alpha_{i-j+k,i-j+k'}C_{i-j+k,k}\left(1-\frac{C_{i-j+1,1}}{C_{i-j+k'-k+1,1}}\,\frac{C_{i-j+k',k}}{C_{i-j+k,k}}\,\frac{\alpha_{i-j+1,i-j+k'-k+1}}{\alpha_{i-j+k,i-j+k'}}\right),$$

ou

$$\alpha_{i-j+k,i-j+k'}\mathrm{C}_{i-j+k,k}\left[\mathrm{I}-\frac{i-j+\mathrm{I}}{i-j+k'-k+\mathrm{I}}\right.$$
$$\left.\times\frac{(i-j+k')!}{k!\,(i-j+k'-k)!}\,\frac{(i-j)!\,k!}{(i-j+k)!}\,\frac{\alpha_{i-j+1,i-j+k'-k+1}}{\alpha_{i-j+k,i-j+k'}}\right].$$
$$\alpha_{i-j+k,i-j+k'}\mathrm{C}_{i-j+k,k}\left[\mathrm{I}-\frac{(i-j+k'-k+2)\ldots(i-j+k')}{(i-j+2)\ldots(i-j+k)}\,\frac{\alpha_{i-j+1,i-j+k'-k+1}}{\alpha_{i-j+k,i-j+k'}}\right].$$

D'après les hypothèses, on a

$$\frac{\alpha_{i-j+1,i-j+k'-k+1}}{\alpha_{i-j+2,i-j+k'-k+2}}=\frac{i-j+2}{i-j+k'-k+2},$$
$$\frac{\alpha_{i-j+2,i-j+k'-k+2}}{\alpha_{i-j+3\,i-j+k'-k+3}}=\frac{i-j+3}{i-j+k'-k+3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\alpha_{i-j+k-1,i-j+k'-1}}{\alpha_{i-j+k,i-j+k'}}=\frac{i-j+k}{i-j+k'}$$

et, en multipliant,

$$\frac{\alpha_{i-j+1,i-j+k'-k+1}}{\alpha_{i-i+k,i-j+k'}}=\frac{(i-j+2)\ldots(i-j+k)}{(i-j+k'-k+2)\ldots(i-j+k')}.$$

Le coefficient de $(p_1\mathrm{Y}_1^{(i-j+k')}+\ldots+n^kp_n\mathrm{Y}_n^{(i-j+k')})$ est donc nul, et l'on parvient ainsi à la relation suivante entre $y^{(i-j)}$ et les Y

$$\begin{aligned}&p_0[y^{(i-j)}-\alpha_{i-j,i-j-1}\mathrm{Y}^{(i-j-1)}+\ldots-\alpha_{i-j,i-1}\mathrm{Y}^{(i-1)}]\\&+p_1[y_1^{(i-j)}-\alpha_{i-j,i-j-1}\mathrm{Y}_1^{(i-j-1)}+\ldots-\alpha_{i-j,i-1}\mathrm{Y}_1^{(i-1)}]\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+p_n[y_n^{(i-j)}-\alpha_{i-j,i-j-1}\mathrm{Y}_n^{(i-j-1)}+\ldots-\alpha_{i-j,i-1}\mathrm{Y}_n^{(i-1)}]=0,\end{aligned}$$

dans laquelle les coefficients α satisfont aux relations

$$\frac{\alpha_{i-j,i-j-1}}{\alpha_{i-j+1,i-j}}=\frac{i-j+\mathrm{I}}{i-j},\qquad\ldots,\qquad\frac{\alpha_{i-j,i-1}}{\alpha_{i-j+1,i+1}}=\frac{i-j+\mathrm{I}}{i+\mathrm{I}}.$$

Si nous prenons comme inconnue la fonction

$$y^{(i-j)}-\alpha_{i-j,i-j-1}\mathrm{Y}^{(i-j-1)}-\ldots-\alpha_{i-j,i-1}\mathrm{Y}^{(i-1)},$$

nous voyons qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle proposée et, comme elle est holomorphe, elle est nécessairement égale au produit de la seule solution holomorphe $Y^{(i)}$ par une constante arbitraire $\alpha_{i-j,i}$. Ainsi, nous arrivons à cette conclusion :

Si l'équation caractéristique a une racine multiple d'ordre i, les solutions sont des polynomes en $b(z)$ de degrés $0, 1, \ldots, i-1$; les coefficients d'un polynome sont des fonctions linéaires à coefficients constants des coefficients du polynome précédent.

Cela résulte de ce qui précède et de ce fait, que l'on vérifie immédiatement, que la loi admise pour les coefficients est vérifiée dans le cas des polynomes de degrés 0 et 1, ainsi que pour les termes y', y'' de la fonction précédente.

Seul le terme indépendant de $b(z)$ ne dépend pas des coefficients des polynomes qui précèdent.

On reconnaît dans cette propriété un résultat analogue à celui qui est relatif aux fonctions qui correspondent à une racine multiple de l'équation fondamentale dans les équations différentielles linéaires.

Il en est d'ailleurs de même si la racine 1 fait partie d'un groupe de racines; dans ce cas, en effet, nous savons que les solutions sont encore des polynomes en $b(z)$, les coefficients étant holomorphes ou ayant au point x un pôle; si nous nous reportons à ce qui précède, le raisonnement subsiste en rendant tous les coefficients holomorphes, c'est-à-dire en multipliant les équations en Y et y écrites plus haut par des puissances convenables de $B(z)$.

Ceci explique que le déterminant, formé avec les n solutions et leurs transformées, soit (2) de la forme

$$[B(z)]^k\partial, \qquad \text{ou} \qquad [C(z)]^k\partial.$$

Les coefficients des termes $b(z)$ ou $c(z)$ sont nuls.

Dans le cas d'une racine faisant partie d'un groupe, le coefficient de $[b(z)]^i$ n'étant fonction linéaire que des coefficients de la solution précédente qui correspondent à $[b(z)]^{i-1}[b(z)]^i\ldots$, nous retrouvons bien la forme étudiée plus haut.

L'analyse précédente montre que les seules solutions de l'équation fonctionnelle qui aient la forme de polynomes en $b(z)$ ou $c(z)$ à coefficients holomorphes ou méromorphes sont telles que les coefficients soient fonctions linéaires des coefficients des polynomes de degré moindre, sauf pour les termes indépendants de $b(z)$ ou $c(z)$; on en conclut que, si ces solutions sont

$$\begin{aligned}
&f_{1,1},\\
&f_{2,1}+f_{2,2}\,b(z),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&f_{i,1}+f_{i,2}\,b(z)+\ldots+f_{i,i}[b(z)]^{i-1},
\end{aligned}$$

les f dont le second indice est supérieur à 1 s'expriment en fonctions linéaires à coefficients constants des f dont le second indice est l'unité.

D'autre part, si $f_{i,2}, \ldots, f_{i,i}$ sont déterminés, $f_{i,1}$ est également parfaitement déterminé, à la fonction $f_{1,1}$ près.

Soient, en effet, deux solutions

$$\begin{aligned}
&f_{i,1}+f_{i,2}\,b(z)+\ldots+f_{i,i}[b(z)]^{i-1},\\
&f'_{i,1}+f_{i,2}\,b(z)+\ldots+f_{i,i}[b(z)]^{i-1}:
\end{aligned}$$

leur différence est égale à $f_{i,1}-f'_{i,1}$; c'est une fonction holomorphe, qui vérifie l'équation proposée; elle est donc égale à $\alpha f_{1,1}$, α étant une constante.

Mais il y a lieu de remarquer que les fonctions $f_{i,2}, f_{i,s}, \ldots, f_{i,i}$ renferment des constantes non déterminées, ces constantes étant les coefficients de $f_{i-1,i-1}$ dans les expressions de $f_{i,2}, \ldots, f_{i,i-1}$ en fonction des f_{i-1}.

Il semblerait donc que les différentes solutions ne soient pas bien déterminées; cela tient à ce que la somme de ces solutions est également solution de l'équation; si l'on considère en effet une solution

$$v_i = F_{i,1}+F_{i,2}\,b(z)+\ldots+F_{i,i}[b(z)]^{i-1},$$

dans laquelle les constantes arbitraires $\alpha_{i,i}, \lambda_{i-1,i}, \ldots, \alpha_{i,i}$ ont des valeurs données, et si, d'autre part, on considère un système de solutions bien déterminées que nous désignerons par $u_1, \ldots, u_i$, la solution v_i est nécessairement une combinaison linéaire à coefficients constants de $u_1, \ldots, u_i$.

Si l'on admet le théorème pour les solutions d'indice inférieur à i, et si l'on remarque que l'on a $F_{i,i}=\alpha_{i,i}f_{1,1}=\lambda f_{i,i}$, λ étant une constante, on voit que

$$v_i - \lambda u_i$$

est une solution de l'équation ne contenant plus $b^{i-1}(z)$, c'est-à-dire que $v_i - \lambda u_i$ est combinaison linéaire à coefficients constants de $u_1, \ldots, u_{i-1}$, ce qui démontre le théorème. On vérifie d'ailleurs aisément que l'on a

$$v_2 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2.$$

9. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Toute solution ayant la forme d'un polynome en $b(z)$ ou $c(z)$ à coefficients holomorphes ou méromorphes, et correspondant à une racine 1 *ou à une racine du groupe dont* 1 *fait partie, est combinaison linéaire à coefficients des fonctions déterminées $u_1, u_2, \ldots, u_i$.*

Soit, plus généralement, une solution relative à une racine $[\varphi'(x)]^{\alpha_1}$

$$[B(z)]^{\alpha_1}\{f_{i,1} + f_{i,2}b(z) + \ldots + f_{i,i}[b(z)]^{i-1}\}.$$

Faisons décrire à la variable un cercle autour du point x; $b(z)$ prend la valeur $b(z) + k$ et la fonction devient

$$[B(z)]^{\alpha_1} e^{2i\pi\alpha_1}[f_{i,1} + f_{i,2}\{b(z) + k\} + \ldots + f_{i,i}[b(z) + k]^{i-1}\}.$$

Elle satisfait encore à l'équation fonctionnelle et a la forme d'un polynome de degré $i - 1$ en $b(z)$ à coefficients holomorphes ou méromorphes; c'est donc une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{i-1} u_i$, le degré en $b(z)$ étant $i - 1$.

Si, d'ailleurs, on retranche $e^{2i\pi\alpha_1} u_i$, on trouve un polynome de degré $i - 2$ en $b(z)$, qui doit être une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$; nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si $[\varphi'(x)]^{\alpha_1}$ est racine multiple d'ordre λ, ou fait partie d'un groupe comprenant λ racines de l'équation caractéristique, α_1 étant le plus grand exposant, les λ solutions correspondantes sont telles que l'on ait, $[u]'$ désignant la valeur de $[u]$ après un tour autour du point x,

$$\begin{aligned}
&[u_1]' = e^{2i\pi\alpha_1} u_1,\\
&[u_2]' = \omega_{21} u_1 + e^{2i\pi\alpha_1} u_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&[u_\lambda]' = \omega_{\lambda 1} u_1 + \omega_{\lambda 2} u_2 + \ldots + \omega_{\lambda,\lambda-1} u_{\lambda-1} + e^{2i\pi\alpha_1} u_\lambda.
\end{aligned}$$

Si les racines de l'équation caractéristique sont d'ordres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *ou si elles se partagent en groupes comprenant* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *racines, on formera* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = n$ *groupes de solutions jouissant de la propriété énoncée.*

Ce théorème subsiste, d'après la remarque faite plus haut, si l'on remplace $u_1, u_2, \ldots, u_\lambda$ par des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_\lambda$, ces combinaisons ne renfermant pas de fonctions d'indice inférieur à celui des fonctions qu'elles remplacent.

Ce théorème permet de voir ce que devient une solution quelconque de l'équation fonctionnelle quand la variable tourne autour du point x; remarquons, d'ailleurs, que ce théorème suppose essentiellement $\varphi'(x) \neq 0$.

CHAPITRE VII.

Appliquons les résultats obtenus dans la théorie générale au cas particulier des équations à coefficients constants.

1. Soit

$$p_0 y + p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n = 0$$

une telle équation; si son équation caractéristique admet la racine 1, la solution holomorphe se réduit à une constante; le calcul de la dérivée donne

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_x (p_0 + p_1 \varphi' + \ldots + p_n \varphi'^n) = 0.$$

Les dérivées sont toutes nulles et l'on voit directement qu'une constante quelconque vérifie l'équation.

Si cette racine 1 est multiple d'ordre λ, les solutions sont

$$k, \quad b(z), \quad [b(z)]^2, \quad \ldots, \quad [b(z)]^{\lambda-1}.$$

Écrivons, en effet, que 1 est racine d'ordre λ de l'équation

$$p_0 + p_1 t + p\ t^2 + \ldots + p_n t^n = 0,$$

on a

$$p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 0.$$

La dérivée est

$$p_1 + 2p_2 t + \ldots + np_n t^{n-1} = 0,$$

qui doit admettre la racine 1 à l'ordre $\lambda - 1$; il en sera de même de l'équation

$$p_1 t + 2p_2 t^2 + \ldots + np_n t^n = 0,$$

dont la dérivée sera

$$p_1 + 2^2 p_2 t + \ldots + n^2 p_n t^{n-1} = 0.$$

En répétant le même raisonnement, on voit que, si la proposée admet la racine 1 à l'ordre λ, les équations

$$\begin{array}{l}
p_0 + \quad p_1 t + \ldots + \quad p_n t_n^n = 0, \\
p_1 t + \quad 2p_2 t^2 + \ldots + \quad np_n t_n^n = 0, \\
p_1 t + \quad 2^2 p_2 t^2 + \ldots + \quad n^2 p_n s^n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
p_1 t + 2^{\lambda-1} p^2 t^2 + \ldots + n^{\lambda-1} p_n t^n = 0
\end{array}$$

admettront cette racine, c'est-à-dire que l'on a les identités

$$\begin{array}{l}
p_0 + \quad p_1 + \ldots + \quad p_n = 0, \\
p_1 + \quad 2p_2 + \ldots + \quad np_n = 0, \\
p_1 + \quad 2^2 p_2 + \ldots + \quad n^2 p_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
p_1 + 2^{\lambda-1} p_2 + \ldots + n^{\lambda-1} p_n = 0.
\end{array}$$

Ceci posé, on vérifie que $[b(z)]^i$ où i est inférieur à λ est solution de l'équation fonctionnelle

$$p_0 b^i + p_1 (b+1)^i + \ldots + p_n (b+n)^i = 0;$$

les coefficients de b^i, b^{i-1}, ... sont

$$\begin{array}{r}
p_0 + \quad p_1 + \ldots + \quad p_n = 0, \\
C_{i,1}(p_1 + 2\ p_2 + \ldots + n\ p_n) = 0, \\
C_{i,2}(p_1 + 2^2 p_2 + \ldots + n^n p_n) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
C_{i,i}(p_1 + 2^i p_2 + \ldots + n^i p_n) = 0.
\end{array}$$

Dans le cas d'une racine ne faisant pas partie d'un groupe, on trouve des résultats identiques.

Supposons maintenant que l'équation caractéristique ait les racines $[\varphi'(x)]^\alpha$, $[\varphi'(x)]^{\alpha+k_1}$, ..., $[\varphi'(x)]^{\alpha+k_i}$. A ces racines correspondent les solutions holomorphes ou méromorphes

$$[B(z)]^\alpha, \quad [B(z)]^{\alpha+k_1}, \quad \ldots, \quad [B(z)]^{\alpha+k_i}.$$

Nous avons donc ici un exemple dans lequel aux racines d'un groupe correspondent des solutions dans lesquelles les coefficients des puissances de $b(z)$ sont nuls.

2. Il est aisé de voir que c'est là un cas exceptionnel.

Supposons, en effet, qu'il existe, pour une équation fonctionnelle, deux solutions

$$[B(z)]^k u \quad \text{et} \quad u',$$

u et u' étant des fonctions holomorphes, k un entier positif; l'équation caractéristique ayant la racine 1, on peut choisir arbitrairement la valeur y_0; si l'on calcule les dérivées successives, on trouvera zéro pour le coefficient de $\left(\frac{d^k y}{dz}\right)_x$, le terme indépendant étant généralement différent de zéro; la fonction ne peut donc pas, en général, avoir au point x une valeur non nulle; si l'on donne à y_0 la valeur zéro, on obtient la fonction $[B(z)]^k u$ et non la fonction u'.

Ainsi, en général, il n'est pas possible de trouver deux fonctions holomorphes vérifiant l'équation.

Toutefois, si le second membre de l'équation qui fournit $\left(\frac{d^k y}{dz^k}\right)_x$ est nul quelle que soit y_0, nous pouvons prendre pour $\left(\frac{d^k y}{dz^k}\right)_x$ une valeur arbitraire et continuer le calcul des valeurs des dérivées au point x.

Nous trouvons ici, pour définir la fonction, deux constantes arbitraires; ceci s'explique aisément en remarquant que l'équation admettant les deux solutions holomorphes

$$[B(z)]^k u \quad \text{et} \quad u'$$

admet la solution

$$[B(z)]^k u + u',$$

où $u(x)$ et $u'(x)$ sont arbitraires; on peut encore vérifier ce fait en développant en série.

3. Si l'on sait à l'avance qu'une équation fonctionnelle admet plusieurs solutions holomorphes ou méromorphes, on peut affirmer que les coefficients de cette équation doivent vérifier certaines relations.

Considérons l'équation

$$p_0 y + p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n = 0,$$

$p_0, p_1, \ldots, p_n$ étant constants, et supposons que les racines de l'équation caractéristique soient 1, $\varphi'(x), \ldots, [\varphi'(x)]^{n-1}$; l'équation admet alors les n solutions holomorphes

$$1, \quad B(z), \quad [B(z)]^2, \quad \ldots, \quad [B(z)]^{n-1}.$$

On en conclut que les seconds membres des équations qui donnent les valeurs $\left(\frac{dy}{dz}\right)_x, \ldots, \left(\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}\right)_x$ doivent être nuls identiquement.

Ces seconds membres sont

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i \left(\frac{dy_i}{dz_i}\right)_x \left(\frac{d^2\varphi_i}{dz^2}\right)_x,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} 3 p_i \left(\frac{d^2 y_i}{dz_i^2}\right)_x \left(\frac{d\varphi_i}{dz}\right)_x \left(\frac{d^2\varphi_i}{dz^2}\right)_x + \sum p_i \left(\frac{dy_i}{dz}\right)_x \left(\frac{d^3\varphi_i}{dz}\right)_x.$$

En développant ces expressions, on trouve entre les quantités p et le nombre $\varphi'(x)$ des identités qui résultent simplement des identités

$$p_0 + p_1 \varphi^k + p_2 \varphi^{2k} + \ldots + p_n \varphi'^{nk} = 0.$$

Je remarquerai simplement que, dans certains cas, nous aurons là une méthode qui pourra donner naissance à des identités que l'on vérifierait difficilement par un calcul direct; j'indiquerai, sans le développer, le cas de l'équation à coefficients constants dont toutes les solutions ne sont pas holomorphes.

4. On peut ramener la résolution de l'équation fonctionnelle

$$p_0 y + p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n = 0,$$

dans laquelle

$$p_0 = a_0 f(z), \qquad p_1 = a_1 f(z_1), \qquad \ldots, \qquad p_n = a_n f(z_n),$$

$a_0, \ldots, a_n$ sont constants, à celle d'une équation fonctionnelle à coefficients constants.

Il suffit de poser $Y = y f(z)$,

$$a_0 y + a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n = 0.$$

5. Si l'équation est à coefficients constants dans l'hypothèse

$$\varphi'(x) = 0,$$

les solutions fondamentales sont de la forme

$$[C(z)]^k [c(z)]^{k'}.$$

6. Nous avons donné la solution générale de l'équation fonctionnelle, en supposant que son équation caractéristique n'avait pas de racine nulle ou de racine infinie.

Je n'ai pu former de solution correspondant à une racine nulle ou à une racine infinie dans le cas général; il est toutefois un cas particulier dans lequel cette détermination est possible.

Supposons que l'équation caractéristique ait une racine infinie, c'est-à-dire que $p_n(x) = 0$; posons

$$y = Y f(z),$$

$f(z)$ étant une fonction solution de l'équation

$$f(z_1) = \frac{1}{(z-x)\psi} f(z);$$

$\psi(z)$ n'étant pas nulle en x, l'équation fonctionnelle deviendra

$$p_0 Y f(z) + p_1 Y_1 f(z_1) + \ldots + p_n Y_n f(z_n) = 0.$$

Si, de plus, on a

$$p_i(z) = (z-x)^{i-k_i},$$

k_i étant un entier positif, $k_0 = k_n = 0$, on voit que l'équation caractéristique de l'équation en Y n'a plus de racine infinie; elle n'a d'ailleurs aucune racine nulle.

Si, au lieu de la forme précédente, on avait

$$p_i(z) = (z - x)^{\lambda i + k_i},$$

λ, k_i étant des entiers positifs ou étant nuls, on serait parvenu au même résultat en faisant la transformation

$$y = \mathrm{Y}[f(z)]^{\lambda}.$$

Tout ceci suppose que $\varphi'(x)$ n'est pas nul.

Le problème est alors ramené à celui de la recherche de la fonction $f(z)$.

Considérons la fonction

$$[\mathrm{B}(z)]^{-\frac{b(z)}{2}} = f(z).$$

On a

$$f(z_1) = [\mathrm{B}(z)]^{-\frac{b(z)+1}{2}}[\varphi'(x)]^{-\frac{b(z)+1}{2}},$$

$$f(z_1) = \mathrm{B}(z)^{-\frac{1}{2}}[\varphi'(x)]^{-\frac{b(z)+1}{2}} f(z);$$

$b(z)$ étant égal à $\dfrac{\operatorname{Log}\mathrm{B}(z)}{\operatorname{Log}\varphi'(x)}$, on a

$$\begin{aligned}
[\varphi'(x)]^{-\frac{b(z)+1}{2}} &= [\varphi'(x)]^{-\frac{1}{2}}\left\{[\varphi'(x)]^{\frac{1}{\operatorname{Log}\varphi'(x)}}\right\}^{-\frac{\operatorname{Log}\mathrm{B}(z)}{2}} \\
&= [\varphi'(x)]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\operatorname{Log}\mathrm{B}(z)}{2}} = [\varphi'(x)]^{-\frac{1}{2}}[\mathrm{B}(z)]^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

et l'on a

$$f(z_1) = [\varphi'(x)]^{-\frac{1}{2}}[\mathrm{B}(z)]^{-1} f(z).$$

La fonction $f(z)$ ainsi définie est donc solution d'une équation de la forme indiquée.

7. Supposons en second lieu que l'on ait $\varphi'(x) = 0$, et que $\varphi(z) = x$ soit divisible par $(z - x)^{\alpha}$.

Nous avons vu que, dans cette hypothèse, il existait une fonction

$A(z)$ ayant le point x comme zéro simple et vérifiant l'équation

$$y_1 = yc(z-x)^{\alpha-1}.$$

La fonction $y^{-\frac{1}{\alpha-1}}$ sera alors solution de l'équation

$$y_1^{-\frac{1}{\alpha-1}} = c^{-\frac{1}{\alpha-1}}(z-x)^{-1}y^{-\frac{1}{\alpha-1}}.$$

On aura

$$y_2^{-\frac{1}{\alpha-1}} = c^{-\frac{1}{\alpha-1}}(z_1-x)^{-1}y_1^{-\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$y_n^{-\frac{1}{\alpha-1}} = c^{-\frac{1}{\alpha-1}}(z_{n-1}-x)^{-1}y_{n-1}^{-\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$y_n^{-\frac{1}{\alpha-1}} = c^{-\frac{n}{\alpha-1}}(z-x)^{-1}(z_1-x)^{-1}\dots(z_{n-1}-x)^{-1}y^{-\frac{1}{\alpha-1}},$$

le coefficient de $y^{\frac{1}{\alpha-1}}$ étant divisible par

$$(z-x)^{-(1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{n-1})} = (z-x)^{-\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}}.$$

Si l'on fait alors la transformation déjà indiquée pour l'équation fonctionnelle d'ordre n en prenant cette fonction $y^{\frac{1}{\alpha-1}}$ pour $f(z)$, on pourra ramener l'équation fonctionnelle à la forme étudiée. Si l'on a

$$p_i(z) = (z-x)^{\frac{\alpha^i-1}{\alpha-1}+k_i},$$

k_i étant un entier positif, nul pour $i=0$ et $i=n$.

9. Le cas de la racine nulle de l'équation caractéristique se traiterait de la même façon ; il suffirait de remplacer la fonction $f(z)$ par $\frac{1}{f(z)}$.