ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. WEILL

Sur les substitutions orthogonales à déterminant (−1)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 11 (1894), p. 23-35
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1894_3_11__23_0>

SUR LES

SUBSTITUTIONS ORTHOGONALES

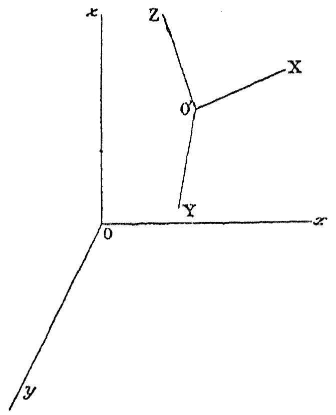
A DÉTERMINANT (—1),

PAR M. G. WEILL,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE VESOUL.

Si l'on passe d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires *quelconques*, les anciennes coordonnées x, y, z d'un point M sont liées aux nouvelles coordonnées X, Y, Z (*fig.* 1) du même point par les formules suivantes :

Fig. 1.



$$
(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{ll}
(1) & x = x_0 + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\
(2) & y = y_0 + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\
(3) & z = z_0 + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z.
\end{array}\right.
$$

Nous appellerons *substitution orthogonale complète* celle qui permet de passer des variables X, Y, Z aux variables x, y, z. Nous dirons que la substitution est *homogène* lorsque les constantes $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Nous désignerons par D le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

et nous dirons qu'une substitution orthogonale est *positive* lorsque $D = +1$; *négative* lorsque $D = -1$. Dans le premier cas, le trièdre des nouveaux axes O'XYZ a même disposition que l'ancien $Oxyz$. Dans le second cas, il a la disposition inverse.

Mais une substitution linéaire est susceptible d'une autre interprétation : on peut considérer les axes comme fixes. Alors X, Y, Z étant les coordonnées d'un point M de l'espace, x, y, z sont les coordonnées d'un autre point P. C'est à ce point de vue que nous nous placerons. Envisagée ainsi, une substitution orthogonale complète représente le déplacement le plus général d'une figure invariable, si $D = +1$. C'est le cas où $D = -1$ que nous allons étudier. Nous appellerons *inversion* l'opération qui consiste à prendre le symétrique d'un point par rapport à un *plan* (on peut la considérer comme un cas particulier de la transformation par rayons vecteurs réciproques), et *inversion centrale* le passage d'une figure à sa symétrique par rapport à un point : on peut considérer cette dernière comme remplaçant trois inversions successives par rapport à trois plans rectangulaires quelconques se croisant au centre.

Cela posé, *une substitution orthogonale négative peut être considérée comme représentant une inversion suivie d'un déplacement, ou un déplacement suivi d'inversion.*

En effet, changeons les signes des termes du deuxième membre de l'égalité (3), nous obtenons une substitution orthogonale positive. Les égalités (1), (2) et (3) représentent donc un déplacement suivi d'une inversion par rapport au plan des xy.

En changeant les signes des trois seconds membres, on a un déplacement suivi d'une inversion relative au centre O.

La substitution (I) représente aussi une inversion par rapport à l'un des plans coordonnés suivie d'un mouvement. Pour le démontrer, il suffit de changer de signe tous les termes variables d'une même colonne des équations (I); en faisant, par exemple,

$$\begin{aligned} x' &= X, \\ y' &= Y, \\ z' &= -Z, \end{aligned}$$

le point m', de coordonnées x', y', z', est le symétrique du point M de coordonnées X, Y, Z par rapport au plan des xy; le point m de coordonnées x, y, z se déduit de m' par un déplacement.

On peut encore remarquer qu'un déplacement suivi d'une inversion par rapport à un certain plan P équivaut à une inversion par rapport à ce même plan P, suivie d'un déplacement hélicoïdal dont les éléments sont symétriques par rapport au plan P des éléments du premier déplacement hélicoïdal.

Dans cette représentation géométrique, le plan d'inversion est quelconque, car c'est l'un des plans coordonnés.

Réciproquement, la transformation géométrique précédente a pour représentation analytique une substitution négative; pour s'en convaincre, il suffit de prendre le plan de symétrie pour l'un des plans coordonnés.

Nous nous proposons de profiter de l'indétermination du plan de symétrie pour opérer, sur les substitutions négatives, une réduction analogue à celle du théorème de Chasles pour les substitutions positives. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Toute inversion suivie de déplacement peut être remplacée par une inversion suivie d'une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de symétrie correspondant.

Cet énoncé comporte un cas limite où l'axe de rotation s'éloigne à l'infini. Dans ce cas, *la rotation est remplacée par une translation parallèle au plan de symétrie.*

Nous donnerons plusieurs démonstrations de ce théorème.

Dans la première, nous remplacerons l'inversion relative au plan P par une inversion centrale relative à un point O du plan P, suivie d'une rotation de 180° autour de la perpendiculaire élevée au plan P par le point O. Cette rotation, suivie du déplacement donné, équivaut à un certain déplacement. Nous avons donc une inversion centrale O suivie d'un déplacement, lequel se décompose en une translation t suivie d'une rotation. L'inversion par rapport au centre O, suivie de la translation t, équivaut à une inversion par rapport au centre O', obtenue en imprimant au point O la translation $\frac{t}{2}$. La transformation est donc réduite à une inversion centrale O' suivie d'une rotation. Remplaçons l'inversion O' par une inversion relative au plan ϖ menée par O' perpendiculairement à l'axe de la rotation, suivie d'une rotation de 180° autour de la perpendiculaire élevée au point O' sur le plan ϖ. Cette rotation et celle qui la suit s'exécutant autour d'axes parallèles, leur succession équivaut à une rotation unique autour d'un axe parallèle aux deux premiers, et par conséquent perpendiculaire au plan ϖ. Le cas limite se présente lorsque la deuxième rotation est de 180°. Nous appellerons le plan ϖ *plan principal* et l'axe de rotation correspondant *axe central* du système.

Dans la deuxième démonstration, nous nous appuierons sur le théorème suivant : Une inversion relative à un plan P équivaut à une inversion relative à un plan P', suivie d'une rotation autour de l'intersection des deux plans d'un angle double de celui qui s'étend du plan P au plan P', mais en sens contraire. Si P' est parallèle à P, la rotation devient une translation double de la distance de P à P', mais en sens inverse. Cela posé, considérons une inversion relative à un plan P, suivie d'un mouvement hélicoïdal dont l'axe d a un point commun avec le plan P, et un seul; soient t la translation et α la rotation dont la succession constitue le déplacement; soit λ l'inclinaison de l'axe de rotation sur le plan P. Je dis que cette transformation équivaut à une inversion relative à un plan ϖ, suivie d'une rotation autour d'un axe OB perpendiculaire à ϖ. En effet, si le plan P est perpendiculaire à l'axe du mouvement, il suffit de déplacer P parallèlement à lui-même d'une longueur égale à la moitié de la translation t, et la réduction est opérée. Supposons d oblique à P; décomposons la translation t en deux autres, l'une t' normale au plan P, l'autre t'' perpendiculaire à d. L'inversion suivie de la translation t' équivaut à une inversion relative à un plan Q parallèle à P; la translation t'', suivie de la rotation α autour de d équivaut à une rotation α autour d'une droite OA parallèle à d. Nous avons donc ramené la transformation à une inversion suivie d'une rotation; cette première réduction revient à faire disparaître les constantes x_0, y_0, z_0 des équations (I) et à ramener ainsi la substitution à être homogène.

Pour réduire cette transformation, faisons tourner le plan Q d'un angle φ autour de la projection f de OA sur le plan Q, il prend la position ϖ. On peut remplacer l'inversion relative au plan Q par une inversion relative au plan ϖ suivie d'une rotation (-2φ) autour de f; cette rotation, suivie de la rotation α, équivaut à une rotation autour d'un axe OB. Disposons de φ de façon que OB soit perpendiculaire à f; pour cela, d'après la règle de composition des rotations, il suffit de faire tourner le plan Af autour de OA de l'angle $\frac{\alpha}{2}$ et de prendre l'intersection de la nouvelle position de ce plan avec le plan normal à la droite f; l'angle dont il faut faire tourner le plan Af autour de f pour l'amener à coïncider avec fB est alors $\left[-\left(-\frac{2\varphi}{2}\right)=\varphi\right]$. Il faut donc faire tourner ON de l'angle φ autour de f pour l'amener sur OB; mais le plan Q, perpendiculaire à ON, a tourné de l'angle φ autour de f pour venir en ϖ: donc OB est perpendiculaire au plan ϖ.

C. Q. F. D.

CONSÉQUENCE. — *Si l'on considère une substitution homogène, elle a pour traduction géométrique une suite doublement infinie d'inversions suivies de rotations; si l'on projette chaque axe de rotation sur le plan d'inversion correspondant, le lieu de cette projection est un plan,* qui est le plan central du système.

Calculons la rotation ω autour de OB et l'angle φ qui détermine la position du plan ϖ. Coupons les divers plans et droites de la figure par une surface sphérique de rayon quelconque R ayant son centre au point O. Pour évaluer la rotation ω, considérons la position finale de la droite f: elle est symétrique de la première par rapport au plan OAB, donc l'angle des plans fB, AOB est $\frac{\omega}{2}$; dans le triangle sphérique rectangle ANB, on a

$$\sin\frac{\omega}{2} = \sin\lambda \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Cette formule montre que $\sin\frac{\omega}{2}$ est différent de zéro, car α est différent de $2k\pi$, et λ différent de $k\pi$, la transformation ne peut se réduire à une inversion, il y a réellement rotation. Le même triangle donne

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos\lambda \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

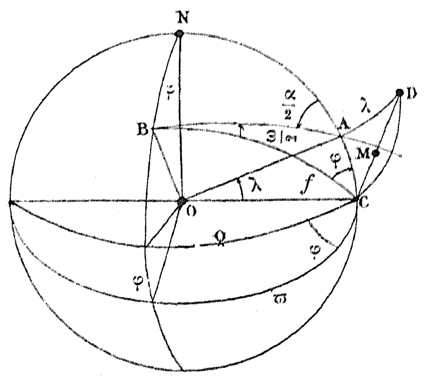
Si $\alpha = \pi$, $\omega = 2\lambda$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, l'axe OB est dans le plan Q, et réciproquement.

On peut aussi calculer $\sin\varphi$ par la formule

$$\sin\varphi = \frac{\cos\lambda \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}}. \tag{3}$$

La Géométrie permet d'arriver directement aux formules précédentes; soient C le point où f perce la sphère (*fig.* 2), et D la position finale

Fig. 2.



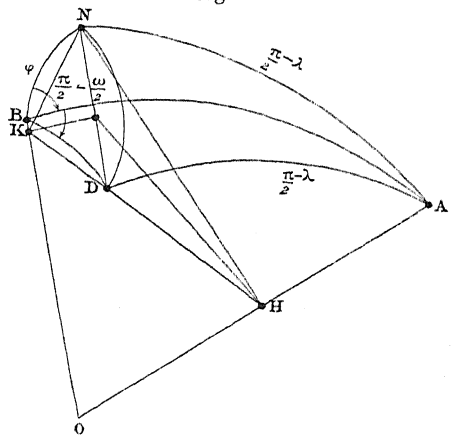
de C; évaluons de deux façons la moitié CM de la corde CD : 1° dans le grand cercle décrit de B comme pôle; 2° dans le petit cercle décrit de A comme pôle; on obtient ainsi l'égalité

$$R\sin\frac{\omega}{2} = R\sin\lambda\sin\frac{\alpha}{2}.$$

L'égalité (3) n'est autre que l'analogie des sinus : on en déduit la formule (2).

Nous obtenons une troisième démonstration du théorème général en combinant les principes des deux démonstrations précédentes. Ayant fait disparaître la translation, remplaçons l'inversion relative au plan P par une inversion centrale relative au point O, suivie d'une rotation de deux angles droits autour de ON; cette rotation, suivie de la rotation α autour de OA, équivaut à une rotation unique autour d'un axe OB. D'autre part, l'inversion centrale O équivaut à une inversion relative au plan ϖ mené par O perpendiculairement à OB, suivie d'une rotation de deux angles droits autour de OB. Le théorème se trouve ainsi démontré, et le triangle sphérique ABN (*fig.* 3), rectangle en N,

Fig. 3.

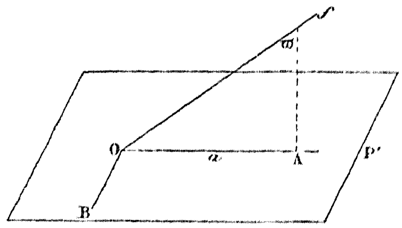


fournit pour φ et ω les valeurs précédentes; deux évaluations différentes de la corde ND fournissent l'analogie des sinus

$$R\cos\lambda\sin\frac{\alpha}{2} = R\sin\varphi\cos\frac{\omega}{2}.$$

On peut enfin donner une quatrième démonstration, fondée sur le principe suivant, qui nous a été indiqué par M. Darboux : Deux inversions planes successives équivalent à une rotation autour de l'intersection des deux plans, d'un angle double de celui qui s'étend du premier plan au deuxième; il résulte de là qu'on peut faire tourner d'un angle quelconque l'ensemble des deux plans d'inversion autour de l'axe de rotation. Soit donc une inversion relative à un plan P, suivie d'une rotation d'un angle α autour d'une droite OA. Remplaçons cette rotation par une inversion relative au plan mené par OA perpendiculairement au plan P, suivie d'une inversion relative au plan P′, obtenue en faisant tourner le précédent autour de OA de l'angle $\frac{\alpha}{2}$. Les deux premières inversions, relatives à deux plans rectangulaires passant par f, équivalent à une rotation de π autour de f; cette rotation équivaut à une suite de deux inversions relatives à deux plans rectangulaires passant par f. Plaçons ceux-ci de façon que l'un d'eux, ϖ, soit perpendiculaire à P′; la droite OB, intersection de l'autre avec P′, est per-

Fig. 4.



pendiculaire au plan ϖ. On a donc finalement une inversion relative à ϖ, et une rotation autour de OB d'un angle double de $\alpha O f$ (*fig.* 4).

C. Q. F. D.

Loi de distribution des axes de rotation.

Considérons une substitution homogène, nous savons qu'elle se réduit à une rotation d'un angle ω autour d'un axe passant par O, suivie d'une inversion par rapport à un plan mené par O perpendiculairement à cet axe; conservant les notations précédentes, je désigne par φ l'angle dont tourne le plan d'inversion, et par α la nouvelle rotation; je rappelle que, f étant l'intersection des deux plans d'inversion, le nouvel axe de rotation OA se trouve dans le plan mené par f normalement au nouveau plan d'inversion. On a, entre les éléments des deux correspondances, les relations suivantes :

$$\sin\frac{\omega}{2} = \sin\lambda \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \cos\lambda \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

On en déduit, en fonction de la constante ω et de la variable φ, les valeurs μ et α par les formules $\left(\mu = \frac{\pi}{2} - \lambda\right)$

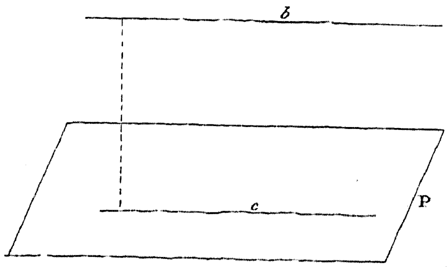
$$\cot\lambda = \operatorname{tang}\mu = \sin\varphi \cot\frac{\omega}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\varphi \cos\frac{\omega}{2}.$$

On voit ainsi que l'angle d'un plan avec l'axe correspondant a un minimum, qui est atteint lorsque le plan passe par l'axe central.

Deuxième cas. — Supposons maintenant l'axe du mouvement parallèle au plan d'inversion ou situé dans ce plan. Soient b l'axe, et c sa projection sur le plan d'inversion P (*fig.* 5). Faisons tourner le

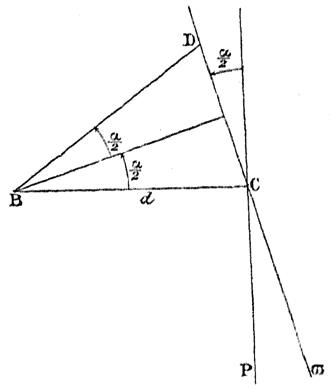
Fig. 5.



plan P autour de c de l'angle $\frac{\alpha}{2}$, il prend la position ϖ; l'inversion donnée équivaut à une inversion relative à ϖ, suivie d'une rotation $(-\alpha)$ autour de c; celle-ci, suivie de la rotation α autour de b, équivaut à une translation perpendiculaire à la droite b. Coupons par un plan Q perpendiculaire à b ; soient B, C les points où les droites b, c

percent ce plan, et désignons par P et ϖ (*fig.* 6) les traces sur le plan Q des plans de même nom. Il résulte de la règle de composition des rotations que la translation CD est parallèle au plan ϖ; elle se com-

Fig. 6.



pose avec la translation donnée t, parallèle au plan ϖ, puisqu'elle est parallèle à la droite b; la translation résultante est donc parallèle à ϖ.

C. Q. F. D.

On peut considérer ce deuxième cas comme limite du cas général lorsque l'axe du déplacement hélicoïdal tend à devenir parallèle au plan d'inversion; le point O s'éloigne alors à l'infini, la droite f devient c, les formules qui donnent ω et φ s'appliquent encore, la translation résultante a pour composantes rectangulaires t et $2d \sin \frac{\alpha}{2}$.

Cherchons maintenant un caractère analytique qui distingue ce cas du cas général. On voit facilement qu'on peut modifier la décomposition en inversion, rotation et translation, de façon que l'axe de rotation ait un point dans le plan d'inversion; dès lors, comme il lui est resté parallèle, il y est tout entier. Or, les formules (I) offrent une telle décomposition. Posons, en effet,

$$(\text{II}) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ y' &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\ z' &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z, \end{aligned} \right.$$

les formules (I) deviennent

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + x',\\
y &= y_0 + y',\\
z &= z_0 + z',
\end{aligned}
$$

les formules (II) représentent une inversion suivie d'une rotation autour d'un axe situé dans le plan d'inversion. Cette suite de deux opérations équivaut à une inversion. Il suffit, pour le voir, de faire tourner le plan d'inversion autour de l'axe de rotation. Or l'inversion est une transformation *réciproque* ou *involutive*. Si donc on résout les équations (II) par rapport à X, Y, Z, les formules

$$
\text{(III)}\qquad \left\{
\begin{aligned}
X &= \alpha\; x' + \beta\; y' + \gamma\; z',\\
Y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z',\\
Z &= \alpha'' x' + \beta'' y'' + \gamma' z'
\end{aligned}
\right.
$$

doivent avoir respectivement les mêmes coefficients que les formules (II); par suite

$$
\begin{aligned}
\beta &= \alpha',\\
\gamma &= \alpha'',\\
\gamma' &= \beta'',
\end{aligned}
$$

et le déterminant de la substitution doit être symétrique. Nous dirons alors que la substitution est *réciproque*. Les trois égalités précédentes se réduisent d'ailleurs *à une égalité distincte*, la substitution étant orthogonale. Cette condition d'égalité exprime (sauf un cas particulier que nous allons examiner) que la transformation représente une inversion suivie d'une translation parallèle au plan d'inversion. Pour qu'elle représente une simple inversion, il faut et il suffit que, dans toute décomposition en inversion et translation, celle-ci soit perpendiculaire au plan d'inversion; par suite, on a les deux égalités

$$
\frac{x_0}{\alpha - 1} = \frac{y_0}{\beta} = \frac{z_0}{\gamma},
$$

l'équation

$$
(\alpha - 1)x + \beta y + \gamma z = 0
$$

représentant le plan d'inversion en direction.

Réciproquement, si l'on se demande ce que représente une substitution à déterminant symétrique, il suffit de se reporter aux formes géométriques réduites de la transformation. Il faut que la transformation soit réciproque : pour cela il faut que, dans le cas limite, elle soit une inversion; et, dans le cas général, que la rotation égale π Dans ce cas, la transformation n'est autre qu'une inversion centrale, et elle s'exprime par les formules suivantes :

$$x = x_0 - X,$$
$$y = y_0 - Y,$$
$$z = z_0 - Z.$$

On voit que tous les éléments du déterminant de la substitution sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale, et que chacun de ceux-ci égale -1. On peut remarquer cette propriété de la transformation où $\omega = \pi$, que $\lambda = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = \pi$, quel que soit φ. Ce deuxième cas de déterminant symétrique est très particulier, et l'on en distingue immédiatement le cas général. On peut remarquer que, dans ce dernier cas, la somme des éléments de la diagonale principale égale 1.

Signalons encore, parmi les conséquences algébriques du théorème, les suivantes : La transformation étudiée, répétée, équivaut à une rotation ou à une translation. Donc toute substitution positive homogène est le carré d'une substitution négative. Il n'en est plus de même d'une substitution complète. Il faut que celle-ci représente une solution ou une translation. Soit

$$x_2 = x_0 + a x_1 + b y_1 + c z_1,$$
$$y_2 = y_0 + a' x_1 + b' y_1 + c' z_1,$$
$$z_2 = z_0 + a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1$$

une substitution positive. Pour qu'elle représente une rotation, il faut que la translation soit perpendiculaire à l'axe de rotation, et par suite

$$(a'' + c) z_0 + (b'' + c') y_0 + (c'' - b' - a + 1) z_0 = 0.$$

Dans ce cas, il existe une substitution négative qui, répétée, équivaut à la substitution donnée.

De même que nous avons étudié la distribution des axes de rotation, on peut étudier celle des axes du mouvement hélicoïdal correspondant à des plans d'inversion quelconques. On obtient à ce sujet, en appliquant les règles de composition des rotations et des translations, les théorèmes suivants :

1° Lorsque le plan d'inversion tourne autour d'une droite du plan central, l'axe de rotation correspondant décrit un plan. Ce plan passe par l'axe central.

2° Lorsque le plan d'inversion se transporte parallèlement à lui-même, l'axe du déplacement hélicoïdal décrit un plan.

Ces deux théorèmes s'appliquent à la fois au thème général et au cas limite; dans ce dernier cas, tous les axes forment un complexe singulier, le complexe de droites parallèles au plan central.

On peut donner du théorème fondamental un énoncé qui comprend les deux cas; remarquons que des inversions quelconques en nombre pair équivalent à un déplacement; d'après cela, *une suite d'inversions quelconques en nombre impair équivaut à trois inversions, deux des plans d'inversion étant perpendiculaires au troisième*.

De même le théorème de Chasles : « Tout déplacement peut être produit par un mouvement hélicoïdal », prend la forme suivante : « Une suite quelconque d'inversions en nombre pair équivaut à quatre inversions, deux des plans d'inversion étant perpendiculaires aux deux autres ».

Si, dans ces systèmes de trois ou quatre inversions, deux plans se confondent, on n'a plus qu'une inversion dans le premier cas, deux dans le second cas.