ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. G. GREENHILL

Les modules dans la multiplication complexe des fonctions elliptiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 11 (1894), p. 165-248
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1894_3_11__165_0>

LES MODULES

DANS LA

MULTIPLICATION COMPLEXE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. A. G. GREENHILL.

(Extrait des *Proceedings of the London Math. Society*, vol. XIX, nos 323-327; mars 1888.)

(TRADUIT PAR M. LÉONCE LAUGEL.)

J'ai été conduit à entreprendre cette traduction par la lecture du passage suivant des *Fonctions elliptiques* d'Halphen :

« ... La multiplication complexe a été l'objet de Mémoires importants, etc.; enfin celui de M. Greenhill (*Proc. of London Math. Society*)... Sous ce dernier point de vue (résultats numériques), le Mémoire de M. Greenhill, tout récent, résume et dépasse les travaux antérieurs. »

(HALPHEN, *Fonctions elliptiques*, t. III, p. 151-152.)

Le problème de la multiplication complexe des fonctions elliptiques peut se poser ainsi : Déterminer les fonctions elliptiques de l'argument complexe $(a+bi\sqrt{\Delta})u$, en fonction de celles de l'argument u, le rapport des périodes étant défini par $\frac{K'}{K}=\sqrt{\Delta}$, Δ étant un nombre premier; si Δ est un nombre composé tel que mn, alors nous écrirons $\frac{K'}{K}=\sqrt{mn}$, ou même $\sqrt{\frac{m}{n}}$, et, dans les deux cas, b doit avoir n pour facteur (1).

Dans l'expression d'une fonction elliptique de l'argument $(a+bi\sqrt{\Delta})u$ en fonction de celles de l'argument u, les coefficients dépendront des

(1) En effet, l'équation modulaire est la même dans les deux cas, le choix des racines seul étant différent. *Voir* R. P. Joubert (*Comptes rendus*, t. L), au cas $\frac{K'}{K}=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

(*Note du Traducteur.*)

valeurs des *fonctions modulaires* correspondant à $\frac{K'}{K} = \sqrt{\Delta}$; par conséquent, l'*équation modulaire* devra être résolue d'une manière ou d'une autre. C'est le but principal de cet article de réunir toutes les solutions numériques jusqu'ici obtenues pour des valeurs entières de Δ.

D'après une remarque d'Abel (*Œuvres*, 1re édition, t. I, p. 272), citée par Kronecker (*Berlin. Sitz.*, 1857), l'équation modulaire, en ce cas, est toujours résoluble par radicaux.

Quelques exemples numériques ont été donnés par Legendre et Abel, mais la première collection importante de résultats est due à Kronecker (*Berlin. Sitz.*, 1862), qui a donné les valeurs numériques du module k de Legendre, et dans quelques cas de kk' pour une série de valeurs de Δ, et en a promis une collection plus complète, qui n'a pas encore paru.

Suivant la forme de Δ par rapport au module 4 ou 8, il sera commode de considérer quatre classes et de choisir *absolument le plus simple invariant numérique* convenant à chaque classe. Ces classes se distingueront entre elles comme il suit :

Classe	A.......	$\Delta \equiv 3 \pmod 8$,
»	B.......	$\Delta \equiv 7 \pmod 8$,
»	C.......	$\Delta \equiv 1 \pmod 4$,
»	D.......	$\Delta \equiv 2 \pmod 4$.

La classe pour $\Delta \equiv 0 \pmod 4$ ne nécessite aucune étude spéciale; on peut, en effet, la faire dépendre d'une de ces dernières par la transformation du second ordre.

L'article *Neue Untersuchungen im Gebiete der elliptischen Functionen* de J. Klein (*Math. Ann.*, Bd. XXVI, 1886) contient un grand nombre de citations des recherches les plus récentes sur les équations modulaires; dans le cours de cet article, j'ai fait aussi grand usage des Ouvrages suivants :

Sohnke, *Æquationes modulares pro transformatione functionum ellipticarum* (*Journal de Crelle*, t. XVI).

Schröter, *Dissertatio inauguralis de æquationibus modularibus* (Regiomonti, 1854; *Journal de Liouville*, 1858, et *Acta mathematica*, 1882).

Hermite, *Théorie des équations modulaires*. Paris, 1859.

KLEIN et KIEPERT, *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen* (*Math. Ann.*, t. XIV, p. 111; t. XXVI, p. 369; t. XXII, p. 1).

G. H. STUART, *Multiplication complexe des fonctions elliptiques* (*Quarterly Journal Math.*, vol. XX, p. 18), en anglais.

E.-W. FIEDLER, *Ueber eine besondere Classe irrationaler Modulargleichungen*; Zurich, 1885.

R. RUSSELL, *Sur les équations modulaires en kl, $k'l'$* (*Proceedings of the London Math. Society*; 10 novembre 1887, en anglais (1).

Les expressions générales de formules de la multiplication complexe ont été aussi données par l'auteur dans un article du *Quarterly Journal of Math.*, vol. XXII, 1887.

CLASSE A :

$$\Delta \equiv 3 \pmod 8.$$

L'invariant numérique absolument le plus simple dont le choix s'impose pour cette classe est l'*invariant absolu* J, de Klein, le même que celui désigné *Valenz* par Dedekind (*Journal de Crelle*, t. LXXXIII) et lié avec l'invariant α de M. Hermite par l'équation

$$J = -\tfrac{4}{27}\alpha$$

(*Théorie des équations modulaires*); mais il est commode de se servir de la forme de Kiepert, exprimée en modules de Legendre k et k' (*Math. Ann.*, vol. XXVI)

$$J = -\frac{(1-16k^2k'^2)^3}{108k^2k'^4},$$

forme que l'on obtient par une transformation du second degré, appliquée à la forme de Klein

$$J = \frac{4}{27}\frac{(1-k^2k'^2)^3}{k^4k'^4},$$

en sorte que le J de Kiepert est une *Modul-Function zweiter Stufe*.

Prenons l'intégrale canonique de première espèce de Weierstrass

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}};$$

(1) Consulter aussi d'autres remarquables Mémoires plus récents de M. Kiepert, *Math. Ann.*, et de M. Weber, *Math. Ann.* et *Acta math.*

rendons-la normale [1] en la multipliant par la racine douzième du discriminant

$$D = g_2^3 - 27 g_3^2,$$

en sorte qu'elle devient

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \gamma_2 y - \gamma_3}};$$

nous pouvons alors écrire que le nouveau discriminant

$$\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2 = -1,$$

et ainsi l'invariant absolu

$$J = \frac{g_2^3}{D} = \gamma_2^3,$$

$$J - 1 = \frac{27 g_3^2}{D} = -27\gamma_3^2.$$

Dans cette classe A, la formule la plus simple de multiplication complexe est celle qui lie

$$x = \wp u \qquad \text{et} \qquad y = \wp \frac{u}{M},$$

où

$$\frac{1}{M} = \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{\Delta}),$$

et conduit à la relation différentielle

$$\frac{M\,dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

à l'aide d'une équation de la forme (*Quart. Journ. Math.*, t. XXII, p. 127, Mémoire de l'auteur, déjà cité)

$$y = M^2 \frac{x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2}}{(x^m - G_1 x^{m-1} + G_2 x^{m-2} \ldots)^2},$$

---

[1] Rendre normale (*normiren*) l'intégrale de première espèce de M. Weierstrass consiste à la transformer de manière à rendre le nouveau discriminant égal à l'unité affectée du signe + ou —, au choix. L'Ouvrage d'Halphen ne mentionne pas cette expression. (Klein et Kiepert, *Math. Ann.*, t. XIV, p. 113.)

Un calcul très simple montre qu'il suffit de multiplier l'intégrale par la racine douzième du discriminant affectée du signe convenable. Les variables restent les mêmes, sauf adjonction de facteurs racines de ce discriminant. (*Note du traducteur.*)

où l'on a

$$\begin{aligned} n &= 2m+1, \\ \Delta &= 4n - 1 = 8n+3, \\ A_1 &= 2G_1, \end{aligned}$$

les A et G étant certaines fonctions modulaires qu'il reste à déterminer (Kiepert, *Math. Ann.*, t. XXVI, p. 398).

La détermination de G_1 est la plus difficile, et il est important de remarquer que c'est un facteur numérique de $\sqrt{\Delta}+i$.

En effet, si nous désignons par M' et G'_1 les imaginaires conjuguées de M et G_1, et si nous posons

$$z = \wp nu = \wp \frac{u}{MM'},$$

il vient alors

$$\begin{aligned} z &= M'^2 \frac{y^n - 2G'_1 y^{n-1}}{(y^m - G'_1 y^{m-1} \ldots)^2} \\ &= MM'^2 \frac{(x^n - 2G_1 x^{n-1}\ldots)^n - 2G'_1 M^{-2}(x^n\ldots)^{n-1}(x^m\ldots)^2\ldots}{(x^m - G_1 x^{m-1}\ldots)^2[(x^n - 2G_1 x^{n-1}\ldots)^m - G'_1 M^{-2}(x^n\ldots)^{m-1}(x^n\ldots)^2]^2} \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{x^{n^2} - 2(nG_1 + G'_1 M^{-2})x^{n^2-1}\ldots}{x^{n^2-1} - 2(nG_1 + G'_1 M^{-1})x^{n^2-1}\ldots}; \end{aligned}$$

on sait, d'après le développement connu de $\wp u$ suivant les puissances de u, que

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \star + \frac{g_2}{20}u^2 + \ldots,$$

et les termes absents remplacés par l'astérisque font voir que

$$nG_1 + G'_1 M^{-2} = 0;$$

par conséquent, si l'on pose

$$G_1 = a\sqrt{\Delta} + bi, \qquad G'_1 = a\sqrt{\Delta} - bi,$$

on a

$$na\sqrt{\Delta} + nbi + (a\sqrt{\Delta} - bi)\tfrac{1}{2}(-2n+1+i\sqrt{\Delta}) = 0$$

ou

$$(a-b)\left[\sqrt{\Delta} - (4n-1)i\right] = 0,$$

ou enfin

$$a = b;$$

mais, pour déterminer a, il faudrait pousser plus loin les développements de y et z en fonction de x.

Une fois G_1, et par conséquent $A_1 = 2G_1$ déterminés, les G et A restants sont déterminés par les formules récurrentes données par Kiepert (*Math. Ann.*, t. XXVI, p. 339).

L'équation précédente liant y et x est équivalente à l'une quelconque des trois suivantes (*Quart. Journ. Math.*, t. XXII, p. 125) :

$$y - e_1 = M^2(x - e_2)\prod_{r=1}^{r=m} \frac{\left[x - \wp\left(\omega_2 + \frac{2r\omega_1}{n}\right)\right]^2}{D},$$

$$y - e_2 = M^2(x - e_3)\prod \frac{\left[x - \wp\frac{(n-2r)\omega_1}{n}\right]^2}{D},$$

$$y - e_3 = M^2(x - e_1)\prod \frac{\left\{x - \wp\left[\omega_2 + \frac{(n-2r)\omega_1}{n}\right]\right\}^2}{D},$$

$$D = \prod\left(x - \wp\frac{2r\omega_1}{n}\right)^2,$$

où

$$\frac{\omega'_2}{\omega} = \frac{iK'}{K} = i\sqrt{\Delta},$$

et

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}(\omega_2 + \omega'_2), \qquad \omega_3 = \tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega'_2)$$

et, par conséquent,

$$G_1 = \prod_{r=1}^{r=m} \wp\left(\frac{2r\omega_1}{n}\right).$$

Ainsi, par exemple, lorsque $\Delta = 51$,

$$G_1 = \wp\frac{2\omega_1}{13} + \wp\frac{4\omega_1}{13} + \wp\frac{8\omega_1}{13} + \wp\frac{16\omega_1}{13} + \wp\frac{32\omega_1}{13} + \wp\frac{64\omega_1}{13}$$

(Kiepert, *Math. Ann.*, t. XXVI, p. 381.)

Supposons que le multiplicateur complexe $\frac{1}{M}$, au lieu d'être égal, comme nous l'avons fait, à

$$\tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{\Delta}),$$

eût été

$$\tfrac{1}{2}(-\rho + i\sqrt{\Delta}),$$

ρ étant un entier impair; nous aurions alors posé

$$n = \tfrac{1}{4}(\Delta + \rho^2)$$

dans les formules ci-dessus; et ceci nous explique pourquoi dans *Équations modulaires*, de M. Hermite, p. 44, classe 3° (notre classe A), Δ prend les valeurs

$$4n - \rho^2 = 4n - 1, \qquad 4n - 9, \qquad 4n - 25, \qquad \ldots .$$

CLASSE A.

$$\Delta \equiv 3 \pmod 8.$$

$\Delta = 3$. — De l'équation modulaire de Jacobi du troisième degré

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = 1,$$

on tire, en remplaçant k par λ', k' par λ,

$$2\sqrt{kk'} = 1, \qquad 2kk' = \tfrac{1}{2} = \sin 30°;$$

l'angle modulaire est de 15°, et

$$k = \sin 15°, \qquad k' = \cos 15°;$$

alors l'invariant absolu $J = 0$,

$$\gamma_2 = 0, \qquad 27\gamma_3^2 = 1, \qquad 3\sqrt{3}\,\gamma_3 = 1$$

et

$$\frac{1}{M} = \omega,$$

ω étant une racine cubique de l'unité, et l'on a

$$p\,\omega u = \omega\, p u.$$

C'est le cas le plus simple de la multiplication complexe, qui a été considéré par *Legendre* dans la réduction des intégrales elliptiques (*Fonct. ellipt.*, t. I, Ch. XXXVI) [1].

---

[1] *Voir* HALPHEN (*Fonct. ellipt.*, t. I, p. 82, 83, 282, etc.; t. II, p. 571 et suiv., 642 et suiv.), où cette valeur de pu est l'objet de considérations de la plus haute importance. (*Note du Traducteur.*)

$\Delta = 11$. — Prenons la forme de Schröter ou de Russell pour l'équation modulaire du 11^e degré

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} + 2\sqrt[6]{4k\lambda\, k'\lambda'} = 1.$$

Posons

$$k = \lambda', \qquad k' = \lambda;$$

il vient

$$2\sqrt{kk'} + 2\sqrt[3]{kk'} = 1.$$

Formons l'équation en $k^2k'^2$, et, introduisant

$$J = -\frac{(1 - 16k^2k'^2)^3}{108k^2k'^2},$$

nous trouvons

$$J = -\frac{2^9}{3^3}, \qquad J - 1 = -\frac{7^2.11}{3^3},$$

$$\gamma_2 = \frac{8}{3}, \qquad \gamma_3 = \frac{7\sqrt{11}}{27}.$$

Ici, l'invariant α de M. Hermite est égal à 2^7, valeur qui peut être tirée des équations au bas de la page 47 des *Équations modulaires*.

On a aussi

$$G_1 = -\tfrac{1}{6}(\sqrt{11} + i), \qquad A_1 = -\tfrac{1}{3}(\sqrt{11} + i);$$

les valeurs de A_2, A_3 ont été données dans l'article déjà cité de l'auteur (*Quart. Journ. Math.*, t. XXII, p. 134).

$\Delta = 19$. — Nous trouvons

$$J = -2^9, \qquad J - 1 = -3^3.19,$$
$$\gamma_2 = 8, \qquad \gamma_3 = \sqrt{19},$$
$$\gamma_2 + 1 = 3^2, \qquad \gamma_2^2 - \gamma_2 + 1 = 3.19.$$

Ces valeurs sont tirées de *Théorie des équations modulaires* de M. Hermite, p. 47, où l'on voit que, α étant l'équivalent de $-\frac{27}{4}J$, on a

$$\begin{array}{ll} \Delta = 3, & \alpha = 0, \\ \Delta = 11, & \alpha = 2^7, \\ \Delta = 19, & \alpha = 2^7.3^3, \\ \Delta = 27, & \alpha = 2^7.3.5^3, \\ \Delta = 43, & \alpha = 2^{10}.3^3.5^3 \end{array}$$

et, en ayant égard à l'égalité approchée (*Équations modulaires*, p. 48),

$$2^8\alpha = e^{\pi\sqrt{\Delta}} - 744 + 196880\, e^{-\pi\sqrt{\Delta}} + \ldots,$$

nous obtenons

$$\Delta = 67, \qquad \alpha = 2^7 . 3^3 . 5^3 . 11^3,$$

$$\Delta = 163, \qquad \alpha = 2^{10} . 3^3 . 5^3 . 23^3 . 29^3.$$

D'après M. Hermite (*Équat. modul.*, p. 47), la valeur de α est entière quand il n'y a qu'une classe improprement primitive pour le déterminant $-\Delta$; et $\Delta = 163$ est probablement le nombre le plus élevé de cette nature.

M. Hermite fait voir que dans ces cas $e^{\pi\sqrt{\Delta}}$ se rapproche beaucoup d'un entier; par exemple, pour $e^{\pi\sqrt{163}}$, la partie décimale commence par douze chiffres 9 qui se suivent.

Prenons $\backsim$ pour signe de l'égalité approchée; on a

$$1728\,\mathrm{J} \backsim -\frac{1}{q} \backsim -e^{\pi\sqrt{\Delta}};$$

d'où

$$12\gamma_2 \backsim e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{\Delta}} \qquad \text{et} \qquad 216\gamma_3 \backsim e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\Delta}};$$

par conséquent, $e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{\Delta}}$ est aussi presque un nombre entier, multiple de 12, et, d'un autre côté, $e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\Delta}}$ est aussi presque un entier, multiple de 216 (H. J. SMITH, *Rapport sur la théorie des nombres*, présenté à l'Association britannique, p. 374; 1865).

Ainsi

$$e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{19}} \backsim 96 \quad = 12(3^2 - 1),$$

$$e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{43}} \backsim 960 \quad = 12(9^2 - 1),$$

$$e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{67}} \backsim 5280 \quad = 12(21^2 - 1),$$

$$e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{163}} \backsim 640320 = 12(231^2 - 1)$$

et

$$\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{19}}}{\sqrt{19}} \backsim 216 \qquad = 216,$$

$$\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{43}}}{\sqrt{43}} \backsim 216.21 \qquad = 216.7.3,$$

$$\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{67}}}{\sqrt{67}} \backsim 216.217 \qquad = 216.7.31,$$

$$\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{163}}}{\sqrt{163}} \backsim 216.185801 = 216.7.11.19.127.$$

Les valeurs de J, correspondant à $\Delta = 3$, 11 et 19, présentent de très intéressantes applications numériques pour l'étude de l'*équation de l'icosaèdre* de Klein, la résolvante en r (*Ikosaëder*, ..., p. 102) correspondante ayant respectivement une racine $r = 3, 11, 19$.

La détermination de z, l'*irrationnalité icosaédrique* correspondante offre alors un exercice numérique digne d'intérêt.

$\Delta = 27$. — Ici

$$J = \frac{2^9.5^3}{3^2}, \qquad J - 1 = \frac{11^2.23^2}{3^2},$$

$$\gamma_2 = \tfrac{40}{3}\, 3^{\frac{1}{3}}, \qquad \gamma_3 = \tfrac{253}{27}\, 3^{\frac{1}{2}}.$$

Ces valeurs peuvent être obtenues par la transformation du troisième degré de Klein (*Math. Annal.*, t. XIV, p. 143)

$$J : J - 1 : 1 = (\tau - 1)(9\tau - 1)^3 : (27\tau^2 - 18\tau - 1)^2 : -64\tau,$$

et, de même, avec J', même fonction de τ' avec $\tau\tau' = 1$.

Posant $J' = 0$, alors $9\tau' = 1$, $\tau = 9$, et l'on a

$$J = \frac{2^9.5^3}{3^2}$$

et l'on a aussi

$$G_1 = -\tfrac{1}{2}\, 3^{\frac{2}{3}} (\sqrt{27} + i)$$

(*Quart. Journ. of Math.*, p. 136; 1887).

$\Delta = 35$. — Ici

$$J = -\gamma_2^3, \qquad J - 1 = -27\gamma_3^2$$

avec

$$\gamma_2 = \tfrac{8}{3}\sqrt{5}\left[\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\right]^4,$$
$$\gamma_3 = \frac{256 + 115\sqrt{5}}{27}\sqrt{7}$$

[*voir*, de même, l'article précédent de l'auteur (*Q. J. of Math.*, t. XXII, p. 137)], et

$$G_1 = -\tfrac{1}{6}\left[\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\right]^5(\sqrt{35}+i).$$

La manière dont ces valeurs numériques ont été tirées de l'équation en L de Kiepert pour $n = 9$ est aussi expliquée dans cet article.

Les valeurs de γ_2 et γ_3 ci-dessus correspondent au cas de $\dfrac{K'}{K} = \sqrt{35}$; mais, lorsque $\dfrac{K'}{K} = \sqrt{\dfrac{7}{5}}$, il faut changer le signe de $\sqrt{5}$.

Nous aurions pu obtenir la même valeur de J en employant l'équation modulaire de Fiedler du 35^e degré (*Irrationale modulargleichungen*, p. 97), en posant $\lambda = k'$, $\lambda' = k$ et $x = 2\sqrt{kk'}$; alors avec la notation de Fiedler

$$Z'_1 = x - 1, \qquad Z'_2 = \tfrac{1}{4}x^2 - x, \qquad Z'_3 = -\tfrac{1}{4}x^2$$

et

$$Z_0^{(4)} = -\tfrac{1}{2}x + \sqrt{2x - x^3}.$$

Substituant ces valeurs dans son équation, nous obtenons

$$\begin{aligned}
x^3 - 5x^2 + 3x + 1 + 4\sqrt{2x - x^3} &= 0,\\
x^6 - 10x^5 + 31x^4 - 12x^3 - x^2 - 26x + 1 &= 0,\\
(x^3 - 5x^2 + 13x - 1)^2 - 20(x^2 - 3x)^2 &= 0,\\
x^3 - (5 + 2\sqrt{5})x^2 + (13 + 6\sqrt{5})x - 1 &= 0;
\end{aligned}$$

formant ensuite les équations en x^2 et x^4

$$\begin{aligned}
x^6 - (19 + 8\sqrt{5})x^4 + (339 + 152\sqrt{5})x^2 - 1 &= 0,\\
x^{12} - 3x^8 + (230403 + 103040\sqrt{5})x^4 - 1 &= 0,\\
(x^4 - 1)^3 + (230400 + 103040\sqrt{5})x^4 &= 0,
\end{aligned}$$

on obtient

$$J = -\frac{4}{27}\frac{(1-x^4)^3}{x^4} = -\frac{4}{27}(230400 + 103040\sqrt{5})$$
$$= -\frac{2^9.5\sqrt{5}}{3^3}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{12}.$$

Les mêmes valeurs auraient encore pu être obtenues en combinant l'équation modulaire du 5^e degré de Schröter ou Russell avec celle de Gutzlaff du 7^e degré, mais il se présentera plus loin des exemples de cette méthode.

$\Delta = 43$. — Ici

$$J = -2^{12}.5^3, \qquad J - 1 = -3^3.21^2.43$$

et

$$\gamma_2 = -\sqrt[3]{J} = 80, \qquad \gamma_3 = 21\sqrt{43},$$
$$\gamma_2 + 1 = 3^4, \qquad \gamma_2^2 - \gamma_2 + 1 = 3.7^2.43,$$

valeurs obtenues par la méthode de M. Hermite à l'aide d'approximations numériques, ou que l'on obtiendrait de même par sa méthode à l'aide de l'équation modulaire pour $n = 11$.

Remarquons que, lorsque J est un entier, alors $\gamma_2 + 1$ est le carré d'un nombre multiple de 3, tandis que γ_3 contient le facteur 7.

Cette considération est très utile pour déterminer la valeur de J par approximations numériques pour des valeurs élevées de Δ.

Pour $\Delta = 43$:

$$G_1 = -3(\sqrt{43} + i)$$

(*Quart. Journ. Math.*, t. XXII, p. 171).

$\Delta = 51$. — La valeur obtenue, par M. L. Kiepert, pour J, est

$$J = -64(5+\sqrt{17})^3(\sqrt{17}+4)^2$$
$$= -256(3\sqrt{17}+11)(\sqrt{17}+4)^3;$$

d'où

$$J - 1 = -7^2(128 + 31\sqrt{17})^2,$$
$$\gamma_3 = \frac{7\sqrt{3}}{3^2}(128 + 31\sqrt{17}).$$

Les fonctions modulaires pour cette transformation sont intimement liées aux fonctions de M. Kiepert pour $n = 13$ (*Math. Ann.*, t. XXVI, p. 381).

L'équation en L de M. Kiepert (p. 425), ayant un facteur de la forme

$$L^4 + aL^2 + 13 = 0$$

où, suivant M. Kiepert,

$$a = -\tfrac{1}{2}(3\sqrt{17} + 1);$$

on a, par conséquent,

$$L^2 = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{51})\omega,$$

ω étant une racine cubique de l'unité; et les fonctions modulaires correspondantes dépendent d'arguments égaux à des multiples des $13^{\text{ièmes}}$ parties des périodes.

$\Delta = 59$. — Dans ce cas, la méthode qu'il convient le mieux d'employer est celle de M. Hermite (*Équat. modulaires*, p. 44) pour sa classe 3° avec $n = 17$.

Le nombre des classes improprement primitives, que nous appellerons dorénavant p, à déterminant $-\Delta$, est, dans le cas où $\Delta = 59$, égal à 3 (Gauss, *Werke*, t. II, p. 287), en sorte que nous devons nous attendre à une équation du 3^e degré pour α.

Posons $\frac{u}{v} = t$ et, prenant la notation de M. Hermite, nous aurons

$$u^8 = \frac{1}{1 - v^8}, \qquad u^8 = x,$$

$$\alpha = -\frac{(1 - x + x^2)^3}{(x - x^2)^2} = \frac{(1 - t^8)^3}{t^8}.$$

Alors l'équation modulaire de Sohnke du 17^e degré (*Crelle*, t. 16)

$$(v - u)^{18} - 16uv(1 - u^8)(1 - v^8)[17uv(v - u)^6 - (v^4 - u^4)^2 + 16(1 + u^4v^4)^2] = 0$$

devient une équation du 18^e degré en t

$$(t - 1)^{18} + 16.17t^2(t - 1)^6 + 15.16t^9 + 16.34t^5 - 16t = 0.$$

Les valeurs correspondantes de Δ sont $4n - \rho^2 = 67, 59, 43$ et 19; et, à l'aide des valeurs entières connues de α, pour $\Delta = 19, 43$ et 67, données précédemment, nous séparons les facteurs correspondants, qui sont :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 19, & t^3 - t^2 + 3t - 1 &= 0,\\
\Delta &= 43, & t^3 - 3t^2 + 7t - 1 &= 0,\\
\Delta &= 67, & t^3 - 7t^2 + 13t - 1 &= 0;
\end{aligned}$$

ce qui laisse le facteur, de degré 9,

$$t^9 - 7t^8 + 22t^7 - 34t^6 + 40t^5 - 28t^4 + 22t^3 - 10t^2 + 11t - 1 = 0$$

pour $\Delta = 59$.

A l'aide de cette équation, formons l'équation correspondante en t^8, et nous trouverons, en posant

$$\frac{(1-t^8)^3}{t^8} = \alpha,$$

une équation du 3e degré pour α.

Nous aurions pu employer l'équation modulaire de Fiedler pour $n = 15$. Alors les valeurs correspondantes de Δ sont 59, 51, 35 et 11, et les facteurs pour 11, 35 et 51 se déduiraient des valeurs précédentes de α.

L'équation modulaire pour $n = 13$ peut être aussi employée suivant la méthode de M. Hermite pour le cas $\Delta = 51$, résolu ci-dessus par Kiepert, les facteurs étrangers correspondant à $\Delta = 43$, 27 et 3 étant connus et pouvant être séparés très facilement par simple division.

$\Delta = 67$. — Ici

$$J = -2^9.5^3.11^3, \qquad J - 1 = -27.7^2.31^2.67,$$

valeurs tirées des *Équations modulaires* de M. Hermite, p. 48; alors

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= 2^3.5.11, & \gamma_3 &= 217\sqrt{67},\\
\gamma_2 + 1 &= 3^2.7^2, & \gamma_2^2 - \gamma_2 + 1 &= 3.7^2.31^2.67.
\end{aligned}$$

Les fonctions modulaires dans cette transformation correspondent au cas de M. Kiepert, où $n = 17$ (*Math. Ann.*, t. XXVI, p. 428), l'équation correspondante en L ayant comme facteur

$$L^4 + L^2 + 17,$$

et les fonctions modulaires associées ayant pour argument les $17^{\text{ièmes}}$ parties de multiples des périodes.

$\Delta = 75 = 3.5^2$. — Ici

$$J = -64\sqrt{5}\,(31\sqrt{5} + 69)^3.$$

Cette valeur est obtenue par la transformation du 5^e degré de Klein (*Math. Ann.*, t. XIV, p. 143, et *Proc. London Math. Soc.*, Vol. IX, p. 126) :

$$J : J - 1 : 1 = (\tau^2 + 10\tau + 5)^3 : (\tau^2 - 22\tau + 125)(\tau^2 - 4\tau - 1)^2 : -1728\tau;$$

J' sera la même fonction de τ' avec $\tau\tau' = 125$.

Égalant J' à zéro, il vient

$$\tau'^2 - 10\tau' + 5 = 0,$$

$$\tau' = 5 - 2\sqrt{5},$$

$$\tau = 25\sqrt{5}\,(\sqrt{5} + 2);$$

d'où la valeur ci-dessus de J, et l'on aura alors

$$\gamma_2 = 4.5^{\frac{2}{3}}\,(69 + 31\sqrt{5}),$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{9}\sqrt{3}\,(4352\sqrt{5} + 9729).$$

Cette transformation est associée avec la transformation de M. Kiepert pour $n = 19$ (*Math. Ann.*, t. XXVI, p. 428) et l'équation correspondante en L possède un facteur de la forme

$$L^4 + aL^2 + 19 = 0.$$

$\Delta = 83$. — Employant la méthode de M. Hermite avec $n = 23$, et l'équation modulaire de Schröter ou Russell

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} + \sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{k\lambda\,k'\lambda'} = 1,$$

et posant alors

$$\sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{k\lambda\,k'\lambda'} = 2s,$$

à l'aide des équations de M. Hermite (*Équat. modulaires*, p. 44), il vient

$$u^8 = k^2 = x, \qquad 1 - v^8 = \lambda'^2 = \frac{1}{x},$$

$$k'^2 = 1 - x, \qquad \lambda^2 = \frac{x-1}{x},$$

en sorte que $k^2\lambda'^2 = 1$; nous trouvons alors

$$k^2\lambda^2 + k'^2\lambda'^2 = x + \frac{1}{x} - 2 = -k^2\lambda^2\, k'^2\lambda'^2 = -256s^{24},$$

$$k\lambda + k'\lambda' = \sqrt{32s^{12} - 256s^{24}},$$

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} = \sqrt{4s^3 + \sqrt{8s^6 + \sqrt{32s^{12} - 256s^{24}}}}$$

et, par conséquent,

$$\sqrt{8s^6 + \sqrt{32s^{12} - 256s^{24}}} = 1 - 4s + 4s^2 - 4s^3$$

ou

$$\sqrt{32s^{12} - 256s^{24}} = 1 - 8s + 24s^2 - 40s^3 + 48s^4 - 32s^5 + 8s^6,$$

ou enfin

$$\begin{aligned} &1 - 16s + 112s^2 - 464s^3 + 1312s^4 - 2752s^5 + 4432s^6 \\ &\quad - 5504s^7 + 5248s^8 - 3712s^9 + 1792s^{10} - 512s^{11} + 32s^{12} + 256s^{24} = 0, \end{aligned}$$

équation du 24^e degré en s pour $\Delta = 11$, 43, 67, 83 et 91. Faisons

$$\beta = \frac{1 - 2s - 2s^2 - 2s^3}{2s^2};$$

nous obtenons à la place une équation du 8^e degré en β, et l'on a

$$\begin{array}{lcl} \beta = 0 & \text{pour} & \Delta = 67, \\ \beta = -1 & \text{»} & \Delta = 43, \\ \beta = -2 & \text{»} & \Delta = 11, \\ \beta = \frac{1}{2}(\sqrt{13} - 1) & \text{»} & \Delta = 91. \end{array}$$

L'équation en β sera donc de la forme

$$\beta(\beta + 1)(\beta + 2)(\beta^2 + \beta - 3)(\beta^3 + A\beta^2 + B\beta + C) = 0,$$

et l'on trouve aisément

$$A = 4, \qquad B = 2, \qquad C = -5,$$

en sorte que l'équation du 3ᵉ degré

$$\beta^3 + 4\beta^2 + 2\beta - 5 = 0,$$

ayant pour discriminant $\frac{83}{27}$, donne la valeur de β pour $\Delta = 83$; formant alors l'équation en t^8 ou s^{24}, t étant lié à s par les équations

$$x + \frac{1}{x} - 2 = -256 s^{24} = -t^8,$$

$$x + \frac{1}{x} - 1 = 1 - 256 s^{24} = 1 - t^8,$$

nous obtenons une équation du 3ᵉ degré pour

$$\alpha = \frac{(1 - t^8)^3}{t^8} = \frac{(1 - 256 s^{24})^3}{256 s^{24}}.$$

On devait le prévoir, car $p = 3$ pour le déterminant -83.

$\Delta = 91 = 7.13$. — Ici

$$J = -\gamma_2^3, \qquad J - 1 = -27\gamma_3^2$$

et

$$\gamma^2 = 908 + 252\sqrt{13}, \qquad \gamma_3 = 11\sqrt{7}(2\sqrt{13} + 7)(5\sqrt{13} + 18).$$

Ces valeurs ont été obtenues à l'origine en calculant les valeurs approchées de

$$\gamma_2 + 1 = (6\sqrt{13} + 21)^2 = 9(2\sqrt{13} + 7)^2,$$

$$\gamma_2^2 - \gamma_2 + 1 = 3.7.11^2\left(\frac{\sqrt{13} + 3}{2}\right)^6$$

et celles de γ'_2, correspondant au changement de signe de $\sqrt{13}$ et au rapport

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{\frac{13}{7}}.$$

Calculant les valeurs approchées de

$$12\gamma_2 \backsim e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{91}}, \qquad 12\gamma'_2 \backsim e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{13}{7}}},$$

nous trouvons

$$\gamma_2 + \gamma'_2 \backsim 1816,$$
$$\gamma_2 \gamma'_2 \quad \backsim -1088;$$

nous pouvons alors en inférer que γ_2, γ'_2 sont racines de l'équation quadratique

$$\gamma^2 - 1816\gamma - 1088 = 0.$$

Ces valeurs de γ_2 ou γ'_2, portées dans l'équation en L de Kiepert pour $n = 23$, la rendront divisible par un facteur de la forme

$$L^2 + \alpha L + 23 = 0.$$

$\Delta = 99 = 3^2.11$. — Ici J s'obtient en opérant la transformation du 3^e degré sur $J' = -\frac{2^9}{3^3}$ correspondant à $\Delta = 11$.

Avec la forme de Klein, faisant $\tau' = \frac{x}{27}$, on a

$$\frac{(x-27)(x-243)^3}{2^6.3^3 x^3} = \frac{2^9}{3^3}$$

ou

$$(x-27)(x-243)^3 = 2^{15} x^3.$$

Posant $x - 27 = y^3$ et extrayant la racine cubique, il vient

$$y^4 - 32y^3 - 216y - 864 = 0$$

ou

$$(y^2 - 16y - 30)^2 = 196(y+3)^2,$$
$$y^2 - 16y - 30 = \pm 14(y+3),$$
$$(y^2 - 2y + 12)(y^2 - 30y - 72) = 0,$$

d'où

$$y = 1 + i\sqrt{11} \qquad \text{ou} \qquad 3(\sqrt{33}+5),$$
$$\tau' = \frac{x}{27} = 1 + \frac{y^3}{27} = 1 + (\sqrt{33}+5)^3 = 27(23 + 4\sqrt{33}),$$
$$\tau = \frac{23 - 4\sqrt{33}}{27} = \frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{11})^2}{27}.$$

Ces valeurs de τ donneront, c'est à présumer, la valeur requise de J.

$\Delta = 107$. — Nombre premier; l'équation n'a pas encore été résolue, mais elle dépend de $n = 27$. (Kiepert, *Math. Annal.*, t. XXXII, p. 67.)

$\Delta = 115 = 5.23.$ — Ici

$$J = -\gamma_2^3, \qquad J - 1 = -27\gamma_3^2$$

avec

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= 3140 + 1404\sqrt{5},\\
\gamma_3 &= (6\sqrt{5} + 13)(378 + 169\sqrt{5})\sqrt{23},\\
\gamma_2 + 1 &= (18\sqrt{5} + 39)^2 = 9(6\sqrt{5} + 13)^2,\\
\gamma_2^2 - \gamma_2 + 1 &= 3.23(378 + 169\sqrt{5})^2.
\end{aligned}$$

Ces valeurs numériques ont été obtenues par la combinaison des équations modulaires du 5^e et du 23^e degré, ainsi qu'il est expliqué ci-dessous.

Combinons les équations modulaires de M. Russel du 5^e et du 23^e degré,

$$\begin{gathered}
k\lambda' + k'\lambda + 2\sqrt[3]{4k\lambda k'\lambda'} = 1,\\
\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} + \sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{k\lambda k'\lambda'} = 1;
\end{gathered}$$

posant

$$4k\lambda k'\lambda' = x^{12},$$

nous tirons de l'équation du 5^e degré

$$\begin{aligned}
k\lambda' - k'\lambda &= 1 - 2x^4,\\
(k\lambda + k'\lambda')^2 &= 1 + 4k\lambda k'\lambda' - (k\lambda' + k'\lambda)^2\\
&= 1 + x^{12} - (1 - 2x^4)^2 = 4x^4 - 4x^8 + x^{12};
\end{aligned}$$

et

$$\begin{gathered}
k\lambda + k'\lambda' = 2x^2 - x^6, \qquad \sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = \sqrt{2}\,x,\\
\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} = \sqrt[4]{2}\sqrt{x + x^3} = 1 - \sqrt{2}\,x
\end{gathered}$$

de celle du 23^e degré.

Par conséquent,

$$\sqrt{2}\,x^3 - 2x^2 + 3\sqrt{2}\,x - 1 = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned}
k'\lambda + k\lambda' &= 1 - 2x^4,\\
k\lambda + k'\lambda' &= 2x^2 - x^6;
\end{aligned}$$

et, en multipliant, il vient alors

$$\begin{aligned}
kk' + \lambda\lambda' &= (1 - 2x^4)(2x^2 - x^6) = x^2(2 - 5x^4 + 2x^8),\\
(\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'})^2 &= 2x^2(1 - x^4)^2,\\
(-\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'})^2 &= 2x^2[(1 - x^4)^2 - x^4].
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2kk'} &= x - x^5 - \sqrt{x^2 - 3x^6 + x^{10}},\\
\sqrt{2\lambda\lambda'} &= x - x^5 + \sqrt{x^2 - 3x^6 + x^{10}},\\
\sqrt[4]{2kk'} &= \sqrt{\frac{x + x^3 - x^5}{2}} - \sqrt{\frac{x - x^3 - x^5}{2}},\\
\sqrt[4]{2\lambda\lambda'} &= \sqrt{\frac{x + x^3 - x^5}{2}} + \sqrt{\frac{x - x^3 - x^5}{2}}.
\end{aligned}$$

Or, puisque

$$\sqrt{2}x^3 - 2x^2 + 3\sqrt{2}x - 1 = 0,$$

nous obtiendrons les équations du 3ᵉ degré en t où $t = \sqrt[4]{4kk'} = 2s^3$

$$\begin{aligned}
t^3 - \sqrt{5}t^2 + (18 + 7\sqrt{5})t - 1 &= 0,\\
2s^3 - (3 + \sqrt{5})s^2 + (3 + \sqrt{5})s - 1 &= 0;
\end{aligned}$$

et aussi

$$\sqrt{2}x = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 (1 + \sqrt[4]{4kk'}) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 (1 + \sqrt[4]{4\lambda\lambda'}).$$

Formant alors les équations en t^2, t^4 et t^8,

$$\begin{aligned}
t^6 + (31 + 14\sqrt{5})t^4 + (569 + 254\sqrt{5})t^2 - 1 &= 0,\\
t^{12} - (803 + 360\sqrt{5})t^8 + (646403 + 28908\sqrt{5})t^4 - 1 &= 0,\\
t^{24} - 3t^{16} + (835673068803 + 373724357760\sqrt{5})t^8 - 1 &= 0,
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
J &= -\frac{4}{27}\frac{(1-t^8)^3}{t^8}\\
&= -\frac{4}{27}(835673068800 + 373724357760\sqrt{5})\\
&= -2^6.5.\sqrt{5}(157\sqrt{5} + 351)^3,\\
\gamma_2 &= 3140 + 1404\sqrt{5},\\
\gamma_2 + 1 &= 9(6\sqrt{5} + 13)^2,\\
\gamma_2^2 - \gamma_2 + 1 &= 3.23(378 + 169\sqrt{5})^2,\\
\gamma_3 &= (6\sqrt{5} + 13)(378 + 169\sqrt{5})\sqrt{23}.
\end{aligned}$$

Les fonctions modulaires correspondantes sont celles de la 29ᵉ partie des multiples des périodes et l'équation en L de Kiepert pour $n = 29$, avec ces valeurs de γ_2 et γ_3, est divisible par un facteur de la forme $L^4 + aL^2 + 29$.

$\Delta = 123 = 3.41$. — Dans ce cas, le problème peut se résoudre en combinant les équations modulaires du 3^e et du 41^e degré ou bien, en employant la méthode de M. Hermite, avec $n = 23$.

$\Delta = 131$. — Nombre premier, problème non résolu jusqu'ici.

$\Delta = 139$. — Nombre premier, problème non résolu jusqu'ici.

$\Delta = 147 = 3.7^2$. — On peut résoudre le problème en employant la transformation de Klein du 7^e degré (*Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. IX, p. 125; *Math. Ann.*, t. XIV, p. 143), avec $J' = 0$.

$\Delta = 155 = 5.31$. — Il suffit de combiner les équations modulaires du 5^e et du 31^e degré. Alors, comme dans le cas de $\Delta = 115$, si l'on pose

$$x^{12} = 4k\lambda k'\lambda',$$

il vient

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} = \sqrt[4]{2}\sqrt{x + x^3}.$$

Puis, dans l'équation modulaire de Russell du 31^e degré (*Proc. Lond. Math. Soc.*, nov. 10; 1887),

$$(P^2 - 4Q^2) - 4PR = 0,$$

nous devons poser

$$P = \sqrt[4]{2}\sqrt{x + x^3} + 1,$$

$$Q = \frac{x^3}{\sqrt{2}} + \sqrt[4]{2}\sqrt{x + x^3},$$

$$R = \frac{x^3}{\sqrt{2}},$$

ce qui nous mènera au résultat cherché.

$\Delta = 163$. — Ici

$$J = -\gamma_2^3, \qquad J - 1 = -27\gamma_3^2,$$

avec

$$\gamma_2 = 53360, \qquad \gamma_3 = 185801\sqrt{163},$$

ou

$$\gamma_2 + 1 = 3^2.7^2.11^2, \qquad \gamma_2^2 - \gamma_2 + 1 = 3.19^2.127^2.163,$$

et alors

$$2s^3 - 4s^2 + 6s - 1 = 0.$$

Ces valeurs ont été tirées, par calcul approximatif, des formules de M. Hermite (*Équations modulaires,* p. 48), par H.-J.-S. Smith dans son *Rapport sur la Théorie des nombres,* p. 374; 1865, le calcul ayant été notablement abrégé par la remarque que $\gamma_2 + 1$ est le carré d'un multiple de 3.

La valeur $\Delta = 163$ paraît être la plus élevée pour laquelle, d'après le criterium (¹) de M. Hermite, l'invariant absolu J est un entier; aussi, pour l'instant, nous y arrêterons l'étude de la série de valeurs de Δ dans la classe A.

Classe B.

$$\Delta \equiv 7 \pmod 8).$$

Cette classe (classe 4° de M. Hermite) est celle pour laquelle on n'a pas encore découvert d'invariant simple numérique, et, suivant MM. Hermite et Joubert, la seule fonction modulaire dont on ait à se proposer la recherche numérique est $\sqrt[4]{kk'}$ ou quelquefois $\sqrt[12]{kk'}$.

Les équations modulaires de Jacobi en u et v ne conviennent pas pour ce but, mais les équations en $k\lambda - k'\lambda'$ de M. Robert Russell prennent de suite la forme convenable en posant $\lambda = k'$, $\lambda' = k$.

Les formules correspondantes de la multiplication complexe ont été données par l'auteur dans le *Quart. Jour. of Math.,* Vol. XXII, p. 143, et en employant la notation $\wp$ de M. Weierstrass.

Guidés, cependant, par M. Hermite (*Équations modulaires,* p. 44), nous pouvons, dans cette classe 4°, employer un multiplicateur complexe

$$\frac{1}{M} = \tfrac{1}{4}(-\rho + i\sqrt{\Delta}),$$

ρ étant un entier impair; alors, en suivant la méthode de M. G.-H. Stuart (*Quart. Journ. of Math.,* t. XX, p. 38), nous pouvons exprimer

$$y = \wp\frac{u}{M}$$

en fonction de $x = \wp u$, à l'aide d'une formule irrationnelle ou bien,

---

(¹) Dans l'anglais « M. Hermite's *canon* ».

avec les notations de Jacobi, nous pouvons exprimer

$$y = \operatorname{cn}\frac{u}{M}$$

en fonction de $x = \operatorname{cn} u$, ce qui, dans le cas le plus simple où $\Delta = 7$, $\rho = 1$, donne

$$\frac{\sqrt{ic} - y}{\sqrt{ic} + y} = \sqrt[4]{(-ic)}\sqrt{\frac{1+x}{ic-x}},$$

où l'on a

$$c = 8 + 3\sqrt{7},$$

expression qui nous conduit à la relation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(y^2+c^2)}} = \frac{\frac{1}{4}(-1+i\sqrt{7})\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2+c^2)}}$$

(*Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. IV); en général, pour toute valeur de $\Delta = 8n - 1$, la relation

$$\frac{\sqrt{ic} - y}{\sqrt{ic} + y} = A\left(\frac{1+x}{ic-x}\right)^{\frac{1}{2}} \prod \left(\frac{\operatorname{cn} 2s\omega + x}{\operatorname{cn}(2s+1)\omega + x}\right)^{\frac{1}{2}},$$

avec

$$\omega = \frac{K + iK'}{n},$$

entre

$$x = \operatorname{cn} u \qquad \text{et} \qquad y = \operatorname{cn}\tfrac{1}{4}(-1+i\sqrt{\Delta})\,u,$$

nous donne l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(y^2+c^2)}} = \frac{\frac{1}{4}(-1+i\sqrt{\Delta})\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2+c^2)}},$$

où l'on a posé

$$c = \frac{k'}{k};$$

avec les notations de M. Weierstrass, la relation

$$\frac{y - \wp(\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_3)}{y - \wp\frac{1}{2}\omega_3} = \prod \left\{ \frac{x - \wp\left[\omega_2 + \frac{(2s+1)\omega_1}{n}\right]}{x - \wp\left(\omega_2 + \frac{2s\omega_1}{n}\right)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

entre

$$x = \wp u \qquad \text{et} \qquad y = \wp \tfrac{1}{4}(-1 + i\sqrt{\Delta})\, u,$$

donne l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \frac{\frac{1}{4}(-i + i\sqrt{\Delta})\, dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Les fonctions modulaires requises dans le cas général sont alors les $n^{\text{ièmes}}$ parties de multiples des périodes,

$$n = \tfrac{1}{8}(\Delta + \rho^2)$$

étant un entier; et alors

$$\Delta = 8n - \rho^2.$$

Nous avons ainsi l'interprétation de la formule pour la classe 4°, p. 44, *Équations modulaires*, où l'on a

$$u^2 = \frac{1 - v^4}{2iv^2}, \qquad u^8 = 1 - x,$$

dans l'équation modulaire du $n^{\text{ième}}$ degré, reliant les u et v de Jacobi.

$\Delta = 7$. — Prenons l'équation modulaire de Gutzlaff du 7ᵉ ordre

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} = 1.$$

En posant $k = \lambda'$, $k' = \lambda$, nous en tirons

$$2\sqrt[4]{kk'} = 1.$$

$\Delta = 15$. — Dans ce cas, le R. P. Joubert (*Comptes rendus*, t. L) donne les valeurs

$$\sqrt[4]{kk'} = \sin 18^\circ \qquad \text{pour} \qquad \frac{K'}{K} = \sqrt{15}$$

et

$$\sqrt[4]{kk'} = \sin 54^\circ \qquad \text{pour} \qquad \frac{K'}{K} = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Ces valeurs de $\sqrt[4]{kk'}$ peuvent aussi se déduire de l'équation modulaire de Fiedler pour $n = 15$.

$\Delta = 23$. — Posant $\lambda = k'$, $\lambda' = k$ dans l'équation modulaire de M. Russell du 24^e degré,

$$P^3 - 4R = 0$$

ou bien

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} + \sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{k\lambda k'\lambda} - 1 = 0;$$

alors

$$2\sqrt[4]{kk'} + \sqrt[3]{4}\,\sqrt[6]{kk'} - 1 = 0$$

ou bien

$$x^3 + x^2 - 1 = 0,$$

où

$$x^{12} = 16kk',$$

et la racine réelle de cette équation du 3^e degré est donnée par la formule

$$\frac{1}{x} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{23}}{6\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{23}}{6\sqrt{3}}}.$$

$\Delta = 31$. — Posant $\lambda = k'$, $\lambda' = k$ dans l'équation modulaire de Russell du 31^e degré,

$$(P^2 - 4Q)^2 - 4PR = 0,$$

alors

$$P = 2\sqrt[4]{kk'} + 1, \qquad Q = \sqrt{kk'} + 2\sqrt[4]{kk'}, \qquad R = \sqrt{kk'}$$

et

$$P = x^3 + 1, \qquad Q = \tfrac{1}{4}x^6 + x^3, \qquad R = \tfrac{1}{4}x^6,$$

avec

$$x^{12} = 16kk',$$

en sorte que l'on a

$$x^9 - 3x^6 + 4x^3 - 1 = 0,$$

$$(x^3 - 1)^3 = -x^3, \qquad x^3 - 1 = -x, \qquad x^3 + x - 1 = 0,$$

équation du 3^e degré en x, dont la racine réelle est

$$x = \sqrt[3]{\frac{31 + 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{\frac{31 - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}.$$

$\Delta = 39 = 3.13$. — L'équation pour $x = 2\sqrt[4]{kk'}$ est donnée par le R. P. Joubert dans les *Comptes rendus*, t. L, sous la forme

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x - 1 = 0,$$

d'où

$$(x^2 + x + \tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{13}{4}$$

ou

$$2x = -1 + \sqrt{2\sqrt{13} - 5} = -1 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{13} - 1)^{\frac{3}{2}}.$$

$\Delta = 47$. — L'équation modulaire du 47^e degré a été donnée par Hurwitz dans *Math. Ann.*, t. XVII, p. 69, sous la forme suivante

$$\begin{aligned}&\left[2(\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} - 1) - \sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{k\lambda\, k'\lambda'}\right]^2 \\ &\quad = 8(\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} + 1) - 7\sqrt[3]{16}\,\sqrt[6]{k\lambda\, k'\lambda'};\end{aligned}$$

et la forme de Russell, donnée dans les *Proc. London Math. Soc.*, t. XIX, p. 111, est

$$(P^2 - 4Q)^3 - 4PR(7P^2 + 24Q) - 128R^2 = 0.$$

Alors, si $\dfrac{K'}{K} = \sqrt{47}$, nous aurons, en posant $\lambda = k'$, $\lambda' = k$,

$$(4\sqrt[4]{kk'} - \sqrt[3]{4}\,\sqrt[6]{kk'} - 2)^2 = 16\sqrt{kk'} - 7\sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{kk'} + 8$$

ou, si $16kk' = x^{12}$,

$$(2x^3 - x^2 - 2)^2 = 4x^6 - 7x^4 + 8$$

ou

$$x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 1 = 0;$$

posant

$$16kk' = y^6,$$

alors

$$x = \sqrt{y},$$

et l'équation du 5^e degré en y est

$$y^5 + 3y^2 + 2y - 1 = 0,$$

une *équation principale* (*Hauptgleichung;* Klein, *Icosaëder*); elle a été résolue par le Prof. G. Paxton Young; la solution a été publiée dans l'*American Journal of Math.*, t. X, p. 108.

L'équation du 5^e degré n'a qu'une racine réelle, c'est

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4,$$

où l'on a posé

$$u_1^5 = \frac{13}{500}(15 + 7\sqrt{5}) + \frac{1}{625}\sqrt{\frac{47}{8}(21125 + 9439\sqrt{5})},$$

$$u_2^5 = \frac{13}{500}(15 - 7\sqrt{5}) - \frac{1}{625}\sqrt{\frac{47}{8}(21125 - 9439\sqrt{5})},$$

$$u_3^5 = \frac{13}{500}(15 - 7\sqrt{5}) + \frac{1}{625}\sqrt{\frac{47}{8}(21125 - 9439\sqrt{5})},$$

$$u_4^5 = \frac{13}{500}(15 + 7\sqrt{5}) - \frac{1}{625}\sqrt{\frac{47}{8}(21125 + 9439\sqrt{5})},$$

les autres racines imaginaires de l'équation étant de la forme

$$\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \varepsilon^4 u_4,$$

ε étant une racine 5^e imaginaire de l'unité.

Nous aurions pu employer l'équation modulaire du 47^e degré donnée par Hurwitz dans les *Math. Ann.*, t. XVII, p. 69, sous la forme suivante :

$$\left[2\left(\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} - 1\right) - \sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{k\lambda k'\lambda'}\right]^2 = 8\left(\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} + 1\right) - 7\sqrt[3]{16}\,\sqrt[6]{k\lambda\, k'\lambda'}.$$

Alors, posant

$$\lambda = k', \qquad \lambda' = k \qquad \text{ou} \qquad k'\lambda' = k\lambda = kk'$$

dans cette équation, on a

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{47}$$

et

$$\left(4\sqrt[4]{kk'} - \sqrt[3]{4}\,\sqrt[6]{kk'} - 2\right)^2 = 16\sqrt{kk'} - 7\sqrt[3]{16}\,kk' + 8;$$

si l'on pose

$$16\,kk' = x^{12},$$

$$(2x^3 - x^2 - 2)^2 = 4x^6 - 7x^4 + 8,$$

$$x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 1 = 0,$$

et si l'on pose encore $x = \sqrt{y}$, on retombe sur l'équation précédemment trouvée

$$y^5 + 3y^2 + 2y - 1 = 0.$$

$\Delta = 55 = 5.11$. — Combinant les équations modulaires du 5^e et

11^e degré de Russell ou Schröter,

$$k'\lambda + k\lambda' + 2\sqrt[3]{4k\lambda k'\lambda'} = 1,$$
$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} + 2\sqrt[6]{4k\lambda k'\lambda'} = 1,$$

posant $4k\lambda k'\lambda' = x^{12}$, on tire de l'équation du 5^e degré

$$k'\lambda + k\lambda' = 1 - 2x^4,$$
$$k\lambda + k'\lambda' = 2x^2 - x^6,$$

et de celle du 11^e degré

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = \sqrt{2}x = 1 - 2x^2,$$

en sorte que

$$2x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0,$$
$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Alors, par des calculs pareils à ceux employés dans le cas de $\Delta = 115$, on obtient

$$kk' + \lambda\lambda' = x^2(2 - 5x^4 + 2x^8),$$
$$\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'} = \sqrt{2}x(1 - x^4) = \frac{7-\sqrt{5}}{8},$$
$$-\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{10\sqrt{5}-18}}{8}.$$

$\Delta = 63 = 3^2.7$. — En opérant la transformation du 3^e degré sur le module pour $\frac{K'}{K} = \sqrt{7}$, nous obtenons le module requis. Posant alors $x = 2\sqrt[4]{kk'}$, le R. P. Joubert (*Comptes rendus*, t. L) donne l'équation sous la forme

$$(x^2 - x + 5)^2 - 21(x-1)^2 = 0,$$

d'où l'on peut facilement tirer x.

$\Delta = 71$ et 79. — Pour ces deux cas, consulter le D^r E. W. Fiedler (*Ueber eine besondere Classe modulargleichungen der elliptischen Functionen*. Zurich, 1885).

Posant $2\sqrt[4]{kk'} = x$, on a, dans la notation de Fiedler,

$$Z_1 = x \mp 1, \qquad Z_2 = \tfrac{1}{4}x^2 \mp x, \qquad Z'_2 = \pm 2x + 1, \qquad Z_3 = \mp \tfrac{1}{4}x^2.$$

$\Delta = 71$. — L'équation de Fiedler est

$$\begin{aligned}(x-1)^9 + x^2[(2x+1)^3 + \; & 9(x+1)^2(2x+1)^2 \\ & + 21(x+1)^4(2x+1) + 12(2x+1)^6] \\ & - (x-1)^2 x^4[6(2x+1) + 7(x-1)^2] + x^6 = 0.\end{aligned}$$

$\Delta = 79$. — L'équation en x est

$$\begin{aligned}(-2x+1)^5 - (x+1)x^2[(x+1)^6 + \; & 10(x+1)^4(-2x+1) \\ & + 28(x+1)^2(-2x+1)^2 + 21(-2x+1)^3] \\ - x^4[7(x+1)^4 + 26(x+1)^2(-2x+1) & + 24(-2x+1)^2] + 8(x+1)x^6 = 0;\end{aligned}$$

équations respectivement du 9^e et du 8^e degré pour $\Delta = 71, 79$.

$\Delta = 87 = 3.29$. — On pourrait en ce cas employer la combinaison des équations modulaires du 3^e et 29^e degré, mais cette dernière n'a pas encore été calculée, par M. Russell ou d'autres, sous une forme commode, et la forme donnée par Schröter ne convient pas au but proposé.

$\Delta = 95 = 5.19$. — Posant, comme auparavant,

$$4k\lambda k'\lambda' = x^{12} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = \sqrt{2}\,x,$$

nous tirons de l'équation modulaire du 5^e degré, avec la notation de M. Russell,

$$\begin{aligned}P &= \sqrt{2}\,x - 1, \\ Q &= \tfrac{1}{2}x^6 - \sqrt{2}\,x, \\ R &= -\tfrac{1}{2}x^6.\end{aligned}$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation du 19^e degré de Russell, nous donnent une équation du 12^e degré en x.

Classe C.

$$\Delta \equiv 1 \pmod 4.$$

Celle-ci est la Classe 1° de M. Hermite (*Équations modulaires*, p. 44), et l'invariant absolu numérique le plus simple est, suivant lui,

$$\alpha = -\frac{(x+1)^4}{x(x-1)^2},$$

qui, en remplaçant x par $1 - \frac{1}{k^2}$, devient

$$\alpha = \frac{(1 - 4k^2k'^2)^2}{k^2k'^2}, \qquad \alpha + 16 = \frac{(1 + 4k^2k'^2)^2}{k^2k'^2};$$

alors, posant $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}$, $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha + 16}$,

$$\beta = \frac{1}{2kk'} - 2kk', \qquad \gamma = \frac{1}{2kk'} + 2kk',$$

et, suivant M. Hermite, β et γ sont en un très grand nombre de cas des entiers.

Avec le multiplicateur complexe

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{2}(-\rho + i\sqrt{\Delta}),$$

ρ étant un entier impair, on peut exprimer $y = \operatorname{cn}\frac{u}{M}$ en fonction de $x = \operatorname{cn} u$ par une formule irrationnelle, à l'aide de la méthode exposée par M. G. H. Stuart dans le *Quart. Journ. of Mathematics*, t. XXII, p. 147; alors les fonctions modulaires qui entrent dans ces formules sont des fonctions des $n^{\text{ièmes}}$ parties des multiples des périodes,

$$n = \frac{1}{2}(\Delta + \rho^2)$$

étant entier, en sorte que

$$\Delta = 2n - \rho^2,$$

comme dans les formules de M. Hermite (*Équations modulaires*, p. 44). Ou encore, avec les notations de M. Weierstrass, nous pouvons relier ensemble

$$x = \wp u \qquad \text{et} \qquad y = \wp\tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{\Delta}),$$

où

$$\Delta = 4n + 1 \qquad \text{et} \qquad m = 2n + 1,$$

à l'aide de la relation

$$\frac{y - \wp\frac{1}{2}\omega_2'}{y - \wp\frac{1}{2}\omega_2} = \left(\frac{x - e_1}{x - e_3}\right)^2 \prod \frac{x - \wp\left[\omega_2 - \frac{(4r+1)\omega_3}{m}\right]}{x - \wp\frac{(4r+1)\omega_3}{m}},$$

transformation de degré $n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}m$.

$\Delta = 1$. — Alors

$$k' = k \qquad \text{et} \qquad k' = k = \sin 45^\circ;$$

de plus, $J = 1$, $J - 1 = 0$, en sorte que $g_2 = 0$.

Alors

$$\beta = 0, \qquad \alpha = 0, \qquad 2kk' = 1.$$

$\Delta = 5$. — Ici $\beta = 2^2$, $\alpha = 2^6$, valeurs tirées de l'équation modulaire de Russell du 5^e degré, avec $\lambda = k'$, $\lambda' = k$. Alors

$$2kk' + 2\sqrt[3]{k^2k'^2} - 1 = 0$$

ou, posant $\sqrt[3]{2kk'} = x$,

$$x^3 + 2x^2 - 1 = 0, \qquad (x+1)(x^2 + x - 1) = 0,$$

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$2kk' = \sqrt{5} - 2 = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^3. \qquad (\textit{Abel.})$$

$\Delta = 9 = 3^2$. — Ici l'on a (*Kronecker*)

$$\alpha = 2^8.3, \qquad \beta = 8\sqrt{3}, \qquad \gamma = 14,$$

ou, posant $2kk' = z$,

$$z^2 - 14z - 1 = 0, \qquad z = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}\right)^4.$$

$\Delta = 13$. — Nous avons ici (*Kronecker*)

$$\beta = 36, \qquad \alpha = 2^6.3^4,$$

$$2kk' = 5\sqrt{13} - 18 = \left(\frac{\sqrt{13} - 3}{2}\right)^3.$$

$\Delta = 17$. — Prenant l'équation modulaire du 17^e degré de Russell et posant $\lambda = k'$, $\lambda' = k$, nous en tirerons l'équation en $z = 2kk'$,

$$(z-1)(z^2 - 36z - 1)^2(z^4 - 80z^3 - 98z^2 - 80z + 1) = 0.$$

Le facteur $z - 1 = 0$ correspond à $\Delta = 1$ et le facteur $z^2 - 36z - 1 = 0$ à $\Delta = 13$; en sorte que

$$z^4 - 80z^3 - 98z^2 - 80z + 1 = 0;$$

et

$$\gamma^2 - 80\gamma - 100 = 0,$$
$$\gamma = 10\sqrt{17} + 40,$$
$$\beta = \frac{1}{z} - z = 4\sqrt{206 + 50\sqrt{17}},$$
$$\alpha = 4\beta^2 = 2^7(25\sqrt{17} + 103).$$

$\Delta = 21 = 3.7$. — Dans ce cas (*Kronecker*),

$$\alpha = 2^2.3^2(\sqrt{3}+1)^8,$$
$$2kk' = \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad \text{pour} \quad \frac{K'}{K} = \sqrt{21},$$
$$2\lambda\lambda' = \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)^2, \quad \text{pour} \quad \frac{K'}{K} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

$\Delta = 25 = 5^2$. — Dans ce cas

$$\beta = 2^4.3^2.\sqrt{5}, \qquad \gamma = 322 = 2.7.23.$$
$$2kk' = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{12}.$$

$\Delta = 29$. — L'équation modulaire en $k\lambda$, $k'\lambda'$, sous la forme de M. Russell, est

$$\begin{aligned}
&P^{15} + R\,(AP^{12} + BP^{10}Q + CP^8Q^2 + DP^6Q^3 + EP^4Q^4 + FP^2Q^5 + GQ^6) \\
&\quad + R^2(HP^9 + JP^7Q + KP^5Q^2 + LP^3Q^3 + MPQ^4) \\
&\quad + R^3(NP^6 + OP^4Q + SP^2Q^2 + + TQ^3) \\
&\quad + R^4(UP^3 + VPQ) \qquad\qquad\qquad\qquad + WR^5 = 0,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$P = x + y - 1,$$
$$Q = xy - x - y,$$
$$R = -xy,$$

avec

$$x = k\lambda, \qquad y = k'\lambda',$$

A, B, C, ..., U, V, W étant des coefficients numériques qui n'ont pas encore été déterminés.

Posant $\lambda = k'$, $\lambda' = k$, et $z = 2kk'$,

$$P = z - 1, \qquad Q = \tfrac{1}{4}z^2 - z, \qquad R = -\tfrac{1}{4}z^2,$$

par analogie avec les cas précédents, l'équation obtenue aura un facteur $z+1$ et d'autres facteurs correspondant aux valeurs précédentes de Δ.

En attendant la détermination qui n'a pas encore été faite des coefficients numériques de l'équation modulaire de Russell du 29[e] degré, cherchons les valeurs numériques des fonctions modulaires pour $\Delta = 29$ par la méthode de M. Hermite dans sa classe 1°, à l'aide de l'équation modulaire pour $n=19$; dans ce cas, les valeurs correspondantes de Δ sont données par

$$2n - \rho^2 = 37,\ 29,\ 13,$$

et les solutions pour $\Delta = 37$ et 13 sont simples et bien connues.

Posons, avec la notation de M. Hermite,

$$k\lambda = u^4 v^4 = w^4;$$

alors, puisque $k^2 = u^8 = x$, et que $u^4 = \dfrac{v^4-1}{v^4+1}$, on a

$$k = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \qquad \lambda = \frac{1+k}{1-k},$$

$$w^4 = k\lambda = \sqrt{x}\ \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}},$$

$$k'\lambda' = 2i\sqrt[4]{x}\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = 2i\sqrt{k\lambda}.$$

Alors, dans la notation de Russell, avec $k\lambda = w^4$, $k'\lambda' = 2iw^2$, $\varepsilon^4 = -1$, on a

$$\begin{aligned} P &= w(t + \varepsilon\sqrt{2}), \\ Q &= w^2(\varepsilon\sqrt{2}\,t - 1), \\ R &= -\varepsilon\sqrt{2}\,w^3, \end{aligned}$$

où

$$t = w - \frac{1}{w} = \sqrt[4]{k\lambda} - \frac{1}{\sqrt[4]{k\lambda}},$$

et il vient

$$t^2 + 2 = w^2 + w^{-2} = \frac{1+x}{\sqrt[4]{x}\sqrt{1-x}} = \varepsilon\sqrt[4]{\alpha} = (1+i)\sqrt{\beta}$$

Dans la notation de Russell, pour $n = 19$,

$$P = \varpi^2 + \varepsilon\sqrt{2}\,\varpi - 1 = \varpi(t + 1 + i),$$
$$Q = \varepsilon\sqrt{2}\,\varpi^3 - \varpi^2 - \varepsilon\sqrt{2}\,\varpi = \varpi^2(t + it - 1),$$
$$R = -\varepsilon\sqrt{2}\,\varpi^3 = -\varpi^3(1 + i).$$

Substituant les valeurs ci-dessus dans

$$P^5 - 112P^2R + 256QR = 0,$$

nous obtenons

$$(t + 1 + i)^5 + 112(1 + i)(t + 1 + i)^2 - 256(1 + i)(t + i - 1) = 0,$$

ou

$$t^5 + 5t^4 + 92t^2 - 20t + 28 + i(5t^4 + 20t^3 + 132t^2 - 64t + 476) = 0.$$

Cette équation a pour facteur

$$t^2 + 8t + 16 - 18i = 0,$$

donnant

$$t = -4 \pm 3\varepsilon\sqrt{2} = -1 + 3i \quad \text{ou} \quad -7 - 3i;$$

par conséquent

$$\beta = 6^2 \quad \text{ou} \quad 42^2,$$

correspondant à

$$\Delta = 13 \quad \text{ou} \quad 37.$$

Le facteur du 3^e degré restant est

$$t^3 - (3 - 5i)t^2 + (8 - 2i)t - 14 + 14i = 0,$$

en sorte que l'on a

$$t^6 + (32 + 26i)t^4 + (116 + 192i)t^2 + 392i = 0,$$

et, comme

$$t^2 = (1 + i)\sqrt{\beta - 2},$$

il vient

$$\beta^{\frac{3}{2}} + 26\beta + 44\beta^{\frac{1}{2}} + 56 = 0,$$

équation du 3^e degré dont le discriminant est $\frac{32^2 . 29}{27}$; alors

$$\beta^3 - 588\beta^2 - 976\beta - 3136 = 0,$$

ce qui donne

$$\beta = \frac{1}{2kk'} - 2kk';$$

posant $z = 2kk'$, l'équation en z sera

$$z^6 + 588z^5 - 979z^4 + 1960z^3 + 979z^2 + 588z - 1 = 0.$$

La connaissance de ce facteur sera un jour d'une très grande utilité pour déterminer les coefficients numériques A, B, C, ..., U, V, W dans l'équation modulaire du 29^e degré.

$\Delta = 33 = 3.11.$ — Ici nous avons

$$\alpha = 2^4.3(300 + 52\sqrt{33})^2,$$

$$2kk' = \left(\frac{\sqrt{11} - 3}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}\right)^6.$$

Ces valeurs sont obtenues par la combinaison de l'équation modulaire de Schröter ou de Russell du 11^e degré

$$(1) \qquad \sqrt{k\lambda'} + \sqrt{k'\lambda} + 2\sqrt[6]{4k\lambda k'\lambda'} = 1,$$

avec l'équation du 3^e degré

$$(2) \qquad \sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = 1.$$

Posons $4k\lambda k'\lambda' = x^6$; alors

$$\sqrt{k\lambda'} + \sqrt{k'\lambda} = 1 - 2x,$$
$$k\lambda' + k'\lambda = 1 - 4x + 4x^2 - x^3,$$

et

$$k\lambda + k'\lambda' = 1 - x^3,$$
$$(k'\lambda' - k\lambda)^2 = 1 - 2x^3;$$

par conséquent

$$1 - 2x^3 + (1 - 4x + 4x^2 - x^3)^2 = (k'\lambda' - k\lambda)^2 + (k\lambda' + k'\lambda)^2 = 1$$

ou

$$(1 - 4x + 4x^2 - x^3)^2 = 2x^3,$$

ou enfin

$$x^6 - 8x^5 + 24x^4 - 36x^3 + 24x^2 - 8x + 1 = 0.$$

Cette dernière équation réciproque du 6e degré a pour facteurs

$$(x^2-4x+1)(x^4-4x^3+7x^2-4x+1)=0.$$

Posant $x+\frac{1}{x}=y$, il vient

$$y^3-8y^2+21y-20=0,$$
$$(y-4)(y^2-4y+5)=0;$$

en sorte que

$$y=4, \qquad y=2\pm i.$$

Prenons la racine réelle

$$y=4=x+\frac{1}{x},$$
$$x=2-\sqrt{3}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2;$$

on obtiendra alors

$$k\lambda'+k'\lambda=\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^3,$$
$$k\lambda+k'\lambda'=1-x^3=\tfrac{5}{2}(\sqrt{3}-1)^3,$$
$$(k'+k)(\lambda'+\lambda)=3(\sqrt{3}-1)^3,$$
$$(k'-k)(\lambda'-\lambda)=2(\sqrt{3}-1)^3,$$
$$(1+2kk')(1+2\lambda\lambda')=9(\sqrt{3}-1)^6,$$
$$(1-2kk')(1-2\lambda\lambda')=4(\sqrt{3}-1)^6,$$
$$4(kk'+\lambda\lambda')=5(\sqrt{3}-1)^6,$$
$$64k\lambda k'\lambda'=\tfrac{1}{4}(\sqrt{3}-1)^{12},$$
$$16(kk'-\lambda\lambda')^2=\tfrac{99}{4}(\sqrt{3}-1)^{12},$$
$$4(\lambda\lambda'-kk')=\tfrac{3}{2}\sqrt{11}(\sqrt{3}-1)^6,$$
$$8kk'=\tfrac{1}{2}(10-3\sqrt{11})(\sqrt{3}-1)^6,$$
$$2kk'=\left(\frac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^6,$$

pour $\frac{K'}{K}=\sqrt{33}$, et

$$2\lambda\lambda'=\left(\frac{\sqrt{11}+3}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^6$$

pour $\frac{\Lambda'}{\Lambda}=\sqrt{\frac{11}{3}}$.

$$\begin{aligned}
\beta &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha} \\
&= \frac{1}{2kk'} - 2kk' \\
&= (10 + 3\sqrt{11})\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^6 - (10 - 3\sqrt{11})\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^6 \\
&= 156\sqrt{11} + 300\sqrt{3} \\
&= 4\sqrt{3}(75 + 13\sqrt{33}); \\
\alpha &= 2^4.3(75 + 13\sqrt{33})^2; \\
\gamma &= \frac{1}{2kk'} + 2kk' \\
&= 520 + 90\sqrt{33} \\
&= 10(52 + 9\sqrt{33}); \\
\alpha + 16 &= 2^4.5^2(52 + 9\sqrt{33})^2;
\end{aligned}$$

et l'on obtient de même, pour $\lambda\lambda'$ et α' les valeurs correspondant à $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{11}{3}}$, et l'on trouve

$$\begin{aligned}
\alpha' &= 2^4.\,3(75 - 13\sqrt{33})^2, \\
\alpha' + 16 &= 2^4.5^2(52 - 9\sqrt{33}).
\end{aligned}$$

$\Delta = 37$. — Ici l'on a

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2^6.3^4.7^4, \\
\beta &= 2^2.3^2.7^2, \\
\gamma &= 2\,.\,5\,.29\sqrt{37},
\end{aligned}$$

valeurs obtenues par M. Hermite (*Théorie des équations modulaires*, p. 50, note) et aussi par M. Kronecker (*Berlin. Sitz.*, 1862); alors

$$2kk' = (\sqrt{37} - 6)^3, \qquad \frac{1}{2kk'} = (\sqrt{37} + 6)^3.$$

$\Delta = 41$. — Cas non encore résolu; mais l'on doit s'attendre à obtenir une équation de degré 4 en α, β ou γ, puisque $p = 4$.

$\Delta = 45 = 3^2.5$. — Ici, à l'aide de la transformation du 3^e degré pour $\Delta = 5$, on a

$$\alpha = 2^6(17 + 10\sqrt{3})^4, \qquad \alpha + 16 = 80(527 + 304\sqrt{3})^2,$$
$$\beta = 2^2(17 + 10\sqrt{3})^2, \qquad \gamma = 2\sqrt{5}(527 + 304\sqrt{3});$$
$$2kk' = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{12}\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^4 \qquad \text{avec} \qquad \frac{K'}{K} = \sqrt{45};$$
$$2\lambda\lambda' = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{12}\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^4 \qquad \text{»} \qquad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{9}{5}}.$$

$\Delta = 49 = 7^2$. — Dans ce cas, à l'aide de la transformation du 7e degré pour $\Delta = 1$,

$$\alpha = 2^5.3^4(3 + \sqrt{7})^6\sqrt{7},$$

et l'on a

$$\sqrt[4]{k}, \quad \sqrt[4]{k'} = \sqrt[8]{2},$$
$$kk' = \left(\frac{\sqrt{7} + 1 - \sqrt{2}\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)^{12}.$$

(Kronecker, *Berlin Sitz.*, 1862; G.-H. Stuart, *Quart. Journ. of Math.*, Vol. XX.)

$\Delta = 53$. — Le cas n'a pas encore été résolu pour ce nombre premier. On a $p = 3$, on doit donc s'attendre à une équation de degré 3 pour α.

$\Delta = 57 = 3.19$. — Nous combinons les équations modulaires du 3e et du 19e degré, et posant $y^4 = \sqrt{kk'\lambda\lambda'}$ de l'équation du 3e ordre, nous tirons

$$k'\lambda + k\lambda' = 1 - y^2,$$
$$k\lambda + k'\lambda' = \sqrt{2}y,$$
$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = \sqrt{y^2 + \sqrt{2}y};$$

et nous avons, avec la notation de Russell,

$$P = \sqrt{y^2 + \sqrt{2}y} - 1,$$
$$Q = \tfrac{1}{2}y^2 - \sqrt{y^2 + \sqrt{2}y},$$
$$R = -\tfrac{1}{2}y^2.$$

Substituant ces valeurs dans son équation modulaire du 19[e] degré, nous obtenons une équation en y, qui est réciproque lorsqu'on l'a rendue rationnelle; posant alors $y - \frac{1}{y} = \sqrt{2}v$, il vient

$$v^5 + 5v^4 - 46v^3 + 706v^2 - 611v + 169 = 0$$

ou

$$(v+13)(v^4 - 8v^3 + 58v^2 - 48v + 13) = 0$$

ou

$$(v+13)[(v^2 - 4v + 3)^2 + (6v+2)^2] = 0.$$

Prenant la valeur $v = -13$,

$$\frac{1}{y} - y = 13\sqrt{2},$$
$$\frac{1}{y} + y = 3\sqrt{38};$$
$$kk' + \lambda\lambda' = \sqrt{2}y(1-y^2) = -2y^2v = 26y^2;$$
$$2\sqrt{k\lambda k'\lambda'} = y^2;$$
$$\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'} = 3\sqrt{3}y,$$
$$-\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'} = 5y.$$

Mais

$$2y = \sqrt{2}(3\sqrt{19} - 13),$$

en sorte que

$$2kk' = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^6 \left(\frac{3\sqrt{19}-13}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{avec} \quad \frac{K'}{K} = \sqrt{57},$$
$$2\lambda\lambda' = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^6 \left(\frac{3\sqrt{19}-13}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{»} \quad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{19}{3}}.$$

$\Delta = 61$. — La question n'est pas encore résolue pour ce nombre premier, mais la solution dépend, dans la méthode de M. Hermite, de $n = 31$.

$\Delta = 65 = 5.13$. — Combinons l'équation modulaire du 5[e] et celle du 13[e] degré; alors, posant $4k\lambda k'\lambda' = x^6$, nous tirons de l'équation du 5[e] degré

$$k'\lambda + k\lambda' = 1 - 2x^2,$$
$$k\lambda + k'\lambda' = 2x - x^3,$$

et dans l'équation du 13^e degré, avec la notation de Russell, il vient

$$\begin{aligned} P &= -1 + 2x - x^3, \\ Q &= -2x + x^3 - \tfrac{1}{4}x^6, \\ R &= -\tfrac{1}{4}x^6. \end{aligned}$$

Substituons ces valeurs de P, Q, R dans l'équation modulaire du 13^e degré, et séparant les facteurs $x+1$, $x^2 \pm x + 1$ par division, il reste une équation réciproque en x qui devient, en posant $x + \frac{1}{x} = y$,

$$y^2 - 5y - 10 = 0,$$

en sorte que

$$y = \tfrac{1}{2}(\sqrt{65} + s^2),$$

d'où l'on peut tirer les valeurs de kk' et $\lambda\lambda'$.

$\Delta = 69 = 3.23$. — Combinons l'équation modulaire de Schröter, Hurwitz ou Russell du 23^e degré,

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} + \sqrt[12]{256 k\lambda k'\lambda'} = 1 \tag{1}$$

avec celle de Jacobi du 3^e degré

$$\sqrt{k'\lambda} + \sqrt{k\lambda'} = 1. \tag{2}$$

Posant

$$4k\lambda k'\lambda' = x^{12},$$

il vient

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} &= 1 - \sqrt{2}x, \\ \sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} &= 1 - 2\sqrt{2}x + 2x^2 - \sqrt{2}x^3, \\ k\lambda + k'\lambda' &= (1 - 2\sqrt{2}x + 2x^2 - \sqrt{2}x^3)^2 - x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} k'\lambda + k\lambda' &= 1 - x^6, \\ (k'\lambda + k\lambda')^2 &\quad 1 - 2x^6; \end{aligned}$$

par conséquent,

$$k\lambda + k'\lambda' = \sqrt{2}x^3$$

ou

$$(1 - 2\sqrt{2}x + 2x^2 - \sqrt{2}x^3)^2 - x^6 = \sqrt{2}x^3$$

ou

$$x^6 - 4\sqrt{2}x^5 + 12x^4 - 10\sqrt{2}x^3 + 12x^2 - 4\sqrt{2}x + 1 = \sqrt{2}x^3,$$

équation réciproque du 6ᵉ degré en x. Posons

$$\frac{1}{x} + x = y,$$

alors

$$y^3 - 4\sqrt{2}\,y^2 + 9y - 3\sqrt{2} = 0.$$

Cette équation se décompose en facteurs, et l'on a

$$(y - \sqrt{2})(y^2 - 3\sqrt{2}\,y + 3) = 0;$$

elle admet pour racines

$$\sqrt{2}, \quad \frac{3 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Pour que x soit réel, y doit surpasser 2, et nous devons prendre

$$x + \frac{1}{x} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Alors

$$k\lambda + k'\lambda' = \sqrt{2}\,x^3,$$
$$k'\lambda + k\lambda' = 1 - x^6;$$

et, en multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$kk' + \lambda\lambda' = \sqrt{2}\,x^3(1 - x^6),$$

et encore

$$2\sqrt{kk'\lambda\lambda'} = x^6,$$

en sorte que

$$\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'} = x^3\sqrt{\sqrt{2}\left(\frac{1}{x^3} - x^3\right) + 1},$$
$$-\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'} = x^3\sqrt{\sqrt{2}\left(\frac{1}{x^3} - x^3\right) - 1}.$$

$\Delta = 73$. — Nombre premier, cas non encore résolu; mais la solution dépend, suivant la méthode de M. Hermite, de $n = 37$. Puisque $p = 2$, nous devons prévoir une équation quadratique pour α.

$\Delta = 77 = 7.11$. — Combinons l'équation modulaire du 11e degré

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} + 2\sqrt[6]{4k\lambda k'\lambda'} = 1,$$

avec l'équation de Gutzlaff du 7e degré

$$\sqrt[4]{k'\lambda} + \sqrt[4]{k\lambda'} = 1,$$

en posant

$$4k\lambda\, k'\lambda' = x^{12}.$$

Alors

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = 1 - 2x^2,$$
$$k\lambda + k'\lambda' = 1 - 4x^2 + 4x^4 - x^6,$$

et

$$\sqrt{k'\lambda} + \sqrt{k\lambda'} = 1 - \sqrt{2}\, x^3,$$
$$k'\lambda + k\lambda' = 1 - 2\sqrt{2}\, x^3 + x^6.$$

Mais

$$(k\lambda + k'\lambda')^2 + (k'\lambda + k\lambda')^2 = 1 + 4k\lambda k'\lambda'$$

et, par conséquent,

$$(1 - 4x^2 + 4x^4 - x^6)^2 + (1 - 2\sqrt{2}\, x^3 + x^6) = 1 + x^{12}$$

ou

$$\begin{aligned}(1 - 2\sqrt{2}\, x^3 + x^6)^2 &= 1 + x^{12} - (1 - 4x^2 + 4x^4 - x^6)^2 \\ &= 8x^2 - 24x^4 + 34x^6 - 24x^8 + 8x^{10} \\ &= 2x^2(2 - 3x^2 + 2x^4)^2.\end{aligned}$$

$$1 - 2\sqrt{2}\, x^3 + x^6 = 2\sqrt{2}\, x - 3\sqrt{2}\, x^3 + 2\sqrt{2}\, x^5$$

ou

$$x^6 - 2\sqrt{2}\, x^5 + \sqrt{2}\, x^3 - 2\sqrt{2}\, x + 1 = 0,$$

équation réciproque du 6e degré en x, qui, si l'on pose $\frac{1}{x} + x = y$, devient

$$y^3 - 2\sqrt{2}\, y^2 - 3y + 5\sqrt{2} = 0,$$
$$(y - \sqrt{2})(y^2 - \sqrt{2}\, y - 5) = 0,$$

et a pour racines

$$\sqrt{2}, \quad \frac{1 \pm \sqrt{11}}{\sqrt{2}}.$$

Il faut choisir celle qui est plus grande que 2.

Alors

$$k\lambda + k'\lambda' = 1 - 4x^2 + 4x^4 - x^6,$$
$$k'\lambda + k\lambda' = 2\sqrt{2}\,x - 3\sqrt{2}\,x^3 + 2\sqrt{2}\,x^5,$$
$$kk' + \lambda\lambda' = \sqrt{2}\,x^6\left[\frac{1}{x^3} - x^3 - 4\left(\frac{1}{x} - x\right)\right]\left[2\left(\frac{1}{x^2} + x^2\right) - 3\right],$$
$$2\sqrt{kk'\lambda\lambda'} = x^6,$$

d'où l'on tire $\sqrt{kk'}$, $\sqrt{\lambda\lambda'}$ et $2kk'$, $2\lambda\lambda'$.

$\Delta = 81 = 3^4$. — La solution s'obtient par la considération de $\Delta = 3$.

$\Delta = 85 = 5.17$. — Prenons l'équation modulaire du 5^e degré et posons

$$4k\lambda\,k'\lambda' = x^6;$$

dans ce cas

$$x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{85} - 9)$$

est une valeur, tirée des solutions approchées données par le Prof. H.-J.-S. Smith, *Rapport sur la théorie des nombres*, présenté en 1865 à la *British Association*, p. 374.

Alors

$$k'\lambda + k\lambda' = 1 - 2x^2,$$
$$k\lambda + k'\lambda' = 2x - x^3;$$

on en tire, par multiplication,

$$kk' + \lambda\lambda' = x(2 - x^2)(1 - 2x^2) = x^3(2x^{-2} - 5 + 2x^2) = 161\,x^3;$$
$$-kk' + \lambda\lambda' = 72\sqrt{5}\,x^3;$$
$$2kk' = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^{12} x^3;$$
$$2\lambda\lambda' = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^{12} x^3;$$
$$2kk' = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^{12}\left(\frac{\sqrt{85} - 9}{2}\right)^3, \qquad \text{pour} \quad \frac{K'}{K} = \sqrt{85},$$
$$2\lambda\lambda' = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^{12}\left(\frac{\sqrt{85} - 9}{2}\right)^3, \qquad \text{pour} \quad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{17}{5}}.$$

$\Delta = 89$. — Pour ce nombre premier, la question n'a pas encore été résolue.

$\Delta = 93 = 3.31$. — De l'équation modulaire du 3e degré

$$\sqrt{k'\lambda} + \sqrt{k\lambda'} = 1,$$
$$\sqrt[4]{4k\lambda k'\lambda'} = x,$$

en posant

$$k'\lambda + k\lambda' = 1 - 2x^2,$$

on tire

$$\begin{aligned}(k\lambda + k'\lambda')^2 &= 1 + 4k\lambda k'\lambda' - (k'\lambda + k\lambda')^2\\ &= 1 + 4x^4 - (1 - 2x^2)^2 = 4x^2,\\ k\lambda + k'\lambda' &= 2x,\\ \sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} &= \sqrt{2x + 2x^2},\\ \sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} &= \sqrt{\sqrt{2x + 2x^2} + 2x}.\end{aligned}$$

Alors, avec les notations de Russell,

$$\begin{aligned}P &= 1 + \sqrt{\sqrt{2x + 2x^2} + 2x},\\ Q &= x + \sqrt{\sqrt{2x + 2x^2} + 2x},\\ R &= x,\end{aligned}$$
$$P^2 - 4Q = 1 - 2x + \sqrt{2x + 2x^2} - 2\sqrt{\sqrt{2x + x^2} + 2x},$$

et l'équation modulaire du 31e ordre

$$(P^2 - 4Q)^2 - 4PR = 0$$

devient

$$\begin{aligned}\left(1 - 2x + \sqrt{2x + 2x^2} - 2\sqrt{\sqrt{2x + 2x^2} + 2x}\right)^2&\\ - 4x - 4x\sqrt{\sqrt{2x + 2x^2} + 2x} &= 0;\end{aligned}$$

en faisant disparaître l'irrationnalité, il vient

$$\begin{aligned}1 + 2x + 6x^2 + 2(3 - 2x)\sqrt{2x + 2x^2}&\\ = 4\left(1 - x + \sqrt{2x + 2x^2}\right)&\sqrt{\sqrt{2x + 2x^2} + 2x}\end{aligned}$$

ou

$$1 - 20x + 8x^2 - 72x^3 + 68x^4 = 4(1 + 12x - 18x^2 + 12x^3)\sqrt{2x + 2x^2},$$

ou enfin

$$1 - 72x - 416x^2 - 4048x^3 + 12680x^4 - 8096x^5 - 1664x^6 - 576x^7 + 16x^8 = 0.$$

Cette expression, en posant $\sqrt{2}x = y$, devient

$$1 - 36\sqrt{2}y - 208y^2 - 1012\sqrt{2}y^3 + 3170y^4$$
$$- 1012\sqrt{2}y^5 - 208y^6 - 36\sqrt{2}y^7 + y^8 = 0,$$

équation réciproque en y. Posant maintenant

$$y + \frac{1}{y} = \sqrt{2}v,$$

alors

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = 2v^2 - 2,$$
$$y^3 + \frac{1}{y^3} = 2\sqrt{2}v^3 - 3\sqrt{2}v,$$
$$y^4 + \frac{1}{y^4} = 4v^4 - 8v^2 + 2,$$

en sorte que

$$v^4 - 36v^3 - 106v^2 - 452v + 897 = 0,$$
$$(v - 39)(v^3 + 3v^2 + 11v - 23) = 0.$$

Prenant la racine $v = 39$, il vient

$$y + \frac{1}{y} = 39\sqrt{2},$$
$$\frac{1}{y} - y = 7\sqrt{2}\sqrt{31},$$
$$2y = \sqrt{2}(39 - 7\sqrt{31});$$
$$2x = 39 - 7\sqrt{31},$$
$$kk' + \lambda\lambda' = 2x(1 - 2x^2) = 2xy\left(\frac{1}{y} - y\right) = 14\sqrt{31}\,y^2,$$
$$2\sqrt{k\lambda k'\lambda'} = y^2;$$
$$- kk' + \lambda\lambda' = 45\sqrt{3}\,y^2,$$
$$2kk' = (14\sqrt{31} - 45\sqrt{3})y^2$$
$$= \left(\frac{\sqrt{31} - 3\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{39 - 7\sqrt{31}}{\sqrt{2}}\right)^2$$

avec

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{93};$$

et l'on trouve

$$2\lambda\lambda' = \left(\frac{\sqrt{31}+3\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{39-7\sqrt{31}}{\sqrt{2}}\right)^2$$

avec

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{31}{3}}.$$

$\Delta = 97$. — Guidés par les valeurs numériques approchées, données par Kronecker et reproduites, en citation, par Smith (*Rapport sur la théorie des nombres,* p. 374; 1865), nous en déduirons

$$\alpha = 33210\sqrt{97} + 327078,$$

α étant donné par une équation du second degré, puisque $p = 2$ pour le déterminant -97 [1].

$\Delta = 101$. — Nombre premier. Or $p = 7$ pour le déterminant -101, et nous devons prévoir une équation irréductible de degré 7, pour déterminer α.

$\Delta = 105 = 3.5.7$. — C'est un nombre composé de trois facteurs premiers, et c'est le premier de cette nature que l'on rencontre jusqu'ici.

La solution de l'équation modulaire a été donnée pour ce cas par Kronecker (*Berlin. Sitzung.*, 1862), mais la méthode de résolution n'y est que très brièvement indiquée, et il se trouve de nombreuses fautes d'impression dans les résultats.

Nous obtiendrons la solution en combinant l'équation de Gutzlaff

$$\sqrt[4]{k'\lambda} + \sqrt[4]{k\lambda'} = 1$$

avec celle de Fiedler du 15^e degré

$$Z_1 Z_{2'} + 4Z_3 = 0,$$

où

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} + 1, \\ Z_2 &= \sqrt[4]{k\lambda\, k'\lambda'} + \sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'}, \\ Z_3 &= +\sqrt[4]{k\lambda\, k'\lambda'}, \\ Z_{2'} &= Z_1^2 - 4Z_2. \end{aligned}$$

---

(1) Comparer M. H. WEBER, *Acta mathematica,* t. XI, p. 4. *Voir* l'Appendice à la fin du présent Mémoire.

Écrivons x au lieu de $\sqrt[4]{k\lambda k'\lambda'}$ et w au lieu de $\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'}$, alors

$$Z_1 = w + 1, \qquad Z_2 = w + x, \qquad Z_3 = x,$$
$$Z_{2'} = (w+1)^2 - 4(w+x) = (w-1)^2 - 4x,$$

et l'équation de Fiedler devient

$$(w+1)(w-1)^2 - 4x(w+1) + 4x = 0,$$

ou

$$(w+1)(w-1)^2 = 4wx,$$

ou

$$w^3 - w^2 - w + 1 = 4wx.$$

Maintenant, nous tirons de l'équation de Gutzlaff

$$\sqrt{k'\lambda} + \sqrt{k\lambda'} = 1 - 2x,$$
$$k'\lambda + \quad k\lambda' = 1 - 4x + 2x^2,$$

et, par conséquent,

$$(k\lambda + k'\lambda')^2 = 1 + 4x^4 - (1 - 4x + 2x^2)^2 = 8x - 20x^2 + 16x^3.$$

Mais

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} = w,$$
$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = w^2 - 2x,$$
$$k\lambda + k'\lambda' = w^4 - 4w^2x + 2x^2 = w^3 + w^2 - w + 2x^2$$
$$= 2w^2 + 4wx + 2x^2 - 1 = 2(w+x)^2 - 1;$$

posant donc $w + x = z$, il vient

$$2z^2 - 1 = \sqrt{16x^3 - 20x^2 + 8x}$$

et

$$z^3 - (3x+1)z^2 + (3x^2 - 2x - 1)z - x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0;$$

il nous faut alors éliminer z entre ces deux équations.

Faisant

$$2z^2 - 1 = t, \qquad z^2 = \tfrac{1}{2}(t+1),$$

comme l'on a

$$[z^3 + (3x^2 - 2x - 1)z]^2 - [(3x+1)z^2 - x^3 + 3x^2 + x + 1]^2 = 0$$

ou

$$\begin{aligned}&z^6 - (3x^2 + 10x + 3)z^4 \\ &\quad + (3x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 3)z^2 - (x^3 - 3x^2 - x - 1)^2 = 0,\end{aligned}$$

il viendra

$$\left(\frac{t+1}{2}\right)^3-(3x^2+10x+3)\left(\frac{t+1}{2}\right)^2$$
$$+(3x^4+4x^3+10x^2+12x+3)\frac{t+1}{2}-(x^3-3x^2-x-1)^2=0,$$

ou

$$t^3-(6x^2+20x+3)t^2+(12x^4+16x^3+28x^2+8x+3)t$$
$$-(8x^6-48x^5+44x^4+16x^3+22x^2-12x+1)=0,$$

ou

$$t(t^2+12x^4+16x^3+28x^2+8x+3)$$
$$=\sqrt{(16x^3-20x^2+8x)(12x^4+32x^3+8x^2+16x+3}$$
$$=8x^6+48x^5+244x^4-288x^3+122x^2+12x+1,$$

équation réciproque en $\sqrt{2}\,x$.

Posons $\sqrt{2}\,x=y$ et élevons au carré, il vient

$$(4\sqrt{2}\,y^3-10y^2+4\sqrt{2}\,y)(3y^4+8\sqrt{2}\,y^3+4y^2+8\sqrt{2}\,y+3)^2$$
$$=(y^6+6\sqrt{2}\,y^5+61y^4-72\sqrt{2}\,y^3+61y^2+6\sqrt{2}\,y+1)^2;$$

et, faisant $y+\frac{1}{y}=\sqrt{2}\,v$,

$$y^2+\frac{1}{y^2}=2v^2-2,\qquad y^3+\frac{1}{y^3}=2\sqrt{2}\,v^3-3\sqrt{2}\,v,$$
$$(8v-10)(6v^2+16v-2)^2=2(2v^3+12v^2+58v-84)^2$$

ou

$$(4v-5)(3v^2+8v-1)^2=(v^3+6v^2+29v-42)^2,$$

ou

$$v^6-24v^5-53v^4+272v^3+691v^2-2520v+1769=0.$$

On a découvert un facteur carré de cette équation

$$v^2-28v+61,$$

pendant le calcul des valeurs numériques approchées de x par un procédé que nous exposerons subséquemment.

Le facteur du quatrième degré restant, de l'équation du sixième degré,

$$v^4+4v^3-2v^2-28v+29=(v^2+2v-5)^2+4(v-1)^2=0,$$

n'a que des racines imaginaires.

Prenons les déterminations de v données par l'équation

$$v^2 - 28v + 61 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad v = 14 + 3\sqrt{15}.$$

L'équation du 12^e degré, réciproque, en y, et développée serait

$$\begin{aligned} y^{12} &- 24\sqrt{2}y^{11} - 100y^{10} - 424\sqrt{2}y^9 + 2355y^8 - 8688\sqrt{2}y^7 \\ &+ 19064y^6 - 8688\sqrt{2}y^5 + 2355y^4 + 424\sqrt{2}y^3 - 100y^2 - 24\sqrt{2}y + 1 = 0, \end{aligned}$$

qui admet un facteur réciproque

$$y^4 - 28\sqrt{2}y^3 + 124y^2 - 28\sqrt{2}y + 1,$$

obtenu par la considération de

$$v^2 - 28v + 61.$$

Maintenant

$$\sqrt[4]{k'\lambda} + \sqrt[4]{k\lambda'} = 1,$$

$$\sqrt{k'\lambda} + \sqrt{k\lambda'} = 1 - \sqrt{2}y,$$

$$k'\lambda + k\lambda' = 1 - 2\sqrt{2}y + y^2$$

et

$$k\lambda + k'\lambda' = \sqrt{4\sqrt{2}y - 10y^2 + 4\sqrt{2}y^3};$$

or, si

$$y^4 = 4k\lambda k'\lambda',$$

$$\frac{1}{y} + y = \sqrt{2}v,$$

avec

$$v = 14 + 3\sqrt{15},$$

$$\frac{1}{y} - y = \sqrt{2v^2 - 4} = \sqrt{658 + 168\sqrt{15}} = \sqrt{2}\,(3\sqrt{21} + 2\sqrt{35}).$$

on obtiendra donc

$$\frac{2}{y} = \sqrt{2}\,(14 + 3\sqrt{15} + 3\sqrt{21} + 2\sqrt{35}) = \sqrt{2}\,(2\sqrt{7} + 3\sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{5}),$$

$$\frac{1}{y} = \left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}},$$

$$y = \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Maintenant

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} = 1,$$

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = 1 - \sqrt{2}\,y,$$

$$k\lambda + k'\lambda' = 1 - 2\sqrt{2}\,y + y^2,$$

$$k'\lambda + k\lambda' = \sqrt{1 + y^4 - (1 - 2\sqrt{2}\,y + y^2)^2} = \sqrt{4\sqrt{2}\,y - 10y^2 + 4\sqrt{2}\,y^3},$$

par conséquent

$$\begin{aligned} kk' + \lambda\lambda' &= y^2\left(\frac{1}{y} + y - 2\sqrt{2}\right)\sqrt{4\sqrt{2}\left(\frac{1}{y} + y\right) - 10} \\ &= y^2(\sqrt{2}\,v - 2\sqrt{2})\sqrt{8v - 10} \\ &= 2y^2(v - 2)\sqrt{4v - 5} \\ &= 2y^2(12 + 3\sqrt{15})(6 + \sqrt{15}) \\ &= y^2(234 + 60\sqrt{15}) \end{aligned}$$

et

$$2\sqrt{k\lambda k'\lambda'} = y^2;$$

par conséquent

$$\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'} = y\sqrt{235 + 60\sqrt{15}} = y(3\sqrt{15} + 10),$$

$$-\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'} = y\sqrt{233 + 60\sqrt{15}} = y(5\sqrt{5} + 6\sqrt{3}),$$

ou

$$\begin{aligned} 2\sqrt{kk'} &= y(3\sqrt{15} + 10 - 5\sqrt{5} - 6\sqrt{3}) \\ &= y(3\sqrt{3} - 5)(\sqrt{5} - 2) \\ &= 4y\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^3, \end{aligned}$$

$$2\lambda\lambda' = y\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^3,$$

ou enfin

$$\sqrt{2kk'} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}\right)^3\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}\right)^3\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

pour

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{105};$$

et

$$\sqrt{2\lambda\lambda'} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

pour

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{\frac{15}{7}}.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\sqrt{2kk'}} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$\begin{aligned}\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha} = \frac{1}{2kk'} - 2kk' = {} & \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^6 \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^6 \left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^6 \left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ & - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^6 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6 \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^6 \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\beta' = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha'} = \frac{1}{2\lambda\lambda'} - 2\lambda\lambda' = {} & \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^6 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6 \left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^6 \left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ & - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^6 \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^6 \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^6 \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2,\end{aligned}$$

et l'on voit que β et β' sont racines d'une équation du second degré.

Si nous prenons l'autre racine de l'équation du second degré

$$\rho^2 - 28\rho + 61 = 0,$$

$$\rho = 14 - 3\sqrt{15},$$

nous aurons

$$\frac{2}{y} = \sqrt{2}(14 - 3\sqrt{15} + 3\sqrt{21} - 2\sqrt{35}) = \sqrt{2}(2\sqrt{7} + 3\sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{5}),$$

$$\frac{1}{y} = \left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}},$$

$$y = \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Alors

$$kk' + \lambda\lambda' = y^2 (234 - 60\sqrt{15})$$

et, par conséquent,

$$\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'} = y(3\sqrt{15} - 10),$$

$$-\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'} = y(5\sqrt{5} - 6\sqrt{3})$$

et

$$\sqrt{2kk'} = \frac{y}{\sqrt{2}}(3\sqrt{15} - 10 - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{3})$$

$$= (3\sqrt{3} - 5)(\sqrt{5} + 2)\frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

avec

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{\frac{35}{3}},$$

et

$$2\lambda\lambda' = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

avec

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{21}{5}}.$$

Suivant Kronecker (*Berlin. Sitz.*; 1862), on a

$$2kk' = (2\gamma - 3\alpha)^2 (5 + 9\alpha + 16\beta + 4\gamma + 7\beta\gamma + 12\alpha\beta + 3\alpha\beta\gamma),$$

α, β, γ désignant respectivement $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$.

Le facteur $2\gamma - 3\alpha = \left(\frac{\gamma - \alpha}{2}\right)^3$; mais le second facteur ne peut pas être amené à correspondre à $(2 + \alpha)^3 \left(\frac{\beta - 1}{2}\right)^6 (6 + \beta\gamma)$, résultat obtenu ci-dessus.

Les valeurs numériques approchées de x et y ont été tirées des formules

$$\sqrt[4]{kk'} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}}, \qquad \sqrt[4]{2kk'} = 2^{\frac{3}{4}} q^{\frac{1}{8}}.$$

Or, si $\frac{K'}{K} = \sqrt{105}$, on a

$$\begin{aligned}
\log 105 &= 2,0211893,\\
\log \frac{K'}{K} = \log\sqrt{105} &= 1,01059465\\
\log\pi \log e &= 0,1349342,\\
\log\log\left(\frac{1}{q}\right) &= 1,14552885,\\
\log\left(\frac{1}{q}\right) &= 13,9806984,\\
\log\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{8}} &= 1,7475873,\\
\log 2^{\frac{3}{4}} &= 0,2257725,\\
\log \frac{1}{\sqrt[4]{2kk'}} &= 1,5218148,\\
\log \sqrt[4]{2kk'} &= \bar{2},4781852,
\end{aligned}$$

et, si $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{15}{7}}$,

$$\begin{aligned}
\log 15 &= 1,1760913,\\
\log 7 &= 0,8450980,\\
\log \frac{15}{7} &= 0,3309933,\\
\log \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \log\sqrt{\frac{15}{7}} &= 0,16549665,\\
\log\pi \log e &= 0,1349342,\\
\log\log\left(\frac{1}{q}\right) &= 0,30043085,\\
\log\left(\frac{1}{q}\right) &= 1,9972425,\\
\log\left(\frac{1}{q}\right)^{8} &= 0,2496553,\\
\log 2^{\frac{3}{4}} &= 0,2257725,\\
\log \frac{1}{\sqrt[4]{2\lambda\lambda'}} &= 0,0238828,\\
\log \sqrt[4]{2\lambda\lambda'} &= \bar{1},9761172,
\end{aligned}$$

En combinant ces transformations lorsque l'on emploie les équations modulaires du 7^e et du 15^e degré, on a

$$
\begin{aligned}
\log\frac{1}{y} &= 1,5456976, & \frac{1}{y} &= 35,131633,\\
\log y &= \bar{2},4543024, & y &= 0,028464,\\
\frac{1}{y}+y &= 35,161097,\\
\log\sqrt{2}\,v &= 1,5460624,\\
\log\sqrt{2} &= 0,1505150,\\
\log v &= 1,3955474, & v &= 24,862,
\end{aligned}
$$

D'une manière toute pareille, lorsque $\frac{K'}{K} = \sqrt{\frac{25}{3}}$,

$$\log\sqrt[4]{2kk'} = \bar{1},64324355,$$

et, lorsque $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{21}{5}}$,

$$
\begin{aligned}
\log\sqrt[4]{2\lambda\lambda'} &= \bar{1},87623125,\\
\log y' &= \bar{1},5194748,\\
\log\frac{1}{y'} &= 0,4805252,\\
y' &= 0,33073,\\
\frac{1}{y'} &= 3,02360,\\
\sqrt{2}\,v' &= 3,35433,\\
\log\sqrt{2}\,v' &= 0,5256058,\\
\log\sqrt{2} &= 0,1505150,\\
\log v' &= 0,3750908, & v' &= 2,37187,\\
\log v &= 1,3955474,\\
\log vv' &= 1,7706382, & vv' &= 58,971,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
v + v' &= 24,862\\
&\quad + 2,372\\
&= 27,234
\end{aligned}
$$

Ces résultats indiquent, les approximations n'étant pas poussées très loin, pour les rapports des périodes $\frac{K'}{K} = \sqrt{\frac{15}{7}}, \sqrt{\frac{21}{5}}$ et $\sqrt{\frac{35}{3}}$, les valeurs exactes de $v + v'$ et vv', qui sont

$$v + v' = 28, \qquad vv' = 61.$$

Prenons, néanmoins, les valeurs dans les Tables de Legendre, nous trouvons

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{\frac{15}{7}}, \qquad 2kk' \backsim \sin 45^\circ 30',$$
$$\frac{K'}{K} = \sqrt{\frac{21}{5}}, \qquad 2kk' \backsim \sin 18^\circ 40',$$
$$\frac{K'}{K} = \sqrt{\frac{35}{3}}, \qquad 2kk' \backsim \sin \;\; 2^\circ \;\; 8'.$$

Si nous avions combiné l'équation modulaire de Jacobi du 3[e] degré

$$\sqrt{k'\lambda} + \sqrt{k\lambda'} = 1$$

avec celle de Fiedler du 3[e] degré

$$Z_1'^3 - 8Z'Z_2' + 8Z_3' - 4Z_0^{(4)} = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
Z_1' &= \sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} - 1,\\
Z_2' &= \sqrt{k\lambda\, k'\lambda'} - \sqrt{k\lambda} - \sqrt{k'\lambda'},\\
Z_3' &= -\sqrt{k\lambda\, k'\lambda'},\\
Z_0^{(4)} &= -(k'\lambda + k\lambda')\sqrt[4]{k\lambda\, k'\lambda'} + (k' - \lambda')\sqrt[4]{k'\lambda'} - (k - \lambda)\sqrt[4]{k\lambda};
\end{aligned}$$

puis, posé

$$\begin{aligned}
k\lambda\, k'\lambda' &= x^4,\\
k'\lambda + k\lambda' &= 1 - 2x^2,\\
(k\lambda + k'\lambda')^2 &= 1 + 4x^4 - (1 - 2x^2)^2 = 4x^2,\\
\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} &= \sqrt{2x + 2x^2},
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
Z_1' &= \sqrt{2x + 2x^2} - 1,\\
Z_2' &= x^2 - \sqrt{2x + 2x^2},\\
Z_3' &= -x^2,\\
Z_0^{(4)} &= -(x - 2x^3) + (k' - \lambda')\sqrt[4]{k'\lambda'} - (k - \lambda)\sqrt[4]{k\lambda},
\end{aligned}$$

on aurait alors

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{2x+2x^2}-1)^3 - 8(\sqrt{2x+2x^2}-1)(x^2-\sqrt{2x+2x^2}) + 4x - 8x^2 - 8x^3 \\
&\quad = 4\left[(k'-\lambda')\sqrt{k'\lambda'} - (k-\lambda)\sqrt[4]{k\lambda}\right] \\
&\quad = 4\sqrt{(1-2x)}\sqrt{(1-2x+2x^2)\sqrt{2x+2x^2}+2x-4x^3}.
\end{aligned}$$

Élevant au carré, après réductions faites,

$$\begin{aligned}
&1 - 10x + 250x^2 + 448x^3 - 172x^4 - 136x^5 + 136x^6 \\
&\quad = (6 + 80x + 128x^2 - 16x^3 + 152x^4 - 96x^5)\sqrt{2x+2x^2},
\end{aligned}$$

et, répétant encore la même opération,

$$\begin{aligned}
&1 - 92x - 1392x^2 - 21896x^3 - 3252x^4 \\
&\quad + 155296x^5 + 82976x^6 - 310592x^7 - 13008x^8 \\
&\quad + 175168x^9 - 22272x^{10} + 2944x^{11} + 64x^{12} = 0.
\end{aligned}$$

En faisant $\sqrt{2}x = y$, on obtiendrait l'équation réciproque suivante :

$$\begin{aligned}
&y^{12} + 46\sqrt{2}y^{11} - 696y^{10} + 5474\sqrt{2}y^9 - 813y^8 \\
&\quad - 19412\sqrt{2}y^7 + 6032y^6 + 19412\sqrt{2}y^5 \\
&\quad - 813y^4 - 5474\sqrt{2}y^3 - 696y^2 - 46\sqrt{2}y + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Posons, comme auparavant,

$$y + \frac{1}{y} = \sqrt{2}v,$$

$$v^6 - 351v^4 + 495v^2 + 783 + 46\sqrt{(v^2-2)(v^4+58v^2-135)} = 0,$$

et ensuite, faisant

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{y} - y = \sqrt{2}u, \\
&\frac{1}{y^2} + y^2 = 2u^2 + 2, \\
&\frac{1}{y^3} - y^3 = \sqrt{2}(2u^3 + 3u), \\
&\frac{1}{y^4} + y^4 = 4u^4 + 8u^2 + 2, \\
&\frac{1}{y^5} - y^5 = \sqrt{2}(4u^5 + 10u^3 + 5u), \\
&\frac{1}{y^6} + y^6 = 8u^6 + 24u^4 + 18u^2 + 2,
\end{aligned}$$

on aura

$$u^6 - 46u^5 - 345u^4 - 2852u^3 - 897u^2 + 690u + 377 = 0,$$

ayant un facteur carré $u^2 - 54u + 29$, trouvé comme précédemment par la considération des valeurs numériques approchées des modules.

L'équation du 6^e degré se décompose alors en facteurs

$$(u^6 - 54u + 29)(u^4 + 8u^3 + 58u^2 + 48u + 13) = 0.$$

Le facteur du 4^e degré peut s'écrire

$$(u^2 + 4u + 3)^2 + (6u + 2)^2,$$

et, comme l'on voit, n'admet que des racines imaginaires.

Mais si $\frac{1}{y} - y = \sqrt{2}u$ et $u = 27 + 10\sqrt{7}$, de $u^2 - 54u + 29 = 0$, on tire

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} + y &= \sqrt{2u^2 + 4} = \sqrt{2862 + 1080\sqrt{7}} = \sqrt{2}(6\sqrt{21} + 15\sqrt{3}),\\
\frac{2}{y} &= \sqrt{2}(27 + 10\sqrt{7} + 6\sqrt{21} + 15\sqrt{3}) = \sqrt{2}(3\sqrt{3} + 5)(2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}),\\
\frac{1}{y} &= \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}\right)^3,\\
y &= \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}\right)^3.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} &= 1,\\
k\lambda + k'\lambda' &= 1 - y^2,\\
k'\lambda + k\lambda' &= \sqrt{1 + y^2 - (1 - y^2)^2} = \sqrt{2}y,\\
kk' + \lambda\lambda' &= \sqrt{2}y(1 - y^2) = 2y^2u,\\
2\sqrt{k\lambda k'\lambda'} &= y^2
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'} &= y\sqrt{2u + 1} = y\sqrt{55 + 20\sqrt{7}} = y(\sqrt{35} + 2\sqrt{5}),\\
-\sqrt{kk'} + \sqrt{\lambda\lambda'} &= y\sqrt{2u - 1} = y\sqrt{53 + 20\sqrt{7}} = y(2\sqrt{7} + 5),\\
2\sqrt{kk'} &= y(\sqrt{35} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{7} - 5) = y(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{7} - \sqrt{5}),\\
\sqrt{2kk'} &= y\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{105},$$

comme précédemment, et de même

$$\sqrt{2\lambda\lambda'} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 \left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

avec

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{35}{3}}.$$

$\Delta = 161 = 7.23$. — Combinons l'équation modulaire de Schröter ou de Russell du 23^e degré

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} + \sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{k\lambda\,k'\lambda'} = 1,$$

avec celle de Gutzlaff du 7^e degré

$$\sqrt[4]{k'\lambda} + \sqrt[4]{k\lambda'} = 1,$$

en posant

$$4\,k\lambda\,k'\lambda' = x^{12}.$$

Alors, pour l'équation du 23^e degré, on a

$$\sqrt[4]{k'\lambda} + \sqrt[4]{k\lambda'} = 1 - \sqrt{2}\,x,$$

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = 1 - 2\sqrt{2}\,x + 2x^2 - \sqrt{2}\,x^3$$

et

$$k\lambda + k'\lambda' = (1 - 2\sqrt{2}\,x + 2x^2 - \sqrt{2}\,x^3)^2 - x^6$$
$$= 1 - 4\sqrt{2}\,x + 12x^2 - 10\sqrt{2}\,x^3 + 12x^4 - 4\sqrt{2}\,x^5 + x^6,$$

expression réciproque.

Ensuite, pour l'équation du 7^e degré,

$$\sqrt{k'\lambda} + \sqrt{k\lambda'} = 1 - \sqrt{2}\,x^3,$$

$$k'\lambda + k\lambda' = 1 - 2\sqrt{2}\,x^3 + x^6;$$

mais

$$(k\lambda + k'\lambda')^2 + (k'\lambda + k\lambda')^2 = 1 + 4\,k\lambda\,k'\lambda'$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}(1 - 4\sqrt{2}x + 12x^2 - 10\sqrt{2}x^3 + 12x^4 - 4\sqrt{2}x^5 + x^6)^2 \\ + (1 - 2\sqrt{2}x^3 + x^6)^2 = 1 + x^{12},\end{aligned}$$

équation réciproque du 12^e degré en x.

Posons

$$\frac{1}{x} + x = \sqrt{2}y,$$

alors

$$4y^6 - 32y^5 + 100y^4 - 160y^3 + 113y^2 - 24y + 9 = 0,$$

équation du 6^e degré en y, dont on peut découvrir un facteur carré en calculant comme précédemment les valeurs numériques approchées d'une paire de racines.

$\Delta = 193$. — C'est un nombre premier pour lequel, d'après Gauss, $p = 2$, en sorte que α doit être de la forme $M\sqrt{193} + N$, lorsque M et N sont entiers, et les valeurs numériques de M et N peuvent être déterminées par un calcul d'approximation.

Classe D.

$$\Delta \equiv 2 \pmod{4}.$$

Cette classe est la même que celle désignée sous le n° 2 par M. Hermite (*Équations modulaires*, p. 44).

Pour résoudre l'équation modulaire d'après la méthode de M. Hermite, nous posons

$$u^4 = -\frac{v^4 - 1}{v^4 + 1}, \qquad u^8 = x;$$

alors

$$k = u^4 = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda},$$

$$k' = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1 + \lambda},$$

et

$$k'\lambda' = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1 + \lambda}\sqrt{1 - \lambda^2} = 2\sqrt{k\lambda},$$

formule équivalente à l'équation modulaire de la transformation du second degré.

Alors, si nous faisons

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{k\lambda}} - \sqrt{k\lambda} = \frac{1}{u^2 v^2} - u^2 v^2,$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} = \frac{1+x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \sqrt[4]{-\alpha},$$

α désignant l'invariant absolu de M. Hermite donné par la formule

$$\alpha = -\frac{(1+x)^4}{x(1-x)^2},$$

et alors

$$x = k^2.$$

Si nous posons

$$\frac{v}{u} = e^{\varphi}, \qquad \frac{u}{v} = e^{-\varphi},$$

et si $w = uv$, on a

$$v^2 = we^{\frac{1}{2}\varphi}, \qquad u^2 = we^{-\frac{1}{2}\varphi},$$

et, par conséquent,

$$v^{2n} + u^{2n} = 2w^n \cosh n\varphi,$$

$$v^{2n} - u^{2n} = 2w^n \sinh n\varphi;$$

et, comme

$$u^4 + v^4 = 1 - u^4 v^4,$$

on a

$$2w^2 \cosh 2\varphi = 1 - w^4,$$

c'est-à-dire que

$$\beta = \frac{1}{w^2} - w^2 = 2 \cosh 2\varphi,$$

$$\beta + 2 = 4 \cosh^2\varphi, \qquad \beta - 2 = 4 \sinh^2\varphi,$$

en sorte que

$$k + \lambda = 2\sqrt{k\lambda} \cosh 2\varphi,$$

$$-k + \lambda = 2\sqrt{k\lambda} \sinh 2\varphi.$$

Dans les exemples numériques qui suivent, nous verrons qu'il est commode de poser

$$\sqrt{\beta^2+4} = \frac{1}{\sqrt{k\lambda}} + \sqrt{k\lambda} = \gamma,$$

et ensuite

$$\sqrt{k\lambda} = \omega^2 = \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta).$$

$\Delta = 2.$

$$k = \sqrt{2} - 1, \qquad \alpha = -2^4, \qquad \beta = 2, \qquad \gamma = 2\sqrt{2},$$
$$\cosh\varphi = 1, \qquad \varphi = 0, \qquad v = u, \qquad k = \lambda.$$

$\Delta = 6.$ — Faisons $k'\lambda' = 2\sqrt{k\lambda}$ dans l'équation modulaire du 3[e] degré

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = 1;$$

il vient

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{2}\sqrt[4]{k'\lambda'} = 1,$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt[4]{k\lambda}} - \sqrt[4]{k\lambda} = \sqrt{2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{k\lambda}} + \sqrt{k\lambda} = 4,$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{k\lambda}} - \sqrt{k\lambda} = 2\sqrt{3},$$

$$\cosh 2\varphi = \sqrt{3}, \qquad \sinh 2\varphi = \sqrt{2},$$
$$\omega^2 = 2 - \sqrt{3}, \qquad \alpha = -2^4.3^2,$$

résultat d'accord avec celui de M. Hermite.

Résolvant l'équation, nous trouvons

$$k = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(2 - \sqrt{3}), \qquad \text{avec} \qquad \frac{K'}{K} = \sqrt{6},$$

$$\lambda = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(2 - \sqrt{3}), \qquad \text{avec} \qquad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(Legendre, *Fonctions elliptiques*).

$\Delta = 10.$ — Posant $k'\lambda' = 2\sqrt{k\lambda}$ dans l'équation modulaire du 5[e] degré

$$k\lambda + k'\lambda' + 2\sqrt[3]{4k\lambda\, k'\lambda'} = 1;$$

alors

$$k\lambda + 2\sqrt{k\lambda} + 4\sqrt{k\lambda} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{k\lambda}} - \sqrt{k\lambda} = 6 = 2.3,$$

$$\gamma = 2\sqrt{10}, \qquad \varpi^2 = \sqrt{10} - 3,$$

$$\alpha = -2^4.3^4.$$

Résolvant ces équations pour k et λ, on trouve

$$k = (\sqrt{2} - 1)^2(\sqrt{10} - 3), \qquad \text{pour} \qquad \frac{K'}{K} = \sqrt{10},$$

$$\lambda = (\sqrt{2} + 1)^2(\sqrt{10} - 3), \qquad \text{pour} \qquad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

$\Delta = 14$. — De l'équation modulaire du 7^e degré

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} = 1,$$

nous tirons

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{2}\sqrt[8]{k\lambda} = 1,$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt[8]{k\lambda}} - \sqrt[8]{k\lambda} = \sqrt[4]{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{k\lambda}} + \sqrt[4]{k\lambda} = 2 + \sqrt{2},$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{k\lambda}} + \sqrt{k\lambda} = 4(\sqrt{2} + 1),$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{k\lambda}} - \sqrt{k\lambda} = 2\sqrt{8\sqrt{2} + 11},$$

$$\alpha = -2^4(8\sqrt{2} + 11^2).$$

Alors

$$\sqrt{k\lambda} = 2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{8\sqrt{2} + 11},$$

$$\cosh 2\varphi = \sqrt{8\sqrt{2} + 11}, \qquad \sinh 2\varphi = \sqrt{8\sqrt{2} + 10},$$

$$k = \left(2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{8\sqrt{2} + 11}\right)\left(\sqrt{8\sqrt{2} + 11} - \sqrt{8\sqrt{2} + 10}\right),$$

pour

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{14},$$

$$\lambda = \left(2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{8\sqrt{2} + 11}\right)\left(\sqrt{8\sqrt{2} + 11} + \sqrt{8\sqrt{2} + 10}\right),$$

pour

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

[G.-H. Stuart, *Multiplication complexe des fonctions elliptiques* (*Quart. Journ. Math.*, t. XX, p. 54)].

$\Delta = 18$. — Alors

$$\alpha = -2^4 \cdot 7^4,$$

valeur obtenue par M. Hermite (*Équations modulaires*, p. 51). Et

$$\cosh 2\varphi = 7, \qquad \sinh 2\varphi = 4\sqrt{3}, \qquad \cosh\varphi = 2,$$

$$\sqrt{k\lambda} = w^2 = 5\sqrt{2} - 7 = (\sqrt{2} - 1)^3,$$

$$k = (\sqrt{2} - 1)^3 (2 - \sqrt{3})^2, \qquad \frac{K'}{K} = 3\sqrt{2},$$

$$\lambda = (\sqrt{2} - 1)^3 (2 + \sqrt{3})^2, \qquad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$\Delta = 22$. — De l'équation modulaire du 11e degré, nous tirons

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{2}\sqrt[4]{k\lambda} + 2\sqrt{2}\sqrt[4]{k\lambda} = 1,$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt[4]{k\lambda}} - \sqrt{k\lambda} = 3\sqrt{2},$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{k\lambda}} + \sqrt{k\lambda} = 20,$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{k\lambda}} - \sqrt{k\lambda} = 6\sqrt{11},$$

$$\cosh\varphi = 3\sqrt{11}, \qquad \sinh\varphi = 7\sqrt{2},$$

$$\alpha = -\beta^4 = -2^4 \cdot 3^4 \cdot 11^2.$$

Alors

$$\sqrt{k\lambda} = w^2 = 10 - 3\sqrt{11} = \left(\frac{\sqrt{11} - 3}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

$$k = (3\sqrt{11} - 7\sqrt{2})(10 - 3\sqrt{11}) \qquad \text{pour} \qquad \frac{K'}{K} = \sqrt{22},$$

$$\lambda = (3\sqrt{11} + 7\sqrt{2})(10 - 3\sqrt{11}) \qquad \text{pour} \qquad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{2}{11}}.$$

$\Delta = 26$. — Prenons l'équation modulaire du 13e degré sous la forme de M. Russell,

$$P^7 - 2^5 R(105\,P^4 - 2^7.11\,P^2 Q + 2^{12} Q^2) + 2^{16} PR^2 = 0$$

ou

$$P = k\lambda + k'\lambda' - 1,$$
$$Q = k\lambda\, k'\lambda' - k\lambda - k'\lambda',$$
$$R = -\, k\lambda\, k'\lambda';$$

faisons

$$k\lambda = x^2, \qquad k'\lambda' = 2x;$$

alors

$$P = x^2 + 2x - 1 = x(\beta - 2),$$
$$Q = 2x^3 - x^2 - 2x = -\, x^2(2\beta + 1),$$
$$R = -\, 2x^8,$$

et posons

$$\beta = \frac{1}{x} - x;$$

substituons, il vient, en divisant par x^7,

$$(\beta - 2)^7 - 64[105(\beta - 2)^4 + 2^7.11(\beta - 2)^2(2\beta + 1) + 2^{12}(2\beta + 1)^2] + 2^{18}(\beta - 2) = 0;$$

Posant

$$\beta - 2 = 4t,$$

alors

$$t = \sinh^2\varphi$$

et

$$t^7 - 105\,t^4 - 704\,t^3 - 1464\,t^2 - 1216\,t - 400 = 0$$

ou

$$(t^2 + t + 4)(t^2 + 4t + 25)(t^3 - 5t^2 - 8t - 4) = 0.$$

Prenons l'équation du 3e degré

$$t^3 - 5t^2 - 8t - 4 = 0;$$

les autres facteurs ayant des racines imaginaires, si $t = y^2$, l'équation en y sera

$$y^3 + 3y^2 + 2y + 2 = 0$$

ou bien

$$(y + 1)^3 = y - 1, \qquad \text{avec} \qquad y = \sinh\varphi.$$

Posant $y + 1 = v$, alors

$$y - 1 = v - 2, \qquad \text{et} \qquad v^3 - v + 2 = 0.$$

Cette équation, comparée à la forme de M. Weierstrass

$$4v^3 - g_2 v - g_3 = 0,$$

a pour invariants

$$g_2 = 4, \qquad g_3 = -8$$

et le discriminant

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = -64.26,$$

en sorte que l'équation du 3^e degré n'a qu'une racine réelle.

L'invariant absolu de cette forme cubique

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} = -\frac{1}{26};$$

par conséquent, en faisant

$$\operatorname{coséch} 3\alpha = \sqrt{26},$$

on a

$$v = \frac{2\cosh\alpha}{\sqrt{3}}$$

(*Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. XVII, p. 263).

$\Delta = 30$. — Prenant l'équation modulaire de Fiedler, du 15^e degré,

$$P^3 - 4PQ + 4R = 0,$$

où

$$\begin{aligned} P &= \sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} + 1, \\ Q &= \sqrt[4]{k\lambda k'\lambda'} + \sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'}, \\ R &= \sqrt[4]{k\lambda k'\lambda'}, \end{aligned}$$

et posant

$$k\lambda = x^8, \qquad k'\lambda' = 2\sqrt{k\lambda} = 2x^4,$$

on a

$$\begin{aligned} P &= x^2 + \sqrt[4]{2}\,x + 1 = x(t + \sqrt[4]{2}), \\ Q &= \sqrt[4]{2}\,x^3 + x^2 + \sqrt[4]{2}\,x = x^2(\sqrt[4]{2}\,t + 1), \\ R &= \sqrt[4]{2}\,x^3; \end{aligned}$$

faisant $t = x + \frac{1}{x}$, il vient

$$(t + \sqrt[4]{2})^3 - 4(t + \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{2}\,t + 1) + 4\sqrt[4]{2} = 0,$$
$$t^3 - \sqrt[4]{2}\,t^2 - \sqrt{2}(2\sqrt{2} + 1)t - 2 \quad + 2\sqrt[4]{2} = 0,$$

équation qui se décompose en facteurs

$$[t - \sqrt[4]{2}(\sqrt{2} + 1)](t^2 + \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\,t - 2 + \sqrt{2}) = 0;$$

par conséquent, si $t = \sqrt[4]{2}(\sqrt{2} + 1)$,

$$\beta = \frac{1}{x^4} - x^4 = 2\sqrt{3}(4\sqrt{2} + 5),$$
$$\cosh 2\varphi = \sqrt{3}(4\sqrt{2} + 5),$$
$$\sinh 2\varphi = \sqrt{10}(3 + 2\sqrt{2}),$$
$$e^{2\varphi} = \cosh 2\varphi + \sinh 2\varphi = (\sqrt{6} + \sqrt{5})(4 + \sqrt{15}),$$
$$e^{-2\varphi} = (\sqrt{6} - \sqrt{5})(4 - \sqrt{15}),$$
$$\gamma = \frac{1}{x^4} + x^4 = 20 + 12\sqrt{2},$$
$$\sqrt{k\lambda} = \varpi^2 = \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta) = (2 - \sqrt{3})(5 - 2\sqrt{6})$$

et finalement

$$k = \varpi^2 e^{-2\varphi} = (2 - \sqrt{3})(5 - 2\sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{5})(4 - \sqrt{15})$$

pour

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{30},$$

$$\lambda = \varpi^2 e^{2\varphi} = (2 - \sqrt{3})(5 - 2\sqrt{6})(\sqrt{6} + \sqrt{5})(4 + \sqrt{15})$$

pour

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \sqrt{\frac{2}{15}}.$$

De même

$$k = (2 + \sqrt{3})(5 - 2\sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{5})(4 + \sqrt{15})$$

pour

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

et

$$\lambda = (2+\sqrt{3})(5-2\sqrt{6})(\sqrt{6}+\sqrt{5})(4-\sqrt{15})$$

pour

$$\frac{\Lambda}{\Lambda'} = \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

$\Delta = 34$. — Prenons l'équation du 17^e degré sous la forme de M. Russell, et faisons

$$k\lambda = x^2, \qquad k'\lambda' = 2x;$$

alors

$$\begin{aligned} P &= x^2 + 2x - 1 \quad = -x(\beta - 2), \\ Q &= 2x^3 - x^2 - 2x = -x^2(2\beta + 1), \\ R &= -2x^3. \end{aligned}$$

L'équation modulaire

$$\begin{aligned} P^9 + 2^6 R(-287 P^6 + 2^5.261 P^4 Q - 2^{12}.15 P^2 Q^2 + 2^{17} Q^3) \\ + 2^{10} R^2 (7309 P^3 - 2^8.117 PQ) + 2^{21}.3^3 R^3 = 0 \end{aligned}$$

devient, en faisant $\beta - 2 = 4t$, après division par x^9, l'équation en t

$$t^9 - 574 t^8 - 8352 t^5 - 35940 t^4 - 63859 t^3 - 58464 t^2 - 29040 t - 6272 = 0.$$

Elle se décompose en facteurs et

$$(t+1)(t+4)^2(t^2 - 11t - 8)[(t^2 + t - 5)^2 + 24(2t+1)^2] = 0.$$

Prenons le facteur carré

$$t^2 - 11t - u^8 = 0,$$

on a

$$t = \tfrac{1}{2}(11 + 3\sqrt{17}) \qquad \text{et} \qquad \beta = 4t + 2 = 6(\sqrt{17} + 4).$$

Si nous avions pris l'équation modulaire donnée par Sohnke, du 17^e degré (*Journal de Crelle*, t. XVI)

$$(v-u)^{18} - 16uv(1-u^8)(1-v^8)[17uv(v-u)^6 - (v^4 - u^4)^2 + 16(1 - u^4 v^4)^2] = 0,$$

qui relie

$$u = \sqrt[4]{k} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt[4]{\lambda};$$

nous aurions posé

$$\frac{v}{u} = e^{\varphi}.$$

Alors, si $k'\lambda' = 2\sqrt{k\lambda} = 2u^2v^2$,

$$(1 - u^8)(1 - v^8) = 4u^4v^4,$$
$$(1 - u^4v^2)^2 = (v^4 + u^4)^2 = 4u^4v^4\cosh^2 2\varphi.$$

Posant alors

$$s = \cosh\varphi - 1 = 2\sinh^2 \tfrac{1}{2}\varphi,$$

l'équation devient

$$2^9 s^9 - 64(17.2^3 s^3 - 4\sinh^2 2\varphi + 64\cosh^2 2\varphi) = 0$$

ou, puisque

$$\cosh\varphi = s + 1, \qquad \cosh 2\varphi = 2s^2 + 4s + 1,$$
$$\sinh 2\varphi = 2(s + 1)\sqrt{s^2 + 2s},$$

il vient

$$s^9 - 17s^3 + 2(s + 1)^2(s^2 + 2s) - 8(2s^2 + 4s + 1)^2 = 0$$

ou

$$s^9 - 30s^4 - 137s^3 - 150s^2 - 60s - 8 = 0.$$

Or, comme $\beta = 2\cosh 2\varphi$, $t = \sinh^2\varphi$, cette équation en s ne concorde pas avec l'équation en t précédente.

Il y a donc une faute d'impression dans l'équation du 17^e degré de Sohnke qui doit être corrigée ainsi, en changeant le dernier signe,

$$(v - u)^{18} - 16uv(1 - u^8)(1 - v^8)[17uv(v - u)^6 - (v^4 - u^4)^2 + 16(1 + u^4v^4)^2] = 0,$$

et maintenant l'équation en s devient

$$2^9 s^9 - 64[17.2^3 s^3 - 4\sinh^2 2\varphi + 64(\cosh^2 2\varphi + 1)] = 0$$

ou

$$s^9 - 17s^3 + 2(s + 1)^2(s^2 + 2s) - 8(2s^2 + 4s + 1) - 8 = 0$$

ou

$$s^9 - 30s^4 - 137s^3 - 150s^2 - 60s - 16 = 0,$$

8 étant remplacé par 16, et alors le facteur $s - s^2 - 4 = 0$ donne

$$s = \tfrac{1}{2}(\sqrt{17} + 1),$$

solution requise; et ainsi

$$\cosh\varphi = \tfrac{1}{2}(\sqrt{17} + 3),$$
$$\cosh 2\varphi = 3(\sqrt{17} + 4).$$

$\Delta = 38$. — Prenant l'équation modulaire du 19^e degré sous la forme de Fiedler ou de Russell

$$P^5 - 112 P^2 R + 256 QR = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} - 1, \\ Q &= \sqrt{k\lambda\, k'\lambda'} - \sqrt{k\lambda} - \sqrt{k'\lambda'}, \\ R &= -\sqrt{k\lambda k'\lambda'}, \end{aligned}$$

et posant

$$k\lambda = x^4, \qquad k'\lambda' = 2x^2 \qquad \text{et} \qquad x - \frac{1}{x} = t,$$

il vient

$$\begin{aligned} P &= x^2 + \sqrt{2}\,x - 1 &&= x(t + \sqrt{2}), \\ Q &= \sqrt{2}\,x^3 - x^2 - \sqrt{2}\,x &&= x^2(\sqrt{2}\,t - 1), \\ R &= -\sqrt{2}\,x^3 \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(t + \sqrt{2})^5 + 16\sqrt{2}\,[7(t + \sqrt{2})^2 - 16(\sqrt{2}\,t - 1)] = 0$$

ou bien, en posant $t + \sqrt{2} = \sqrt{2}\,y$,

$$\begin{aligned} 4\sqrt{2}\,y^5 + 224\sqrt{2}\,y^2 - 256\sqrt{2}\,(2y - 3) &= 0, \\ y^5 + 56 y^2 - 64(2y - 3) &= 0 \end{aligned}$$

ou, en posant $y = 2v$,

$$v^5 + 7v^2 - 8v + 6 = 0,$$

équation du 5^e degré en v (une *Hauptgleichung* de Klein), admettant une seule racine réelle comprise entre 2 et -3.

Cette équation se décompose en facteurs

$$(v^2 - v + 3)(v^3 + v^2 - 2v + 2) = 0,$$

le facteur $v^2 - v + 3 = 0$ donnant

$$v = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{11}),$$

tandis que le facteur $v^3 + v^2 - 2v + 2 = 0$ donne une seule racine réelle

$$v = -\tfrac{1}{3}\left(1 + \sqrt[3]{37 + 3\sqrt{114}} + \sqrt[3]{37 - 3\sqrt{114}}\right).$$

D'autre part, alors l'équation en t est décomposable en facteurs de la manière suivante

$$(t^2+22)\left(t^3+5\sqrt{2}\,t^2-2t+22\sqrt{2}\right)=0,$$

équation où l'on a $t=-\beta$.

$\Delta=42$. — Prenons l'équation modulaire du 21ᵉ degré sous la forme de Fiedler

$$Z_1''-2Z_0^{(0,2)}=0,$$

où l'on a

$$Z_1''=k\lambda+k'\lambda'-1,$$
$$Z_0^{(0,2)}=-\left(\sqrt{k\lambda'}+\sqrt{k'\lambda}\right)\sqrt[4]{k\lambda\,k'\lambda'}+\left(\sqrt{k'}-\sqrt{\lambda'}\right)\sqrt[4]{k'\lambda'}-\left(\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}\right)\sqrt[4]{k\lambda};$$

posant alors $k\lambda=w^4$, $k'\lambda'=2w^2$, $\beta=\frac{1}{w^2}-w^2$, on peut former une équation qui servira à déterminer w et β, et par là k et λ.

$\Delta=46$. — Prenant l'équation modulaire du 23ᵉ degré sous la forme de Fiedler ou Russell

$$P^3-4R=0,$$

où

$$P=\sqrt[4]{k\lambda}+\sqrt[4]{k'\lambda'}-1,$$
$$R=\sqrt[4]{k\lambda\,k'\lambda'},$$

posant $k\lambda=x^8$, $k'\lambda'=2x^4$, alors

$$P=x^2+\sqrt[4]{2}\,x-1=-x\left(t-\sqrt[4]{2}\right),$$
$$R=-\sqrt[4]{2}\,x^3;$$

posant $t=\frac{1}{x}-x$, on obtient ainsi

$$\left(t-\sqrt[4]{2}\right)^3-4\sqrt[4]{2}=0,$$
$$t-\sqrt[4]{2}-\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}=0,$$
$$\frac{1}{x}-x=\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{2}+1\right),$$
$$\frac{1}{x^2}+x^2=3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right),$$
$$\frac{1}{x^2}-x^2=\sqrt{50+36\sqrt{2}}$$

et

$$\begin{aligned}\beta = \frac{1}{x^4} - x^4 &= (\sqrt{2}+1)\sqrt{4\sqrt{2}+3}\\ &= 3\sqrt{2}\sqrt{294+208\sqrt{2}}\\ &= 6\sqrt{147+104\sqrt{2}},\end{aligned}$$

$$\gamma = 52 + 36\sqrt{2} = 4(13+9\sqrt{2}).$$

$\Delta = 58$. — D'après M. Hermite (*Équations modulaires*, p. 51), ceci est un déterminant Δ pour lequel le nombre α est entier, et par le calcul approximatif à l'aide de la formule

$$16\alpha \backsim -e^{\pi\sqrt{\Delta}} + 104,$$

nous trouvons

$$\alpha = -2^4.3^8.11^4, \qquad \beta = 198, \qquad \gamma = 26\sqrt{58}.$$

Si nous posons

$$k\lambda = x^4, \qquad k'\lambda' = 2x^2$$

et ensuite

$$t = \frac{1}{x} - x,$$

et, si nous opérons les substitutions dans l'équation modulaire de Russell du 29^e degré, nous obtenons une équation du 15^e degré en t, ayant un facteur carré en t, qui correspond à la valeur $\beta = 198$, ce qui donne une vérification des coefficients numériques de cette équation modulaire.

$\Delta = 62$. — Prenons l'équation modulaire du 31^e degré sous la forme de Schröter, Fiedler ou Russell,

$$(P^2 - 4Q)^2 - 4PR = 0;$$

posant

$$k\lambda = x^8, \qquad k'\lambda' = 2x^4,$$

d'où

$$\begin{aligned}P &= \sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} + 1 &&= x(t+\sqrt[4]{2}),\\ Q &= \sqrt[4]{k\lambda\, k'\lambda'} + \sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} &&= x^2(\sqrt[4]{2}\,t+1),\\ R &= \sqrt[4]{k\lambda\, k'\lambda'} &&= \sqrt[4]{2}\,x^3,\end{aligned}$$

où l'on a fait $t = \frac{1}{x} + x$, il vient

$$[(t+\sqrt[4]{2})^2 - 4\sqrt[4]{2}\,t - 4]^2 - 4\sqrt[4]{2}\,(t+\sqrt[4]{2}) = 0,$$

équation décomposable en facteurs

$$[t^2 - (2-\sqrt{2})\sqrt[4]{2}\,t - 6 + 3\sqrt{2}]\,[t^2 - (2+\sqrt{2})\sqrt[4]{2}\,t - 2 + \sqrt{2}] = 0,$$

dont le second nous fournira les résultats cherchés.

$\Delta = 78$. — Prenons l'équation du 39^e degré sous la forme de Fiedler; posant $k\lambda = x^8$, $k'\lambda' = 2x^4$, $t = x - \frac{1}{x}$, il vient

$$\begin{aligned}
Z_1 &= x^2 + \sqrt[4]{2}\,x - 1 = x(t+\sqrt[4]{2}),\\
Z_2 &= \sqrt[4]{2}\,x^3 - x^2 - \sqrt[4]{2}\,x = x^2(\sqrt[4]{2}\,t - 1),\\
Z_3 &= -\sqrt[4]{2}\,x^3,\\
Z_{2'} &= x^2[(t-\sqrt[4]{2})^2 + 4],
\end{aligned}$$

et, après suppression du facteur x^7, l'équation modulaire prend la forme

$$\begin{aligned}
&(t+\sqrt[4]{2})^5\,[(t-\sqrt[4]{2})^2 + 4] + 4\sqrt[4]{2}\,[(t-\sqrt[4]{2})^2 + 4]^2\\
&\quad + 20\sqrt[4]{2}\,(t+\sqrt[4]{2})^2\,[(t-\sqrt[4]{2})^2 + 4]\\
&\quad - 8\sqrt[4]{2}\,(t+\sqrt[4]{2})^4 - 144\sqrt{2}\,(t+\sqrt[4]{2}) = 0,
\end{aligned}$$

équation du 7^e degré en t.

$\Delta = 94$. — Prenant l'équation modulaire de Fiedler ou de Russell du 47^e degré et posant

$$\sqrt[4]{k\lambda} = x^2, \qquad \sqrt[4]{k'\lambda'} = \sqrt[4]{2}\,x, \qquad \frac{1}{x} + x = t,$$

il vient

$$\begin{aligned}
P &= x^2 + \sqrt[4]{2}\,x + 1 = x(t+\sqrt[4]{2}),\\
Q &= \sqrt[4]{2}\,x^3 + x^2 + \sqrt[4]{2}\,x = x^2(\sqrt[4]{2}\,t + 1),\\
R &= \sqrt[4]{2}\,x^3,\\
P^2 - 4Q &= x^2(t^2 - 2\sqrt[4]{2}\,t + \sqrt{2} - 4) = x^2[(t-\sqrt[4]{2})^2 - 4],
\end{aligned}$$

et, l'équation modulaire de Russell du 47^e degré (*Proc. Lond. Math.*

Soc.; nov. 1887), après la suppression du facteur x^6, se présente sous la forme

$$[(t-\sqrt[4]{2})^2-4]^3-28\sqrt[4]{2}(t+\sqrt[4]{2})^3-96\sqrt[4]{2}(t+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{2}t+1)-128\sqrt{2}=0,$$

équation du 6ᵉ degré en t.

Mais, si nous prenons l'équation modulaire de Hurwitz du 47ᵉ degré (*Math. Ann.*, XIV)

$$[2(\sqrt[4]{k\lambda}+\sqrt[4]{k'\lambda'}-1)-\sqrt[3]{4}\sqrt[12]{k\lambda\,k'\lambda'}]^2=8(\sqrt{k\lambda}+\sqrt{k'\lambda'}+1)-7\sqrt[3]{16}\sqrt[6]{k\lambda\,k'\lambda'},$$

et, si l'on pose $k\lambda=x^8$, $k'\lambda'=2x^4$, il vient

$$(2x^2+2\sqrt[4]{2}x-2-\sqrt{2}\sqrt[4]{2}x)^2=8x^4+8\sqrt{2}x^2+8-14\sqrt{2}x^2=8x^4-6\sqrt{2}x^2+8,$$

ou

$$[2x^2+\sqrt[4]{2}(2-\sqrt{2})x-2]^2=8x^4-6\sqrt{2}x^2+8,$$

$$4x^4+4\sqrt[4]{2}(2-\sqrt{2})x^3+\sqrt{2}(6-4\sqrt{2})x^2$$
$$-8x^2-4\sqrt[4]{2}(2-\sqrt{2})x+4=8x^4-6\sqrt{2}x^2+8,$$

ou

$$4x^4-4\sqrt[4]{2}(2-\sqrt{2})x^3-4\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})x^2+4\sqrt[4]{2}(2-\sqrt{2})x+4=0,$$
$$x^4-\sqrt[4]{2}(2-\sqrt{2})x^3-\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})x^2+\sqrt[4]{2}(2-\sqrt{2})x+1=0.$$

Posant alors $\frac{1}{x}-x=v$, cette équation devient

$$v^2-\sqrt[4]{2}(2-\sqrt{2})v-3\sqrt{2}+6=0 \quad \text{ou} \quad \left(v-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2=\frac{9-8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Mais posant $\frac{1}{x}+x=t$, alors

$$t^2-2+\sqrt[4]{2}(2-\sqrt{2})\sqrt{t^2-4}-\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})=0,$$
$$t^2-3\sqrt{2}+2+\sqrt[4]{2}(2-\sqrt{2})\sqrt{t^2-4}=0,$$
$$t^4-(6\sqrt{2}-4)t^2+22-12\sqrt{2}=(6\sqrt{2}-8)(t^2-4),$$
$$t^4-(12\sqrt{2}-\sqrt{12})t^2-10+12\sqrt{2}=0,$$

équation du 2ᵉ degré en t^2, d'où l'on peut tirer les équations pour β et γ.

APPENDICE I.

Le numéro de janvier 1888 des *Acta Mathematica* (t. XI, p. 4) contient un article de M. H. WEBER : *Zur Theorie der elliptischen Functionen* (*Zweite Abhandlung*) qui donne un grand nombre de résultats numériques pour les fonctions des modules dans la multiplication complexe, conformes sous beaucoup de points avec ceux donnés dans l'Article ci-dessus. A l'aide des calculs de Weber, il est possible, en certains cas, d'ajouter aux résultats que j'ai obtenus et de simplifier les méthodes qui y sont employées. Nous en donnons les exemples ci-dessous, ainsi que le développement de cas qui n'avaient pas été complètement traités.

CLASSE A.

Cette classe correspond à

$$\Delta \equiv 3 \pmod 8).$$

Il sera commode de poser

$$\alpha = \frac{(1-t^8)^3}{t^8} = \frac{(1-256\,s^{24})^3}{256\,s^{24}},$$

en sorte que

$$t^8 = 256\,s^{24} = 16\,k^2 k'^2,$$

et alors

$$s \backsim q^{\frac{1}{12}}.$$

Avec cette notation on a alors pour $\Delta = 35$ (WEBER, *Acta Math.*, t. XI, p. 388)

$$2\,s^3 - (\sqrt{5}+1)(s^2 - s) - 1 = 0.$$

$\Delta = 51$.

$$t^3 + t^2 + (\sqrt{17}+4)\,t - 1 = 0 \qquad \text{(p. 385)}.$$

$\Delta = 91$.

$$2s^3 + (\sqrt{13}+1)s^2 + 2s - 1 = 0 \qquad \text{(p. 385)}.$$

$\Delta = 99$.

$$t^3 + (\sqrt{33}+4)\,t^2 + (13+2\sqrt{33})\,t - 1 = 0 \qquad \text{(p. 384)},$$

équation qui mène à la valeur suivante de α

$$\alpha = 2^6(459180431 6 + 799330532\sqrt{33}) \qquad (\text{p. } 384).$$

Classe C.

$\Delta = 17$. — L'équation de Weber donne

$$\frac{1}{\sqrt[6]{2kk'}} + \sqrt[6]{2kk'} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{17} + 1).$$

$\Delta = 29$. — L'équation de Weber, pour $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2kk'}}$, est

$$2x^3 - 9x^2 - 8x - 5 = \sqrt{29}(x + 1)^2.$$

En faisant disparaître le radical, on obtient une équation du 6^e degré

$$x^6 - 9x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 9x + 1 = 0 \quad (^1).$$

L'équation correspondante en $z = \dfrac{1}{x^3}$ concorde avec celle donnée dans notre article (p. 199),

$$z^6 + 588z^5 - 979z^4 + 1960z^3 + 979z^2 + 588z - 1 = 0,$$

qui, par conséquent, se ramène à l'équation de degré 3,

$$z^3 + 294z^2 + 155z + 70 = \sqrt{29}(55z^2 + 28 + 13).$$

$\Delta = 41$. — L'équation en $z = x + \dfrac{1}{x}$, où $\dfrac{1}{x} = \sqrt[6]{2kk'}$, est, d'après Weber (*Acta Math.*, t. XI, p. 388),

$$x^2 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{41} + 5)z + \tfrac{1}{2}(7 + \sqrt{41}) = 0,$$

---

(1) Équation qui ne change pas en remplaçant x par $-\dfrac{1}{x}$. On peut l'écrire

$$x^3 - \frac{1}{x^3} - 9\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0:$$

posant $x - \dfrac{1}{x} = t + 3$, elle devient

$$t^3 - 19t - 46 = 0,$$

équation dont le discriminant est $2^{14}.29$. (Note communiquée au traducteur par M. Greenhill.)

en sorte que z est racine de l'équation du 4ᵉ degré,

$$z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = 0,$$

et l'on peut alors facilement calculer l'équation pour $\gamma = \frac{1}{2kk'} + 2kk'$ et, en outre, celles pour α et β.

$\Delta = 73$. — Puisque $p = 2$ pour ce nombre aussi bien que pour $\Delta = 17$, nous pouvons prévoir que α, β, γ seront chacun de la forme $M\sqrt{73} + N$, et, en effet, par calcul numérique approché, nous trouvons

$$\gamma = \frac{1}{2kk'} + 2kk' = 4930\sqrt{73} + 42120,$$

ce qui équivaut à

$$\frac{1}{\sqrt[6]{2kk'}} + \sqrt[6]{2kk'} = \frac{1}{2}(\sqrt{73} + 5).$$

$\Delta = 193$. — C'est encore un nombre pour lequel $p = 2$, suivant Gauss (*Werke*, t. II, p. 288) et des valeurs approchées de $\frac{1}{\sqrt[6]{2kk'}}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{\frac{1}{12}\pi\sqrt{\Delta}}$, nous tirons

$$\frac{1}{\sqrt[6]{2kk'}} + \sqrt[6]{2kk'} = \sqrt{193} + 13,$$

d'où l'on tirera α, β, γ. De même, pour $\Delta = 97$, nous trouvons

$$\frac{1}{\sqrt[6]{2kk'}} + \sqrt[6]{2kk'} = \frac{1}{2}(\sqrt{97} + 9),$$

ce qui nous conduit à la détermination

$$\gamma = 33210\sqrt{97} + 327080,$$

au lieu de la valeur donnée par nous, page 210.

Ces valeurs conduisent aux équations approchées

$$e^{\frac{1}{6}\pi\sqrt{97}} \backsim 9\sqrt{97} + 85,$$
$$e^{\frac{1}{6}\pi\sqrt{193}} \backsim 52\sqrt{193} + 720.$$

Pendant le cours de l'impression, M. le Professeur Greenhill a fait l'honneur au traducteur de lui communiquer les résultats suivants qu'il vient d'obtenir, ainsi que la remarquable application géométrique qui s'y rattache.

Vous remarquerez que, dans les Tables des modules de la multiplication complexe, on a, dans la classe D, page 223,

$$\Delta = 4n + 2.$$

Si l'on pose alors

$$k = \operatorname{tang}\theta, \qquad \lambda = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - \theta),$$

on aura

$$\frac{1}{k} - k = 2\cot 2\theta, \qquad \frac{1}{k} + k = 2\operatorname{cos\acute{e}c} 2\theta,$$

$$\frac{1}{\lambda} - \lambda = 2\operatorname{tang} 2\theta, \qquad \frac{1}{\lambda} + \lambda = 2\operatorname{s\acute{e}c} 2\theta,$$

et alors

$$\operatorname{cos\acute{e}c} 4\theta = \cosh^2 2\varphi.$$

Ceci nous donnera les valeurs numériques qui suivent :

$\Delta = 2$, $\quad \cot 2\theta = 1$, $\quad \theta = \frac{1}{8}\pi$.

$\Delta = 6$, $\quad \cot 2\theta = (\sqrt{2} + 1)^2$, $\quad \operatorname{cos\acute{e}c} 4\theta = 3$.

$\Delta = 10$, $\quad \cot 2\theta = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^6$, $\quad \operatorname{cos\acute{e}c} 4\theta = 9$.

$\Delta = 14$, $\quad \cot 2\theta = \left(2 + \sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} + 5}\right)^2$

$$= \left(\sqrt{\frac{3 + \sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 1}{2}}\right)^4$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\operatorname{tang} 2\theta = \left(2 + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} + 5}\right)^2,$$

$$\operatorname{cos\acute{e}c} 4\theta = 8\sqrt{2} + 11.$$

$\Delta = 18$, $\quad \operatorname{tang} 2\theta = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$, $\quad \operatorname{cos\acute{e}c} 4\theta = 49$.

$\Delta = 22$, $\quad \operatorname{tang} 2\theta = (\sqrt{2} - 1)^6$, $\quad \operatorname{cos\acute{e}c} 4\theta = 99$.

$\Delta = 26$, $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\quad \ldots\ldots\ldots$,

$\Delta = 30$, $\quad \operatorname{cos\acute{e}c} 4\theta = 171 + 120\sqrt{2}$, $\quad \cot 4\theta = \sqrt{10}\,(\sqrt{2} + 1)^2\,(10 + 6\sqrt{2})$.

$\Delta = 34$, $\quad \operatorname{cos\acute{e}c} 4\theta = 9\,(\sqrt{17} + 4)^2$,

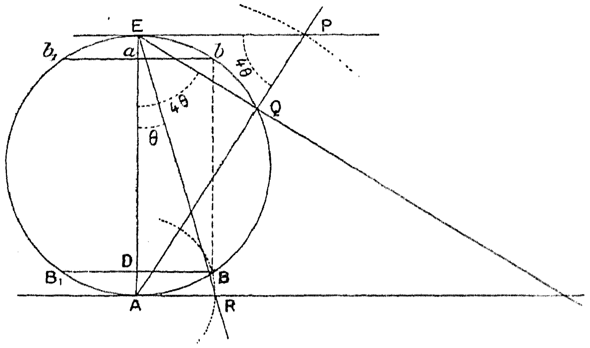
$\Delta = 46$, $\quad \operatorname{cos\acute{e}c} 4\theta = 99^2$.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Or, vous remarquerez que l'on peut maintenant construire géométriquement l'angle θ, à l'aide seule de la règle et du compas, comme il suit.

Posant $\operatorname{cos\acute{e}c} 4\theta = n$, du point A (*fig.* 1) comme centre, avec un

Fig. 1.



rayon $AP = n.AE$, décrivons une circonférence qui coupe EP au point P. Alors l'angle $\widehat{APE} = \widehat{AEQ} = 4\theta$.

En construisant la bissectrice de la moitié de cet angle on obtient la droite ER et l'on a $\widehat{AER} = \theta$. Alors la circonférence de centre A et de rayon AR coupera la circonférence de diamètre AE en B, en sorte que l'*angle modulaire* est $\widehat{AEB}$, où $k = \sin \widehat{AEB}$.

Voici une application intéressante de cette construction : Un pendule oscillant de b à b_1 aura une période d'oscillation égale à $\sqrt{\Delta}$ fois celle d'un pendule oscillant de B à B_1.

On peut opérer une construction analogue dans le cas de la classe C, p. 193.

Dans une seconde lettre que M. Greenhill a fait l'honneur au traducteur de lui adresser, il lui communique les nouveaux résultats qui suivent :

Je pense que vous aurez peut-être remarqué que, lorsque

$$\Delta \equiv 1 \pmod 4,$$

(classe C, classe qui est désignée 1° par M. Hermite, p. 44, *Équat.*

modul.) *n'est pas* un multiple de 3, l'expression

$$P = (2kk')^{-\frac{1}{6}} + (2kk')^{\frac{1}{6}}$$

et

$$P' = (2kk')^{-\frac{1}{6}} - (2kk')^{\frac{1}{6}}$$

se présente souvent sous la forme d'un nombre simple qu'il est commode de prendre pour base de la construction géométrique de l'angle modulaire.

Et de même lorsque l'on considère le cas $\Delta \equiv 2 \pmod 4$, classe D, (classe 2° de M. Hermite, *loc. cit.*), Δ n'étant pas un multiple de 3,

$$Q = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)\right]^{-\frac{1}{6}} + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)\right]^{\frac{1}{6}},$$

$$Q' = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)\right]^{-\frac{1}{6}} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)\right]^{\frac{1}{6}}$$

sont encore des nombres de forme simple.

Ainsi

$$\begin{array}{ll} \Delta = 193, & P = \sqrt{193} + 13, \\ \Delta = 97, & P = \frac{1}{2}(\sqrt{97} + 9), \\ \Delta = 73, & P = \frac{1}{2}(\sqrt{73} + 5), \\ \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lll} \Delta = 142, & Q = 9 + 5\sqrt{2} & (^1), \\ \Delta = 70, & Q = 3\sqrt{2} + \sqrt{5} & (^2), \\ \Delta = 58, & Q = 29, & Q' = 5, \\ \Delta = 14, & Q = \sqrt{2} + 1. & \\ \ldots\ldots\ldots & & \end{array}$$

Soit alors $\Delta \equiv 1 \pmod 4$, Δ n'étant pas un multiple de 3, et posons

$$2kk' = \text{tang}^6\gamma = \text{tang}^3\beta = \text{tang}\,\alpha = \sin 2\theta,$$

2θ désignant l'angle modulaire.

---

(1) Résultat donné par M. Weber.

(2) *Idem.*

On aura dans ce cas

$$P = (2kk')^{-\frac{1}{6}} + (2kk')^{\frac{1}{6}} = 2\,\text{coséc}\,2\gamma$$

et

$$P' = (2kk')^{-\frac{1}{6}} - (2kk')^{\frac{1}{6}} = 2\cot 2\gamma,$$

$$(2kk')^{-\frac{1}{3}} + (2kk')^{\frac{1}{3}} = 2\,\text{coséc}\,2\beta,$$

$$(2kk')^{-\frac{1}{3}} - (2kk')^{\frac{1}{3}} = 2\cot 2\beta;$$

alors

$$\text{tang}\,\beta = \text{tang}^2\gamma = \frac{1-\cos^2\gamma}{1+\cos^2\gamma},$$

et

$$\text{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - \beta) = \cos 2\gamma.$$

Si nous prenons un angle δ tel que l'on ait

$$\text{tang}\,\delta = \tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,2\beta,$$

l'on aura

$$\text{tang}(\delta - \beta) = \frac{\text{tang}\,\delta - \text{tang}\,\beta}{1 + \text{tang}\,\delta\,\text{tang}\,\beta} = \frac{\dfrac{\text{tang}\,\beta}{1-\text{tang}^2\beta} - \text{tang}\,\beta}{1 + \dfrac{\text{tang}^2\beta}{1-\text{tang}^2\beta}} = \text{tang}^3\beta,$$

en sorte que

$$\alpha = \delta - \beta,$$

et l'on aura

$$\sin\theta = \text{tang}\,\alpha.$$

Pour opérer la construction géométrique de ces angles, d'un point O comme centre décrivons une circonférence de rayon unité et menons les tangentes aux deux extrémités d'un diamètre AE (*fig.* 2).

Alors, la grandeur P étant donnée, décrivons une circonférence du point A comme centre ayant la longueur P comme rayon et dont l'intersection avec la tangente au point E aura lieu en B. Si l'on prenait, au contraire, la grandeur P′ comme donnée, on mesurerait alors sur la même tangente une longueur EB à partir du point E égale à P′.

L'angle $\widehat{ABE}$, ainsi déterminé, est égal à 2γ; l'angle $\widehat{AEC}$ est également égal à 2γ, la droite AB coupant la circonférence en C.

Décrivons encore une circonférence de E comme centre et de rayon EC qui coupera la tangente au point E en D. On aura alors

$$\operatorname{tang}\widehat{EAD} = \frac{ED}{EA} = \frac{EC}{EA} = \cos 2\gamma,$$

en sorte que

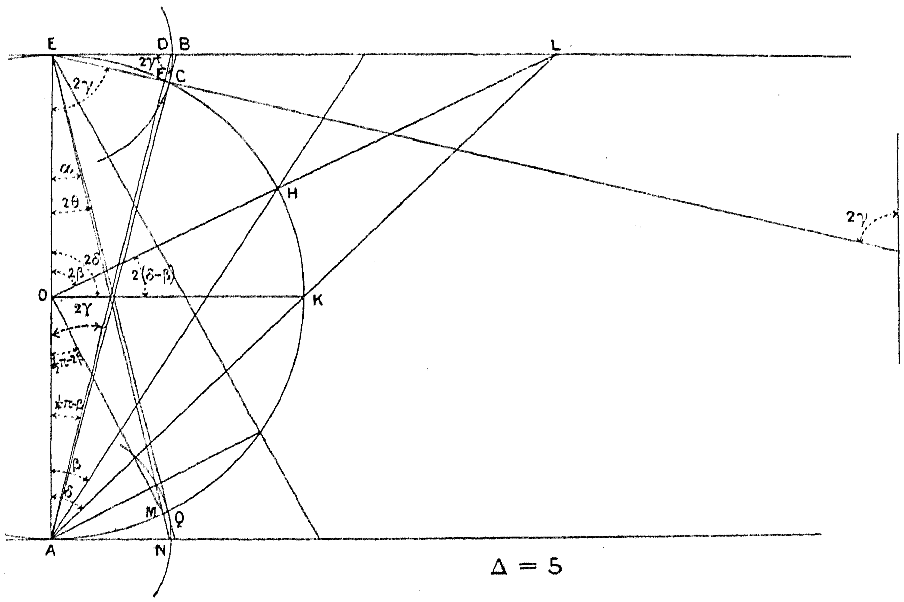
$$\widehat{EAD} = \tfrac{1}{4}\pi - \beta.$$

AD coupant la circonférence en F, on aura

$$\widehat{EOF} = \tfrac{1}{2}\pi - 2\beta,$$

et l'on peut ainsi construire l'angle $\widehat{EOH} = 2\beta$.

Fig. 2.



Maintenant prolongeons OH jusqu'à sa rencontre en L avec la tangente au point E.

Joignons par une droite les deux points A, L. La droite AL coupera la circonférence au point K, et l'on aura

$$\operatorname{tang}\widehat{EAK} = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\widehat{EOL},$$

et ainsi

$$\widehat{EAK} = \delta, \qquad \widehat{HOK} = 2(\delta - \beta), \qquad \widehat{HAK} = \delta - \beta = \alpha.$$

A partir du point A, mesurons un arc AM = HK et prolongeons la droite EM jusqu'à sa rencontre en N avec la tangente à la circonférence au point A. Du point A comme centre avec un rayon égal à AN, décrivons l'arc NQ qui coupera la circonférence en Q; nous obtenons alors

$$\sin \widehat{AEQ} = \frac{AQ}{AE} = \frac{AN}{AE} = \operatorname{tang}\alpha,$$

et de la sorte

$$\widehat{AEQ} = 2\theta,$$

angle double de l'angle modulaire.

La figure a été décrite pour $\Delta = 5$, et dans ce cas

$$(2kk')^{-\frac{1}{3}} - (2kk')^{\frac{1}{3}} = 2\cot 2\beta = 1;$$

notre point de départ sera donc l'angle β.

Voici quelques autres résultats :

$$\begin{array}{lll}
\Delta = 13, & 2\cot 2\beta \;\;= 3, & \\
\Delta = 17, & 2\operatorname{coséc} 2\gamma = \frac{1}{2}(\sqrt{17}+1), & \sin 2\gamma = \dfrac{\sqrt{17}-1}{4}, \\
\Delta = 25, & 2\operatorname{coséc} 2\gamma = 3, & \\
\Delta = 37, & \cot 2\beta \;\;= 6, & \\
\Delta = 49, & 2\operatorname{coséc} 2\gamma = \sqrt{7}+2, & \\
\Delta = 193, & 2\operatorname{coséc} 2\gamma = \sqrt{193}+13. &
\end{array}$$

Dans le cas de $\Delta \equiv 2 \pmod 4$, Δ n'étant pas un multiple de 3, nous poserons

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right) = \cot^6\gamma = \cot^3\beta = \cot\alpha, & k = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha, \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right) = \operatorname{tang}^6\gamma = \operatorname{tang}^3\beta = \operatorname{tang}\alpha, & \lambda = \operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha),
\end{array}$$

et l'on procédera comme auparavant.

Ainsi, par exemple, avec

$$Q = 2\operatorname{coséc} 2\gamma,$$

on obtient

$$\Delta = 142,\quad 2\,\text{coséc}\,2\gamma = 9 + 5\sqrt{2},$$
$$\Delta = 2,\quad \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{4};$$
$$\Delta = 10,\quad 2\cot 2\gamma = 1,$$
$$\Delta = 14,\quad 2\,\text{coséc}\,2\gamma = \sqrt{2} + 1,$$
$$\Delta = 22,\quad \cot 2\gamma = 1,\qquad \gamma = \frac{\pi}{8},$$
$$\Delta = 34,\quad 2\,\text{coséc}\,2\gamma = \frac{\sqrt{17}+3}{2},$$
$$\Delta = 46,\quad 2\,\text{coséc}\,2\gamma = 3 + \sqrt{2},$$
$$\Delta = 58,\quad 2\cot 2\gamma = 5,$$
$$\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lorsque Δ est un multiple de 3, on pourra opérer des constructions analogues pour

$$2kk' = \text{tang}^2\varepsilon = \text{tang}\,\alpha,\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right) = \cot^2\varepsilon = \cot\alpha,$$

mais *on ne peut pas* le faire pour

$$(2kk')^{\frac{1}{3}},\quad (2kk')^{\frac{1}{6}},\quad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)\right]^{\frac{1}{3}},\quad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)\right]^{\frac{1}{6}}.$$

APPENDICE II.

Pour terminer nous ne pouvons mieux faire que de renvoyer le lecteur à une liste extrêmement complète de résultats numériques à la fin du remarquable Ouvrage de M. H. Weber (*Elliptische Functionen und algebraische Zahlen,* 1891). L'éminent géomètre donne la solution d'un certain nombre de cas que nous avons laissés inachevés, ainsi que d'autres nouveaux. Nous citerons ainsi, le temps nous manquant pour les mettre sous la forme que nous avons, en général, employée dans ce Mémoire :

Classe B.

$\Delta \equiv 7 \pmod 8$.

$\Delta = 71$:

$$x = \sqrt[12]{16kk'},$$
$$x^7 - 2x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0.$$

Classe D.

$$\Delta \equiv 2 \pmod 4.$$

$\Delta = 42 = 2^2.11$:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)} = (2\sqrt{2} + \sqrt{7})\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

$\Delta = 70 = 2.5.7$:

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)} = (\sqrt{2} + 1)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2.$$

$\Delta = 72 = 2^3.3^2$:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)\right]^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 (\sqrt{2} + 1)^9 (2 + \sqrt{3})^6.$$

$\Delta = 78 = 2.3.13$:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)} = \left(\frac{\sqrt{13}+3}{2}\right)^3 (\sqrt{2.13} + 5).$$

$\Delta = 102 = 2.3.17$:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)} = (\sqrt{2} + 1)^3 (3\sqrt{2} + \sqrt{17})$$

$\Delta = 130 = 2.5.13$:

$$\sqrt[12]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{13}+3}{2}$$

$\Delta = 142 = 2.71$:

$$x = \sqrt[6]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)}, \qquad \frac{1}{x} + x = 9 + 5\sqrt{2},$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)^2 = (\sqrt{2} + 1)^3.$$

$\Delta = 190 = 2.5.19$:

$$x = \sqrt[6]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right)} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3 (\sqrt{10} + 3).$$