J. PERCHOT

# Sur les mouvements des noeuds et du périgée de la Lune et sur les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 10 (1893), p. 3-94 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__S3_0>

SUR

# LES MOUVEMENTS DES NŒUDS

## ET DU PÉRIGÉE DE LA LUNE

ET SUR

# LES VARIATIONS SÉCULAIRES DES EXCENTRICITÉS

## ET DES INCLINAISONS,

PAR M. J. PERCHOT,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

## INTRODUCTION.

Depuis Newton, le but final de la Mécanique céleste est de savoir si la loi de la gravitation universelle peut expliquer à elle seule tous les phénomènes astronomiques. Le moyen d'y parvenir est de faire des observations aussi précises que possible, de les prolonger pendant de longues années ou de longs siècles, afin de déterminer avec une grande exactitude les inégalités des mouvements des corps célestes et de les comparer ensuite aux résultats du calcul.

Or la Lune est facile à observer et son mouvement présente plusieurs inégalités importantes. La théorie de notre satellite fournit donc un excellent contrôle de la loi de Newton; elle nous donne aussi des renseignements précieux sur la parallaxe du Soleil, sur l'aplatissement et la rotation de la Terre.

Pour toutes ces raisons, la théorie de la Lune est d'une importance capitale en Mécanique céleste. Mais elle est aussi difficile qu'importante. Tous les géomètres qui ont suivi Newton s'en sont occupés et, malgré leur génie et leurs efforts, les diverses théories qu'ils ont faites pour expliquer son mouvement laissent beaucoup à désirer.

Les récentes découvertes de M. Poincaré sur le problème des trois corps nous montrent, en effet, le peu de rigueur des anciennes méthodes et nous apprennent qu'aucun des développements auxquels elles nous conduisent n'est convergent.

Heureusement, M. Poincaré ne nous a pas laissé au dépourvu : les théories des solutions périodiques et des solutions asymptotiques nous permettent de calculer plus rapidement et plus exactement que par les anciennes méthodes les coefficients de certaines inégalités.

C'est en appliquant la première de ces théories que j'ai calculé, dans une première approximation, les coefficients des principales inégalités périodiques des longitudes du nœud ascendant et du périgée de la Lune. Dans ce travail, j'ai pris pour point de départ les équations canoniques qui ont servi à Delaunay.

Enfin, dans le dernier Chapitre, j'ai indiqué d'autres équations canoniques qui définissent le mouvement relatif de la Lune, par rapport à un système d'axes animé de deux rotations correspondant aux mouvements séculaires des nœuds et du périgée.

# PREMIÈRE PARTIE.

## SUR LES MOUVEMENTS DES NOEUDS ET DU PÉRIGÉE DE LA LUNE.

### I. — Équations canoniques d'où dépend le mouvement de la Lune autour de la Terre.

Soient

$Ox$, $Oy$, $Oz$ les trois axes rectangulaires passant par le centre de la Terre;

$x$, $y$, $z$ les coordonnées du centre de la Lune;

$x'$, $y'$, $z'$ celles du centre du Soleil;

$m$, $m'$, M les masses de la Lune, du Soleil et de la Terre;
R la fonction

$$R = m'\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right];$$

les équations du mouvement de la Lune sont

$$(\alpha)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{x}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial x},\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+\mu\frac{y}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial y},\qquad \frac{d^2z}{dt^2}+\mu\frac{z}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial z};$$

$\mu$ y désigne la somme $M+m$.

Si l'on supprime les seconds membres, on a les équations du mouvement elliptique

$$(\alpha)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{x}{r^3}=0,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+\mu\frac{y}{r^3}=0,\qquad \frac{d^2z}{dt^2}+\mu\frac{z}{r^3}=0.$$

On suppose que le plan des $xy$ est le plan de l'écliptique et que $Ox$ est la ligne des équinoxes.

Soient

NII l'orbite de la Lune;
N le nœud ascendant;
II le périgée.

Désignons par

$a$ le demi grand axe de l'orbite lunaire;
$e$ son excentricité;
$p$ son paramètre;
$\tau$ le temps du passage au périgée;
$h$ la longitude du nœud ascendant;
$g$ l'argument de la latitude du périgée.

L'intégration des équations ($\alpha$), par la méthode de Jacobi, donne les intégrales $x$, $y$, $z$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ du mouvement elliptique en fonction du temps $t$ et de six constantes arbitraires C, G, H, $c$, $g$, $h$, dont la signification géométrique est donnée par les formules suivantes :

$$(h)\qquad \begin{cases} C = -\dfrac{\mu}{2a}, & G = \sqrt{\mu p}, \qquad H = \sqrt{\mu p}\cos\iota, \\ c = -\tau, & g = \text{NII}, \qquad h = x\text{N}. \end{cases}$$

Si, dans les équations $(\alpha)$, on rétablit les seconds membres, on a les équations $(a)$ du mouvement troublé. La fonction R, qui dépendait de $x, y, z, x', y', z'$, devient une fonction connue de $x', y', z'$, c'est-à-dire du temps $t$ et des constantes C, G, H, $c$, $g$, $h$.

En considérant ces six arbitraires comme de nouvelles variables, la théorie de Jacobi nous apprend que les dérivées de ces variables sont données par les équations

$$(b)\qquad \begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial c}, & \dfrac{dc}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial C}, \\ \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial g}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial G}, \\ \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial h}, & \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial H}. \end{cases}$$

Mais ces équations présentent, comme on sait, un grave inconvénient.

Dans le mouvement elliptique, $x$, $y$, $z$ sont des fonctions périodiques de $n(t+c)$, $n$ étant le moyen mouvement de la Lune, et des formules $(h)$ il résulte que $n$ est fonction de C. De sorte que, dans les formules $(b)$, le temps sort des signes sinus et cosinus, et ces formules ne peuvent s'appliquer indéfiniment ni servir à la construction des Tables.

On évite cet inconvénient, en prenant, au lieu de $c$, la variable $l$ définie par l'équation

$$l = n(t+c).$$

On voit que $l$ est l'anomalie moyenne.

Après ce changement de variable, les équations $(b)$ n'ont plus la forme canonique, mais on les y ramène en posant

$$\frac{d\rho}{n} = dL,$$

L étant une nouvelle variable. On peut écrire cette équation

$$dL = \sqrt{\mu}\frac{da}{2\sqrt{a}}, \qquad \text{d'où} \qquad L = \sqrt{\mu a}.$$

En résumé, les formules ($b$) peuvent être remplacées par les suivantes

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial h}, & \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial g}, & \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial l}, \\ \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial H}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial G}, & \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial L}, \end{cases}$$

$$R = A + \Sigma B \cos[k(h+g+l-h'-g'-l') + k'(g+l) + k''l - k'''l'].$$

A et B sont des fonctions développables des éléments osculateurs géocentriques de la Lune et du Soleil.

Les variables L, G, H, $l$, $g$, $h$ y ont la signification suivante

$$L = \sqrt{a\mu}, \qquad G = L\sqrt{1-e^2}, \qquad H = G\cos\iota.$$

$l$ désigne l'anomalie moyenne de la Lune;
$g$ la distance angulaire du nœud ascendant au périgée;
$h$ la longitude du nœud ascendant;
$l'$, $g'$, $h'$ les quantités analogues pour le Soleil.

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons dans la suite par D la différence des longitudes de la Lune et du Soleil; c'est-à-dire que nous poserons

$$D = h + g + l - h' - g' - l'.$$

## II. — Méthode d'intégration.

Pour intégrer les équations (1), on a dû procéder par approximations successives, en se basant sur la petitesse du rapport $\frac{r}{r'}$ des distances de la Lune et du Soleil à la Terre.

Delaunay a ainsi déterminé les expressions des coefficients des inégalités des coordonnées de la Lune, jusqu'aux termes du septième ordre inclusivement. Nous aurions pu déduire de ses calculs les inégalités périodiques des longitudes du nœud et du périgée. Nous avons cru préférable d'employer les nouvelles méthodes inventées par M. Poincaré.

Nous nous proposons donc d'appliquer la théorie des solutions périodiques à la détermination des coefficients des inégalités périodiques, qui correspondent dans les mouvements des nœuds et du périgée aux trois grandes inégalités périodiques de la longitude.

La méthode que nous emploierons pourra, du reste, s'appliquer à la détermination des inégalités des nœuds et du périgée qui correspondent aux petites inégalités périodiques de la longitude ou des autres coordonnées.

Nous ne conserverons donc dans R que les termes qui introduisent dans la longitude, V, l'une de ses trois grandes inégalités : variation, évection et équation annuelle. Dans ces termes, que nous déterminerons au Chapitre suivant, nous remplacerons $l$, $l'$ par leurs valeurs déduites des observations, et nous négligerons les variations du grand axe.

Nous n'aurons plus alors que les quatre équations

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial R}{\partial h}, \qquad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial R}{\partial g},$$
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial H}, \qquad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial G},$$

et la fonction R, qui figure dans ces équations, sera de la forme

$$R = A + \Sigma B \cos[(in + i'n')t + i''g + i'''h + q].$$

On sait que les nœuds sont animés d'un mouvement rétrograde, dont la période est

$$a = 6793^{j},39;$$

par conséquent, $h$ est une fonction périodique de période $a$.

Le périgée étant animé d'un mouvement direct, dont la période est

$$b = 3232^{j},57,$$

$g + h$ est une fonction périodique de période $b$.

Or $9a$ et $19b$ ne diffèrent pas de la centième partie de leurs valeurs. Posons donc

$$9a = 19b = T = 61418^{j},83;$$

déterminons ensuite $\alpha$ par la condition

$$\alpha T = 2\pi, \qquad \alpha = 21'',101,$$

et posons

$$\alpha t = k;$$

$g$, $h$, $k$ peuvent être considérées comme des fonctions périodiques de période T.

Le coefficient de $t$, dans l'argument d'un terme quelconque de la fonction perturbatrice, est de la forme $in + i'n'$.

Divisons tous ces coefficients par $\alpha$, nous aurons ainsi

$$in + i'n' = i_1\alpha + \varepsilon \qquad (i_1 \text{ très grand et } \varepsilon < \alpha),$$
$$(in + i'n')t = i_1\alpha t + \varepsilon t = i_1 k + \varepsilon t.$$

Nous négligerons, dans tous les arguments, $\varepsilon t$ devant $i_1 k$, ce qui revient à une très légère modification des moyens mouvements. La fonction R ne contiendra plus le temps explicitement; elle sera de la forme

$$R = A + \Sigma B \cos(i_1 k + i' g + i'' h + q);$$

elle dépendra des variables linéaires H, G et des variables angulaires $h$, $g$, $k$, qui ont pour période T.

Posons

$$\Phi = -\alpha K + R$$

et déterminons K par l'équation

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial k};$$

nous aurons alors le système canonique

$$(2)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial h}, & \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial g}, & \dfrac{dK}{dt} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial k}, \\ \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial H}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial G}, & \dfrac{dk}{dt} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial K}, \end{array} \right.$$

$$\Phi = -\alpha K + R_0 + R_1,$$
$$\Phi = \Phi_0 + R_1;$$

$R_0$, $\Phi_0$ désignant les parties non périodiques de R et $\Phi$, $R_1$ est l'ensemble des termes périodiques de R, que nous devons considérer pour le but que nous nous sommes proposé; $R_1$ contient, comme $R_0$, $n'^2 a^2$ en facteur.

Les équations (2) ont l'intégrale

$$\Phi = \text{const.}$$

Considérons cette constante C comme une donnée du problème et posons, comme M. Poincaré,

$$F = \frac{\Phi^2}{2C}.$$

Désignons, pour un instant, par $x_i$ l'une quelconque des variables L, G, H, et par $y_i$ la variable angulaire correspondante.

Les équations (2) peuvent s'écrire

$$(2')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{d\Phi^2}{2C\,dy_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{d\Phi^2}{2C\,dx_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \end{aligned}\right\} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Les solutions des équations (2), qui correspondent à la valeur particulière C de l'intégrale $\Phi$, appartiennent aussi aux équations (2').

Et, comme M. Poincaré l'a montré, une solution de (2), qui est telle que $\Phi$ soit égal à une constante $C_1$ différente de C, appartient encore aux équations (2'), pourvu que l'on y change $t$ en $t\frac{C_1}{C}$.

En effet, en changeant, dans les équations (2), $t$ en $t\frac{C_1}{C}$, elles deviennent

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{C_1}{C}\frac{d\Phi}{dy_i} \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{C_1}{C}\frac{d\Phi}{dx_i} \end{aligned}\right\} \qquad i = 1, 2, 3;$$

et, comme $\Phi = C_1$, ces équations peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{d\Phi^2}{2C\,dy_i} = \frac{dF}{dy_i} \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{d\Phi^2}{2C\,dx_i} = -\frac{dF}{dx_i} \end{aligned}\right\} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Des solutions de (2), il est donc aisé de déduire celles de (2′), et inversement.

Nous considérons donc, au lieu du système (2), le système

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial h}, & \dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial g}, & \dfrac{dK}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial k}, \\[2ex] \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial H}, & \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial G}, & \dfrac{dk}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial K}, \end{cases}$$

$$F = \frac{1}{2C}(\Phi_0^2 + 2\Phi_0 R_1 + R_1^2).$$

Désignons par $F_0$ la partie non périodique de F; par $n'^2 a^2 F_1$ la partie périodique. Nous pouvons considérer $n'^2 a^2$ comme un paramètre très petit $\mu$ et écrire

$$F = F_0 + n'^2 a^2 F_1,$$

$$(4)\qquad F = F_0 + \mu F.$$

$F_0$ se compose du carré de $\Phi_0$ et des termes non périodiques qui proviennent du carré de $R_1$.

$n'^2 a^2 F_1$ se compose de $2\Phi_0 R_1$ et des termes périodiques qui proviennent du carré de $R_1$.

C est du premier ordre en $n'^2 a^2$ ou $\mu$, ainsi que $F_1$; $F_0$ est du deuxième ordre en $n'^2 a^2$.

M. Poincaré a montré que les systèmes canoniques tels que (3) avaient des solutions périodiques de période arbitraire, et il a indiqué un procédé rigoureux d'intégration.

Nous allons appliquer sa méthode aux équations (3) et chercher ainsi une solution des équations (2) ordonnée suivant les puissances croissantes de $\mu$ et dont les coefficients sont des fonctions périodiques de $t$.

Nous posons donc

$$\begin{aligned} H &= H^0 + \mu H^1 + \mu^2 H^2 + \ldots, \\ G &= G^0 + \mu G^1 + \mu^2 G^2 + \ldots, \\ K &= K^0 + \mu K^1 + \mu^2 K^2 + \ldots, \\ h &= h^0 + \mu h^1 + \mu^2 h^2 + \ldots, \\ g &= g^0 + \mu g^1 + \mu^2 g^2 + \ldots, \\ k &= k^0 + \mu k^1 + \mu^2 k^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Nous calculerons seulement les deux premiers termes de ces développements.

Dans F, à la place des variables G, H, K, $g$, $h$, $k$, substituons les développements précédents et développons F suivant les puissances de $\mu$. Nous aurons

$$F = F_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots.$$

Il est clair que

$$\Phi_1 = F_1(H^0, G^0, K^0, h^0, g^0, k^0) + H^1\frac{\partial F_0}{\partial H^0} + G^1\frac{\partial F_0}{\partial G^0} + K^1\frac{\partial F_0}{\partial K^0}.$$

$\Phi_1$ ne dépend que des variables $H^0$, $G^0$, $K^0$, $h^0$, $g^0$, $k^0$, $H^1$, $G^1$, $K^1$.

Cela posé, on voit que, en égalant les mêmes puissances de $\mu$, on obtient une série de groupes d'équations différentielles dont les premiers sont

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dH^0}{dt} = 0, & \dfrac{dG^0}{dt} = 0, & \dfrac{dK^0}{dt} = 0, \\ \dfrac{dh^0}{dt} = -\dfrac{\partial F_0}{\partial H^0}, & \dfrac{dg^0}{dt} = -\dfrac{\partial F_0}{\partial G^0}, & \dfrac{dk^0}{dt} = -\dfrac{\partial F_0}{\partial K^0}, \end{array}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dH^1}{dt} = \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial h^0}, & \dfrac{dG^1}{dt} = \dfrac{d\Phi_1}{dg^0}, & \dfrac{dK^1}{dt} = \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial k^0}, \\ \dfrac{dh^1}{dt} = -\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial H^0}, & \dfrac{dg^1}{dt} = -\dfrac{d\Phi_1}{\partial G^0}, & \dfrac{dk^1}{dt} = -\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial K^0}. \end{array}\right.$$

On intégrera d'abord le système (5), puis le système (6).

Nous remarquerons que, pour avoir une intégrale des équations (2) de période T, il ne faut pas chercher une intégrale de (3) de période T; car, pour cette intégrale, $\Phi$ serait généralement égal à une constante C' différente de C, de sorte que, pour déduire de la solution considérée des équations (3) une solution des équations (2), il faudrait y remplacer $t$ par $t\dfrac{C}{C'}$, et l'intégrale ainsi modifiée n'aurait plus pour période T. Nous chercherons donc une solution des équations (3) de période $T_1$. Pour cette solution, $\Phi$ sera égal à une constante C', et en y remplaçant $t$ par $t\dfrac{C}{C'}$, on obtiendra une solution des équations (2) de période $T_1\dfrac{C'}{C}$.

### III. — Expression analytique de la fonction F.

Après avoir exposé la méthode d'intégration que nous suivrons, nous allons former l'expression analytique de la fonction F.

Ne considérons que les termes de R qui, pris isolément ou combinés avec d'autres, introduisent dans la longitude $v$ une inégalité de même période que l'évection, la variation ou l'équation annuelle, et réduisons R à ceux de ces termes qui donnent dans $v$ des inégalités d'ordre inférieur au cinquième ordre. L'expression de la longitude de la Lune, qui résulterait alors des intégrales des équations (1), contiendrait les trois inégalités considérées avec des coefficients ne différant de ceux que donnent les observations que de quantités du cinquième ordre.

Par conséquent, les intégrales $g$ et $h$ des équations (1), obtenues en réduisant ainsi R, nous détermineront en quelque sorte les inégalités périodiques des nœuds et du périgée qui correspondent aux trois grandes inégalités périodiques de la longitude.

De cette façon, nous négligeons, dans la fonction perturbatrice, des termes qui, à première vue, semblent plus importants que d'autres que nous conservons; puisque, pris séparément, ils introduisent dans les expressions des coordonnées de plus grandes inégalités. Mais, en y regardant de près, il est manifeste que, pour juger du degré d'importance d'un terme de R, il ne faut pas seulement, comme Delaunay l'a fait dans sa *Théorie de la Lune*, considérer l'ordre de la plus grande inégalité que ce terme, pris isolément ou combiné avec d'autres, introduit dans les coordonnées. Il faut encore considérer les arguments des inégalités qui en résultent : un terme qui introduit dans l'une des coordonnées, $v$ par exemple, une grande inégalité, mais dont la période est différente de celles qui correspondent aux principales inégalités de $v$, n'est pas un terme très important. Les inégalités qui en résultent sont détruites à très peu près par d'autres provenant de termes d'ordre plus élevé de R. Il ne peut pas en être autrement, puisque l'observation nous apprend que de semblables inégalités n'existent pas dans la longitude.

Ces considérations, dont Delaunay n'a tenu aucun compte dans ses immenses calculs, n'avaient pas échappé à Laplace. Dans l'équation qui lui servait à déterminer l'inverse de la projection du rayon vecteur de la Lune sur le plan de l'écliptique pris pour plan des coordonnées, Laplace a négligé des termes qui paraissent très importants, car ils acquerraient des diviseurs du deuxième ordre par l'intégration : il avait remarqué que les inégalités qui résultaient de ces termes se détruisaient à très peu près et devenaient ainsi conformes au résultat des observations [1].

Dans le même ordre d'idées, M. Poincaré a remarqué qu'il doit y avoir dans la fonction perturbatrice des groupes de termes qui, pris séparément, ne sont pas négligeables, mais dont l'ensemble ne produit pas d'inégalité appréciable.

La connaissance de ces groupes permettrait de simplifier énormément les calculs. Malheureusement leur formation nous semble difficile; quoi qu'il en soit, nous n'avons pas encore obtenu de résultat assez général pour en faire mention.

Nous allons d'abord chercher les termes de R qui, considérés isolément, introduisent dans la longitude $v$ des inégalités d'ordre inférieur au cinquième ordre et d'argument $l'$, $2\mathrm{D}$ ou $2\mathrm{D}-l$.

On sait qu'au cinquième ordre près, l'expression de V est

$$\begin{aligned}\mathrm{V} = {} & h+g+l+\left(2e-\tfrac{1}{4}e^3\right)\sin l+\left(\tfrac{5}{4}e^2-\tfrac{11}{24}e^4\right)\sin 2l \\ & +\tfrac{13}{12}e^3\sin 3l+\tfrac{103}{96}e^4\sin 4l+\left(-\gamma^2-\gamma^4-\gamma^2e^2\right)\sin(2g+2l) \\ & -2\gamma^2 e\sin(2g+3l)+2\gamma^2 e\sin(2g+l) \\ & -\tfrac{13}{4}\gamma^2e^2\sin(2g+4l)-\tfrac{3}{4}\gamma^2e^2\sin 2g+\tfrac{1}{2}\gamma^4\sin(4g+4l).\end{aligned}$$

Soit $\mathrm{A}_i\cos\alpha$ un terme de R; $i$ étant l'ordre de la plus grande inégalité que ce terme introduit dans $l$, $g$, $h$, L, G, H, nous dirons, avec Delaunay, que ce terme est de l'ordre $i$.

Nous allons montrer que, en général, un terme d'ordre $i$, introduit dans V des inégalités qui sont au moins de l'ordre $i+1$.

Pour cela, il suffit évidemment de considérer les deux premiers termes de V.

---

[1] *Œuvres de Laplace*, T. III.

Cherchons d'abord les termes d'ordre $i$, $A_i \cos\alpha$ qui introduisent dans $h+g+l$ des inégalités du même ordre. Réduisons, à cet effet, $A_i$ à sa partie principale $a_i$, et R au seul terme périodique $a_i \cos\alpha$. En développant les équations qui définissent $l$, $g$, $h$, elles deviennent

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{2}{an}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{a^2 ne}\frac{\partial R}{\partial e},$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 ne}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{1-2\gamma^2}{4a^2 n\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \gamma},$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4a^2 n\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \gamma}.$$

Si donc $a_i$ dépend de $e$ et non de $\gamma$, c'est dans $l$, $g$ que $A_i \cos\alpha$ introduit des inégalités d'ordre $i$; comme $\frac{\partial R}{\partial e}$ a des signes contraires dans $\frac{dl}{dt}$, $\frac{dg}{dt}$, les parties principales de ces inégalités se détruisent dans $l+g$ et, par suite, dans V.

Si $a_i$ dépend de $\gamma$ et non de $e$, c'est dans $g$, $h$ que $A_i \cos\alpha$ introduit des inégalités d'ordre $i$, et pour la même raison que précédemment leurs parties principales se détruisent dans $g+h$.

Enfin, si $a_i$ est indépendant de $e$ et $\gamma$, le terme $A_i \cos\alpha$ n'introduit pas d'inégalité d'ordre $i$ dans $g$ et $h$; mais il en introduit dans $l$ et, par suite, dans le premier terme de V.

Il est aisé de voir que les inégalités introduites dans $e \sin l$ par un terme quelconque d'ordre $i$ sont au moins de l'ordre $i+1$.

Si $a_i$ dépend de $e$ ou de $\gamma$, $A_i \cos\alpha$ introduit des inégalités d'ordre $i+2$ dans G et H; donc d'ordre $i+1$ au moins dans $e$. Dans le cas où $a_i$ ne dépend ni de $e$ ni de $\gamma$, l'argument de $A_i \cos\alpha$ est de la forme

$$\alpha = k(h+g+l-h'-g'-l') - k''' l',$$

car, en général, $\alpha$ est de la forme

$$\alpha = k(h+g+l-h'-g'-l') - k''' l' + k'(g+l) + k'' l,$$

et $A_i$ contient $e$, $\gamma$, $e'$ à des puissances respectives, au moins égales aux valeurs absolues de $k'$, $k''$, $k'''$.

Donc, si $a_i$ ne dépend ni de $e$, ni de $\gamma$, on a

$$\frac{\partial(a_i \cos\alpha)}{\partial l} = \frac{\partial(a_i \cos\alpha)}{\partial g}.$$

Or

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dL}\frac{dL}{dt} + \frac{dl}{dG}\frac{dG}{dt}$$
$$= -\frac{1-e^2}{a^2 ne}\frac{dR}{dl} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2 ne}\frac{\partial R}{\partial g}.$$

Les parties principales du deuxième membre se détruisent et $A_i \cos\alpha$ introduit encore dans ce cas des inégalités d'ordre $i+1$, au moins dans $e$ et, par conséquent, dans le deuxième terme de V.

Les seuls termes d'ordre $i$, qui introduisent dans $h+g+l$ ou dans V des inégalités d'ordre $i$, sont ceux dont la partie principale ne dépend, ni de $e$, ni de $\gamma$. Mais ces termes du quatrième ordre sont très peu nombreux, et l'on voit aisément qu'aucun d'eux n'a pour argument $l'$, $2D$, $2D-l$.

Donc, pour calculer la variation, l'évection et l'équation annuelle au cinquième ordre près, il n'y a pas à tenir compte des termes de R qui sont du quatrième ordre. D'après ce que nous avons dit au début de ce paragraphe, nous ne prendrons dans R que des termes des premier, deuxième et troisième ordre.

Delaunay a cherché tous ces termes de R, il a réuni tous leurs arguments dans un Tableau que nous allons reproduire, en mettant, en regard du numéro de chaque terme, son argument et son ordre. Pour simplifier l'écriture, nous désignerons par D la différence des longitudes du Soleil et de la Lune; c'est-à-dire que nous poserons

$$D = h+g+l-h'-g'-l'.$$

| Numéro des termes. | Arguments. | Ordres. | Numéro des termes. | Arguments. | Ordres. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1...... | $l$ | 1 | 28...... | $4D - l$ | 3 |
| 2...... | $2D + l$ | 1 | 29...... | $4D + l$ | 3 |
| 3...... | $2D - l$ | 1 | 30...... | $3D + l$ | 3 |
| 4...... | $2D - 2l$ | 1 | 31...... | $3D - l$ | 3 |
| 5...... | $2D - (2g + 2l)$ | 1 | 32...... | $D + l$ | 3 |
| 6...... | $l'$, $2l'$, $3l'$, $4l'$ | 2 | 33...... | $(2g + 2l) + l$ | 3 |
| 7...... | $2D - l - l'$ | 2 | 34...... | $(2g + 2l) - l$ | 3 |
| 8...... | $2D - l + l'$ | 2 | 35...... | $2D - (2g + 2l) + l$ | 3 |
| 9...... | $2D + l - l'$ | 2 | 36...... | $2D - (2g + 2l) - l$ | 3 |
| 10...... | $2D + l + l'$ | 2 | 37...... | $2D - l'$ | 3 |
| 11...... | $l + l'$ | 2 | 38...... | $2D + l'$ | 3 |
| 12...... | $l - l'$ | 2 | 39...... | $2g + 2l + l'$ | 3 |
| 13...... | $2D$ | 2 | 40...... | $2g + 2l - l'$ | 3 |
| 14...... | $2g + 2l$ | 2 | 41...... | $2l + l'$ | 3 |
| 15...... | $2l$ | 2 | 42...... | $2l - l'$ | 3 |
| 16...... | $2D + 2l$ | 2 | 43...... | $2D + 2l$ | 3 |
| 17...... | $2D - 2l - l'$ | 2 | 44...... | $2D + 2l - l'$ | 3 |
| 18...... | $2D - 2l + l'$ | 2 | 45...... | $2D + 2l + l'$ | 3 |
| 19...... | $D - l$ | 2 | 46...... | $3l$ | 3 |
| 20...... | $D - l + l'$ | 2 | 47...... | $2D + 3l$ | 3 |
| 21...... | $2g$ | 2 | 48...... | $2D - 3l$ | 3 |
| 22...... | $2D - (2g + 2l) - l'$ | 2 | 49...... | $2D - 2l - 2l'$ | 3 |
| 23...... | $2D - (2g + 2l) + l'$ | 2 | 50...... | $2D - 2l + 2l'$ | 3 |
| 24...... | $l + 2l'$ | 3 | 51...... | $D - l - l'$ | 3 |
| 25...... | $l - 2l'$ | 3 | 52...... | $D - l + l'$ | 3 |
| 26...... | $2D + l - 2l'$ | 3 | 53...... | $2D - (2g + 2l) - 2l'$ | 3 |
| 27...... | $2D - l - 2l'$ | 3 | 54...... | $2D - (2g + 2l) + 2l'$ | 3 |

Considérons d'abord les termes du troisième ordre; soit $A_3 \cos\alpha$ l'un d'eux.

Il ne peut introduire d'inégalité du quatrième ordre dans V que par les deux premiers termes $h + g + l$ et $e \sin l$.

En ne conservant dans R que ce seul terme périodique $A_3 \cos\alpha$, $h + g + l$ devient, par l'intégration des équations (1),

$$h + g + l + \varepsilon \sin\alpha;$$

$e \sin l$ devient, de même,

$$(e + \varepsilon_4 \cos\alpha) \sin(l + \varepsilon_3 \sin\alpha).$$

En développant ce produit par la formule de Taylor, on voit que les termes du quatrième ordre y ont pour arguments

$$\alpha \pm l.$$

Donc, il ne faut prendre, pour le but que nous nous sommes proposé, que les termes du troisième ordre, dont les arguments $\alpha$ sont tels que

$$\alpha \text{ ou } \alpha \pm l = l',\ 2D,\ 2D - l;$$

mais, en nous reportant au Tableau précédent, nous voyons que ces termes n'existent pas.

Passons aux termes du deuxième ordre, soit $A_2 \cos\alpha$ l'un d'eux.

Il n'introduit des inégalités d'ordre inférieur au cinquième dans V que par $h + g + l$, et par les termes du premier et du deuxième ordre de V. Le terme de R d'argument $l'$ donne dans $h + g + l$ des inégalités du deuxième ordre et de même argument $l'$ que l'équation annuelle; nous devons donc en tenir compte. Considérons un terme du deuxième ordre, $A_2 \cos\alpha$, dont la partie principale $a_2$ de $A_2$ dépend de $e$; d'après ce que nous avons dit précédemment, ce terme introduit des inégalités du deuxième ordre dans $l$ et $g$, du troisième ordre dans $g + l$ et $e$.

De sorte que, en ne conservant dans R que ce seul terme périodique,

$$\begin{array}{lcl}
h + g + l & \text{devient} & h + g + l + \varepsilon_3 \sin\alpha, \\
e \sin l & \text{»} & (e + \delta_3 \cos\alpha)\ \sin(\ l + \quad\quad \varepsilon_2 \sin\alpha), \\
e^2 \sin 2l & \text{»} & (e + \delta_3 \cos\alpha)^2 \sin(2l + \quad\quad 2\varepsilon_2 \sin\alpha), \\
\gamma^2 \sin(2g + 2l) & \text{»} & (\gamma + \eta_3 \cos\alpha)^2 \sin(2l + 2g + 2\varepsilon_3 \sin\alpha).
\end{array}$$

En développant ces expressions par la formule de Taylor, on trouve que les termes d'ordre inférieur au cinquième y ont pour arguments

$$\alpha \pm l, \quad \alpha \pm 2l, \quad \alpha \pm (2g + 2l),$$

et l'on arrive à des conclusions analogues pour les termes du deuxième ordre, dont la partie principale du coefficient dépend de $\gamma$ ou de $e$ et $\gamma$.

Nous devons donc prendre les termes du deuxième ordre, dont les arguments $\alpha$ sont tels que

$$\alpha,\ \alpha \pm l,\ \alpha \pm 2l,\ \alpha \pm (2g + 2l) = l',\ 2D,\ 2D - l,$$

c'est-à-dire les termes qui, dans le Tableau précédent, ont les n$^{os}$ 6, 11, 12, 13, 16.

D'après tout ce qui précède, il est manifeste que nous devons aussi tenir compte des termes du premier ordre : 2, 3, 4, 5.

Les inégalités qui résultent de deux termes $A_i \cos\alpha$ et $A_j \cos\beta$ peuvent encore se combiner entre elles et donner ainsi, dans $e \sin l$, des inégalités d'arguments $\alpha \pm \beta$ et d'ordre au moins égal à $i + j + 1$.

En effet, soient $\varepsilon_{i+1} \cos\alpha$ et $\delta_i \sin\alpha$ les inégalités que $A_i \cos\alpha$, considéré isolément, introduit respectivement dans $e$ et $l$; $\varepsilon_{j+1} \cos\beta$ et $\delta_j \sin\beta$ les quantités analogues qui résultent de $A_j \sin\beta$.

A cause de ces deux termes,

$$e \sin l \quad \text{devient} \quad (e + \varepsilon_{i+1} \cos\alpha + \varepsilon_{j+1} \cos\beta) \sin(l + \delta_i \sin\alpha + \delta_j \sin\beta).$$

En développant cette expression par la formule de Taylor, on voit que les inégalités introduites dans $e \sin l$ et dont les arguments contiennent à la fois $\alpha$ et $\beta$ sont au moins de l'ordre $i + j + 1$, et ont des arguments de la forme $\alpha \pm \beta \pm l$.

Il en résulte qu'aucun terme du troisième ordre, associé même à un terme du premier ordre, n'introduit dans V d'inégalité d'ordre inférieur au cinquième.

Mais il n'en est pas de même des termes du deuxième ordre : en désignant par $\beta$ l'argument d'un terme du premier ordre, nous devons donc tenir compte des termes du deuxième ordre dont les arguments $\alpha$ sont tels que

$$\alpha \pm \beta \pm l = l', \; 2D, \; 2D - l,$$

c'est-à-dire les termes 7, 8, 14, 15, 17, 18 du Tableau donné précédemment.

En résumé, pour calculer les trois grandes inégalités de la longitude de la Lune, au cinquième ordre près, il suffit de réduire R aux termes suivants :

| | | |
|---|---|---|
| 1° | Les cinq termes du premier ordre... | 1, 2, 3, 4, 5 |
| 2° | Les onze termes du deuxième ordre. | 6, 11, 12, 13, 16<br>7, 8, 14, 15, 17, 18 |

Malheureusement, ces termes périodiques n'introduisent pas seulement dans V des inégalités d'arguments $l'$, $2D$, $2D - l$. Ils y en introduisent encore beaucoup d'autres qui doivent se réduire entre elles et avec celles qui résultent des termes de R dont nous n'avons pas tenu compte. Cela est nécessaire pour que les résultats des calculs soient conformes à ceux des observations. Nous devons donc chercher si, parmi les termes du deuxième ordre de R que nous avons négligés, il y en a qui réduisent sensiblement les inégalités d'arguments autres que $l'$, $2D$, $2D - l$, introduites par les termes de R dont nous avons dû tenir compte pour calculer les expressions analytiques de la variation, de l'évection et de l'équation annuelle au cinquième ordre près.

D'après tout ce qui précède, il est manifeste que les termes 22 et 23 associés au terme 5 introduisent dans $e \sin l$ des inégalités du quatrième ordre d'arguments $l + l'$ et $l - l'$; celles-ci réduisent donc les inégalités de mêmes arguments introduites dans $h + g + l$ par les termes 11 et 12.

De même, le terme 21, associé au terme 5, introduit dans V des inégalités d'argument $2D - 2l$ qui se réduisent avec celles qui résultent du terme 4.

Nous ajouterons donc aux termes considérés précédemment les termes 21, 22 et 23.

En définitive, nous prendrons dans R tous les termes du premier et du deuxième ordre, excepté les termes 9, 10, 19, 20.

Avant d'écrire l'expression de la fonction perturbatrice, réduite aux termes précédents, il ne nous semble pas inutile de remarquer que les inégalités introduites dans les coordonnées par deux termes dont les arguments sont de la forme $l + il'$ et $l - il'$ se réduisent entre elles et deviennent de l'ordre $j + 2$ si les deux termes considérés sont de l'ordre $j$.

Vérifions-le, par exemple, pour les termes du deuxième ordre 11 et 12.

A cet effet, ne conservons dans R que le seul terme périodique 11 et réduisons son coefficient à sa partie principale

$$R = A - 3\frac{m' a^2}{a'^3} ee' \cos(l + l').$$

En portant cette expression de R dans les équations (1), il vient

$$\frac{dG}{dt} = 0,$$

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{3}{4}\frac{m'a^2}{a'^3}ee'\sin(l+l'),$$

$$\frac{dl}{dt} = \ldots + \left(3\frac{n'^2}{n}ee' + \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\frac{e'}{e}\right)\cos(l+l'),$$

$$\frac{dg}{dt} = \ldots - \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}\frac{e'}{e}\cos(l+l'),$$

$$\frac{dh}{dt} = 0.$$

L'intégration de ces équations nous montre que le terme considéré introduit dans L, $l$, $g$ les inégalités

$$L = \ldots - \frac{3}{4}a^2\frac{n'^2}{n(n+n')}ee'\cos(l+l') + \ldots,$$

$$l = \ldots + \frac{3}{4}\frac{e'}{e}\frac{n'^2}{n(n+n')}\sin(l+l') + \ldots,$$

$$g = \ldots - \frac{3}{4}\frac{e'}{e}\frac{n'^2}{n(n+n')}\sin(l+l') + \ldots$$

et

$$\frac{de}{dt} = \frac{de}{dL}\frac{dL}{dt} = \ldots = \frac{de}{dt} = \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n}e'\sin(l+l'),$$

$$e = \ldots - \frac{3}{4}e'\frac{n'^2}{n(n+n')}\cos(l+l').$$

Le terme $e\sin l$ de V devient donc

$$\left[e - \frac{3}{4}e'\frac{n'^2}{n(n+n')}\cos(l+l')\right]\sin\left[l + \frac{3}{4}\frac{e'}{e}\frac{n'^2}{n(n+n')}\sin(l+l')\right]$$
$$= e\sin l + \frac{3}{4}e'\frac{n'^2}{n(n+n')}\sin l' + \ldots.$$

En changeant dans tous les calculs précédents $l'$ en $-l'$, on voit que le terme en $\cos(l - l')$ de R introduit dans le même terme de V l'inégalité

$$-\frac{3}{4}e'\frac{n'^2}{n(n-n')}\sin l' + \ldots.$$

Les inégalités introduites dans V par les termes du deuxième ordre et d'arguments $l + l'$, $l - l'$ se réduisent donc au quatrième ordre.

On vérifie de la même façon que les inégalités introduites par ces deux termes de R dans la coordonnée U se réduisent au quatrième ordre.

Tout ce qui précède s'applique, sans aucune modification, à deux termes de R dont les arguments sont de la forme $l + il'$ et $l - il'$.

Revenons aux inégalités introduites dans V par les deux termes 11 et 12. Nous venons de voir qu'elles se réduisent au quatrième ordre. On est conduit à se demander si ces inégalités du quatrième ordre, qui sont déjà la réduction d'inégalités du troisième ordre, ne sont pas elles aussi réduites par les inégalités provenant des termes d'ordre plus élevé de R. C'est assez probable; la réduction des inégalités produites par les termes des différents ordres de R revient, du reste, à l'existence des groupes dont nous avons parlé précédemment.

Les quatre termes du deuxième ordre 9, 10, 19, 20 ne donnent pas dans V d'inégalité d'ordre inférieur au cinquième et d'arguments $l'$, $2D$, $2D - l$; mais ils y introduisent d'autres inégalités du troisième ordre qui ne se réduisent pas avec celles qui proviennent des termes du premier et du deuxième ordre. Cependant ces inégalités ne sont pas conformes aux résultats des observations. Elles se réduisent donc avec les inégalités de mêmes arguments, qui résultent de termes d'ordre supérieur de R; et l'on peut déterminer ces termes en suivant un procédé analogue à celui dont nous nous sommes servi pour trouver les termes de R qui introduisent dans V des inégalités d'arguments $l'$, $2D$, $2D - l$ et d'ordre inférieur au cinquième.

Nous allons maintenant écrire le développement de la fonction perturbatrice.

Nous négligeons les termes d'ordre supérieur au quatrième dans la partie non périodique et aussi dans les coefficients des termes périodiques considérés précédemment; enfin nous ne tenons pas compte du terme 13, qui ne donne que de très petites inégalités dans $g$ et $h$, car il est du deuxième ordre et la partie principale de son coefficient ne dépend ni de $e$, ni de $\gamma$.

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = {} & n'^2 a^2\left(-\tfrac{3}{2}\gamma^2 + \tfrac{3}{8}e^2 + \tfrac{3}{2}\gamma^4 - \tfrac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \tfrac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \tfrac{9}{16}e^2 e'^2\right) \\
& + n'^2 a^2 \Big\{ -\tfrac{1}{2} e \cos l + \left(\tfrac{3}{4}e - \tfrac{3}{2}\gamma^2 e\right)\cos(2\mathrm{D} + l) + \left(-\tfrac{9}{4}e + \tfrac{9}{2}\gamma^2 e\right)\cos(2\mathrm{D} - l) \\
& \quad - \tfrac{63}{8} e e' \cos(2\mathrm{D} - l - l') + \tfrac{9}{8} e e' \cos(2\mathrm{D} - l + l') - \tfrac{3}{4} e e' \cos(l + l') \\
& \quad - \tfrac{3}{4} e e' \cos(l - l') + \tfrac{3}{2}\gamma^2 \cos(2g + 2l) - \tfrac{1}{8} e^2 \cos 2l + \tfrac{3}{4} e^2 \cos(2\mathrm{D} + 2l) \\
& \quad + \tfrac{15}{8} e^2 \cos(2\mathrm{D} - 2l) + \tfrac{105}{16} e^2 e' \cos(2\mathrm{D} - 2l - l') - \tfrac{15}{16} e^2 e' \cos(2\mathrm{D} - 2l + l') \\
& \quad + \tfrac{15}{4}\gamma^2 e^2 \cos 2g + \tfrac{3}{2}\gamma^2 \cos[2\mathrm{D} - (2g + 2l)] + \tfrac{21}{4}\gamma^2 e' \cos[2\mathrm{D} - (2g + 2l) - l'] \\
& \qquad\qquad - \tfrac{3}{4}\gamma^2 e' \cos[2\mathrm{D} - (2g + 2l) + l'] \Big\}.
\end{aligned}$$

## IV. — Intégration des équations (5) et (6) du § II.

Cherchons d'abord les développements des fonctions $\Phi_0$, $\mathrm{F}_0$, $\mathrm{F}_1$.

Nous avons posé, au § I,

$$\Phi = \Phi_0 + \mathrm{R}_1,$$

$$\mathrm{F} = \frac{\Phi^2}{2\mathrm{C}} = \frac{1}{2\mathrm{C}}(\Phi_0 + \mathrm{R}_1)^2 = \mathrm{F}_0 + n'^2 a^2 \mathrm{F}_1,$$

$\mathrm{F}_0$ étant l'ensemble des termes non périodiques de F et $\mathrm{F}_1$ l'ensemble des termes périodiques. On voit donc que

$$\mathrm{F}_0 = \frac{1}{2\mathrm{C}}(\Phi_0^2 + \text{partie non périodique de } \mathrm{R}_1^2);$$

or $\mathrm{R}_1^2$ se compose d'une somme de produit de deux cosinus et d'une somme de carrés de cosinus. En d'autres termes,

$$\mathrm{R}_1^2 = 2\Sigma \mathrm{A}.\mathrm{B} \cos\alpha \cos\beta + \Sigma \mathrm{A}^2 \cos^2\alpha;$$

nous y ferons les deux transformations

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta),$$

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\alpha.$$

Il est manifeste que la partie non périodique de $R_1^2$ est $\sum \frac{A^2}{2}$,

$$\sum \frac{A^2}{2} = \frac{(n'^2 a^2)^2}{2}\left(\tfrac{47}{8} e^2 - \tfrac{99}{4}\gamma^2 e^2 + \tfrac{2061}{32} e^2 e' + 9\gamma^4 + \tfrac{35}{8} e^4\right);$$

de sorte que

$$F_0 = \frac{f}{2C}\Big[\alpha^2 K^2 - 2\alpha K n'^2 a^2\left(-\tfrac{3}{2}\gamma^2 + \tfrac{3}{8} e^2 + \tfrac{3}{2}\gamma^4 - \tfrac{9}{4}\gamma^2 e^2 - \tfrac{9}{4}\gamma^2 e'^2 + \tfrac{9}{16} e^2 e'^2\right)$$
$$+ \frac{(n'^2 a^2)^2}{2}\left(\tfrac{47}{8} e^2 - \tfrac{99}{4}\gamma^2 e^2 + \tfrac{2061}{32} e^2 e'^2 + 9\gamma^4 + \tfrac{35}{8} e^4\right)\Big].$$

Nous avons trouvé précédemment que les équations qui déterminent $h^0$, $g^0$, $k^0$, $H^0$, $G^0$, $K^0$ sont

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dK^0}{dt} &= \frac{\partial F_0}{\partial k^0}, & \frac{dG^0}{dt} &= \frac{\partial F_0}{\partial g^0}, & \frac{dH^0}{dt} &= \frac{\partial F_0}{\partial h^0}, \\ \frac{dk^0}{dt} &= -\frac{\partial F_0}{\partial K^0}, & \frac{dg^0}{dt} &= -\frac{\partial F_0}{\partial G^0}, & \frac{dh^0}{dt} &= -\frac{\partial F_0}{\partial H^0}. \end{aligned}\right.$$

Nous allons chercher une solution périodique, de période $F_1$, de ces équations.

Déterminons $\alpha_1$ par l'équation

$$\alpha_1 T_1 = 2\pi,$$

les coefficients du temps dans $k^0$, $g^0$, $h^0$ seront des multiples de $\alpha_1$.

Posons ensuite

$$\alpha_1 = \frac{\alpha C_1}{C},$$

$C_1$ et $T_1$ seront liés par la relation

$$\alpha \frac{C_1}{C} T_1 = 2\pi.$$

Nous déterminerons plus loin la constante $C_1$.

Revenons aux équations (1); les trois premières de ces équations nous montrent que $K^0$, $G^0$, $H^0$ sont des constantes; nous déterminerons ces constantes en égalant les seconds membres des trois dernières équations (1) à des multiples convenables de $\alpha_1$. Puisque $k$ est une fonction périodique de $t$, de période T, que $h$ diminue de $2\pi$ dans le temps $a = \frac{T}{9}$, et que $g + h$ augmente de $2\pi$ dans le temps $b = \frac{T}{19}$, nous devons déterminer $K^0$, $G^0$, $H^0$ par les trois équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{\partial F_0}{\partial K^0} &= \alpha_1 = \alpha\frac{C_1}{C},\\ -\frac{\partial F_0}{\partial G^0} &= 28\alpha_1 = 28\alpha\frac{C_1}{C},\\ -\frac{\partial F_0}{\partial H^0} &= -9\alpha_1 = -9\alpha\frac{C_1}{C}.\end{aligned}\right.$$

Des relations qui lient G et H à $e$, $\gamma$, on déduit que

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial G} &= \frac{-\sqrt{1-e^2}}{a^2 ne}\frac{\partial F_0}{\partial e} + \frac{1-2\gamma^2}{4a^2 n\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial F_0}{\partial \gamma} = \frac{-1+\frac{e^2}{2}-\ldots}{a^2 ne}\frac{\partial F_0}{\partial e} + \frac{1-2\gamma^2+\frac{e^2}{2}}{4a^2 n\gamma}\frac{\partial F_0}{\partial \gamma},\\ \frac{\partial F_0}{\partial H} &= \frac{-1}{4a^2 n\gamma\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial F_0}{\partial \gamma} = \frac{-1+\frac{e^2}{2}+\ldots}{4a^2 n\gamma}\frac{\partial F_0}{\partial \gamma};\end{aligned}\right.$$

nous avons aussi

$$\frac{\partial F_0}{\partial e} = \frac{1}{2C}\left[-2n'^2 a^2\alpha K\left(\tfrac{3}{4}e - \tfrac{9}{2}\gamma^2 e + \tfrac{9}{8}e'^2 e\right) + \frac{(n'^2 a^2)^2}{2}\left(\tfrac{47}{4}e - \tfrac{99}{2}\gamma^2 e + \tfrac{35}{2}e^3 + \tfrac{2061}{16}e'^2 e\right)\right],$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \gamma} = \frac{1}{2C}\left[-2n'^2 a^2\alpha K\left(-3\gamma + 6\gamma^3 - \tfrac{9}{2}\gamma e^2 - \tfrac{9}{2}\gamma e'^2\right) + \frac{(n'^2 a^2)^2}{2}\left(-\tfrac{99}{8}e^2 + 9\gamma^2\right)\right].$$

Pour ne conserver dans $\frac{\partial F_0}{\partial G}$, $\frac{\partial F_0}{\partial H}$ que les termes du deuxième ordre en $e$, $e'$, $\gamma$, il suffit de prendre

$$\frac{1-\frac{e^2}{2}}{a^2 ne}\frac{\partial F_0}{\partial e} = \frac{1}{2C}\left[-2\frac{n'^2}{n}\alpha K\left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{8}e^2 - \tfrac{9}{2}\gamma^2 + \tfrac{9}{8}e'^2\right) + \frac{n'^2}{n}\frac{n'^2 a^2}{2}\left(\tfrac{47}{4} + \tfrac{93}{8}e^2 - \tfrac{99}{2}\gamma^2 + \tfrac{2061}{16}e'^2\right)\right],$$

$$\frac{1-2\gamma^2+\frac{e^2}{2}}{4a^2 n\gamma}\frac{\partial F_0}{\partial \gamma} = \frac{1}{2C}\left[-2\frac{n'^2}{n}\alpha K\left(-\tfrac{3}{4} + 3\gamma^2 - \tfrac{3}{2}e^2 - \tfrac{9}{8}e'^2\right) + \frac{n'^2}{n}\frac{n'^2 a^2}{2}\left(-\tfrac{99}{8}e^2 + 9\gamma^2\right)\right],$$

$$\frac{1+\frac{e^2}{2}}{4a^2 n\gamma}\frac{\partial F_0}{\partial \gamma} = \frac{1}{2C}\left[-2\frac{n'^2}{n}\alpha K\left(-\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{2}\gamma^2 - \tfrac{3}{2}e^2 - \tfrac{9}{8}e'^2\right) + \frac{n'^2}{n}\frac{n'^2 a^2}{2}\left(-\tfrac{99}{8}e^2 + 9\gamma^2\right)\right].$$

En portant ces développements dans les équations (3), nous trouvons, pour déterminer $H^0$, $G^0$, $K^0$ ou les valeurs correspondantes de $e^0$, $\gamma^0$, $K^0$, les trois équations

$$(4)\begin{cases}\dfrac{\partial F_0}{\partial K^0}=\dfrac{1}{2C}2\alpha[\alpha K^0-n'^2a^2(-\frac{3}{2}\gamma^{02}+\frac{3}{8}e^{02})] & =-\ \alpha\dfrac{C_1}{C},\\ \dfrac{\partial F_0}{\partial G^0}=\dfrac{1}{2C}\left[\dfrac{n'^2}{n}\alpha K^0(3+\frac{9}{4}e^{02}-12\gamma^{02}+\frac{9}{2}e'^2)+\dfrac{n'^2}{n}n'^2a^2(-\frac{47}{8}-12e^{02}+\frac{117}{4}\gamma^{02}-\frac{2061}{32}e'^2)\right] & =-28\alpha\dfrac{C_1}{C},\\ \dfrac{\partial F_0}{\partial H^0}=\dfrac{1}{2C}\left[\dfrac{n'^2}{n}\alpha K^0(-\frac{3}{2}-3e^{02}+3\gamma^{02}-\frac{9}{4}e'^2)+\dfrac{n'^2}{n}n'^2a^2(\frac{99}{16}e^{02}-9\gamma^{02}\right] & =\ 9\alpha\dfrac{C_1}{C}.\end{cases}$$

Pour simplifier les calculs, nous remplacerons

$$\begin{aligned}&\alpha K^0 \quad \text{par} \quad n'^2a^2\alpha K^0,\\ &C_1 \quad \text{par} \quad n'^2a^2C_1;\end{aligned}$$

le facteur $n'^2a^2$ sera commun aux deux membres des équations (4). En le supprimant, nous aurons

$$(4)\begin{cases} -\alpha K^0-\frac{3}{2}\gamma^{02}+\frac{3}{8}e^{02}=C_1,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{n'^2}{n}[\alpha K^0(3+\frac{9}{4}e^{02}-12\gamma^{02}+\frac{9}{2}e'^2)+(-\frac{47}{8}-12e^{02}+\frac{117}{4}\gamma^{02}-\frac{2061}{32}e'^2)]=\ 28\alpha C_1,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{n'^2}{n}[\alpha K^0(-\frac{3}{2}-3e^{02}+3\gamma^{02}-\frac{9}{4}e'^2)+\frac{99}{16}e^{02}-9\gamma^{02}] =-9\alpha C_1.\end{cases}$$

Ces trois équations déterminent les constantes initiales $e^0$, $\gamma^0$, $K^0$.

En divisant les deux dernières équations membre à membre, il vient

$$\begin{aligned}9[\alpha K^0(3+\tfrac{9}{4}e^{02}-12\gamma^{02}+\tfrac{9}{2}e'^2)-\tfrac{47}{8}-12e^{02}+\tfrac{117}{4}\gamma^{02}-\tfrac{2061}{32}e'^2]\\ +28[\alpha K^0(-\tfrac{3}{2}-3e^2+3\gamma^2-\tfrac{9}{4}e'^2)+\tfrac{99}{16}e^2-9\gamma^2]=0;\end{aligned}$$

d'où

$$(5)\qquad \begin{cases}\alpha K^0=-\frac{141}{40}+17,4e^{02}+6,3\gamma^{02}-167e'^2\\ \qquad\qquad +\text{ termes du quatrième ordre en } e^0,\ \gamma^0,\ e'.\end{cases}$$

La première des équations (4) donne ensuite

$$(6)\qquad C_1=\tfrac{141}{40}-17e^{02}-7,8\gamma^{02}+167e'^2+\text{ termes du quatrième ordre.}$$

Portons ces expressions de $\alpha K^0$ et $C_1$ dans la dernière des équations (4), et faisons-y

$$\frac{n'}{n}=\frac{1}{13},\qquad n'=3548'',\qquad \alpha=21'',1;$$

nous aurons ainsi, entre $e^0$, $\gamma^0$, la relation

$$(7)\qquad \begin{aligned} 847,5\gamma^{02} - 639,6e^{02} &= 19,80, \\ 1,32\gamma^{02} - \quad e^{02} &= 0,0309. \end{aligned}$$

Nous prendrons pour $e^0$ l'excentricité de l'orbite lunaire telle qu'elle résulte des observations

$$(8)\qquad e^0 = \tfrac{1}{18}.$$

Nous déterminerons ensuite $\gamma^0$ et $\alpha K^0$ par les relations (6) et (7).

Nous trouverons de cette façon

$$(8)\qquad \begin{cases} \gamma^0 = \tfrac{1}{7}, \\ \alpha K^0 = -3,389. \end{cases}$$

La solution périodique des équations (3), qui correspond à ces valeurs initiales, ne donnera pas une solution des équations (2) ayant rigoureusement pour période T; mais nous démontrerons dans la suite que pour cette solution $\Phi$ diffère très peu de $C_1$, de sorte que la période de la solution obtenue sera très voisine de T. Nous verrons plus loin que les valeurs de $e^0$, $\gamma^0$ qui correspondent à une solution des équations (2), de période rigoureusement égale à T, diffèrent notablement des valeurs de $e$, $\gamma$ qui résultent des observations. Par conséquent, la solution périodique, qui correspond à ces valeurs initiales, ne donnerait pas de bons résultats dans le calcul des inégalités à courte période du périgée et des nœuds.

Après avoir ainsi déterminé les valeurs initiales, nous déduirons des équations (1)

$$k^0 = \alpha_1 t, \qquad g^0 = 28\alpha_1 t + \varpi_1, \qquad h^0 = -9\alpha_1 t + \varpi_2.$$

Déterminons maintenant les expressions de $h^1$, $g^1$; pour cela, formons d'abord la fonction $F_1$.

Nous avons posé

$$n'^2 a^2 F_1 = 2\Phi_0 R_1 + \text{termes périodiques de } R_1^2.$$

Nous ne conserverons que les termes du deuxième ordre en $e$, $\gamma$, et ceux du troisième dont l'argument ne contient pas $l$. Nous aurons de cette façon

$$\left\{ n'^2 a^2 F_1 = \frac{(n'^2 a^2)^2}{2C} \left( -2\alpha K^0 R_1 + \frac{e^2}{8} \left\{ \begin{aligned} & -\tfrac{25}{2}\cos 2l + 6\cos 2D - 3\cos(2D+2l) + 9\cos(2D-2l) \\ & -\tfrac{27}{2}\cos 4D + \tfrac{9}{4}\cos(4D+2l) + \tfrac{81}{4}\cos(4D-2l) \\ & + e'[9\cos(2D-2l+l') + \tfrac{57}{4}\cos l' + \tfrac{27}{2}\cos(2D-2l-l')] \end{aligned} \right\} \right) \right.$$

Les valeurs de $H^1$, $G^1$, $K^1$ sont, à des constantes près, déterminées par les équations

$$\frac{dK^1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial k^0}, \qquad \frac{dG^1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial g^0}, \qquad \frac{dH^1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial h^0},$$

où l'on a remplacé, dans $F_1$, $K$, $G$, $H$, $k$, $g$, $h$ par $K^0$, ..., $h^0$; $F_1$ ne contient que des termes périodiques, c'est-à-dire pas de termes constants; donc $K^1$, $G^1$, $H^1$ sont elles-mêmes des fonctions périodiques, et cela quelles que soient les constantes $\varpi_1$, $\varpi_2$.

Désignons par $(K^1)$, $(G^1)$, $(H^1)$ les constantes de $K^1$, $G^1$, $H^1$.

Nous avons trouvé précédemment que $h^1$, $g^1$, $k^1$ étaient déterminés par les équations

$$\frac{dk^1}{dt} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial K^0}, \qquad \frac{dg^1}{dt} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial G^0}, \qquad \frac{dh^1}{dt} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial H^0},$$

$$\Phi_1 = F_1(K^0, G^0, H^0, k^0, g^0, h^0) + K^1 \frac{\partial F_0}{\partial K^0} + G^1 \frac{\partial F_0}{\partial G^0} + H^1 \frac{\partial F_0}{\partial H^0};$$

et, par conséquent,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dk^1}{dt} &= -\frac{\partial F_1}{\partial K^0} - K^1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial K^{02}} - G^1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial K^0\, \partial G^0} - H^1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial K^0\, \partial H^0}, \\ \frac{dg^1}{dt} &= -\frac{\partial F_1}{\partial G^0} - K^1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial G^0\, \partial K^0} - G^1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial G^{02}} - H^1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial G^0\, \partial H^0}, \\ \frac{dh^1}{dt} &= -\frac{\partial F_1}{\partial H^0} - K^1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial H^0\, \partial K^0} - G^1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial H^0\, \partial G^0} - H^1 \frac{\partial^2 F_0}{\partial H^{02}}. \end{aligned} \right.$$

Les constantes qui entrent dans les deuxièmes membres de ces équations ne proviennent que des constantes additives $(K^1)$, $(G^1)$, $(H^1)$.

Nous devons donc prendre

$$(\mathrm{K}^1) = (\mathrm{G}^1) = (\mathrm{H}^1) = 0.$$

De l'expression de $\mathrm{F}_0$ et des formules (3), on déduit

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}_0}{\partial \mathrm{G}^0\, \partial \mathrm{K}^0} = \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{n'^2}{n} \alpha \left(3 + \frac{9}{4} e^{02} - 12\gamma^{02} + \frac{9}{2} e'^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}_0}{\partial \mathrm{H}^0\, \partial \mathrm{K}^0} = \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{n'^2}{n} \alpha \left(-\frac{3}{2} - 3e^{02} + 3\gamma^{02} - \frac{9}{4} e'^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}_0}{\partial \mathrm{G}^{02}} = \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{n'^2}{n^2} \left(-\frac{21}{2} \frac{\alpha \mathrm{K}^0}{a^2} + \frac{309}{8} n'^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}_0}{\partial \mathrm{H}^{02}} = \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{n'^2}{n} \left(-\frac{3}{2} \frac{\alpha \mathrm{K}^0}{a^2} + \frac{9}{2} n'^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}_0}{\partial \mathrm{G}^0\, \partial \mathrm{H}^0} = \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{n'^2}{n^2} \left(-6 \frac{\alpha \mathrm{K}^0}{a^2} + \frac{117}{8} n'^2\right).$$

Portons ces expressions dans les équations (10), et remplaçons-y, comme dans les équations (4), $\alpha \mathrm{K}^0$ par $n'^2 a^2 \alpha \mathrm{K}^0$; il viendra

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dg^1}{dt} &= -\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{G}^0} - \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{n'^2}{n} \left(3 + \tfrac{9}{4} e^{02} - 12\gamma^{02} + \tfrac{9}{2} e'^2\right) \alpha \mathrm{K}^1 \\
&\quad - \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{n'^2}{n^2} n'^2 \left(-\tfrac{21}{2} \alpha \mathrm{K}^0 + \tfrac{309}{8}\right) \mathrm{G}^1 - \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{n'^2}{n^2} n'^2 \left(-6 \alpha \mathrm{K}^0 + \tfrac{117}{8}\right) \mathrm{H}^1, \\
\frac{dh^1}{dt} &= -\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{H}_0} - \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{n'^2}{n} \left(-\tfrac{3}{2} - 3e^{02} + 3\gamma^{02} - \tfrac{9}{4} e'^2\right) \alpha \mathrm{K}^1 \\
&\quad - \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{n'^2}{n^2} n'^2 \left(-6 \alpha \mathrm{K}^0 + \tfrac{117}{8}\right) \mathrm{G}^1 - \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{n'^2}{n^2} n'^2 \left(-\tfrac{3}{2} \alpha \mathrm{K}^0 + \tfrac{9}{2} n'^2\right) \mathrm{H}^1.
\end{aligned}\right.$$

Développons les deuxièmes membres de ces équations en n'y conservant que les termes qui sont nécessaires pour calculer les inégalités du premier et du deuxième ordre de $g$ et $h$.

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\mathrm{F}_1 = \frac{n'^2 a^2}{2\mathrm{C}} \mathrm{F}'_1,$$

on aura ainsi

$$2\mathrm{C} \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{G}^0} = -\frac{n'^2}{ne} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) \frac{\partial \mathrm{F}'_1}{\partial e} + \frac{1 - 2\gamma^2 \frac{e^2}{2}}{4\gamma} \frac{n'^2}{n} \frac{\partial \mathrm{F}'_1}{\partial \gamma},$$

$$2\mathrm{C} \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{H}^0} = -\frac{n'^2}{4n\gamma} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) \frac{\partial \mathrm{F}'_1}{\partial \gamma}$$

et

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{e^{02}}{2}\right)\frac{\partial F'_1}{\partial e^0} = -2\alpha K^0 \Big\{ & -\frac{1}{2}\left(1-\frac{e^{02}}{2}\right)\cos l + \left(\tfrac{3}{4}-\tfrac{3}{8}e^{02}-\tfrac{3}{2}\gamma^{02}\right)\cos(2D+l) \\ & +\left(-\tfrac{9}{4}+\tfrac{9}{8}e^{02}+\tfrac{9}{2}\gamma^{02}\right)\cos(2D-l)-\tfrac{63}{8}e'\cos(2D-l-l') \\ & +\tfrac{9}{8}e'\cos(2D-l+l')-\tfrac{3}{4}e'\cos(l+l')-\tfrac{3}{4}e'\cos(l-l')-\tfrac{1}{2}e^0\cos 2l \\ & +\tfrac{3}{2}e^0\cos(2D+2l)+\tfrac{15}{4}e^0\cos(2D-2l) \\ & +\tfrac{105}{8}e^0e'\cos(2D-2l-l')-\tfrac{15}{2}e^0e'\cos(2D-2l+l')+\tfrac{15}{2}\gamma^{02}e^0\cos 2g\Big\} \\ +\frac{e^0}{4}\Big\{ & -\tfrac{25}{2}\cos 2l+6\cos 2D-3\cos(2D+2l) \\ & +9\cos(2D-2l)-\tfrac{27}{2}\cos 4D+\tfrac{9}{4}\cos(4D+2l)+\tfrac{81}{4}\cos(4D-2l) \\ & +e'\left[9\cos(2D-2l+l')-\tfrac{57}{4}\cos l'+\tfrac{27}{2}\cos(2D-2l-l')\right]\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1-2\gamma^2+\frac{e^2}{2}}{4\gamma}\frac{\partial F'_1}{\partial \gamma} = -2\alpha K^0\Big\{ & -\tfrac{3}{4}e^0\cos(2D+l)+\tfrac{9}{4}e^0\cos(2D-l) \\ & +\tfrac{15}{8}e^{02}\cos 2g+\tfrac{3}{4}\cos(2g+2l)+\tfrac{3}{4}\cos[2D-(2g+2l)] \\ & +\tfrac{21}{8}e'\cos[2D-(2g+2l)-l']-\tfrac{3}{8}e'\cos[2D-(2g+2l)+l']\Big\},\end{aligned}$$

En réunissant ces deux expressions, et en ne conservant que les termes qui donnent dans $g$ des inégalités d'ordre inférieur au troisième, on trouve

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}-n'^2a^2\frac{\partial F_1}{\partial G^0} = \frac{2\alpha K^0 n'^2 a^2}{2C}\frac{n'^2}{n}\Big\{ & -\frac{1}{2e^0}\cos l+\frac{3}{4e^0}\cos(2D+l)-\frac{9}{4e^0}\cos(2D-l) \\ & -\frac{63}{8}\frac{e'}{e^0}\cos(2D-l-l')+\frac{9}{8}\frac{e'}{e}\cos(2D-l+l') \\ & -\frac{3}{4}\frac{e'}{e^0}\cos(l+l')-\frac{3}{4}\frac{e'}{e}\cos(l-l')-\tfrac{1}{4}\cos 2l \\ & +\tfrac{3}{2}\cos(2D+2l)+\tfrac{15}{4}\cos(2D-2l) \\ & -\tfrac{3}{4}\cos(2D-2g-2l)-\tfrac{3}{4}\cos(2g+2l) \\ & +\tfrac{105}{8}e'\cos(2D-2l-l')-\tfrac{15}{8}e'\cos(2D-2l+l') \\ & -\tfrac{21}{8}e'\cos(2D-2g-2l-l') \\ & +\tfrac{3}{4}e'\cos(2D-2g-2l+l')+\frac{15}{2}\left(\gamma^2-\frac{e^2}{4}\right)\cos 2g\Big\} \\ -\frac{n'^2a^2}{2C}\frac{n'^2}{n}\frac{1}{4}\Big\{ & -\tfrac{25}{2}\cos 2l+6\cos 2D-3\cos(2D+2l) \\ & +9\cos(2D-2l)-\tfrac{27}{2}\cos 4D+\tfrac{9}{4}\cos(4D+2l) \\ & +\tfrac{81}{4}\cos(4D-2l)+e'\left[9\cos(2D-2l+l')-\tfrac{57}{4}\cos l'\right. \\ & \left.+\tfrac{27}{2}\cos(2D-2l-l')\right]\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Nous allons montrer qu'au degré d'approximation que nous considérons, il n'y a pas lieu de tenir compte dans les équations (11) des termes en $H^1$, $G^1$, $K^1$.

Nous avons trouvé que $F_1$ était de la forme

$$F_1 = -\frac{n'^2 a^2}{2C} 2\alpha K^0 \sum A\cos(ik^0 + i'g^0 + i''h^0 + q)$$
$$+ \frac{n'^2 a^2}{2C} e^2 \sum B\cos(i_1 k^0 + i'_1 g^0 + i''_1 h^0 + q).$$

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons par $\delta$, $\delta'$ les arguments $ik^0 + i'g^0 + i''h^0 + q$. Nous avons trouvé précédemment

$$\frac{dK^1}{dt} = -\frac{n'^2 a^2}{2C} 2\alpha K^0 \sum -Ai\sin\delta + \frac{n'^2 a^2}{2C} e^2 \sum -Bi_1\cos\delta',$$
$$K^1 = -\frac{n'^2 a^2}{2C} 2\alpha K^0 \sum A\frac{i}{(i+i'+i'')\alpha_1}\cos\delta + \frac{n'^2 a^2}{2C} e^2 \sum B\frac{i_1}{(i_1+i'_1+i''_1)\alpha_1}\cos\delta'.$$

Multiplions par $\alpha$ et remplaçons dans les dénominateurs $\alpha_1 C$ par $\alpha C_1$, nous aurons

$$\alpha K^1 = -\frac{n'^2 a^2 2\alpha K^0}{2C_1} \sum A\frac{i}{i+i'+i''}\cos\delta + \frac{n'^2 a^2}{2C_1} e^2 \sum B\frac{i_1}{i_1+i'_1+i''_1}\cos\delta'.$$

Nous n'avons pas écrit de constante additive dans l'expression de $K^1$, car nous avons montré que $(K^1)$ était nul.

De la première des équations (4), il résulte qu'aux termes près du deuxième ordre

$$-\frac{n'^2 a^2 2\alpha K^0}{2C_1} = 1, \qquad \frac{n'^2 a^2}{C_1} = \frac{1}{3,387}.$$

Tous les termes réunis sous le premier signe $\sum$ proviennent directement de $R_1$. En se reportant au développement de $R_1$, que nous avons donné à la fin du § III, on voit que ceux de ces termes qui sont du premier ordre ont des arguments de la forme

$$jl + j'l' + j''h + j'''g + q, \qquad \text{avec} \qquad j \neq 0.$$

Or $i$ est déterminé par l'équation

$$(jn + j'n') = i\alpha + \varepsilon, \qquad \varepsilon < \alpha, \qquad j \pm 0,$$

et comme $n$ est très grand relativement à $\alpha$, il est manifeste que $i$ est très grand relativement à $i'$ et $i''$.

Pour tous les termes du premier ordre en $e$, $\gamma$ de l'expression de $K^1$ le rapport $\frac{i}{i+i'+i''}$ est très voisin de l'unité.

$\alpha K^1$ est donc au moins du premier ordre : il ne donnera pas dans $\frac{dg^1}{dt}$, $\frac{dh^1}{dt}$ de terme d'ordre inférieur au troisième.

Il en est de même des termes en $G^1$ et $H^1$.

En effet, on a

$$\frac{dG_1}{dt} = -\frac{n'^2a^2}{2C} 2\alpha K^0 \sum -A\,i \sin\delta + \frac{n'^2a^2}{2C} e^2 \sum -B\,i_1 \sin\delta'$$

et au deuxième ordre près

$$G^1 = \sum A \frac{i}{(i+i'+i'')\alpha} \cos\delta + \frac{1}{3,387} e^2 \sum B \frac{i_1}{(i_1+i'_1+i''_1)\alpha} \cos\delta'.$$

Par conséquent, les termes en $H^1$, $G^1$ dans $\frac{dg^1}{dt}$, $\frac{dh^1}{dt}$ sont au moins du quatrième ordre.

En négligeant les inégalités du troisième ordre, on a donc

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{dg^1}{dt} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial G^0}, \\[2ex] \dfrac{dh^1}{dt} = -\dfrac{\partial F_1}{\partial H^0}. \end{cases}$$

L'expression de $F_1$ est donnée par la formule (9).

Les arguments D, $l$, $l'$, $g$ qui y figurent ne sont pas exactement les valeurs de ces quantités telles qu'elles résultent des observations, mais leurs quotients par $\alpha t$. Et, comme les coefficients du temps dans $l$, $l'$, D sont très grands relativement à $\alpha$, ces quotients diffèrent très peu des valeurs exactes des quantités correspondantes.

En se reportant aux *Tables du Soleil* de Le Verrier [1], on trouve les formules suivantes où les angles sont exprimés en dixièmes de grade, et le temps compté en jour moyen à partir du midi moyen du 1er janvier 1850.

---

[1] *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. IV, p. 106.

Différence des longitudes de la Lune et du Soleil :

$$a = 2393,2 + 135,4528\,t.$$

Longitude moyenne du Soleil :

$$\mathrm{L} = 280^\circ 46' 43'',51 + 59' 8'',330\,t = 3119,5148 + 10,9516\,t.$$

Anomalie moyenne du Soleil :

$$\mathrm{L} - \Pi = 25' 22'',01 + 3548'',16\,t = 10,9278\,t.$$

Supplément de la longitude du nœud de la Lune :

$$\mathrm{N} = 2375,994 + 0,5884\,t.$$

Anomalie moyenne de la Lune :

$$x = 402,2 + 145,1666\,t.$$

Et, par suite, longitude moyenne de la Lune :

$$a + x = 1512,7148 + 146,4032\,t.$$

Or tous les arguments qui entrent dans la fonction perturbatrice et, par suite, dans $\mathrm{F}_1$ sont de la forme

$$\delta = j(h + g + l - h' - g' - l') + j(g + l) + j'' l - j''' l'.$$

En y remplaçant $h$, $g$ par $h^0$, $g^0$, $(in + i'n')t$ par $i_1 k^0$, $i_1$ étant déterminé par l'équation

$$(in + i'n')\,t = i_1 k^0 = i_1 \alpha_1 t,$$

on trouve

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{D}^0 & = 2393,2 + 135,4731\,t = & 2393,2 + 2081\,\alpha_1 t, \\ l & = \phantom{0}402,2 + 145,1720\,t = & \phantom{0}402,2 + 2229\,\alpha_1 t, \\ l' & = \phantom{000}4,7 + \phantom{0}10,9368\,t = & \phantom{000}4,7 + \phantom{0}168\,\alpha_1 t, \\ g + l & = 1888,7 + 146,9948\,t = & 1888,7 + 2257\,\alpha_1 t. \end{array}\right.$$

A l'aide de ces formules, on exprime immédiatement tous les arguments qui entrent dans $F_1$, et l'on a pour $g^1$

$$\frac{dg^1}{dt} = \frac{1}{2C} \sum A \cos(i\alpha_1 t + q),$$
$$g^1 = \frac{1}{2C\alpha_1} \sum \frac{A}{i} \sin(i\alpha_1 t + q).$$

En y remplaçant $C\alpha_1$ par $C_1\alpha$, il vient

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} g^1 = \dfrac{1}{2C_1} \displaystyle\sum \frac{A}{i\alpha} \sin(i\alpha_1 t + q), \\ \text{de même} \\ h^1 = \dfrac{1}{2C_1} \displaystyle\sum \frac{A'}{i'\alpha} \sin(i'\alpha t + q'). \end{array} \right.$$

Pour cette solution périodique de période $T_1$, la fonction $\Phi$ est égale à une constante $C'$ et, d'après ce que nous avons dit au § I, on obtiendra une solution des équations (2) du même paragraphe en remplaçant dans les intégrales précédentes $t$ par $t\frac{C}{C'}$ ou $\alpha_1$ par $\alpha_1\frac{C}{C'}$. Mais nous savons que

$$\alpha_1 = \alpha \frac{C_1}{C};$$

donc

$$\alpha_1 \frac{C}{C'} = \alpha \frac{C_1}{C'}.$$

La période $T'$ de la solution ainsi obtenue est déterminée par l'équation

$$\alpha \frac{C_1}{C'} T' = 2\pi.$$

Nous allons montrer que le rapport $\frac{C_1}{C'}$ est très voisin de l'unité. Il en résultera que la période de la solution considérée est très voisine de T.

$C'$ est la valeur constante de la fonction $\Phi$ où l'on a remplacé $g$, $h$, $k$, G, H, K par les intégrales qui résultent des formules précédentes. On a donc

$$-\alpha K + n'^2 a^2 (-\tfrac{3}{2}\gamma^2 + \tfrac{3}{8}e^2 + \ldots) + n'^2 a^2 R_1 = C'.$$

Le premier membre de cette équation étant indépendant du temps, nous y ferons $t = 0$. Les valeurs initiales de $g$, $h$, $k$ se déduisent des formules (14) où l'on a fait $t = 0$. En remplaçant dans l'équation précédente les variables angulaires $g$, $h$, $k$ par leurs valeurs à l'époque zéro, et les variables linéaires G, H, K par leurs développements suivant les puissances de $\mu$ ou de $n'^2 a^2$, il vient

$$\begin{aligned} &-\alpha(\mathrm{K}^0 + n'^2 a^2 \mathrm{K}^1 + \ldots) + n'^2 a^2(-\tfrac{3}{2}\gamma^{02} + e^{02} + \ldots) \\ &\quad + n'^2 a^2 \left[ \mathrm{R}_1(e^0, \gamma^0) + n'^2 a^2 \left( e^1 \frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial e^0} + \gamma^1 \frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial \gamma^0} \right) + \ldots \right] = \mathrm{C}'. \end{aligned}$$

En tenant compte de la première des équations (4), en remplaçant C′ par $n'^2 a^2 \mathrm{C}'$, comme nous l'avons fait dans les équations (4), et en supprimant le facteur $n'^2 a^2$ commun aux membres de l'égalité précédente, on obtient

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &-\alpha(\mathrm{K}^1 + n'^2 a^2 \mathrm{K}^2 + \ldots) + \mathrm{R}_1(e^0, \gamma^0) \\ &\quad + n'^2 a^2 \left( e^1 \frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial e^0} + \gamma^1 \frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial \gamma^0} + \mathrm{K}^1 \frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial \mathrm{K}^0} \right) + \ldots = \mathrm{C}' - \mathrm{C}_1. \end{aligned} \right.$$

Négligeons le quatrième ordre dans cette équation.

A ce degré d'approximation, nous pouvons supprimer le terme $-n'^2 a^2 \alpha \mathrm{K}^2$. Pour le montrer, formons l'équation qui déterminerait $\mathrm{K}^2$.

Nous avons posé

$$\mathrm{F} = \frac{\Phi^2}{2\mathrm{C}} = \mathrm{F}_0 + \mu \mathrm{F}_1 \qquad (\mu = n'^2 a^2).$$

En y remplaçant K, G, H par leurs développements suivant les puissances de $\mu$, on trouve pour le coefficient de $\mu^2$ dans F

$$\begin{aligned} \Phi_2 = &\frac{1}{2}\left( \mathrm{K}^1 \frac{\partial \mathrm{F}_0}{\partial \mathrm{K}^0} + \mathrm{G}^1 \frac{\partial \mathrm{F}_0}{\partial \mathrm{G}^0} + \mathrm{H}^1 \frac{\partial \mathrm{F}_0}{\partial \mathrm{H}^0} \right)^{(2)} \\ &+ \mathrm{K}^1 \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{K}^0} + \mathrm{G}^1 \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{G}^0} + \mathrm{H}^1 \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{H}^0} + \mathrm{K}^2 \frac{\partial \mathrm{F}_0}{\partial \mathrm{K}^0} + \mathrm{G}^2 \frac{\partial \mathrm{F}_0}{\partial \mathrm{G}^0} + \mathrm{H}^2 \frac{\partial \mathrm{F}_0}{\partial \mathrm{H}^0}, \end{aligned}$$

et, d'après la théorie de M. Poincaré, $\mathrm{K}^2$ est déterminé par

$$\frac{d\mathrm{K}^2}{dt} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathrm{K}^0}.$$

En répétant les raisonnements que nous avons faits précédemment pour montrer que $\alpha K^1$ était de l'ordre $F_1$, nous verrions que $\alpha K^2$ est de l'ordre de $\Phi_2$. On voit de plus que les coefficients des termes en $K^1$ dans $\Phi_2$ contiennent $\alpha$ en facteur; $\Phi_2$ est au moins du deuxième ordre, donc $n'^2 a^2 \alpha K^2$ est du quatrième ordre. En supposant ce terme dans (16), il vient

$$(17) \qquad -\alpha K^1 + R_1(e^0, \gamma^0) + n'^2 a^2\left(e^1 \frac{\partial R_1}{\partial e^0} + \gamma^1 \frac{\partial R_1}{\partial \gamma^0}\right) = C' - C_1.$$

Nous avons vu que, en écrivant $F_1$ sous la forme

$$F_1 = -\frac{n'^2 a^2}{2C} 2\alpha K^0 \sum A \cos\delta + \frac{n'^2 a^2}{2C} \sum B \cos\delta',$$
$$\delta \quad \text{et} \quad \delta' = ik^0 + i'g^0 + i''h^0 + q,$$

l'expression de $\alpha K^1$ était

$$\alpha K^1 = -\frac{n'^2 a^2}{2C_1} 2\alpha K^0 \sum A \frac{i}{i+i'+i''} \cos\delta + \frac{n'^2 a^2}{2C_1} \sum B \frac{i}{i+i'+i''} \cos\delta'.$$

Comme $i$ est généralement très grand relativement à $i'$ et $i''$, $\frac{i}{i+i'+i''}$ est très voisin de l'unité. Pour tous les termes dont l'argument $\delta$ dépend de la longitude moyenne $l$ de la Lune, $\frac{i}{i+i'+i''}$ ne diffère de l'unité que de quantités du deuxième ordre; pour s'en convaincre, il suffit de se reporter aux expressions de $l$, $l'$, D en fonction de $\alpha t$ ou $k^0$. Comme nous négligeons le quatrième ordre, nous remplacerons, dans les termes dont les coefficients A et B sont du deuxième ordre, le rapport $\frac{i}{i+i'+i''}$ par l'unité, excepté, cependant, dans ceux dont l'argument $\delta$ ne contient pas $l$. En nous reportant à la formule (9), nous voyons qu'il n'y a dans $F_1$ que deux pareils termes; ils ont pour argument $2D - 2l$, et alors

$$\frac{Ai}{i+i'+i''} = A\,\tfrac{336}{296} = A + 0{,}17A.$$

Les termes de $F_1$, qui sont du premier ordre, ont pour arguments

$$l, \quad 2D + l, \quad 2D - l;$$

et pour ces termes, on a respectivement

$$\frac{i}{i+i'+i''}=1;\ 0,993;\ 0,979.$$

D'autre part, des équations (4), nous déduisons

$$\frac{\alpha K^0}{C_1}=1+\left(\tfrac{3}{2}\gamma^2-\tfrac{3}{8}e^2\right)\frac{1}{C_1}$$

et, au deuxième ordre près,

$$C_1=\tfrac{1}{7}.$$

De tout ce qui précède, il résulte que, au quatrième ordre près, on a

$$\begin{aligned}
-\alpha K^1+R_1=&\left(-\tfrac{3}{7}\gamma^2+\tfrac{3}{28}e^2\right)R_1\\
&-\tfrac{1}{4}[0,189e\cos(2D-l)-0,021\cos(2D+l)+1,27e^2\cos(2D-2l)]\\
&-\frac{1}{7}\frac{e^2}{8}\left[-\tfrac{25}{2}\cos 2l+6\cos 2D-3\cos(2D+2l)\right.\\
&\left.\quad+9\cos(2D-2l)-\tfrac{27}{4}\cos 4D+\tfrac{9}{4}\cos(4D+2l)+\tfrac{81}{4}\cos(4D-2l)\right]\\
&-\frac{1}{7}\frac{e^2}{8}9\times 0,17\cos(2D-2l).
\end{aligned}$$

Cherchons les termes d'ordre inférieur au quatrième dans

$$n'^2a^2\left(e^1\frac{\partial R_1}{\partial e^0}+\gamma^1\frac{\partial R_1}{\partial\gamma^0}\right).$$

Nous savons que L, G, H sont liés à $e$, $\gamma$ par les formules

$$e=\sqrt{1-\frac{G^2}{L^2}},\qquad L=\sqrt{a\mu},\qquad \gamma=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{H}{G}}.$$

En y remplaçant G, H par leurs développements suivant les puissances de $n'^2a^2$, et en développant $e$, $\gamma$ par la formule de Taylor, il vient

$$e=1-\frac{G^{02}}{2L^2}-n'^2a^2\frac{G^0G^1}{L^2}+\ldots,$$

$$\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{H^0}{G^0}\right)-n'^2a^2\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{H^1}{G^0}-\frac{H^0}{G^0}\frac{G^1}{G^0}\right)+\ldots.$$

Par conséquent,

$$(19)\qquad n'^2a^2e^1=-\sqrt{2}\frac{n'^2}{n}\left(1-\frac{e^0}{2}\right)G^1,\qquad n'^2a^2\gamma^1=\frac{n'^2}{2n}\left(G^1-\frac{H^1}{2}\right).$$

Pour déterminer $G^1$ au degré d'approximation considéré, il suffit de réduire $F_1$ aux seuls termes

$$F_1 = \frac{n'^2 a^2}{2C} - 2\alpha K^0\left[\tfrac{3}{4}e\cos(2D+l) - \tfrac{9}{4}e\cos(2D-l) + \tfrac{15}{8}e^2\cos(2D-2l)\right] + \frac{n'^2 a^2}{2C}\,\tfrac{9}{8}e^2\cos(2D-2l).$$

Désignons respectivement par $i$ et $i_1$ les coefficients de $\alpha_1 t$ dans D et $l$, où l'on a réduit $h, g, k$ à $g^0, h^0, k^0$. Puis intégrons l'équation qui donne $G^1$ et remplaçons $C\alpha_1$ par $\alpha C_1$ dans l'intégrale obtenue, nous aurons

$$(20)\qquad G^1 = \frac{3}{2}e\left[\frac{\cos(2D+l)}{(2i+i_1)\alpha} - \frac{3\cos(2D-l)}{(2i-i_1)\alpha} + \frac{5}{2}e\frac{\cos(2D-2l)}{(2i-2i_1)\alpha}\right] + \frac{9}{28}e^2\frac{\cos(2D-2l)}{(2i-2i_1)\alpha}.$$

Comme $\dfrac{\partial R_1}{\partial\gamma^0}$ est au moins du premier ordre, nous n'avons pas à tenir compte de $n'^2 a^2\gamma^1\dfrac{\partial R_1}{\partial\gamma^0}$.

En portant dans l'expression (17) de la différence $C' - C$ les valeurs de $-\alpha K^1 + R^1$ et $n'^2 a^2 e^1\dfrac{\partial R_1}{\partial e^0}$ données par les formules (18), (19), (20), il vient

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned}
C' - C_1 = e^0\Bigg(&\tfrac{1}{28}\left[-\cos l + \tfrac{3}{2}\cos(2D+l) - \tfrac{9}{2}\cos(2D-l)\right]\\
&\times\Big\{\left[-\frac{\cos 2l}{2} + 3\cos(2D+2l) + \tfrac{15}{2}\cos(2D-2l)e^{02}\right]\\
&\qquad + \left[3\cos(2g+2l) + 3\cos(2D-2g-2l)\right]\gamma^{02}\Big\}\\
&+ e^0\Big\{-\tfrac{1}{56}\left[-\tfrac{25}{2}\cos 2l + 6\cos 2D - 3\cos(2D+2l)\right.\\
&\qquad + 9\cos(2D-2l) - \tfrac{27}{2}\cos 4D\\
&\qquad\qquad \left. + \tfrac{9}{4}\cos(4D+2l) + \tfrac{81}{4}\cos(4D-2l)\right]\\
&\qquad - \tfrac{1}{7}\,\tfrac{9}{8}\,0{,}17\cos(2D-2l) - \tfrac{1{,}27}{4}e^0\cos(2D-2l)\\
&\qquad + \frac{57}{56}\sqrt{2}\,\frac{n'^2}{n(2i-2i_1)\alpha}\cos(2D-2l)\\
&\qquad \times\left[-\cos l + \tfrac{3}{2}\cos(2D+l) - \tfrac{9}{2}\cos(2D-l)\right]\Big\}\\
&- 0{,}047\cos(2D-l) + 0{,}005\cos(2D+l)\\
&+ \frac{3\sqrt{2}}{4}\,\frac{n'^2}{n}\left[\cos\frac{2D+l}{(2i+i_1)\alpha} - \frac{3\cos(2D-l)}{(2i-i_1)\alpha}\right]\\
&\qquad \times\left[-\cos l + \tfrac{3}{2}\cos(2D+l) - \tfrac{9}{2}\cos(2D-l)\right]\Bigg).
\end{aligned}\right.$$

Il est donc manifeste que $C' - C_1$ est du troisième ordre. Par conséquent,

$$\frac{C'}{C_1} = 1 + \text{quantités du troisième ordre};$$

$\alpha \frac{C_1}{C'}$ diffère donc très peu de $\alpha$.

La solution que nous avons obtenue a donc une période très voisine de T. Pour connaître la quantité dont elle en diffère, il suffirait de chercher la valeur numérique de $C' - C$; on l'obtiendrait en remplaçant dans l'expression précédente les arguments par leurs valeurs à l'époque o (1er janvier 1850), déduites des formules (14) et en y faisant ensuite

$$\frac{n'}{n} = \frac{1}{13}, \qquad n' = 3548'', \qquad e = \frac{1}{18}.$$

Nous n'avons pas fait ce calcul numérique parce qu'il nous a semblé que l'expression de $C' - C_1$ montrait suffisamment que la période de la solution obtenue est très voisine de T.

En remplaçant, dans la première des formules (15), $\alpha_1$ par $\alpha$; $e^0$, $\gamma^0$, $k^0$ par leurs valeurs numériques, et en portant les expressions ainsi obtenues de $g^0$, $g^1$ dans $g$; il vient

$$g = 28\alpha t + \sum \mathcal{A} \sin[kD + k'(g + l) + k'' l - k''' l']; \tag{22}$$

les arguments D, $g + l$, $l$, $l'$ qui y figurent ont les valeurs que l'on obtient en remplaçant, dans les formules (14), $\alpha_1$ par $\alpha$.

Les coefficients, que nous avons exprimés en parties du rayon, sont donnés par le Tableau suivant, où nous avons mis le coefficient de chaque inégalité en regard de l'argument correspondant.

| Coefficients. | Arguments. | Coefficients. | Arguments. |
|---|---|---|---|
| 0,27076 | $2D - l$ | —0,00207 | $2D - l + l'$ |
| 0,20872 | $l$ | —0,00207 | $2D + 2l$ |
| 0,17800 | $2D - 2l$ | 0,00192 | $2l$ |
| —0,03032 | $2g$ | 0,00141 | $l - l'$ |
| —0,02754 | $2D - 2g - 2l$ | 0,00121 | $l + l'$ |
| —0,02729 | $2D + l$ | —0,00108 | $2D - 2g - 2l - l'$ |
| 0,01729 | $2D - l - l'$ | 0,00084 | $2D - 2g - 2l + l'$ |
| 0,00339 | $2D - 2l - l'$ | —0,00074 | $2D$ |
| 0,00312 | $2D - 2l + l'$ | 0,00073 | $4D$ |
| —0,00245 | $4D - 2l$ | 0,00067 | $l'$ |
| 0,00216 | $2g + 2l$ | —0,00012 | $4D + 2l$ |

De la même façon, on obtient pour $h$ l'expression suivante :

$$(23) \qquad h = -9\alpha t + \varpi_2 + \sum \mathfrak{B} \sin[k\mathrm{D} + k'(g+l) + k''l - k'''l'].$$

Les arguments y ont les valeurs indiquées précédemment, et les coefficients $\mathfrak{B}$ sont donnés par le Tableau suivant :

| Coefficients. | Arguments. | Coefficients. | Arguments. |
|---|---|---|---|
| $-0,02753$ | $2\mathrm{D} - 2g - 2l$ | $0,00083$ | $2\mathrm{D} - l$ |
| $0,00215$ | $2g + 2l$ | $-0,00044$ | $2\mathrm{D} - 2g - 2l + l'$ |
| $0,00142$ | $2g$ | $0,00008$ | $2\mathrm{D} + l$ |
| $-0,00108$ | $2\mathrm{D} - 2g - 2l - l'$ | | |

En employant la méthode de Poisson, on aurait obtenu des coefficients très peu différents des précédents; excepté cependant le coefficient de l'inégalité d'argument $2\mathrm{D} - 2l$ qui serait inférieur de $0,01428$ ou de $49' 1''$ à celui que nous avons trouvé pour la même inégalité.

---

Dans tout ce qui précède, nous avons rapporté, comme on fait d'habitude, la Lune à des axes de directions fixes passant par le centre de la Terre. Nous allons maintenant former les équations de son mouvement relatif, par rapport à un système d'axes, animé de rotations correspondant aux mouvements séculaires des nœuds et du périgée.

Soient

O le centre de la Terre;
$Ox$, $Oy$, $Oz$ trois axes de directions fixes passant par le point O;
$OX_1Y_1Z_1$ un trièdre trirectangle animé d'une rotation uniforme autour de $Oz$ et de vitesse angulaire $\alpha$;
$OX_1$ étant l'intersection du plan mobile $OX_1Y_1$ avec le plan fixe OXY;
$\varphi$ l'angle constant de ces deux plans.

Considérons un deuxième trièdre trirectangle mobile $OZ_1X_2Y_2$, animé par rapport au trièdre $OZ_1X_1Y_1$ d'une rotation uniforme autour de $OZ_1$ avec une vitesse angulaire constante $\beta$.

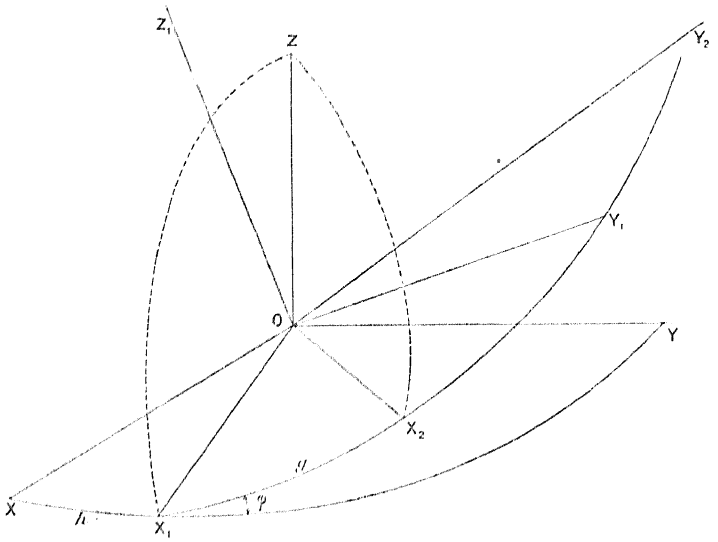
Désignons par $h$ l'angle que forme au temps $t$ l'axe mobile $OX_1$ avec l'axe fixe OX; par $g$ l'angle que forme au même instant les deux axes mobiles $OX_1$, $OX_2$. Et soient $h^0$ et $g^0$ les valeurs respectives de $h$ et $g$, à l'origine du temps.

Il est manifeste que

$$h = h^0 + \alpha t,$$
$$g = g^0 + \beta t;$$

de sorte que $OX_1$ et $OX_2$ coïncideront à chaque instant avec les positions moyennes des nœuds et du périgée, pourvu que l'on donne à $\alpha$ et à $\alpha + \beta$ les valeurs des vitesses angulaires moyennes du nœud et du périgée, et que l'on prenne pour $h^0$, $h^0 + g^0$ les longitudes respectives de ces points au temps $t = 0$.

Fig. 1.




D'après ce qui précède, le trièdre $OZ_1X_2Y_2$ est animé de deux rotations uniformes : l'une autour de $OZ$ et de vitesse angulaire $\alpha$; l'autre autour de $OZ_1$ et de vitesse angulaire $\beta$.

Désignons par $p$, $q$, $r$ les projections sur $Ox_2$, $Oy_2$, $Oz_1$ de la résultante de ces deux rotations. Pour trouver $p$, considérons le triangle formé par les trois points $Z$, $X_1$, $X_2$; on a dans ce triangle

$$\cos(ZX_2) = \cos(ZX_1)\cos(X_1X_2) + \sin(ZX_1)\sin(X_1X_2)\cos ZX_1X_2,$$
$$\cos(ZX_2) = \sin g \sin\varphi;$$

donc

(1) $p = \alpha \sin g \sin\varphi$, $q = \alpha \cos g \sin\varphi$, on trouve de même $r = \alpha\cos\varphi + \varphi$.

Désignons par $x$, $y$, $z$ les coordonnées de la Lune par rapport au trièdre mobile $OZ_1X_2Y_2$. La force vive absolue du point matériel $x$, $y$, $z$ est, à un facteur constant près,

$$2T=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+(qz-ry)^2+(rx-pz)^2+(py-qx)^2$$
$$+2(qz-ry)\frac{dx}{dt}+2(rx-pz)\frac{dy}{dt}+2(py-qx)\frac{dz}{dt}.$$

Posons

$$\frac{dx}{dt}=x', \qquad \frac{dy}{dt}=y', \qquad \frac{dz}{dt}=z'$$

et exprimons T en fonction de $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$; nous aurons ainsi

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} 2T = x'^2+y'^2+z'^2 &+ [\alpha\cos g\sin\varphi z-(\alpha\cos\varphi+\beta)y]^2\\ &+[(\alpha\cos\varphi+\beta)x-\alpha\sin g\sin\varphi z]^2\\ &+[\alpha\sin g\sin\varphi y-\alpha\cos g\sin\varphi x]^2\\ &+2[\alpha\cos g\sin\varphi z-(\alpha\cos\varphi+\beta)y]x'\\ &+2[(\alpha\cos\varphi+\beta)x-\alpha\sin g\sin\varphi z]y'\\ &+2[\alpha\sin g\sin\varphi y-\alpha\cos g\sin\varphi x]z'.\end{aligned}\right.$$

Désignons par $T_2$ l'ensemble des termes de T qui sont du deuxième degré en $x'$, $y'$, $z'$; par $T_1$ les termes du premier degré, et par $T_0$ les termes indépendants de $x'$, $y'$, $z'$,

$$T=T_2+T_1+T_0.$$

Posons ensuite

$$u=\frac{\partial T}{\partial x'}, \qquad v=\frac{\partial T}{\partial y'}, \qquad w=\frac{\partial T}{\partial z'};$$

en développant les seconds membres, il vient

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} u&=x'+\alpha\cos g\sin\varphi z-(\alpha\cos\varphi+\beta)y,\\ v&=y'-\alpha\sin g\sin\varphi z+(\alpha\cos\varphi+\beta)x,\\ w&=z'-\alpha\cos g\sin\varphi x+\alpha\sin g\sin\varphi y.\end{aligned}\right.$$

Remplaçons, dans l'expression de $T_2$, $x$, $y$, $z$ par leurs valeurs en fonction de $u$, $v$, $w$ tirées des équations (3); soit T′ la fonction de $u$,

$v$, $w$, $x$, $y$, $z$ ainsi obtenue

$$(4)\qquad \begin{cases} 2T_2 = \quad [u - \alpha\cos g \sin\varphi z + (\alpha\cos\varphi + \beta)y]^2 \\ \qquad + [v + \alpha\sin g \sin\varphi z - (\alpha\cos\varphi + \beta)x]^2 \\ \qquad + [w + \alpha\cos g \sin\varphi x - \alpha\sin g \sin\varphi y]^2 = 2T'. \end{cases}$$

Désignons par $\Omega$ la fonction des forces exprimée en fonction du temps $t$ et des coordonnées relatives $x$, $y$, $z$, et posons

$$(5)\qquad -H = \Omega + T_0 - T'.$$

La théorie des mouvements relatifs nous apprend que le mouvement relatif du point $x, y, z$, par rapport au trièdre $OZ_1X_2Y_2$, est déterminé par les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial u}, & \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial v}, & \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial w}, & \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial z}. \end{cases}$$

Nous avons vu, au § I, que : en désignant par K une constante, par $r$ la distance de la Lune à la Terre, par R la fonction perturbatrice, la fonction des forces $\Omega$ était

$$\Omega = \frac{K^2}{r} + R.$$

De sorte que

$$\begin{aligned} -H = \frac{K^2}{r} &- \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + R \\ &- u[-\alpha\cos(g^0 + \beta t)\sin\varphi z + (\alpha\cos\varphi + \beta)y] \\ &- v[\quad \alpha\sin(g^0 + \beta t)\sin\varphi z - (\alpha\cos\varphi + \beta)x] \\ &- w[\quad \alpha\cos(g^0 + \beta t)\sin\varphi x - \alpha\sin(g^0 + \beta t)\sin\varphi y]. \end{aligned}$$

Posons

$$H = H_0 + R',$$

on a

$$(7)\qquad \begin{cases} H_0 = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \dfrac{K^2}{r}, \\ R' = -R + u[-\alpha\cos(g^0 + \beta t)\sin\varphi z + (\alpha\cos\varphi + \beta)y] \\ \qquad + v[\quad \alpha\sin(g^0 + \beta t)\sin\varphi z - (\alpha\cos\varphi + \beta)x] \\ \qquad + w[\quad \alpha\cos(g^0 + \beta t)\sin\varphi x - \alpha\sin(g^0 + \beta t)\sin\varphi y]. \end{cases}$$

Remplaçons, dans les équations (6), H par $H_0$, nous aurons les équations du mouvement elliptique

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial u}, & \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial v}, & \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial w}, & \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial H_0}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

En intégrant ces équations par la méthode de Jacobi, on obtient $x$, $y$, $z$, $u$, $v$, $w$ en fonction de six constantes $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ et $t$

$$x = F(t, \alpha_i, \beta_i),$$
$$u = \Phi(t, \alpha_i, \beta_i).$$

Portons ces valeurs dans $R'$ et désignons par $R'_1$ la fonction de $t$, $\alpha_i$, $\beta_i$ ainsi obtenue

$$R'(x, y, z, u, v, w, t) = R'_1(t, \alpha_i, \beta_i).$$

En appliquant des théorèmes bien connus de Jacobi, nous trouvons que l'intégration (6) se trouve ainsi ramenée à celle des équations

$$(9) \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial R'_1}{\partial \beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial R'_1}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Les variables $\alpha_i$, $\beta_i$ qui entrent dans ces formules ont, relativement aux axes mobiles $OZ_1$, $X_2$, $Y_2$, des significations géométriques analogues à celles qu'ont les variables C, G, H, $c$, $g$, $h$ qui figurent dans les formules ($b$) du § I, relativement aux axes des directions fixes OX, Y, Z. La fonction $R'_1$ est aussi de même forme que la fonction perturbatrice ordinaire.

On obtiendrait donc un système d'équations analogues à celles qui ont servi de point de départ à Delaunay en faisant dans les équations (9) un changement de variable analogue à celui qui, au § I, nous a fait passer des équations ($b$) aux équations (1).

En appliquant aux équations ainsi obtenues la méthode de Delaunay, simplifiée par M. Tisserand, on éviterait le reproche que l'on a fait à Delaunay de supposer, au début de ses calculs, le périgée et le nœud immobiles.

# DEUXIÈME PARTIE.

## SUR LES VARIATIONS SÉCULAIRES DES EXCENTRICITÉS ET DES INCLINAISONS.

---

### INTRODUCTION.

La variation des éléments osculateurs ou elliptiques de chaque planète est déterminée par un système d'équations différentielles du premier ordre, que l'on ne peut malheureusement pas intégrer actuellement. En désignant par $f$ un élément quelconque, on sait que le développement de $\frac{df}{dt}$ se compose de deux parties : l'une $S(f)$ dont tous les termes contiennent quelqu'une des anomalies moyennes $\theta, \theta', \ldots$ sous le signe sinus ou cosinus, et l'autre $L(f)$, indépendante de ces quantités, représente l'expression qu'on obtient pour $\frac{df}{dt}$, quand on réduit la fonction perturbatrice R à sa partie constante $R_1$.

De sorte que l'on a

$$(\alpha)\qquad \frac{df}{dt} = L(f) + S(f),$$

$$f = \int L(f)\,dt + \int S(f)\,dt;$$

et comme les éléments varient beaucoup plus lentement que les anomalies moyennes, la portion $\int S(f)\,dt$, au bout d'un grand intervalle de temps, se détruit presque entièrement par suite des rapides changements de S; tandis que $L(f)$ étant presque constante, $\int L(f)\,dt$ varie dans le même sens et représente par conséquent à peu près la partie principale de $f$. Elle ne représente pas exactement sa valeur moyenne car les termes périodiques de $S(f)$ ne donnent pas que des termes à courte période dans $f$. Quoi qu'il en soit, dans les recherches concernant l'état du système planétaire à des époques très distinctes, soit qu'il s'agisse de sa stabilité dans l'avenir ou des variations qu'il a pu présenter aux diverses époques géodésiques, on réduit $f$ à $\int \mathrm{L}(f)\,dt$. On appelle alors *équations séculaires* celles qu'on obtient en réduisant les seconds membres des équations ($\alpha$) à leur partie $\mathrm{L}(f)$, ou encore R à sa partie constante $\mathrm{R}_1$.

Les éléments séculaires sont donc les intégrales exactes des équations

$$(\beta) \qquad \frac{df}{dt} = \mathrm{L}(f),$$

et l'on nomme *inégalités seculaires* ce dont ils varient dans un temps donné.

La forme même des équations ($\beta$) montre qu'à chaque planète correspondent seulement quatre équations séculaires.

L'intégration complète et rigoureuse de ces équations n'étant pas possible, les astronomes ont dû procéder par approximations successives. L'emploi de cette méthode était facilité par la petitesse des masses des planètes comparées à celles du Soleil; c'est ce qui a conduit Le Verrier à développer les inégalités séculaires suivant les puissances croissantes des masses.

Mais ce mode de développement présente, comme M. Poincaré l'a montré dans ces derniers temps, de nombreux inconvénients : la véritable nature des intégrales est complètement dissimulée et les développements ne sont pas convergents.

MM. Hill, Gildén, Lindstedt ont imaginé d'autres procédés d'approximations successives plus rapides et plus satisfaisants à tous égards que celui de Le Verrier. Ces procédés donnent un plus grand nombre de décimales exactes; toutefois on n'en aura pas autant que l'on voudra, car on est conduit à des développements qui ne sont pas convergents, ainsi que M. Poincaré l'a montré.

La divergence de ces développements détruit toutes les conclusions que l'on en a tirées sur la stabilité du système des grosses planètes dans un avenir très éloigné. Tout ce que l'on peut, en ce moment, dire à ce sujet, c'est que les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons des plus grosses planètes resteront petites. Cela résulte, comme on sait, de l'intégrale des équations séculaires

$$\sum m\sqrt{(\mathrm{M}+m)\,a(1-e^2)}\cos\varphi = \text{const.}$$

Cette impossibilité de résoudre le problème dans le cas général donne plus d'intérêt à l'étude des cas particuliers; étude qui est devenue beaucoup plus commode avec les méthodes inventées par M. Poincaré.

C'est ainsi que, par la théorie des invariants intégraux, j'ai pu démontrer très simplement qu'en ne considérant que des planètes dont les masses sont du même ordre, il y a stabilité au sens de Poisson pour les variations séculaires de leurs excentricités et de leurs inclinaisons.

De plus, un nouveau théorème de M. Poincaré, sur le calcul des limites, m'a permis de développer, dans quelques cas particuliers, les inégalités séculaires en séries convergentes et ordonnées suivant les puissances croissantes des valeurs initiales seulement.

Tel est le but de ce travail.

---

# CHAPITRE I.

Soient O le centre de gravité du Soleil; P, $P_1$, $P_2$, ... les centres de gravité de diverses planètes dont nous supposerons les masses $m$, $m_1$, $m_2$, ... du même ordre. Par le point O menons trois axes rectangulaires de directions invariables et soient, relativement à ces axes, $x, y, z, r$; $x_1, y_1, z_1, r_1$, ... les coordonnées des points P, $P_1$, $P_2$, ... et leurs distances au centre du Soleil.

Les équations différentielles du mouvement de la planète P sont, comme on sait,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+f\mu\dfrac{x}{r^3}=\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2}+f\mu\dfrac{y}{r^3}=\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2}+f\mu\dfrac{z}{r^3}=\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}, \end{cases}$$

où l'on a

$$(2)\quad \begin{cases} \mu = 1 + m, \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ R = f m_1 \left[ \dfrac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} - \dfrac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1^3} \right] + \ldots . \end{cases}$$

En supprimant R dans les équations (1), on a les équations différentielles du mouvement elliptique

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} + f\mu \dfrac{x}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} + f\mu \dfrac{y}{r^3} = 0, \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} + f\mu \dfrac{z}{r^3} = 0, \end{cases}$$

et l'on sait que leurs intégrales s'expriment en fonction de la longitude $v$ et de six constantes $\theta$, $\varphi$, $\varpi$, $e$, $a$, $\varepsilon$ appelées *éléments elliptiques de la planète* et dont nous rappelons la signification pour plus de clarté :

$\theta$ est la longitude du nœud ascendant;
$\varphi$ est l'inclinaison du plan de l'orbite avec le plan des $xy$;
$\varpi$ est la longitude du périhélie;
$e$ l'excentricité;
$a$ le demi grand axe;
$\varepsilon$ la longitude de l'époque.

D'autre part, en intégrant les équations (3) par la méthode de Jacobi, on introduit six arbitraires canoniques $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ qui sont liées aux éléments elliptiques de la planète correspondante par les formules

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{K^2}{2a}, \qquad \alpha_2 = K\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varphi, \qquad \alpha_3 = K\sqrt{a(1-e^2)}, \\ \beta_1 = \dfrac{\varepsilon - \varpi}{K} a^{\frac{3}{2}}, \qquad \beta_2 = \theta, \qquad \beta_3 = \varpi - \theta, \end{cases}$$

et les intégrales générales des équations (3) sont de la forme

$$(5)\quad \begin{cases} x = \varphi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \qquad y = \varphi_2, \qquad z = \varphi_3, \\ \dfrac{dx}{dt} = \psi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \qquad \dfrac{dy}{dt} = \psi_2, \qquad \dfrac{dz}{dt} = \psi_3. \end{cases}$$

D'après la théorie de la variation des constantes arbitraires, l'intégration des équations (1) sera alors ramenée à celle des six équations canoniques

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \beta_1}, & \frac{d\alpha_2}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \beta_2}, & \frac{d\alpha_3}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \beta_3},\\ \frac{d\beta_1}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}, & \frac{d\beta_2}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2}, & \frac{d\beta_3}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_3}, \end{aligned}\right.$$

où l'on doit prendre pour R la fonction de $t$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ obtenue en remplaçant, dans la formule (2), $x$, $y$, $z$ par leurs expressions (5). Des équations (4) et (6), on déduit aisément les dérivées des éléments elliptiques $a$, $e$, $\varphi$, $\theta$, $\omega$, $\varepsilon$ en fonction des dérivées partielles de R par rapport aux mêmes éléments. En y réduisant R à sa partie indépendante des longitudes et, par suite, de $\varepsilon$, $\varepsilon'$, nous aurons les équations suivantes pour définir les variations séculaires des éléments elliptiques [1],

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0,\\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R_1}{\partial \varphi} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\,\frac{\partial R_1}{\partial e},\\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\,\frac{\partial R_1}{\partial \varphi},\\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R_1}{\partial \varphi} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\,\frac{\partial R_1}{\partial e},\\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\,\frac{\partial R_1}{\partial \varpi},\\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\,\frac{\partial R_1}{\partial \theta} - \frac{\tang\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R_1}{\partial \varpi}. \end{aligned}\right.$$

$R_1$ ne dépend que des variables $e$, $\varphi$, $\theta$, $\varpi$ et des variables analogues qui correspondent aux autres planètes. Il suffit donc, pour avoir les

---

[1] TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. I, p. 169.

variations séculaires de ces éléments, de réduire les équations (7) aux quatre dernières.

D'autre part, les longitudes n'entrent pas explicitement dans les formules (4) et les deux derniers groupes de ces équations donnent $e$, $\varphi$, $\theta$, $\varpi$ en fonction de $\alpha_2$, $\beta_2$; $\alpha_3$, $\beta_3$ seulement. Il en résulte que $R_1$ s'exprime aussi en fonction des seules variables $\alpha_2$, $\beta_2$, $\alpha_3$, $\beta_3$; $\alpha'_2$, . . ..

Les équations séculaires de $\alpha_2$, $\beta_2$, $\alpha_3$, $\beta_3$; $\alpha'_2$, ... sont donc

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha_2}{dt} &= \frac{\partial R_1}{\partial \beta_2}, & \frac{d\alpha_3}{dt} &= \frac{\partial R_1}{\partial \beta_3}, \\ \frac{d\beta_2}{dt} &= -\frac{\partial R_1}{\partial \alpha_2}, & \frac{d\beta_3}{dt} &= -\frac{\partial R_1}{\partial \alpha_3}. \end{aligned}\right.$$

$R_1$ ne contenant pas d'autres variables que $\alpha_2$, $\beta_2$, $\alpha_3$, $\beta_3$, ..., ces équations ont l'invariant intégral positif d'ordre $4n$, $n$ étant le nombre des planètes considérées,

$$I = \int d\alpha_2\, d\alpha_3\, d\beta_2\, d\beta_3\, d\alpha'_2 \ldots$$

On sait de plus que les équations (7) ont l'intégrale

$$\sum m\sqrt{(M+m)a(1-e^2)}\cos\varphi = C,$$

et comme nous avons supposé les masses des planètes du même ordre, il en résulte que les excentricités et les inclinaisons ne pourront jamais acquérir de valeurs notables. Toutefois il ne s'agit ici que des valeurs séculaires et non des vrais éléments.

Faisons maintenant dans les équations (8) le changement de variables

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} h &= \alpha_3 \sin(\beta_2+\beta_3), & p &= \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\sin\beta_2, \\ l &= \alpha_3 \cos(\beta_2+\beta_3), & q &= \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\cos\beta_2. \end{aligned}\right.$$

Le déterminant fonctionnel de $h$, $l$, $p$, $q$ par rapport à $\alpha_2$, $\beta_2$, $\alpha_3$, $\beta_3$ est, au signe près, $\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2$ ou $\frac{1}{\cos^2\varphi}$. Comme $\varphi$ reste petit, ce changement de variables est doublement univoque.

Donc les équations en $h$, $l$, $p$, $q$, déduites des formules (9) et des équations (8), ont aussi un invariant intégral positif.

Des relations (4) et (9), on déduit

$$(10)\qquad \begin{cases} h = K\sqrt{a(1-e^2)}\sin\varpi, & p = \dfrac{1}{\cos^3\varphi}\sin\theta, \\ l = K\sqrt{a(1-e^2)}\cos\varpi, & q = \dfrac{1}{\cos^3\varphi}\cos\theta. \end{cases}$$

Donc $h$, $l$, $p$, $q$; $h'$, ... restent finies.

Par conséquent, d'après un théorème de M. Poincaré sur la stabilité, si les conditions initiales ne sont pas exceptionnelles, $h, l, p, q; h', \ldots$ reprendront une infinité de fois, sinon les valeurs initiales, du moins des valeurs aussi voisines que l'on veut de ces valeurs initiales. A cause des équations (10), il en est de même de $e$, $\varphi$, $\theta$, $\omega$; $e'$, $\varphi'$, ....

Donc, en ne considérant que des planètes dont les masses sont du même ordre, il y a stabilité, au sens de Poisson, pour les variations séculaires de leurs excentricités et de leurs inclinaisons.

## CHAPITRE II.

Considérons seulement deux planètes et cherchons un domaine dans lequel la partie de R

$$P = \frac{m'}{\sqrt{r'^2 - 2rr'\cos\delta + r^2}}$$

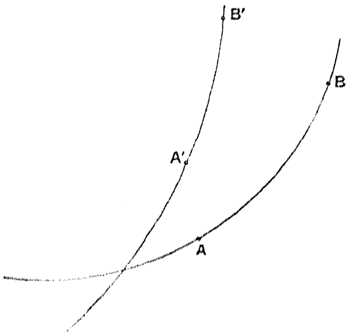
sera développable suivant les puissances des excentricités, des inclinaisons et du rapport des demi grands axes; et un maximum du module de P quand les variables restent dans ce domaine.

Nous emploierons pour cela une méthode tout à fait analogue à celle dont Cauchy s'est servi pour déterminer une limite supérieure de l'erreur commise en négligeant, dans le développement de la fonction perturbatrice, les termes qui contiennent le rapport des demi grands axes et les excentricités à des puissances supérieures à des nombres donnés.

Désignons avec Cauchy par $\varepsilon$, $\varepsilon'$ les excentricités des deux planètes; par $\tau$, $\tau'$ les anomalies moyennes; par $\psi$, $\psi'$ les anomalies excentriques; $\varpi$, $\varpi'$ les anomalies vraies; $\varphi$, $\varphi'$ les inclinaisons des orbites; $\theta$, $\theta'$ les longitudes des nœuds; $\varpi$ et $\varpi'$ celles des périhélies.

Soient (*fig.* 2) A, A′ les périhélies des deux planètes; B et B′ les

Fig. 2.




points de leurs orbites qui sont à des distances angulaires $\frac{\pi}{2}$ des périhélies.

Désignons encore, avec Cauchy, par $A_{00}$ la distance angulaire des points A et A′; par $A_{0,\frac{\pi}{2}}$; $A_{\frac{\pi}{2},0}$; $A_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$ les distances angulaires respectives des points A, A et B′; B et A′; B et B′; enfin, par $A_{\tau\tau'}$ la distance angulaire de deux planètes fictives qui décriraient des circonférences de telle façon que leurs anomalies soient constamment égales aux anomalies moyennes $\tau$, $\tau'$ des deux planètes considérées.

Les variables $\psi$, $\tau$, $\varepsilon$, $\psi'$, $\tau'$, $\varepsilon'$, ... sont liées par les relations

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\psi = \tau + \varepsilon \sin\psi, & \psi' = \tau' + \varepsilon' \sin\psi', \\
r = a(1 - \varepsilon\cos\psi), & \dots\dots\dots\dots, \\
\cos\varpi = \dfrac{\cos\psi - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\psi}, & \dots\dots\dots\dots, \\
\sin\varpi = \dfrac{\sin\psi}{1 - \varepsilon\cos\psi}\sqrt{1 - e^2}, & \dots\dots\dots\dots
\end{array}
\right.
$$

Posons, avec Cauchy,

$$\bar{\varepsilon} = \mathrm{E}\, e^{p\sqrt{-1}}, \qquad \varepsilon' = \mathrm{E}'\, e^{p'\sqrt{-1}},$$
$$\psi = \tau + \bar{\psi}, \qquad \psi' = \tau' + \bar{\psi},$$
$$\bar{\psi} = \Psi\, e^{q\sqrt{-1}}, \qquad \bar{\psi} = \Psi\, e^{q'\sqrt{-1}}$$

et, en outre,

$$\bar{\varphi} = \Phi\, e^{r\sqrt{-1}}, \qquad \bar{\theta} = \Theta\, e^{s\sqrt{-1}}, \qquad \varpi = \Pi\, e^{u\sqrt{-1}},$$
$$\bar{\varphi}' = \Phi' e^{r'\sqrt{-1}}, \qquad \bar{\theta}' = \Theta' e^{s'\sqrt{-1}}, \qquad \varpi' = \Pi' e^{u'\sqrt{-1}}.$$

Désignons par $\bar{r}$, $\bar{r}'$, $\bar{\delta}$, $\bar{\Lambda}_{00}$, ... ce que deviennent $r$, $r'$, $\delta$, $\Lambda_{00}$, ... quand on y remplace $e$, $e'$, ... par $\bar{e}$, $\bar{e}'$, ....

La fonction P deviendra ainsi

$$f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \tau + \bar{\psi}, \tau' + \bar{\psi}', \varphi, \varphi', \ldots) = \frac{m'}{\sqrt{\bar{r}'^2 - 2\bar{r}\bar{r}'\cos\bar{\delta} + \bar{r}^2}}.$$

D'une façon générale, nous désignerons par $\Lambda f$ le maximum du module d'une fonction $f$ des variables précédentes, quand celles-ci se déplacent respectivement sur des circonférences de rayons E, E', ...; et par $\Lambda' f$ le minimum du module de la fonction $f$ par le même déplacement des variables.

Nous aurons ainsi

$$\Lambda f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \ldots) = \frac{m'}{\Lambda' r' \left[\Lambda'\left(1 - \frac{2\bar{r}}{\bar{r}'}\cos\bar{\delta} + \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}};$$

or

$$\Lambda'\left(1 - \frac{2\bar{r}}{\bar{r}'}\cos\bar{\delta} + \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}\right) = \Lambda'\left[1 - \frac{2\bar{r}}{\bar{r}'}\cos\bar{\Lambda}_{\tau\tau'} + \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2} - \frac{2\bar{r}}{\bar{r}'}(\cos\bar{\delta} - \cos\Lambda_{\tau\tau'})\right],$$

$$\begin{aligned}\Lambda'\left(1 - \frac{2\bar{r}}{\bar{r}'}\cos\bar{\Lambda}_{\tau\tau'} + \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}\right) &= \Lambda'\left[1 - \frac{2\bar{r}}{\bar{r}'}\cos\Lambda_{\tau\tau'} + \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}(\cos^2\bar{\Lambda}_{\tau\tau'} + \sin^2\bar{\Lambda}_{\tau\tau'})\right] \\ &\leqq \Lambda'\left(1 - \frac{\bar{r}}{\bar{r}'}\cos\bar{\Lambda}_{\tau\tau'}\right)^2 - \Lambda\frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}\sin^2\bar{\Lambda}_{\tau\tau'} \\ &\leqq \left(1 - \frac{\Lambda\bar{r}}{\Lambda'\bar{r}'}\Lambda\cos\bar{\Lambda}_{\tau\tau'}\right)^2 - \frac{\Lambda\bar{r}^2}{\Lambda'\bar{r}'^2}\Lambda\sin^2\bar{\Lambda}_{\tau\tau'} \\ &\leqq 1 - \frac{2\Lambda\bar{r}}{\Lambda'\bar{r}'}\Lambda\cos\Lambda_{\tau\tau'} + \frac{\Lambda\bar{r}^2}{\Lambda'\bar{r}'^2}(\Lambda\cos^2\Lambda_{\tau\tau'} - \Lambda\sin^2\Lambda_{\tau\tau'}),\end{aligned}$$

mais il est aisé de voir que, d'une façon générale, si l'on pose

$$x = \mathrm{X} e^{i\chi}, \qquad y = \mathrm{Y} e^{i\eta},$$

on a

$$\Lambda \sin x = \frac{e^{\mathrm{X}} - e^{-\mathrm{X}}}{2} = \mathrm{S}(\mathrm{X}),$$

$$\Lambda \cos x = \frac{e^{\mathrm{X}} + e^{-\mathrm{X}}}{2} = \mathrm{C}(\mathrm{X}),$$

$$\Lambda \sin(x \pm y) = \frac{e^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}} - e^{-(\mathrm{X}+\mathrm{Y})}}{2} = \mathrm{S}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}),$$

$$\Lambda \cos(x \pm y) = \frac{e^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}} + e^{-(\mathrm{X}+\mathrm{Y})}}{2} = \mathrm{C}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}).$$

De plus, les fonctions $\mathrm{S}(\mathrm{X})$, $\mathrm{C}(\mathrm{X})$ satisfont aux relations suivantes, dont nous nous servirons dans la suite

$$\mathrm{C}^2(\mathrm{X}) + \mathrm{S}^2(\mathrm{X}) = \mathrm{C}(2\mathrm{X}),$$

$$\mathrm{C}(\mathrm{X})\,\mathrm{C}(\mathrm{Y}) + \mathrm{S}(\mathrm{X})\,\mathrm{S}(\mathrm{Y}) = \mathrm{C}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}),$$

$$\mathrm{C}(\mathrm{X})\,\mathrm{S}(\mathrm{Y}) + \mathrm{S}(\mathrm{X})\,\mathrm{C}(\mathrm{Y}) = \mathrm{S}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}),$$

$$\mathrm{C}^2(\mathrm{X}) - \mathrm{S}^2(\mathrm{X}) = 1.$$

Il en résulte déjà que l'expression précédente de

$$\Lambda'\left(1 - \frac{2\bar{r}}{\bar{r}'}\cos\bar{\Lambda}_{\tau\tau'} + \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}\right)$$

peut s'écrire

$$\Lambda'\left(1 - \frac{2\bar{r}}{\bar{r}'}\cos\bar{\Lambda}_{\tau\tau'} + \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}\right) \leqq \left(1 - \frac{\Lambda\bar{r}}{\Lambda'\bar{r}'}\right)^2 - \frac{2\Lambda\bar{r}}{\Lambda'\bar{r}'}(\Lambda\cos\Lambda_{\tau\tau'} - 1).$$

Désignons par $\Omega_1$ un nombre supérieur ou au moins égal au plus grand module de $(\cos\bar{\delta} - \cos\bar{\Lambda}_{\tau\tau'})$. On aura alors

$$\Lambda f \leqq \frac{m'}{a'} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\Lambda\bar{r}}{\Lambda'\bar{r}'}\right)^2 - \frac{2\Lambda\bar{r}}{\Lambda'\bar{r}'}(\Lambda\cos\Lambda_{\tau\tau'} - 1) - \frac{2\Lambda\bar{r}}{\Lambda'\bar{r}'}\Omega_1\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Posons

$$\Omega' = \Omega_1 + \Lambda \cos \Lambda_{\tau\tau'} - 1. \tag{2}$$

Il viendra

$$\Lambda f \leqq \frac{m'}{a'} \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\Lambda \bar{r}}{\Lambda' \bar{r}'}\right)^2 - \frac{2\Lambda \bar{r}}{\Lambda' \bar{r}'}\Omega_1\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Or, des formules (1), il résulte immédiatement que

$$\begin{aligned} \Lambda \bar{r} &\leqq \theta a'[1 - E\, C(\psi)], \\ \Lambda' \bar{r}' &\leqq \phantom{\theta} a'[1 + E'\, C(\psi')], \end{aligned} \qquad a' > a, \qquad \theta = \frac{a}{a'}.$$

On a donc

$$\Lambda f \leqq \frac{m'}{a'} \frac{1}{\{[1 - E'\, C(\psi') - \theta(1 + E\, C(\psi)]^2 - 2\Omega' \theta(1 + E\, C(\psi)(1 - E'\, C(\psi')\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{3}$$

Cherchons maintenant le nombre $\Omega'$.

A un instant quelconque, $\varpi$, $\varpi'$ désignent les distances angulaires des planètes à leurs périhélies A, A'. De sorte que l'on a

$$\begin{aligned} \cos\delta = {} & \cos \Lambda_{00} \cos\varpi \cos\varpi' + \cos \Lambda_{0,\frac{\pi}{2}} \cos\varpi \sin\varpi' \\ & + \cos \Lambda_{\frac{\pi}{2},0} \sin\varpi \cos\varpi' + \cos \Lambda_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} \sin\varpi \sin\varpi'. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \cos\bar{\delta} = {} & \cos \bar{\Lambda}_{00} \cos\bar{\varpi} \cos\bar{\varpi}' + \cos \bar{\Lambda}_{0,\frac{\pi}{2}} \cos\bar{\varpi} \sin\bar{\varpi}' \\ & + \cos \bar{\Lambda}_{\frac{\pi}{2},0} \sin\bar{\varpi} \sin\bar{\varpi}' + \cos \bar{\Lambda}_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} \sin\bar{\varpi} \sin\bar{\varpi}'. \end{aligned}$$

En y remplaçant $\cos\bar{\varpi}$, $\sin\bar{\varpi}$, $\cos\bar{\varpi}'$, $\sin\bar{\varpi}'$ par leurs expressions en fonction de $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}'$, $\bar{\psi}$, $\bar{\psi}'$, déduites des formules (1), et en posant

$$\begin{aligned} u &= 1 - \sqrt{1 - \bar{\varepsilon}^2}, & U &= 1 - \sqrt{1 - E^2}, \\ u' &= 1 - \sqrt{1 - \bar{\varepsilon}'^2}, & U' &= 1 - \sqrt{1 - E'^2}, \end{aligned}$$

il vient

$$\cos\bar\delta = \cos\Lambda_{00}\frac{\cos(\tau+\bar\psi)-\varepsilon}{1-\bar\varepsilon\cos(\tau+\bar\psi)}\,\frac{\cos(\tau'+\bar\psi')-\bar\varepsilon'}{1-\bar\varepsilon'\cos(\tau'+\bar\psi')}$$

$$+\cos\Lambda_{0,\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\tau+\bar\psi)-\bar\varepsilon}{1-\bar\varepsilon\cos(\tau+\bar\psi)}\,\frac{\sqrt{1-\bar\varepsilon'^2}\sin(\tau'+\bar\psi')}{1-\bar\varepsilon'\cos(\tau'+\bar\psi')}$$

$$+\cos\Lambda_{\frac{\pi}{2},0}\sqrt{1-\bar\varepsilon^2}\,\frac{\sin(\tau+\bar\psi)}{1-\bar\varepsilon\cos(\tau+\bar\psi)}\,\frac{\cos(\tau'+\bar\psi')-\bar\varepsilon'}{1-\bar\varepsilon'\cos(\tau'+\bar\psi')}$$

$$+\cos\Lambda_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\bar\varepsilon^2}\sqrt{1-\bar\varepsilon'^2}\,\frac{\sin(\tau+\bar\psi)\sin(\tau'+\bar\psi')}{[1-\bar\varepsilon\cos(\tau+\bar\psi)][1-\bar\varepsilon'\cos(\tau'+\bar\psi')]},$$

et, après quelques calculs, on trouve

$$\cos\bar\delta = \frac{\cos\bar\Lambda_{\tau+\psi,\tau'+\bar\psi'}-\bar\varepsilon\cos\bar\Lambda_{0,\tau'+\bar\psi'}-\varepsilon'\cos\bar\Lambda_{\tau+\bar\psi,0}+\bar\varepsilon\bar\varepsilon'\cos\Lambda_{00}}{[1-\bar\varepsilon\cos(\tau+\bar\psi)][1-\bar\varepsilon'\cos(\tau'+\bar\psi')]}$$

$$-\frac{u\left(\cos\bar\Lambda_{\frac{\pi}{2},\tau'+\bar\psi'}-\varepsilon'\cos\bar\Lambda_{\frac{\pi}{2},0}\right)\sin(\tau+\bar\psi)+u'\left(\cos\bar\Lambda_{\tau+\psi,\frac{\pi}{2}}-\varepsilon\cos\bar\Lambda_{0,\frac{\pi}{2}}\right)\sin(\tau'+\bar\psi')}{[1-\bar\varepsilon\cos(\tau+\bar\psi)][1-\varepsilon'\cos(\tau'+\bar\psi')]}$$

$$-\frac{uu'\sin(\tau+\bar\psi)\sin(\tau'+\bar\psi')}{[1-\bar\varepsilon\cos(\tau+\bar\psi)][1-\bar\varepsilon'\cos(\tau'+\bar\psi')]}.$$

et comme on a, d'autre part,

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\cos\bar\Lambda_{\tau+\bar\psi,\tau'+\bar\psi'}=\cos\bar\Lambda_{\tau\tau'}\cos\bar\psi\cos\bar\psi'+\cos\bar\Lambda_{\tau,\tau'+\frac{\pi}{2}}\cos\bar\psi\sin\bar\psi'\\
&\qquad+\cos\bar\Lambda_{\tau+\frac{\pi}{2},\tau'}\sin\bar\psi\sin\bar\psi'+\cos\bar\Lambda_{\tau+\frac{\pi}{2},\tau'+\frac{\pi}{2}}\sin\bar\psi\sin\bar\psi',\\
&\Lambda\sin\psi\leqq\frac{e^{\psi}-e^{-\psi}}{2}=S(\psi),\qquad \Lambda\sin\psi'\leqq S(\psi'),\\
&\Lambda\cos\psi\leqq C(\psi),\qquad \Lambda\cos\psi'\leqq C(\psi'),\\
&\Lambda\frac{1}{1-\bar\varepsilon\cos(\tau+\psi)}\leqq\frac{1}{1-E\,C(\psi)},\qquad \Lambda\frac{1}{1-\varepsilon'\cos(\tau'+\bar\psi')}\leqq\frac{1}{1-E'C(\psi')},
\end{aligned}\right.$$

on trouvera que

$$\mathrm{A}\left\{\frac{\cos\overline{\tau+\psi, \tau'+\psi'}}{[1-\bar\varepsilon\cos(\tau+\bar\psi)][1-\bar\varepsilon'\cos(\tau'+\bar\psi')]}-\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau\tau'}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&\leqq \left\{\frac{\mathrm{C}(\psi)\,\mathrm{C}(\psi')}{[1-\mathrm{E}\,\mathrm{C}(\psi)][1-\mathrm{E}'\,\mathrm{C}(\psi')]}-1\right\}\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau\tau'}\\
&+\frac{\mathrm{C}(\psi)\,\mathrm{S}(\psi')}{[1-\mathrm{E}\,\mathrm{C}(\psi)][1-\mathrm{E}'\,\mathrm{C}(\psi')]}\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau,\tau'+\frac{\pi}{2}}\\
&+\frac{\mathrm{S}(\psi)\,\mathrm{C}(\psi')}{[1-\mathrm{E}\,\mathrm{C}(\psi)][1-\mathrm{E}'\,\mathrm{C}(\psi')]}\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau+\frac{\pi}{2},\tau'}\\
&+\frac{\mathrm{S}(\psi)\,\mathrm{S}(\psi')}{[1-\mathrm{E}\,\mathrm{C}(\psi)][1-\mathrm{E}'\,\mathrm{C}(\psi')]}\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau+\frac{\pi}{2},\tau'+\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Mais, de la formule (4), il résulte que

$$\mathrm{A}\cos\mathrm{A}_{\tau+\bar\psi,0}\leqq\mathrm{C}(\psi)\ \mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau,0}+\mathrm{S}(\psi)\ \mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau+\frac{\pi}{2},0},$$

$$\mathrm{A}\cos\mathrm{A}_{0,\tau'+\psi'}\leqq\mathrm{C}(\psi')\ \mathrm{A}\cos\mathrm{A}_{0,\tau'}+\mathrm{S}(\psi')\ \mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{0,\tau'+\frac{\pi}{2}},$$

et, par suite, on pourra prendre pour la valeur de $\Omega_1$ celle que détermine l'équation suivante [1]

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
&\Omega_1[1-\mathrm{E}\,\mathrm{C}(\psi)][1-\mathrm{E}'\,\mathrm{C}(\psi')]\\
&\quad=\left\{\mathrm{C}(\psi)\,\mathrm{C}(\psi')-[1-\mathrm{E}\,\mathrm{C}(\psi)][1-\mathrm{E}'\,\mathrm{C}(\psi')]\right\}\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau\tau'}\\
&\quad+\mathrm{C}(\psi)\,\mathrm{S}(\psi')\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau,\tau'+\frac{\pi}{2}}\\
&\quad+\mathrm{S}(\psi)\,\mathrm{C}(\psi')\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau+\frac{\pi}{2},\tau'}+\mathrm{S}(\psi)\,\mathrm{S}(\psi')\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau+\frac{\pi}{2},\tau'+\frac{\pi}{2}}\\
&\quad+\mathrm{E}\left[\mathrm{C}(\psi')\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{0,\tau'}+\mathrm{S}(\psi')\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{0,\tau'+\frac{\pi}{2}}\right]\\
&\quad+\mathrm{E}'\left[\mathrm{C}(\psi)\ \mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau,0}+\mathrm{S}(\psi)\ \mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau+\frac{\pi}{2},0}\right]+\mathrm{E}\mathrm{E}'\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{00}\\
&\quad+\mathrm{U}\left[\mathrm{C}(\psi')\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\frac{\pi}{2},\tau'}+\mathrm{S}(\psi')\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\frac{\pi}{2},\tau'+\frac{\pi}{2}}+\mathrm{E}'\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\frac{\pi}{2},0}\right]\mathrm{C}(\psi)\\
&\quad+\mathrm{U}'\left[\mathrm{C}(\psi)\ \mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau,\frac{\pi}{2}}+\mathrm{S}(\psi)\ \mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\tau+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}+\mathrm{E}\ \mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{0,\frac{\pi}{2}}\right]\mathrm{C}(\psi')\\
&\quad+\mathrm{U}\mathrm{U}'\,\mathrm{C}(\psi)\,\mathrm{C}(\psi')\mathrm{A}\cos\overline{\mathrm{A}}_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

---

[1] J'ai trouvé ce calcul de $\Omega_1$ dans un Mémoire autographié de Cauchy publié à Turin et sur lequel M. Tisserand avait pris des Notes qu'il a bien voulu me communiquer.

Soit $k$ le plus grand des nombres $A\cos\overline{A}_{00}$, $A\cos\overline{A}_{0,\frac{\pi}{2}}$, ... quand les variables $\varphi$, $\varphi'$, $\theta$, $\theta'$, $\omega$, $\omega'$ se déplacent dans le domaine considéré.

On pourra prendre pour valeur de $\Omega_1$ celle que l'on déduit de l'équation précédente en y remplaçant par $k$ tous les nombres $A\cos\overline{A}_{00}$, $A\cos\overline{A}_{0,\frac{\pi}{2}}$, ....

On aura ainsi

$$\Omega_1 = \left[\frac{e^{\psi} + E + U\,C(\psi)}{1 - E\,C(\psi)}\,\frac{e^{\psi'} + E' + U'\,C(\psi')}{1 - E'\,C(\psi')} - 1\right]k,$$

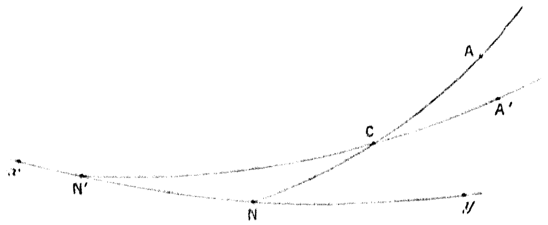
et la formule (2) nous donnera, pour déterminer $\Omega_1$, l'équation

$$\Omega' + 1 = \frac{e^{\psi} + E + U\,C(\psi)}{1 - E\,C(\psi)}\,\frac{e^{\psi'} + E' + U'\,C(\psi')}{1 - E'\,C(\psi')}\,k. \tag{6}$$

Cherchons les quantités $A\cos\overline{A}_{00}$, $A\cos A_{0,\frac{\pi}{2}}$, $A\cos A_{\frac{\pi}{2},0}$, ....

Soient (*fig.* 3) $xy$ le plan de l'écliptique pris pour plan de coor-

Fig. 3.




données; NA, N'A' les orbites des deux planètes. Posons

$$\begin{aligned} &x\mathrm{N} = \theta, && x\mathrm{N} + \mathrm{NA} = \omega, && x\mathrm{N} + \mathrm{NG} = \tau,\\ &x\mathrm{N}' = \theta', && x\mathrm{N}' + \mathrm{N'A'} = \omega', && x\mathrm{N}' + \mathrm{N'G} = \tau',\\ &\widehat{y\mathrm{NG}} = \varphi, && \widehat{y\mathrm{N'G}} = \varphi', && \widehat{\mathrm{NGN'}} = \mathrm{J}, \end{aligned}$$

$$\sin\frac{\mathrm{J}}{2} = \eta,$$

on aura

$$
\begin{aligned}
\cos A_{00} = {} & \cos(\omega - \tau)\cos(\omega' - \tau') + \sin(\omega - \tau)\sin(\omega' - \tau')\cos J \\
= {} & \cos(\omega + \omega')\cos(\tau + \tau') + \sin(\omega + \omega')\sin(\tau + \tau') \\
& + [\cos(\omega + \omega')\cos(\tau + \tau') - \sin(\omega + \omega')\sin(\tau + \tau')]\left(\cos^2\frac{J}{2} - \sin^2\frac{J}{2}\right);
\end{aligned}
$$

or les formules de Delambre nous donnent (¹)

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{J}{2}\cos\frac{\tau + \tau'}{2} &= \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi'}{2}\cos\theta - \sin\frac{\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\theta', \\
\sin\frac{J}{2}\sin\frac{\tau + \tau'}{2} &= \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi'}{2}\sin\theta - \sin\frac{\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\theta', \\
\cos\frac{J}{2}\cos\frac{\tau - \tau'}{2} &= \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi'}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi'}{2}\cos(\theta - \theta'), \\
\cos\frac{J}{2}\sin\frac{\tau - \tau'}{2} &= \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi'}{2}\sin(\theta - \theta').
\end{aligned}
$$

En remplaçant les premiers membres de cette égalité par les seconds dans l'expression de $\cos A_{00}$, il vient, après quelques calculs,

$$
\begin{aligned}
\text{s}A_{00} = {} & \cos(\varpi + \varpi')\left[\sin^2\frac{\varphi - \varphi'}{2} + \sin\varphi\sin\varphi'\sin^2\frac{\theta + \theta'}{2}\right] \\
& + \cos(\varpi - \varpi')\left[\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi'}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi'}{2}\cos(2\theta - 2\theta') + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\sin\varphi'\cos(\theta - \theta')\right] \\
& + \sin(\varpi + \varpi')\left[\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi'}{2}\sin 2\theta + \sin^2\frac{\varphi'}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin 2\theta' - \tfrac{1}{2}\sin\varphi\sin\varphi'\sin(\theta + \theta')\right] \\
& + \sin(\varpi - \varpi')\left[\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi'}{2}\sin 2(\theta - \theta') + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\sin\varphi'\sin(\theta + \theta')\right].
\end{aligned}
$$

Pour abréger l'écriture, nous désignerons par (I), (II), (III) et (IV) les coefficients respectifs de $\cos(\varpi + \varpi')$, $\cos(\varpi - \varpi')$, $\sin(\varpi + \varpi')$, $\sin(\varpi - \varpi')$, et nous écrirons ainsi

$$
\cos A_{00} = (\mathrm{I})\cos(\varpi + \varpi') + (\mathrm{II})\cos(\varpi - \varpi') + (\mathrm{III})\sin(\varpi + \varpi') + (\mathrm{IV})\sin(\varpi - \varpi').
$$

On obtiendra $\cos A_{\frac{\pi}{2},0}$ en remplaçant dans la formule précédente $\varpi$

(¹) TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. I, p. 294.

par $\varpi + \frac{\pi}{2}$, et l'on trouvera

$$\cos A_{\frac{\pi}{2},0} = -(\mathrm{I})\sin(\varpi+\varpi') - (\mathrm{II})\sin(\varpi-\varpi') + (\mathrm{III})\cos(\varpi+\varpi') + (\mathrm{IV})\sin(\varpi-\varpi').$$

De même

$$\cos A_{0,\frac{\pi}{2}} = -(\mathrm{I})\sin(\varpi+\varpi') + (\mathrm{II})\sin(\varpi-\varpi') + (\mathrm{III})\cos(\varpi+\varpi') + (\mathrm{IV})\cos(\varpi-\varpi'),$$

$$\cos A_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} = -(\mathrm{I})\cos(\varpi+\varpi') + (\mathrm{II})\cos(\varpi-\varpi') - (\mathrm{III})\sin(\varpi+\varpi') + (\mathrm{IV})\sin(\varpi-\varpi').$$

En se reportant aux expressions de (I), (II), (III) et (IV), il est manifeste que

$$A(\mathrm{I}) \leqq S^2\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right) + S(\varphi)S(\varphi')S^2\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right),$$

$$A(\mathrm{II}) \leqq \left[C\left(\frac{\varphi}{2}\right)C\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2 + \left[S\left(\frac{\varphi}{2}\right)S\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2 C(2\theta+2\theta') + \tfrac{1}{2}S(\varphi)S(\varphi')C(\theta+\theta'),$$

$$A(\mathrm{III}) \leqq \left[S\left(\frac{\varphi}{2}\right)C\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2 S(2\theta) + \left[S\left(\frac{\varphi'}{2}\right)C\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]^2 S(2\theta') + \tfrac{1}{2}S(\varphi)S(\varphi')S(\theta+\theta'),$$

$$A(\mathrm{IV}) \leqq \left[S\left(\frac{\varphi}{2}\right)S\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2 S(2\theta+2\theta') + \tfrac{1}{2}S(\varphi)S(\varphi')S(\theta+\theta').$$

Des formules qui donnent $\cos A_{0,0}$, $\cos A_{\frac{\pi}{2},0}$, on conclut que

$$A\cos A_{00} \leqq C(\varpi+\varpi')[A(\mathrm{I}) + A(\mathrm{II})] + S(\varpi+\varpi')[A(\mathrm{III}) + A(\mathrm{IV})],$$

$$A\cos A_{\frac{\pi}{2},0} \leqq S(\varpi+\varpi')[A(\mathrm{I}) + A(\mathrm{II})] + C(\varpi+\varpi')[A(\mathrm{III}) + A(\mathrm{IV})],$$

et l'on peut prendre pour $A\cos A_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$, $A\cos A_{0,\frac{\pi}{2}}$ les mêmes valeurs que pour $A\cos A_{0,0}$, $A\cos A_{\frac{\pi}{2},0}$, ainsi que cela résulte des expressions de $\cos A_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$ et $\cos A_{\frac{\pi}{2},0}$. Donc

$$A\cos A_{0,\frac{\pi}{2}} = A\cos A_{\frac{\pi}{2},0},$$

$$A\cos A_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} = A\cos A_{0,0}.$$

Déterminons $A \cos A_{\tau\tau'}$. On a

$$\cos A_{\tau\tau'} = \cos A_{00} \cos\tau \cos\tau' + \cos A_{0,\frac{\pi}{2}} \cos\tau \sin\tau'$$
$$+ \cos A_{\frac{\pi}{2},0} \sin\tau \cos\tau' + \cos A_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} \sin\tau \sin\tau',$$

$$A \cos A_{\tau\tau'} \leqq A \cos A_{00} \sqrt{\cos^2(\tau - \tau')} + A \cos A_{0,\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(\tau + \tau')},$$
$$A \cos A_{\tau\tau'} \leqq A \cos A_{00} + A \cos A_{0,\frac{\pi}{2}}.$$

En y remplaçant $A \cos A_{0,0}$, $A \cos A_{0,\frac{\pi}{2}}$ par les valeurs trouvées précédemment, il vient, après réduction,

$$A \cos A_{\tau\tau'} \leqq [A(\mathrm{I}) + A(\mathrm{II}) + A(\mathrm{III}) + A(\mathrm{IV})] e^{\pi+\pi'}.$$

Posons

$$(7) \qquad A(\mathrm{I}) + A(\mathrm{II}) + A(\mathrm{III}) + A(\mathrm{IV}) = k',$$

nous aurons

$$(8) \qquad k = k' e^{\pi+\pi'},$$

et le nombre $\Omega'$ pourra être déterminé par l'équation

$$\Omega' + 1 = \frac{e^{\psi} + E + U\,C(\psi)}{1 - E\,C(\psi)} e^{\pi} \frac{e^{\psi'} + E' + U'\,C(\psi')}{1 - E'\,C(\psi')} e^{\pi'} k'.$$

Enfin, en posant

$$(9) \qquad \frac{e^{\psi} + E + U\,C(\psi)}{1 - E\,C(\psi)} e^{\pi} = V_1, \qquad \frac{e^{\psi'} + E' + U'\,C\psi'}{1 - E'\,C\psi'} e^{\pi'} = V'_1,$$

on aura

$$(10) \quad \begin{cases} \Omega' + 1 = V_1 V'_1 k', \\ A f \leqq \dfrac{m'}{a'} \dfrac{1}{\{\{1 - E'C(\psi') - \Theta[1 + E\,C(\psi)]\}^2 - 2\Omega'\Theta[1 + E\,C(\psi)][1 - E'C(\psi')]\}^{\frac{1}{2}}}. \end{cases}$$

Ainsi donc la fonction $f$ restera finie et continue quand les variables $\Theta = \frac{a}{a'}$, $\varepsilon$, $\varepsilon'$, ... se déplaceront à l'intérieur de cercles de rayon $\Theta$, E, E′, ..., pourvu que les nombres Θ, E, E′ soient tels que

$$(11)\qquad \{1 - E' C(\psi') - \Theta[1 + E C(\psi)]\}^2 - 2\Omega'\Theta[1 + E C(\psi)][1 - E' C(\psi')] \geqq 0,$$

et, dans ce domaine, le maximum de son module sera donné par la formule (10).

Nous devons cependant rappeler que, dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les nombres E, E′, $\psi$, $\psi'$ sont tels que

$$E C(\psi) < 1, \qquad E' C(\psi') < 1.$$

Ce qui précède nous conduit immédiatement à la détermination d'une limite supérieure de l'erreur commise en négligeant dans le développement, suivant les puissances du rapport des demi grands axes $\theta$, des excentricités $\varepsilon$, $\varepsilon'$ et des inclinaisons $\varphi$, $\varphi'$, de la partie $\dfrac{m'}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\delta + r'^2}}$ de la fonction perturbatrice, les termes où les exposants de $\theta$, $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varphi$, $\varphi'$ sont respectivement supérieurs à des nombres donnés $j$, $n$, $n'$, $n''$, $n'''$.

Il suffit pour cela d'employer, sans aucune modification, la méthode dont Cauchy s'est servi pour trouver une limite supérieure de l'erreur commise, en négligeant dans le développement de la même fonction les termes où les exposants de $\theta$, $\varepsilon$, $\varepsilon'$ sont supérieurs à des nombres donnés (¹).

Pour plus de clarté, nous allons rappeler les principaux théorèmes sur lesquels nous nous appuierons avec Cauchy.

1° Soient les équations

$$y = b + x \sin y, \qquad y' = b' + x' \sin y'.$$

Si les modules de $x$ et $x'$ sont inférieurs au nombre 0,664, alors chacune de ces équations offre une seule racine, correspond à une valeur de $y - b$, $y' - b'$, dont le module est inférieur au nombre 1,199678.

Cela posé, si la fonction

$$F(x, x', y, y') = F(x, x', b + z, b' + z')$$

(¹) Ce paragraphe est, sauf quelques modifications, emprunté aux Notes de M. Tisserand dont j'ai déjà parlé plus haut.

reste finie et continue pour les valeurs de $x$, $x'$ de modules moindres que $1,199$, alors, en posant

$$\bar{z} = z\, e^{p\sqrt{-1}}, \qquad \bar{z}' = z\, e^{p'\sqrt{-1}}$$

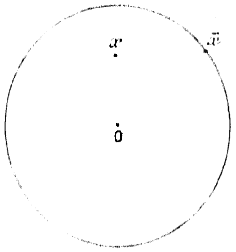
et, en supposant les modules $z$, $z'$ inférieurs eux-mêmes au nombre $1,199$, on aura

$$F(x, x', y, y') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{z}\,\bar{z}'\, \frac{1 - x\cos(b + \bar{z})}{\bar{z} - x\sin(b + \bar{z})}\, \frac{1 - x'\cos(b' + \bar{z}')}{\bar{z}' - x'\sin(b' + \bar{z}')}\, F(x, x', b + \bar{z}, b' + \bar{z}').$$

Cette formule reste vraie lorsque la fonction $f$ dépend d'autres variables que $x$, $x'$, $y$, $y'$.

2° Soit $f(x)$ une fonction finie et continue quand la variable $x$ se

Fig. 4.




meut dans un cercle de rayon X (*fig.* 4), faisons

$$\bar{x} = X\, e^{p\sqrt{-1}}.$$

Nous aurons

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{x}}{\bar{x} - x} f(\bar{x})\, dp,$$

sous la condition

$$|x| = \xi < X.$$

Or on a

$$\frac{\bar{x}}{\bar{x} - x} = 1 + \frac{x}{\bar{x}} + \frac{x^2}{\bar{x}^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{\bar{x}^{n-1}} + \frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x} - x)},$$

et, par conséquent, l'erreur que l'on commet, en négligeant dans le développement de $f(x)$ les termes qui contiennent $x$ à une puissance supérieure à $\eta$, a un module moindre que

$$\frac{\xi^n}{\mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X}-\xi)}\Lambda f(\bar{x}),$$

ou encore moindre que le reste de la série

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{X}-\xi}\Lambda f(\bar{x}),$$

développée suivant les puissances de $\xi$.

Considérons une fonction de deux variables $x$, $x'$ qui reste finie et continue pour toutes les valeurs de $x$ et $x'$ de modules moindres que X, X'. Posons

$$\bar{x}=\mathrm{X}\,e^{p\sqrt{-1}},\qquad \bar{x}'=\mathrm{X}'\,e^{p'\sqrt{-1}}.$$

Si l'on développe $f(x, x')$ suivant les puissances de $x$, le reste de cette série aura un module moindre que le reste du développement, suivant les puissances de $\xi$, de la série qui donne

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{X}-\xi}\Lambda f(\bar{x}, x'),$$

et, par conséquent, un module inférieur à

$$\frac{\xi^n}{\mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X}-\xi)}\Lambda f(\bar{x}, x'), \tag{1}$$

le module $\xi$ étant moindre que X.

Et la somme des termes qui renferment des puissances de $x$ au-dessous de la $n^{\text{ième}}$ sera représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\bar{x}^n-x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}f(\bar{x}, x')\,dp \tag{2}$$

ou encore par l'intégrale double

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\bar{x}'}{\bar{x}'-x}\,\frac{\bar{x}^n-x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}, x)}f(\bar{x}, \bar{x}')\,dp\,dp'. \tag{3}$$

Si l'on développe la fonction (2) ou (3) en une série ordonnée suivant les puissances de $x'$, le reste de la série, prolongée jusqu'au terme qui renferme $x'$ à la puissance $n'$, aura un module moindre que le reste de la série

$$\frac{X'}{X'-\xi'}\Lambda\frac{\bar{x}^n-x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}f(\bar{x},\bar{x}'),$$

et, *a fortiori*, inférieur au reste du développement de l'expression

$$\frac{X'}{X'-\xi'}\,\frac{X^n-\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\Lambda f(\bar{x},\bar{x}'),$$

en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\xi$, c'est-à-dire au produit

$$(4)\qquad \frac{\xi'^{n'}}{X'^{n'-1}(X'-\xi')}\,\frac{X^n-\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\Lambda f(\bar{x},\bar{x}'),$$

$X$ pouvant être supérieur ou inférieur à $\xi$ et $X'$ devant être supérieur à $\xi'$.

En ajoutant le produit (4) au produit (1), on aura une limite supérieure de l'erreur commise, en ne conservant dans le développement de la fonction $f(x, x')$ que les termes qui renferment $x$ à des puissances inférieures à $n$ et $x'$ à des puissances inférieures à $n'$.

Donc, en définitive, cette erreur ne surpassera pas la somme des nombres que l'on tire des deux produits

$$\frac{X}{X-\xi}\Lambda f(\bar{x},\bar{x}'),\qquad \frac{X'}{X'-\xi'}\,\frac{X}{X-\xi}\Lambda f(\bar{x},\bar{x}'),$$

lorsqu'en supposant dans le premier produit $X>\xi$, dans le second $X'>\xi'$ et $X \gtrless \xi$; on remplace la fonction $\frac{X}{X-\xi}$, dans le second produit, par la somme des $n$ premiers termes du développement de cette expression suivant les puissances de $\xi$, et dans le premier produit par le reste de la même série. Puis la fraction $\frac{X'}{X'-\xi'}$ par le reste de son développement en série ordonnée suivant les puissances de $\xi'$ et prolongée jusqu'à la puissance $\xi'^{n-1}$.

Pareillement, si, dans le développement de $f(x, y, z, \ldots)$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$, on néglige tous les termes dans lesquels les exposants de $x$, $y$, $z$, ... sont respectivement égaux ou supérieurs à des nombres donnés, $n$, $n'$, $n''$ la somme des termes négligés offrira un module moindre que la somme des nombres que l'on tire des produits

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{X}{X-\xi}\Lambda f(\overline{x}, y, z, \ldots), \\ \dfrac{Y}{Y-\eta}\dfrac{X}{X-\xi}\Lambda f(\overline{x}, \overline{y}, z, \ldots), \\ \dfrac{Z}{Z-\zeta}\dfrac{Y}{Y-\eta}\dfrac{X}{X-\xi}\Lambda f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

lorsque, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, ... étant les modules de $x$, $y$, $z$, ...; X, Y, Z, ... ceux de $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, ... on suppose dans le premier produit $X > \xi$, dans le second $Y > \eta$, X pouvant être plus grand ou plus petit que $\xi$, dans le troisième produit $Z > Y$; X, Y pouvant être plus grands ou plus petits que $\xi$, $\eta$, ... et que l'on remplace $\frac{X}{X-\xi}$, dans le second, le troisième, etc. produit par la somme des $n$ premiers termes de son développement suivant les puissances de $\xi$, et dans le premier produit par le reste de cette même série; puis la fraction $\frac{Y}{Y-\eta}$ dans le troisième produit et les suivants par la somme des $n'$ premiers termes de son développement suivant les puissances de $\xi'$ et dans le second par le reste de cette même série.

Ajoutons que les valeurs attribuées aux nombres X, Y, Z, ... doivent être telles que les fonctions

$$f(\overline{x}, y, z, \ldots), \quad f(\overline{x}, \overline{y}, z, \ldots), \quad f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots), \quad \ldots$$

restent finies et continues, pour ces modules, et aussi pour les modules plus petits.

Observons encore que la somme des termes qui dans le développement de $f(x, y, z, \ldots)$ renferme des puissances de $x$ inférieures à $n$ sera représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\overline{x}^n - x^n}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)} f(\overline{x}, y, z, \ldots)\, dp.$$

Et, en vertu des principes établis, la somme des termes qui, dans le développement de l'intégrale précédente, renferment des puissances de $y$, $z$, ... à des degrés égaux ou supérieurs aux nombres $n'$, $n''$, ... offrira un module inférieur à la somme des termes qui renferment les mêmes puissances dans le développement du produit

$$(6)\qquad \frac{Y}{Y-\eta}\,\frac{Z}{Z-\eta}\cdots\Lambda\,\frac{\bar{x}^n - x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\ldots).$$

Donc, si dans le développement de $f(x,y,z,\ldots)$ en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x$, $y$, $z$, ... on conserve seulement les termes qui renferment des puissances de $x$, $y$, $z$, ..., dont les degrés sont inférieurs à $n$, $n'$, $n''$, ..., l'erreur commise offrira un module inférieur à la somme des nombres que l'on tire des deux produits

$$(6)\qquad \frac{X}{X-\xi}\Lambda f(\bar{x},y,z,\ldots),\quad \frac{X}{X-\xi}\,\frac{Y}{Y-\eta}\,\frac{Z}{Z-\zeta}\cdots\Lambda f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\ldots),$$

lorsqu'on remplace, dans le premier produit, la fraction $\frac{X}{X-\xi}$ par le reste du développement de cette fraction en une série ordonnée suivant les puissances de $\xi$, et arrêtée avant le terme qui renferme $\xi$ à la puissance $n$; dans le second produit, par la somme des $n$ premiers termes de cette même série, puis l'expression $\frac{Y}{Y-\eta}\,\frac{Z}{Z-\zeta}\cdots$ par la somme des termes qui, dans le développement de cette expression suivant les puissances ascendantes de $\eta$, $\xi$, ..., renferment des puissances de $\eta$, $\zeta$, ... d'un degré respectivement égal ou supérieur à $n'$, $n''$, ....

Ayant rappelé ces théorèmes, posons

$$(1)\qquad P = \frac{m'}{\sqrt{r'^2 - 2rr'\cos\delta + r^2}} = f(\varepsilon, \varepsilon', \theta, \psi, \psi', \varphi, \varphi').$$

Les variables $\psi$, $\psi'$, $\varepsilon$, $\varepsilon'$ et les anomalies moyennes $\tau$, $\tau'$ sont liées par les relations

$$\psi = \tau + \varepsilon\sin\psi,\qquad \psi' = \tau' + \varepsilon'\sin\psi'.$$

Posons

$$\bar\psi = \Psi e^{q\sqrt{-1}},\qquad \varepsilon = \mathrm{E} e^{p\sqrt{-1}},\qquad \theta = \Theta e^{s\sqrt{-1}},\qquad \varphi = \Phi e^{r\sqrt{-1}},\qquad \theta = \frac{a}{a'}.$$
$$\psi' = \Psi' e^{q'\sqrt{-1}},\qquad \ldots\ldots\ldots,\qquad \ldots\ldots\ldots,\qquad \ldots\ldots\ldots,$$

La somme des termes qui, dans le développement de $f$, renferme des puissances de $\theta$ inférieures à $\theta^j$, sera représentée par l'intégrale

$$(2)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\bar\theta^j - \theta^j}{\bar\theta^{j-1}(\bar\theta - \theta)} f(\varepsilon, \varepsilon', \bar\theta, \psi, \psi', \varphi, \varphi')\, \overline{ds},$$

et la somme des termes négligés offrira un module inférieur au reste du développement de la série qui, ordonnée suivant les puissances de $\theta$, donne

$$\frac{\Theta}{\Theta - \theta} \Lambda f(\varepsilon, \varepsilon', \bar\theta, \psi, \psi', \varphi, \varphi'),$$

lorsqu'on y néglige les puissances de $\theta$ supérieures à $\theta^j$, c'est-à-dire inférieures à

$$(3)\qquad \frac{\theta^j}{\Theta^{j-1}(\Theta - \theta)} \Lambda f(\varepsilon, \varepsilon', \bar\theta, \psi, \psi', \varphi, \varphi').$$

Cherchons ensuite une limite supérieure de l'erreur commise en négligeant dans le développement de la fonction (2) les termes où les puissances de $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varphi$, $\varphi'$ sont supérieures à des nombres donnés $n$, $n'$, $n''$, $n'''$.

D'après les théorèmes que nous avons rappelés pages 62 et suivantes, on a successivement

$$f(\varepsilon, \varepsilon', \bar\theta, \psi, \psi', \varphi, \varphi')$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar\psi\bar\psi' \frac{1 - \varepsilon\cos(\tau + \bar\psi)}{\bar\psi - \varepsilon\sin(\tau + \bar\psi)} \frac{1 - \varepsilon'\cos(\tau' + \bar\psi')}{\bar\psi' - \varepsilon'\sin(\tau' + \bar\psi')} f(\varepsilon, \varepsilon', \bar\theta, \tau + \bar\psi, \tau' + \psi', \varphi, \varphi')\, dq\, dq',$$

$$f(\varepsilon, \varepsilon', \bar\theta, \bar\psi, \bar\psi', \varphi, \varphi')$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{0\,(4)}^{2\pi} \frac{\bar\varepsilon}{\bar\varepsilon - \varepsilon}\, \frac{\bar\varepsilon'}{\bar\varepsilon' - \varepsilon}\, \frac{\bar\varphi}{\bar\varphi - \varphi}\, \frac{\bar\varphi'}{\bar\varphi' - \varphi} f(\bar\varepsilon, \bar\varepsilon', \bar\theta, \bar\psi, \bar\psi', \bar\varphi, \bar\varphi')\, dp\, dp'\, dr\, dr'.$$

De sorte que

$$
\begin{aligned}
f(\varepsilon, \varepsilon', \bar{\theta}, \psi, \psi', \varphi, \varphi')
&= \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{(6)\,0}^{2\pi} \psi\psi' \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}-\varepsilon} \frac{\bar{\varepsilon}'}{\bar{\varepsilon}'-\varepsilon} \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\varphi}-\varphi} \frac{\bar{\varphi}'}{\bar{\varphi}'-\varphi} \\
&\quad \times \frac{1-\varepsilon\cos(\tau+\bar{\psi})}{\bar{\psi}-\varepsilon\sin(\tau+\bar{\psi})} \frac{1-\varepsilon'\cos(\tau'+\bar{\psi}')}{\bar{\psi}'-\varepsilon'\sin(\tau'+\bar{\psi}')} f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\theta}, \tau+\bar{\psi}, \ldots, \varphi')\, dq \ldots dr',
\end{aligned}
$$

en supposant toutefois que la fonction $f$ reste finie et continue quand les variables $\varepsilon, \varepsilon', \ldots, \varphi, \varphi'$ se déplacent respectivement à l'intérieur de circonférences de rayons $E, E', \ldots, \Phi'$.

Et, en outre, que les nombres $E, E', \ldots, \Phi'$ sont choisis de façon que

$$
\begin{array}{llll}
\varepsilon < E, & \varepsilon\Lambda \dfrac{\sin(\tau+\bar{\psi})}{\bar{\psi}} < 1, & \varphi < \Phi, & \\
& & & \theta < \Theta. \\
\varepsilon' < E', & \varepsilon'\Lambda \dfrac{\sin(\tau'+\bar{\psi}')}{\bar{\psi}'} < 1, & \varphi' < \Phi', &
\end{array}
$$

Ces dernières conditions ne peuvent être remplies qu'autant que les $\varepsilon, \varepsilon'$ restent inférieurs à l'unité divisée par le module principal de l'expression $\Lambda \dfrac{\sin(\tau+\bar{\psi})}{\bar{\psi}}$, ou bien au nombre 0,667.

Avec ces hypothèses, le reste de la série qui exprime la fonction (2) aura un module moindre que le reste de la série qui a pour somme

$$
\Lambda \frac{\bar{\theta}^j - \theta^j}{\bar{\theta}^{j-1}(\bar{\theta}-\theta)} \bar{\psi}\bar{\psi}' \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}-\varepsilon} \frac{\bar{\varepsilon}'}{\bar{\varepsilon}'-\varepsilon} \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\varphi}-\varphi} \frac{\bar{\varphi}'}{\bar{\varphi}'-\varphi} \frac{1-\varepsilon\cos(\tau+\bar{\psi})}{\bar{\psi}-\varepsilon\sin(\tau+\bar{\psi})} \frac{1-\varepsilon'\cos(\tau'+\bar{\psi}')}{\bar{\psi}'-\varepsilon'\sin(\tau'+\bar{\psi}')} f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\theta}, \bar{\psi}, \bar{\psi}', \bar{\varphi}, \bar{\varphi}'),
$$

et à plus forte raison moindre que le reste de la série qui a pour somme

$$
\frac{\Theta^{j'} - \theta^j}{\Theta^{j-1}(\Theta-\theta)} \Psi\Psi' \frac{E}{E-\varepsilon} \frac{E'}{E'-\varepsilon'} \frac{\Phi}{\Phi-\varphi} \frac{\Phi'}{\Phi'-\varphi'} \frac{1+EC(\psi)}{\psi-EC(\psi)} \frac{1+E'C(\psi')}{\psi-E'C(\psi')} \Lambda f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \ldots, \bar{\varphi}'),
$$

les nombres $\psi, \psi'$ étant choisis de manière à vérifier les conditions

$$
EC(\Psi) < \Psi, \qquad E'C(\Psi') < \Psi',
$$

et la fonction $f(\varepsilon, \varepsilon', \ldots, \varphi')$ restant finie et continue quand les variables $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varphi$, $\varphi'$, $\theta$ se déplacent à l'intérieur de circonférences de rayons E, E', $\Phi$, $\Phi'$, $\Theta$.

Nous avons trouvé que cette dernière condition sera vérifiée si les nombres E, E', ..., $\Theta$ sont tels que

$$(3)\quad \{1-E'C(\psi')-\Theta[1+EC(\psi)]\}^2-2\Omega'\Theta[1+EC(\psi)][1-E'C(\psi')]\geqq 0,$$

et que le maximum du module de la fonction $f$ dans un tel domaine était

$$(4)\quad \Lambda f \leqq \frac{m'}{a'}\frac{1}{\{(1-E'C(\psi')-\Theta[1+EC(\psi)])^2-2\Omega'\Theta[1+EC(\psi)][1-E'C(\psi')]\}^{\frac{1}{2}}}.$$

En résumé, la somme des termes que l'on néglige dans le développement de la fonction $f(\varepsilon, \ldots, \varphi')$, quand on ne conserve que les termes où les degrés de $\theta$, $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varphi$, $\varphi'$ sont respectivement égaux ou inférieurs aux nombres $j$, $n$, $n'$, $n''$, $n'''$, offre un module moindre que la somme des nombres que l'on tire des deux produits

$$(5)\qquad \frac{\Theta}{\Theta-\theta}\,\Lambda f(\varepsilon, \varepsilon', \bar{\theta}, \psi, \psi', \varphi, \varphi'),$$

$$(6)\qquad \psi\psi'\frac{E}{E-\varepsilon}\frac{E'}{E'-\varepsilon'}\frac{\Phi}{\Phi-\varphi}\frac{\Phi'}{\Phi'-\varphi'}\frac{\Theta}{\Theta-\theta}\frac{1+EC(\psi)}{1-EC(\psi)}\frac{1+E'C(\psi')}{1-E'C(\psi')}\Lambda f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\theta}, \bar{\psi}, \bar{\psi}', \bar{\varphi}, \bar{\varphi}'),$$

lorsqu'on remplace la fraction $\frac{\Theta}{\Theta-\theta}$; dans le premier produit, par le reste du développement de cette fraction en une série ordonnée suivant les puissances de $\theta$ et arrêtée avant le terme qui renferme $\theta_j$; dans le second produit, par la somme des $j$ premiers termes de cette même série; puis l'expression $\frac{E}{E-\varepsilon}\frac{E'}{E'-\varepsilon'}\frac{\Phi}{\Phi-\varphi}\frac{\Phi'}{\Phi'-\varphi'}$ par la somme des termes qui, dans le développement de cette expression suivant les puissances de $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varphi$, $\varphi'$, renferment des puissances de $\varepsilon$ d'un degré égal ou supérieur à $n$, ou des puissances de $\varepsilon'$ d'un degré égal ou supérieur à $n'$; de $\varphi$ d'un degré égal ou supérieur à $n''$ et de $\varphi'$ d'un degré égal ou supérieur à $n'''$; en supposant, toutefois, les modules $\Theta$, E, E', .., $\Phi'$ de $\bar{\theta}, \bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}, \ldots, \bar{\varphi}'$ choisis de façon à vérifier, dans le premier produit, la condition dans le second, les conditions

$$
(7)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
\varepsilon < \mathrm{E}, & \mathrm{E\,C}(\psi) < \psi, & \varphi < \Phi, \\
\varepsilon' < \mathrm{E}', & \mathrm{E}'\mathrm{C}(\psi') < \psi', & \varphi' < \Phi', \\
\multicolumn{3}{l}{\left[1 - \Theta\,\dfrac{1+\mathrm{E\,C}(\psi)}{1-\mathrm{E}'\mathrm{C}(\psi')}\right]^2 > 2\Omega'\Theta\,\dfrac{1+\mathrm{E\,C}(\psi)}{1-\mathrm{E}'\,\mathrm{C}(\psi')}.}
\end{array}\right.
$$

D'ailleurs, en supposant

$$\theta < \Theta < \frac{1-\varepsilon'}{1+\varepsilon} \qquad \text{et, par suite,} \qquad r < r',$$

on aura

$$f(\varepsilon, \varepsilon', \ldots, \varphi') = \frac{1}{r'\sqrt{1-\Theta\,\dfrac{1-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}\,e^{\delta\sqrt{-1}}}\sqrt{1-\Theta\,\dfrac{1-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}\,e^{-\delta\sqrt{-1}}}},$$

$$\Lambda\frac{1}{\sqrt{1-\bar{\theta}\,\dfrac{1-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}\,e^{\delta\sqrt{-1}}}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-\Theta\,\dfrac{1-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\Theta}{\theta}\,\dfrac{r}{r'}}},$$

et, par conséquent,

$$\Lambda f(\varepsilon, \varepsilon', \bar{\theta}, \psi, \psi', \varphi, \varphi') \leqq \frac{m'}{r' - \dfrac{\Theta}{\theta}\,r} \leqq \frac{m'}{a'[1-\varepsilon'-\Theta(1+\varepsilon)]}.$$

Pour toutes les grosses planètes on a

$$\theta < \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon'}.$$

On peut donc déterminer $\Theta$ de façon que

$$(8)\qquad \theta < \Theta < \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon'}.$$

La formule (5) est donc applicable pour toutes les grosses planètes.

Passons à l'expression (6) :

Elle suppose que les nombres $\mathrm{E}, \mathrm{E}', \psi, \ldots, \Phi'$ vérifient les conditions (7). Les premières de ces conditions peuvent se remplacer par les suivantes :

$$\psi < 1, \qquad \psi' < 1,$$

$$\varepsilon < \mathrm{E} < \frac{2\psi}{e^{\psi}+e^{-\psi}}, \qquad \varepsilon' < \mathrm{E}' < \frac{2\psi'}{e^{\psi'}+e^{-\psi'}}, \qquad \varphi < \Phi, \qquad \varphi' < \Phi'.$$

Comme le rapport $\frac{2\psi}{e^{\psi}+e^{-\psi}}$ croît depuis la limite $\psi=0$ jusqu'à la limite $\psi=1,199$, et qu'en prenant $\psi=1$ on trouve

$$\frac{2\psi}{e^{\psi}+e^{-\psi}}=\frac{2}{e+\frac{1}{e}}=0,64805,$$

il est clair que les premières des conditions (7) seront vérifiées si l'on suppose

$$(9)\qquad \varepsilon<\mathrm{E}<0,64805,\qquad \varepsilon'<\mathrm{E}'<0,64805,\qquad \varphi<\Phi,\qquad \varphi'<\Phi',$$

et que l'on choisisse $\psi$, $\psi'$ de manière à vérifier les équations

$$(10)\qquad \frac{2\psi}{e^{\psi}+e^{-\psi}}=\mathrm{E},\qquad \frac{2\psi'}{e^{\psi'}+e^{-\psi'}}=\mathrm{E}'.$$

Les conditions (9) sont vérifiées pour toutes les grosses planètes et aussi par les quatre petites planètes Vesta, Junon, Cérès et Pallas.

La dernière des conditions $\gamma$ peut s'écrire

$$\left\{\Theta\frac{1+\mathrm{EC}(\psi)}{1-\mathrm{E'C}(\psi')}-\left[\Omega'+1-\sqrt{(\Omega'+1)^2-1}\right]\right\}\left\{\Theta\frac{1+\mathrm{EC}(\psi)}{1-\mathrm{E'C}(\psi')}-\left[\Omega'+1+\sqrt{(\Omega'+1)^2-1}\right]\right\}\geqq 0.$$

Pour la vérifier, il suffira de prendre $\Theta$ de façon que

$$\Theta\frac{1+\mathrm{EC}(\psi)}{1-\mathrm{E'C}(\psi')}<\Omega'+1-\sqrt{(\Omega'+1)^2-1}<\frac{1}{\Omega'+1+\sqrt{(\Omega'+1)^2-1}},$$

ou bien

$$(11)\qquad \Theta=\frac{1}{2(\Omega'+1)}\,\frac{1-\mathrm{E'C}(\psi')}{1+\mathrm{EC}(\psi)},$$

et, de la formule (4), il résulte que l'on aura alors

$$(12)\qquad \mathrm{A}f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},\bar{\psi},\bar{\psi}',\bar{\varphi},\varphi')<\frac{m'}{a'\Theta(1+\mathrm{EC}(\psi))}.$$

Cherchons une limite supérieure de la valeur de $\Theta$.

Nous avons trouvé que $\Theta$ devait être inférieur à la plus petite racine de l'équation

$$\left\{1-\mathrm{E'C}(\psi')-\Theta[1+\mathrm{EC}(\psi)]\right\}^2-2\Omega'\Theta[1+\mathrm{EC}(\psi)][1-\mathrm{E'C}(\psi')]=0.$$

La valeur de $\Omega'$ est donnée, dans le cas actuel, par les formules

$$\Omega' + 1 = \frac{e^{\psi} + \mathrm{E} + \mathrm{U}\,\mathrm{C}(\psi)}{1 - \mathrm{E}\,\mathrm{C}(\psi)}\,\frac{e^{\psi'} + \mathrm{E}' + \mathrm{U}'\mathrm{C}(\psi')}{1 - \mathrm{E}'\mathrm{C}(\psi')}\,k,$$

$$k = \mathrm{A}(\mathrm{I}) + \mathrm{A}(\mathrm{II}) + \mathrm{A}(\mathrm{III}) + \mathrm{A}(\mathrm{IV}).$$

Cette racine croît rapidement quand les nombres $\psi$, $\psi'$ décroissent.

Nous leur donnerons donc les plus petites valeurs possibles, c'est-à-dire que nous les déterminerons par les équations

$$\mathrm{E}\,\mathrm{C}(\psi) = , \qquad \mathrm{E}'\,\mathrm{C}(\psi') = \psi'.$$

L'équation en $\theta$ deviendra

$$[1 - \psi' - \theta(1 + \psi)]^2 - 2\Omega'\theta(1 - \psi')(1 + \psi) = 0,$$

et la valeur de $\Omega'$ sera déterminée par l'équation

$$\Omega' + 1 = \frac{e^{\psi} + \mathrm{E} + \mathrm{U}\dfrac{\psi}{\mathrm{E}}}{1 - \psi}\,\frac{e^{\psi'} + \mathrm{E}' + \mathrm{U}'\dfrac{\psi'}{\mathrm{E}'}}{1 - \psi'}\,\mathrm{K}.$$

Posons

$$\frac{e^{\psi} + \mathrm{E} + \mathrm{U}\dfrac{\psi}{\mathrm{E}}}{1 - \psi} = \mathrm{V}, \qquad \frac{e^{\psi'} + \mathrm{E}' + \mathrm{U}'\dfrac{\psi'}{\mathrm{E}'}}{1 - \psi'} = \mathrm{V}',$$

l'équation en $\theta$ pourra s'écrire

$$\theta^2(1 + \psi)^2 - 2\,\theta(1 + \psi)(1 - \psi')\mathrm{V}\mathrm{V}'\mathrm{K} + (1 - \psi')^2 = 0.$$

La plus petite racine de cette équation est

$$\theta = \frac{1 - \psi'}{1 + \psi}\left(\mathrm{K}\mathrm{V}\mathrm{V}' - \sqrt{\mathrm{K}^2\mathrm{V}^2\mathrm{V}'^2 - 1}\right) \tag{13}$$

ou encore

$$\theta = \frac{1 - \psi'}{1 + \psi}\,\frac{1}{2\mathrm{V}\mathrm{V}'\mathrm{K}}\left(1 + \frac{1}{4}\,\frac{1}{\mathrm{K}^2\mathrm{V}^2\mathrm{V}'^2} + \frac{1.3}{2.6}\,\frac{1}{\mathrm{K}^4\mathrm{V}^4\mathrm{V}'^4} + \ldots\right),$$

Cette racine croît évidemment quand ces nombres $\psi$, $\psi'$ V, V', K décroissent, et, par conséquent, lorsque les nombres E, E', ..., $\Phi'$ se rapprochent de leurs limites inférieures $\varepsilon$, $\varepsilon'$, ..., $\varphi'$.

On aura donc la limite supérieure de $\theta$, lorsque, dans la formule (13) jointe aux formules qui donnent V, V', U, U' et K, on fera

$$\mathrm{E} = \varepsilon, \qquad \mathrm{E}' = \varepsilon', \qquad \Phi = \varphi, \qquad \Phi' = \varphi',$$

et qu'on donnera aux modules $\psi$, $\psi'$ les valeurs déterminées par les équations

$$\frac{2\psi}{e^{\psi}+e^{-\psi}} = \varepsilon, \qquad \frac{2\psi'}{e^{\psi'}+e^{-\psi'}} = \varepsilon'. \tag{14}$$

Si la limite supérieure ainsi obtenue surpasse $\theta = \frac{a}{a'}$, c'est-à-dire, si l'on a

$$\frac{a}{a'} < \frac{1+\psi'}{1-\psi}\left(\mathrm{KVV}' - \sqrt{\mathrm{K}^2\mathrm{V}^2\mathrm{V}'^2 - 1}\right),$$

on pourra déterminer $\theta$ de façon que les conditions (7) soient vérifiées et la formule (6) sera applicable.

Cette dernière condition peut s'écrire

$$\mathrm{KVV}' < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'}\,\frac{1+\psi}{1+\psi'} + \frac{a'}{a}\,\frac{1-\psi'}{1+\psi}\right). \tag{15}$$

Cauchy a déterminé pour chaque planète une valeur très approchée de la quantité $\psi$, qui vérifie l'équation (14).

Il a trouvé les valeurs suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mercure.......... | $\psi = 0{,}210065$ | Jupiter.......... | $\psi = 0{,}048132$ |
| Vénus.......... | $0{,}006884$ | Saturne.......... | $0{,}056313$ |
| La Terre.......... | $0{,}016816$ | Uranus.......... | $0{,}046750$ |
| Mars.......... | $0{,}093494$ | Neptune.......... | $0{,}008720$ |

Il a ensuite calculé V par la formule suivante

$$\mathrm{V} = \frac{e^{\psi} + \mathrm{E} + \dfrac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\,\psi}{1-\psi}.$$

D'autre part, nous avons trouvé pour déterminer le nombre K les formules suivantes

$$K \leqq A(I) + A(II) + A(III) + A(IV),$$

$$A(I) \leqq S^2\left(\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right) + S(\varphi)\,S(\varphi'),$$

$$A(II) \leqq \left[C\left(\frac{\varphi}{2}\right)C\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2 + \left[S\left(\frac{\varphi}{2}\right)S\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2 + \tfrac{1}{2}S(\varphi)\,S(\varphi'),$$

$$A(III) \leqq \left[S\left(\frac{\varphi}{2}\right)C\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2 + \left[S\left(\frac{\varphi'}{2}\right)C\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]^2 + \tfrac{1}{2}S(\varphi)\,S(\varphi'),$$

$$A(IV) \leqq \left[S\left(\frac{\varphi}{2}\right)S\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2 + \tfrac{1}{2}S(\varphi)\,S(\varphi').$$

D'où l'on tire, après quelques calculs,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} K \leqq\ & C(\varphi)\,C(\varphi') + 3\,S(\varphi)\,S(\varphi') \\ & + \left[S\left(\frac{\varphi}{2}\right)C\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2 + \left[C\left(\frac{\varphi}{2}\right)S\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2 + \left[S\left(\frac{\varphi}{2}\right)S\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2.\end{aligned}\right.$$

Rappelons que nous avons posé, d'une façon générale,

$$C(x) = \frac{e^X + e^{-X}}{2}, \qquad S(x) = \frac{e^X - e^{-X}}{2}.$$

Comme $\varphi$, $\varphi'$ sont très petits pour toutes les grosses planètes, on peut dans les formules précédentes remplacer $C(\varphi)$, $C(\varphi')$, $S(\varphi)$, $S(\varphi')$ par les premiers termes de leurs développements suivant les puissances de $\varphi$, $\varphi'$.

Nous calculerons donc, pour chaque planète, les valeurs de $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ par les formules

$$C(\varphi) = 1 + \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

$$S(\varphi) = \quad \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Cela posé, les valeurs de V des produits $a(1-\psi)$, $a(1+\psi)$ de $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ donnent lieu au Tableau suivant :

| | V. | $a(1-\psi)$. | $a(1+\psi)$. | $C(\varphi)$. | $S(\varphi)$. |
|---|---|---|---|---|---|
| Mercure....... | 1,84962 | 0,305782 | 0,468414 | 1,00773 | 0,12471 |
| Vénus......... | 1,02084 | 0,718352 | 0,728312 | 1,00175 | 0,05923 |
| La Terre....... | 1,05159 | 0,983183 | 1,016816 | 1,00000 | 0,00000 |
| Mars.......... | 1,31874 | 1,381236 | 1,666150 | 1,00052 | 0,03232 |
| Jupiter........ | 1,15408 | 4,950822 | 5,451510 | 1,00026 | 0,02289 |
| Saturne........ | 1,18232 | 9,000758 | 10,074984 | 1,00094 | 0,04349 |
| Uranus........ | 1,14937 | 18,286475 | 20,080135 | 1,00009 | 0,01353 |
| Neptune....... | 1,02649 | 29,77505 | 30,29888 | 1,00048 | 0,03113 |

Nous avons trouvé précédemment que, lorsque les variables $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\psi$, $\psi'$, $\varphi$, $\varphi'$, $\omega$, $\omega'$, $\theta$, $\theta'$ se déplaçaient dans des circonférences de rayons E, E', ..., $\Theta$, $\Theta'$, la fonction

$$f(\varepsilon, \varepsilon', \ldots, \varphi, \varphi') = \frac{m'}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\delta + r'^2}}$$

restait finie et continue, si les nombres E, E' sont tels que

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{E\,C}(\psi) < 1, \qquad \mathrm{E'\,C}(\psi') < 1, \\ & \left\{[1 - \mathrm{E'\,C}(\psi)] - \frac{a}{a'}[1 + \mathrm{E\,C}(\psi)]\right\}^2 - 2\Omega'\frac{a}{a'}[1 + \mathrm{E\,C}(\psi)]\,[1 - \mathrm{E'\,C}(\psi')] > 0, \end{aligned} \right.$$

le nombre $\Omega'$ étant déterminé par les formules

$$\left\{ \begin{aligned} & \Omega' + 1 = \mathrm{V_1 V'_1 K'}, \\ & \mathrm{V_1} = \frac{e^{\psi} + \mathrm{E} + \mathrm{U\,C}(\psi)}{1 - \mathrm{E\,C}(\psi)}e^{\pi}, \qquad \mathrm{V'_1} = \frac{e^{\psi'} + \mathrm{E'} + \mathrm{U'\,C}(\psi')}{1 - \mathrm{E'\,C}(\psi')}e^{\pi'}, \\ & \mathrm{K'} = \mathrm{A(I)} + \mathrm{A(II)} + \mathrm{A(III)} + \mathrm{A(IV)}, \\ & \mathrm{A(I)} \;\; = \mathrm{S}^2\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right) + \mathrm{S}(\varphi)\,\mathrm{S}(\varphi')\,\mathrm{S}^2\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right), \\ & \mathrm{A(II)} = \left[\mathrm{C}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{C}\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2 + \left[\mathrm{S}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{S}\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2\mathrm{C}(2\theta + 2\theta') + \tfrac{1}{2}\mathrm{S}(\varphi)\,\mathrm{S}(\varphi')\,\mathrm{C}(\theta + \theta'), \\ & \mathrm{A(III)} = \left[\mathrm{S}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{C}\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2\mathrm{S}(2\theta) + \left[\mathrm{S}\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\mathrm{C}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]^2\mathrm{S}(2\theta') + \tfrac{1}{2}\mathrm{S}(\varphi)\,\mathrm{S}(\varphi')\,\mathrm{S}(\theta + \theta'), \\ & \mathrm{A(IV)} = \left[\mathrm{S}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{S}\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right]^2\mathrm{S}(2\theta + 2\theta') + \tfrac{1}{2}\mathrm{S}(\varphi)\,\mathrm{S}(\varphi')\,\mathrm{S}(\theta + \theta'). \end{aligned} \right.$$

Enfin, en désignant par $\mathrm{A}(f)$ le maximum du module de la fonction $f$ dans ce domaine, on a

$$(\gamma)\quad \Delta(f) \leqq \frac{m'}{a'} \frac{1}{\left(\left\{1 - E' C(\psi') - \frac{a}{a'}[1 + E C(\psi)]\right\}^2 - 2\Omega' \frac{a}{a'}[1 + E C(\psi)][1 - E' C(\psi')]\right)^{\frac{1}{2}}},$$

et le maximum du module de la partie de $f$ qui est indépendante des anomalies moyennes et que nous avons désigné par $R_1$ sera dans le même domaine

$$A R_1 \leqq 4\pi^2 A(f),$$

$$(\delta)\qquad A R_1 \leqq 39{,}478350\, A(f).$$

D'ailleurs, quand les variables $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\omega$, $\omega'$, $\varphi$, $\varphi'$, $\theta$, $\theta'$ se déplacent à l'intérieur de circonférences de rayons E, E$'$, $\pi$, ..., $\theta'$, les variables $h$, $l$, $p$, $q$, $h'$, ..., $q'$ définies par les formules

$$h = \varepsilon \sin\omega, \qquad l = \varepsilon \cos\omega, \qquad p = \operatorname{tang}\varphi \sin\theta, \qquad q = \operatorname{tang}\varphi \cos\theta,$$
$$h' = \varepsilon' \sin\omega', \qquad \ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

se déplacent respectivement à l'intérieur de circonférences de rayons H, L, P, Q, H$'$, ..., Q$'$; les nombres H, ..., Q$'$ étant définis par les formules

$$H = E\, S(\omega), \qquad L = E\, C(\omega), \qquad P = \Phi\, S(\theta), \qquad Q = \Phi\, C(\theta),$$
$$H' = E' S(\omega'), \qquad L' = E' C(\omega'), \qquad P' = \Phi' S(\theta'), \qquad Q' = \Phi\, C(\theta'),$$

et les nombres E, ..., $\theta'$ étant choisis de façon à satisfaire aux conditions ($\beta$). $R_1$ sera une fonction développable de $h$, $l$, ..., $q'$ pour les valeurs de ces variables de modules moindres que H, L, ..., Q$'$. Dans ce domaine, les variations séculaires de $h$, $l$, ..., $q'$ seront déterminées par les équations

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \frac{m'an}{\mu}\frac{\partial R_1}{\partial l} - \frac{1}{2}\frac{m'an}{\mu}(h^2+l^2)\frac{\partial R_1}{\partial l} + \frac{1}{2}\frac{m'an}{\mu} l\left(p\frac{\partial R_1}{\partial p} + q\frac{\partial R_1}{\partial q}\right),\\
\frac{dl}{dt} &= \frac{m'an}{\mu}\frac{\partial R_1}{\partial l} + \frac{1}{2}\frac{m'an}{\mu}(h^2+l^2)\frac{\partial R_1}{\partial h} - \frac{1}{2}\frac{m'an}{\mu} h\left(p\frac{\partial R_1}{\partial p} + q\frac{\partial R_1}{\partial q}\right),\\
\frac{dp}{dt} &= \frac{m'an}{\mu}\frac{\partial R_1}{\partial q} + \left[\frac{1}{2}\frac{m'an}{\mu}(h^2+l^2) + \frac{3}{2}\frac{m'an}{\mu}(p^2+q^2)\right]\frac{\partial R_1}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{m'an}{\mu} p\left(l\frac{\partial R_1}{\partial h} - h\frac{\partial R_1}{\partial l}\right),\\
\frac{dq}{dt} &= -\frac{m'an}{\mu}\frac{\partial R_1}{\partial p} + \left[\frac{1}{2}\frac{m'an}{\mu}(h^2+l^2) + \frac{3}{2}\frac{m'an}{\mu}(p^2+q^2)\right]\frac{\partial R_1}{\partial p} + \frac{1}{2}\frac{m'an}{\mu} q\left(l\frac{\partial R_1}{\partial h} - h\frac{\partial R_1}{\partial l}\right)\ (^1).
\end{aligned}\right.$$

(1) *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. II, p. 106.

On aura quatre équations analogues pour la seconde planète.

Les seconds membres des équations précédentes sont des fonctions holomorphes pour les valeurs des variables qui appartiennent au domaine de rayon $r$ du point $h = l = p = \ldots = q' = 0$; $r$ désignant le plus petit des nombres H, L, ..., Q'. Soit M leur maximum dans ce domaine.

Considérons les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv_i}{dt} = \dfrac{M}{1 - \dfrac{v_1 + v_2 + \ldots + v_8}{r}}, \\ (i = 1, 2, \ldots, 8), \end{cases}$$

avec les valeurs initiales

$$v_1^0 = |h^0|, \qquad v_2^0 = |l^0|, \qquad \ldots, \qquad v_8^0 = |q'^0|.$$

Considérons dans ces équations (2) $v_i$ comme fonction de $t$ et $v_i^0$.

Nous savons que l'on peut trouver des fonctions satisfaisant aux équations (2), se réduisant pour $t = 0$ à $v_i^0$ et développables suivant les puissances de $t$, $v_i^0$ en séries convergentes pourvu que $t$ soit assez petit.

Les coefficients de ces développements sont tous positifs et supérieurs aux modules des coefficients correspondants dans les développements de $h, l, \ldots, q'$. De sorte que le rayon est une limite inférieure du rayon de convergence des séries $h, l, \ldots, q'$. Pour le trouver, ajoutons membre à membre les équations (2); nous aurons

$$(3)\qquad \frac{\partial(v_1 + v_2 + \ldots + v_8)}{\partial t} = \frac{8M}{1 - \dfrac{v_1 + v_2 + \ldots + v_8}{r}}.$$

Posons

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_8 = V.$$

V considérée comme fonction de $v_i^0$ et de $t$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{8M}{1 - \dfrac{V}{r}},$$

et se réduit pour $t = 0$ à

$$V^0 = v_1^0 + v_2^0 + \ldots + v_8^0 = X.$$

Toutes les fonctions $v_i$ ont tous leurs coefficients positifs; leur somme aura donc ses coefficients supérieurs aux coefficients correspondants de l'une quelconque des fonctions $v_i$ et, par suite, de $h, l, \ldots, q'$.

Déterminons cette fonction V. Comme elle ne dépend que de $t$ et de X, il est naturel de poser

$$V = \psi(t, X);$$

la fonction $\psi$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{8M}{1 - \frac{\psi(t, X)}{r}},$$

et elle se réduit à X pour $t = 0$.

Afin de revenir aux notations habituelles des équations aux dérivées partielles, posons

$$\psi(t, z) = Z,$$

$$t = x, \qquad X = y, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = p, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial X} = q,$$

l'équation (3) deviendra

$$(3') \qquad \left(1 - \frac{z}{r}\right) p - 8M = 0;$$

la fonction $\psi$ ou $z$ que nous cherchons est l'intégrale de cette équation qui passe par la ligne

$$x = 0, \qquad z = y.$$

Les équations différentielles de Lagrange qui correspondent à l'équation (3') sont

$$\frac{dx}{1 - \frac{z}{r}} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{\left(1 - \frac{z}{r}\right) p} = \frac{-dp}{p - \frac{p}{r}} = \frac{-dq}{q - \frac{p}{r}}.$$

Elles admettent l'intégrale

$$\alpha p = q.$$

Nous avons donc une intégrale complète de l'équation (3') en intégrant

$$dz = \frac{8M}{1 - \frac{z}{r}} dx + \frac{8\alpha M}{1 - \frac{z}{r}} dy,$$

ce qui donne

$$z - \frac{z^2}{2r} = 8Mx + 8\alpha My + \beta. \tag{4}$$

Cherchons l'enveloppe des surfaces de ce complexe qui sont tangentes à la droite

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = y. \end{cases} \tag{5}$$

Les coordonnées d'un point quelconque de cette droite sont

$$x = 0, \qquad z = y = t,$$

en désignant par $t$ un paramètre arbitraire.

Écrivons que ce point est sur la surface (4), nous aurons

$$\frac{t^2}{2r} - t(1 - 8\alpha M) + \beta = 0. \tag{6}$$

Le plan tangent en ce point à la surface (4) est

$$-8MX + 8\alpha M(y - t) + (z - t)\left(\frac{t}{r} - 1\right) = 0.$$

Exprimons que ce plan contient la droite (5), il viendra

$$8\alpha M + \frac{t}{r} - 1 = 0. \tag{7}$$

En éliminant $t$ entre (6) et (7), nous aurons entre $\alpha$ et $\beta$ la relation

$$\beta = (1 - 8\alpha M)^2 \frac{r}{2};$$

l'enveloppe des surfaces de la famille (4) dont les paramètres $\alpha$, $\beta$ sont liés par la relation précédente est l'intégrale cherchée.

En faisant les calculs indiqués par la théorie des enveloppes, nous trouverons pour son équation

$$z^2 - 2rz + 16Mrx + y(2r - y) = 0.$$

En revenant aux anciennes notations, nous trouvons que la fonction cherchée V est la racine de l'équation

$$V^2 - 2rV + 16Mrt + X(2r - X) = 0,$$

qui se réduit à X pour $t = 0$. Donc

$$V = r - \sqrt{(r - X)^2 - 16Mrt}. \tag{9}$$

Cette fonction est développable suivant les puissances de $t$ et de X ou de $\varphi_i^0$ pourvu que

$$t < \rho = \frac{(r - X)^2}{16Mr} \quad \text{et} \quad X = |h^0| + |l^0| + \ldots + |q'^0| < r, \tag{10}$$

de sorte que, en supposant vérifiée la condition $X < r$, on peut trouver des fonctions $h, l, \ldots, q'$ satisfaisant aux équations (1), se réduisant à $h^0, l^0, \ldots, q'^0$ pour $t = 0$, et développables en séries convergentes suivant les puissances croissantes de $t, h^0, l^0, \ldots, q'^0$ pendant le temps

$$t = \frac{(r - X)^2}{16Mr} = \rho.$$

Désignons ces séries par

$$\begin{array}{ll}
h = \varphi\,(t, h^0, l^0, p^0, q^0, h'^0, l'^0, p'^0, q'^0), & h' = \varphi'\,(t, h^0, \ldots, q'^0),\\
l = \varphi_1(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), & l' = \varphi'_1(\ldots\ldots\ldots\ldots),\\
p = \varphi_2(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), & p' = \varphi'_2(\ldots\ldots\ldots\ldots),\\
q = \varphi_3(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), & q' = \varphi'_3(\ldots\ldots\ldots\ldots).
\end{array}$$

Soit $t_1$ un point intérieur au cercle de convergence de ces fonctions; $h_1, l_1, \ldots, q'_1$ les valeurs de $h, l, \ldots, q'$ pour $t = t_1$. On voit que $h_1, l_1, \ldots, q'_1$ sont des fonctions développables de $h^0, \ldots, q'^0$.

M. Poincaré a montré d'une façon générale que l'on peut étendre ce cercle de convergence :

Désignons par $h_1^0, l_1^0, \ldots, q_1'^0$ les valeurs de $h_1, l_1, \ldots, q'$ pour $h^0 = l^0 = \ldots = q'^0 = 0$. De sorte que

$$\left\{\begin{array}{l}
h' = h_1^0 + \alpha_1 h^0 + \beta_1 l^0 + \gamma_1 p^0 + \delta_1 q^0 + \alpha'_1 h^0 + \ldots + \varphi_2(h^0, l^0, \ldots) + \ldots,\\
l' = l_1^0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
q'_1 = q_1'^0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right. \tag{11}$$

D'autre part, soit $(v_i)_1$ la valeur de $v_i$ pour $t = t_1$ et $(v_i)_1^0$ la valeur de $(v_i)_1$ pour $v_1^0 = v_2^0 = \ldots = 0$; de sorte que

$$(v_i)_1 = (v_i)_1^0 + A_i v_1^0 + B_i v_2^0 + \ldots \qquad (i = 1.2\ldots 8).$$

On sait que

$$\begin{array}{lllll} (v_1)_1 > |h_1|, & (v_1)_1^0 > |h_1^0|, & A_1 > |\alpha_1|, & B_1 > |\alpha_2|, & \ldots, \\ (v_2)_1 > |l_1|, & (v_2)_1^0 > |l_1^0|, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots \end{array}$$

Les quantités $(v_i)_1^0$ sont les valeurs pour $t = t_1$ de fonctions satisfaisant aux équations (2) et se réduisant à zéro pour $t = 0$, c'est-à-dire de fonctions égales et satisfaisant à l'équation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{M}{1 - 8\frac{v}{r}},$$

$$v - 4\frac{v^2}{r} = Mt.$$

On a donc

$$(v_i)_1^0 = \frac{r}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{r^2 - 16Mrt_1},$$

et l'on voit ainsi que $(v_i)_1^0$ sont inférieurs à $\frac{r}{8}$.

*A fortiori*, il en est de même de $|h_1^0|$, $|l_1^0|$, ..., $|q_1'^0|$. Posons de même

$$(12) \qquad \begin{cases} t - t_1 = t', \\ h_1 - h_1^0 = (h^0), \qquad l_1 - l_1^0 = (l^0), \qquad \ldots, \\ h - h_1^0 = (h), \qquad l - l_1^0 = (l), \qquad \ldots, \end{cases}$$

et considérons le système d'équations obtenu en faisant dans (1) ce changement de variable

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{d(h)}{dt} = f[(h) + h_1^0, (l) + l_1^0, \ldots, (q)' + q_1'^0], & \dfrac{d(h)'}{dt} = f', \\ \dfrac{d(l)}{dt} = f_1[(h) + h_1^0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots], & \dfrac{d(l)'}{dt} = f'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d(q)}{dt} = f_3[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots], & \dfrac{d(q)'}{dt} = f'_3; \end{cases}$$

les seconds membres sont des fonctions développables dans le domaine de rayon

$$r' = r - \frac{r}{8}$$

du point

$$(h) = (l) = \ldots = (q)' = 0.$$

Cherchons s'il est possible de trouver des fonctions satisfaisant à ces équations, se réduisant pour $t' = 0$ à $(h^0)$, $(l^0)$, ..., $(q^0)'$, et développables suivant les puissances de $t'$, $(h^0)$, ..., $(q^0)'$ pourvu que $t'$ soit assez petit.

A cet effet, considérons les équations

$$(14) \qquad \frac{dv'_i}{dt'} = \frac{M}{1 - \dfrac{v'_1 + v'_2 + \ldots + v'_8}{r'}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8).$$

Avec les valeurs initiales pour $t' = 0$

$$\begin{array}{ll} v'^0_1 = (v_1)_1 - (v_1)^0_1 > (h^0), & \ldots, \\ v'^0_2 = (v_2)_1 - (v_2)^0_1 > (l^0), & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots . \end{array}$$

En remplaçant dans $v'^0_i$ la valeur précédemment obtenue pour $(v_i)^0_1$, on trouve que

$$v'^0_i = (v_i)_1 - \left(\frac{r}{8} - \tfrac{1}{8}\sqrt{r^2 - 16Mrt_1}\right) \leqq \tfrac{1}{8}\sqrt{r^2 - 16Mrt_1}.$$

En prenant le point $t_1$ sur le cercle de convergence des fonctions (10), c'est-à-dire en faisant $t_1 = \rho$ et en remplaçant $\rho$ par sa valeur, on a

$$v'^0_i < \tfrac{1}{8}\sqrt{r^2 - (r - X)^2}.$$

Si donc

$$\frac{X'}{8} = \tfrac{1}{8}\sqrt{r^2 - (r - X)^2} < \frac{r'}{8}$$

ou

$$(15) \qquad (2r - X)X < r^2(1 - \tfrac{1}{8})^2,$$

il existera des fonctions satisfaisant aux équations (14); se réduisant pour $t'=0$ à $\varphi_i'^0$ et développables suivant les puissances croissantes de $t'$, $\varphi_i'^0$, pourvu que

$$t'<\rho'=\frac{(r'-X')^2}{16r'M},$$

et, *a fortiori*, dans cet intervalle de temps, on pourra développer $(h)$, $(l)$, ..., $(q)'$ suivant les puissances croissantes de $t'$, $(h^0)$, $(l^0)$, ....

Pour toute valeur de $t'\leqq\rho'$, les fonctions $(h)$, $(l)$, ..., $(q)'$ seront donc développables suivant les puissances croissantes des valeurs initiales.

Il en sera de même des fonctions $h$, $l$, ..., $q'$ pour toute valeur de $t$ inférieure à $\rho+\rho'$, c'est-à-dire, pour

$$t<\frac{1}{16M}\left[\frac{(r-X)^2}{r}+\frac{(r'-X')^2}{r'}\right].$$

En répétant le même raisonnement que précédemment, on voit que l'on pourrait encore étendre ce domaine de convergence, pourvu que

$$X''=\sqrt{(2r'-X')X'}<r'(1-\tfrac{1}{8}).$$

En supposant cette inégalité vérifiée, $h$, $l$, ..., $q'$ seront des fonctions développables de $h^0$, $l^0$, .... $q'^0$, pour toutes les valeurs de $t$ telles que

$$t<\rho+\rho'+\rho'',$$

$$(16)\qquad t<\frac{1}{16M}\left[\frac{(r-X)^2}{r}+\frac{(r'-X')^2}{r'}+\frac{(r''-X'')^2}{r''}\right],$$

où l'on a

$$r'=r(1-\tfrac{1}{8}),$$

$$X'=\sqrt{(2r+X)X}.$$

Nous allons montrer que les quantités $\rho$, $\rho'$, $\rho''$, ... vont en diminuant et que leur somme reste finie; cela prouvera que les développements précédents ne sont possibles que dans un intervalle de temps limité.

A cet effet, considérons le rapport $\frac{\rho'}{\rho}$

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{(r'-X')^2}{(r-X)^2}\frac{r}{r'} = \frac{r'}{r}\frac{\left(1-\frac{X'}{r'}\right)^2}{\left(1-\frac{X}{r}\right)^2} = \left(1-\frac{1}{8}\right)\frac{\left(1-\frac{X'}{r'}\right)^2}{\left(1-\frac{X}{r}\right)^2}.$$

Or

$$\frac{X'}{r'} = \frac{X'}{r}\frac{r}{r'}\frac{1}{1-\frac{1}{8}}\sqrt{\left(2-\frac{X}{r}\right)\frac{X}{r}} > \frac{1}{1-\frac{1}{8}}\frac{X}{r} > \frac{X}{r}.$$

Donc

$$\frac{\rho'}{\rho} < 1-\tfrac{1}{8}.$$

La série $\rho$, $\rho'$, $\rho''$, ... est convergente et la somme $\rho+\rho'+\rho''$, ... reste finie.

Il n'y a évidemment lieu de considérer les développements précédents que s'ils sont convergents pendant un grand nombre d'années, c'est-à-dire, si la valeur de $t$ donnée par la formule

$$(17) \qquad t = \frac{1}{16M}\left[\frac{(r-X)^2}{r} + \frac{(r'+X')^2}{r'} + \frac{(r''-X'')^2}{r''} + \dots\right]$$

est suffisamment grande.

Il est manifeste qu'il n'en sera ainsi que si la somme des valeurs initiales X diffère sensiblement du rayon $r$ du domaine de convergence, et si la valeur de M qui résulte des formules ($\gamma$) et ($\delta$) données page 77 n'est pas trop grande; cette dernière condition ne sera satisfaite que lorsque le rapport $\frac{a}{a'}$ sera très différent de l'unité; comme cela arrive, en particulier, si l'on associe l'une des planètes Vénus, la Terre avec Jupiter, Saturne, Uranus ou Neptune et encore lorsqu'on associe l'une de ces trois dernières planètes avec Mars.

Dans chaque cas, les formules ($\beta$), ($\gamma$), ($\delta$) et (17) donneront une limite inférieure de la durée de convergence des développements; les valeurs des nombres V, V', K' qui entrent dans ces formules sont données par le Tableau qui se trouve à la page 76.

**Détermination des coefficients des développements précédents.**

Les développements considérés sont de la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
h &= A_1 h^0 + B_1 l^0 + C_1 p^0 + D_1 q^0 + A'_1 h'^0 + B'_1 l'_0 + C'_1 p'^0 + D'_1 q'^0 \\
&\qquad + E h_0^2 + \ldots + K_1 h_0^3 + \ldots, \\
l &= A_2 h^0 + B_2 l^0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
h' &= A_3 h^0 + B_3 l^0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
l' &= A_4 h^0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
p &= \alpha_1 h^0 + \beta_1 l^0 + \gamma_1 p^0 + \delta_1 q^0 + \alpha'_1 h'^0 + \beta'_1 l'^0 + \gamma'_1 p'^0 + \delta'_1 q'^0 + \ldots, \\
q &= \alpha_2 h^0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
q' &= \alpha_4 h^0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

On sait que les équations qui donnent $h$, $l$, $h'$, $l'$ sont de la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \mathcal{A}_1 l + \mathcal{A}_2 l' + \varphi_3(h, l, p, q, \ldots, q') + \varphi_5(h, l, \ldots, q') + \ldots, \\
\frac{dl}{dt} &= -\mathcal{A}_1 l - \mathcal{A}_2 l' + \psi_3(h, \ldots\ldots\ldots, q') + \varphi_5(h, l, \ldots, q') + \ldots, \\
\frac{dh'}{dt} &= \mathcal{A}'_1 l + \mathcal{A}'_2 l' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{dl'}{dt} &= -\mathcal{A}'_1 l - \mathcal{A}'_2 l' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

En remplaçant $h, l, \ldots$ par leurs expressions (1) dans les formules (2), on a

$$(2')\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(A_1 h^0 + B_1 l^0 + \ldots) &= (\mathcal{A}_1 A_2 + \mathcal{A}_2 A_4)\, h^0 + \ldots, \\
\frac{d}{dt}(A_2 h^0 + B_2 l^0 + \ldots) &= (-\mathcal{A}_1 A_1 - \mathcal{A}_2 A_3)\, h^0 + \ldots, \\
\frac{d}{dt}(A_3 h^0 + \ldots\ldots\ldots) &= (\mathcal{A}'_1 A_2 + \mathcal{A}'_2 A_4)\, h^0 + \ldots, \\
\frac{d}{dt}(A_4 h^0 + \ldots\ldots\ldots) &= (-\mathcal{A}'_1 A_1 - \mathcal{A}'_2 A_3)\, h^0 + \ldots.
\end{aligned}\right.$$

En écrivant que les deux nombres sont identiques en $h^0, l^0, \ldots, q'^0$, on aura des équations qui détermineront les coefficients A, B, C, ....

En particulier, les coefficients $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ sont déterminés par

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \mathcal{A}_1 A_2 + \mathcal{A}_2 A_4, \\ \frac{dA_2}{dt} &= -\mathcal{A}_1 A_1 - \mathcal{A}_2 A_3, \\ \frac{dA_3}{dt} &= \mathcal{A}'_1 A_2 + \mathcal{A}'_2 A_4, \\ \frac{dA_4}{dt} &= -\mathcal{A}'_1 A_1 - \mathcal{A}'_2 A_3. \end{aligned}\right.$$

Avec les valeurs initiales, pour $t = 0$,

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = A_3 = A_4 = 0.$$

Les quantités $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}'_1$, $\mathcal{A}'_2$, qui entrent dans ces équations, ont été déterminées par Le Verrier. En adoptant ses notations, on a

$$\mathcal{A}_1 = (0, 1) = \frac{m'an}{32\mu} 8(1), \qquad \mathcal{A}'_1 = (1, 0) = \frac{ma'n'}{32\mu'} 8(1),$$

$$\mathcal{A}_2 = (0, 1) = \frac{m'an}{32\mu} 8(2), \qquad \mathcal{A}'_2 = (1, 0) = \frac{ma'n'}{32\mu'} 8(2).$$

Ces quantités vérifient la relation

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}'_2 - \mathcal{A}'_1 \mathcal{A}_2 = 0.$$

De la forme des termes du premier ordre dans les seconds membres des équations (2), il résulte que tous les coefficients $B_i$, $C_i$, $D_i$, ... sont déterminés par les mêmes équations (3).

Nous sommes donc conduit à chercher l'intégrale générale des quatre équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 y + a_2 y', & \frac{dx'}{dt} &= a'_1 y + a'_2 y', \\ \frac{dy}{dt} &= -a_1 x - a_2 x', & \frac{dy'}{dt} &= -a'_1 x - a'_2 x', \end{aligned}\right.$$

où l'on a

$$a_1 a'_2 - a'_1 a_2 = 0.$$

Pour effectuer l'intégration, posons

$$x = N\sin(gt+\beta), \qquad x' = N\cos(gt+\beta),$$
$$y = N'\sin(gt+\beta), \qquad y' = N'\cos(gt+\beta).$$

L'équation caractéristique des équations (3) est

$$g^2 - (a_1 + a'_2)g + a_1 a'_2 - a'_1 a_2 = 0;$$

ses racines sont

$$g_1 = 0, \qquad g_2 = a_1 + a'_2 = \frac{m' a n}{32\mu} 8(1) + \frac{m a' n'}{32\mu} 8(2),$$

et l'intégrale générale des équations (4) est

$$(5) \qquad \begin{cases} x = N\sin(gt+\beta) + \mu, & x' = \dfrac{a'_2}{a_2} N\sin(gt+\beta) - \dfrac{a_1}{a_2}\mu, \\ y = N\cos(gt+\beta) + \lambda, & y' = \dfrac{a'_2}{a_2} N\cos(gt+\beta) - \dfrac{a_1}{a_2}\lambda. \end{cases}$$

En déterminant les constantes N, $\lambda$, $\mu$, $\beta$ de façon que, pour $t = 0$,

$$x = 1, \qquad y = x' = y' = 0,$$

nous obtiendrons les coefficients $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$.

Les coefficients $B_i$, $A'_i$, $B'_i$ se déduisent des mêmes formules (5). Quant aux coefficients $C_i$, $D_i$, $C'_i$, $D'_i$, ils satisfont encore aux équations (4) et ils sont tous nuls pour $t = 0$. Donc ils sont identiquement nuls.

En faisant les calculs, nous trouvons ainsi que les coefficients des termes du premier ordre, dans $h$, $l$, $h'$, $l'$, sont

$$A_1 = \frac{a_1}{a_1 + a'_2}\cos gt + \frac{a'_2}{a_1 + a'_2}, \qquad B_1 = \frac{a_1}{a_1 + a'_2}\sin gt,$$

$$A_2 = \frac{-a_1}{a_1 + a'_2}\sin gt, \qquad B_2 = \frac{a_1}{a_1 + a'_2}\cos gt + \frac{a'_2}{a_1 + a'_2},$$

$$A_3 = \frac{a_1 a'_2}{(a_1 + a'_2)a_2}\cos gt - \frac{a_1 a'_2}{(a_1 + a'_2)a_2}, \qquad B_3 = \frac{a_1 a'_2}{(a_1 + a'_2)a_2}\sin gt,$$

$$A_4 = \frac{-a_1 a'_2}{(a_1 + a'_2)a_2}\sin gt, \qquad B_4 = \frac{a_1 a'_2}{(a_1 + a'_2)a_2}\cos gt - \frac{a_1 a'_2}{(a_1 + a'_2)a_2},$$

et

$$A'_1 = \frac{a_2}{a_1+a'_2}\cos gt - \frac{a_2}{a_1+a'_2}, \qquad B'_1 = \frac{a_2}{a_1+a'_2}\sin gt,$$

$$A'_2 = \frac{-a_2}{a_1+a'_2}\sin gt, \qquad B'_2 = \frac{a_2}{a_1+a'_2}\cos gt - \frac{a_2}{a_1+a'_2},$$

$$A'_3 = \frac{a'_2}{a_1+a'_2}\cos gt + \frac{a_1}{a_1+a'_2}, \qquad B'_3 = \frac{a'_2}{a_1+a'_2}\sin gt,$$

$$A'_4 = \frac{-a'_2}{a_1+a'_2}\sin gt; \qquad B'_4 = \frac{a'_2}{a_1+a'_2}\cos gt + \frac{a_1}{a_1+a'_2}.$$

$$C_i = D_i = C'_i = D'_i = 0, \qquad (i = 1.2.3.4).$$

Enfin, dans ces formules, $a_1$, $a_2$, $a'_1$, $a'_2$, $g$ ont les valeurs

$$a_1 = (0, 1), \quad a'_1 = (1, 0), \quad a_2 = (0, 1), \quad a'_2 = (1, 0), \qquad g = (0, 1) + (1, 0).$$

Les coefficients des termes du deuxième ordre en $h^0, l^0, \ldots, q'^0$ dans $h, l, \ldots, q'$ sont identiquement nuls. En effet, les seconds membres des équations (2) ne contenant pas de termes du deuxième ordre en $h^0, l^0, \ldots, q'^0$, ces coefficients sont encore déterminés par les équations (4) avec des valeurs initiales toutes nulles : donc ils sont identiquement nuls.

Passons maintenant à la détermination des coefficients des termes du premier et du deuxième ordre de $p, q, p', q'$.

Les expressions de $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dp'}{dt}, \frac{dq'}{dt}$ sont de la forme (¹)

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \phantom{-}a_1(q'-q) + \varphi_3(h, l, \ldots, q') + \ldots, \\ \dfrac{dq}{dt} = -a_1(p'-p) + \psi_3(h, l, \ldots, q') + \ldots, \\ \dfrac{dp'}{dt} = -a'_1(q'-q) + \varphi'_3(h, l, \ldots, q') + \ldots, \\ \dfrac{dq'}{dt} = \phantom{-}a'_1(p'-p) + \psi'_3(h, l, \ldots, q') + \ldots. \end{cases}$$

En remplaçant dans ces équations $p, q; p', q'$ par leurs développe-

(¹) *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. II, p. 3.

ments (1) et en écrivant que les deux membres sont identiques en $h^0$, $l^0, \ldots, q'^0$, on aura les équations qui déterminent les coefficients $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

En particulier, les coefficients $\gamma_i$ sont donnés par les équations

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = a_1(\gamma_4 - \gamma_2), \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = -a'_1(\gamma_4 - \gamma_2),$$
$$\frac{d\gamma_2}{dt} = a_1(\gamma_1 - \gamma_3), \qquad \frac{d\gamma_4}{dt} = -a'_1(\gamma_1 - \gamma_3).$$

Avec les valeurs initiales, pour $t = 0$

$$\gamma_1 = 1, \qquad \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.$$

Les coefficients $\alpha'_i, \beta'_i, \ldots, \delta'_i$ sont déterminés par les mêmes équations, mais leurs valeurs initiales sont différentes.

Désignons d'une façon générale, par $x, y$; $x', y'$ les coefficients d'une même valeur initiale dans les expressions de $p$, $q$, $p'$, $q'$. D'après la forme des équations (6), ces coefficients $x$, $y$; $x'$, $y'$ satisfont aux équations

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(y' - y), &\qquad \frac{dx'}{dt} &= -a'_1(y' - y),\\ \frac{dy}{dt} &= -a_1(x' - x), &\qquad \frac{dy'}{dt} &= a'_1(x' - x).\end{aligned}\right.$$

La solution générale de ces équations est

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{N}\sin(g't + \beta), &\qquad x' &= -\frac{\mathrm{N}a'_1}{a_1}\sin(g't + \beta) + \lambda,\\ y &= \mathrm{N}\cos(g't + \beta), &\qquad y' &= -\frac{\mathrm{N}a'_1}{a_1}\cos(g't + \beta) + \mu,\end{aligned} \qquad g' = -(a_1 + a'_2);$$

de sorte qu'en tenant compte des valeurs initiales, on trouve

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{a_1}{a_1 + a'_1}\cos g't + \frac{a'_1}{a_1 + a'_1}, &\qquad \delta_1 &= \frac{a_1}{a_1 + a'_1}\sin g't,\\
\gamma_2 &= \frac{-a'_1}{a_1 + a'_1}\sin g't, &\qquad \delta_2 &= \frac{a_1}{a_1 + a'_1}\cos g't + \frac{a'_1}{a_1 + a'_1},\\
\gamma_3 &= \frac{-a'_1}{a_1 + a'_1}\cos g't + \frac{a'_1}{a_1 + a'_1}, &\qquad \delta_3 &= \frac{-a'_1}{a_1 + a'_1}\sin g't,\\
\gamma_4 &= \frac{a_1}{a_1 + a'_1}\sin g't, &\qquad \delta_4 &= \frac{-a'_1}{a_1 + a'_1}\cos g't + \frac{a'_1}{a_1 + a'_1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\gamma'_1 &= \frac{-a_1}{a_1+a'_1}\cos g' t + \frac{a_1}{a_1+a'_1}, & \delta'_1 &= \frac{-a_1}{a_1+a'_1}\sin g' t,\\
\gamma'_2 &= \frac{a_1}{a_1+a'_1}\sin g' t, & \delta'_2 &= \frac{-a_1}{a_1+a'_1}\cos g' t + \frac{a_1}{a_1+a'_1},\\
\gamma'_3 &= \frac{a'_1}{a_1+a'_1}\cos g' t + \frac{a_1}{a_1+a'_1}, & \delta'_3 &= \frac{a'_1}{a_1+a'_1}\sin g' t,\\
\gamma'_4 &= \frac{a'_1}{a_1+a'_1}\sin g' t, & \delta'_4 &= \frac{a'_1}{a_1+a'_1}\cos g' t + \frac{a_1}{a_1+a'_1}.
\end{aligned}$$

$$\alpha_i = \alpha'_i = \beta_i = \beta'_i = 0 \qquad (i = 1.2.3.4).$$

Les coefficients des termes du deuxième ordre satisfont encore aux équations (7), car il n'y a pas de termes du deuxième ordre dans les seconds membres des équations (6); de plus, leurs valeurs initiales sont nulles; donc tous ces coefficients sont identiquement nuls.

En portant tous ces coefficients dans les développements (1) de $h$, $l$, ..., $q'$, il vient

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{a_1+a'_2}[(a_1 h^0 + a_2 h'^0)\cos gt + (a_1 l^0 + a_2 l'^0)\sin gt + a'_2 h^0 - a_2 h'^0] + \varphi_3(h^0, l^0, \ldots) + \ldots,\\
l &= \frac{1}{a_1+a'_2}[(a_1 l^0 + a_2 l'^0)\cos gt - (a_1 h^0 + a_2 h'^0)\sin gt + a'_2 l^0 - a_2 l'^0] + \psi_3(h^0, l^0, \ldots) + \ldots,\\
h' &= \frac{1}{a_1+a'_2}[(a'_1 h^0 + a'_2 h'^0)\cos gt + (a'_1 l^0 + a'_2 l'^0)\sin gt - a'_1 h^0 + a_1 h'^0] + \varphi'_3(h^0, l^0, \ldots) + \ldots,\\
l' &= \frac{1}{a_1+a'_2}[(a'_1 l^0 + a'_2 l'^0)\cos gt - (a'_1 h^0 + a'_2 h'^0)\sin gt - a'_1 l^0 + a_1 l'^0] + \psi'_3(h^0, l^0, \ldots) + \ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p &= \frac{a_1}{a_1+a'_1}[(q^0 - q'^0)\cos g' t + (q^0 - q'^0)\sin g' t] + \frac{1}{a_1+a'_1}(a'_1 p^0 + a_1 p'^0) + \Psi_3(h^0, \ldots, q'^0) + \ldots,\\
q &= \frac{a_1}{a_1+a'_1}[(q^0 - q'^0)\cos g' t + (p'^0 - p^0)\sin g' t] + \frac{1}{a_1+a'_1}(a'_1 q^0 + a_1 q'^0) + \ldots,\\
p' &= \frac{a'_1}{a_1+a'_1}[(p'^0 - p^0)\cos g' t + (q'^0 - q^0)\sin g' t] + \frac{1}{a_1+a'_1}(a'_1 p^0 + a_1 p'^0) + \ldots,\\
q' &= \frac{a'_1}{a_1+a'_1}[(q'^0 - q^0)\cos g' t + (p^0 - p'^0)\sin g' t] + \frac{1}{a_1+a'_1}(a'_1 q^0 + a_1 q'^0) + \ldots.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant indiquer la forme des équations qui déterminent les coefficients des termes d'ordre quelconque.

Considérons dans les développements de $h$, $l$, $h'$, $l'$ les coefficients d'un même terme du troisième ordre; par exemple, les coefficients de $h^{03}$.

Désignons-les respectivement par $x, y, x', y'$.

On aura les équations qui les déterminent en égalant les termes en $h^{03}$ dans les deux membres des équations (2'). Pour obtenir ces coefficients, on réduit respectivement $h, l, \ldots, q'$ à leurs termes en $h^{03}$ et $h^0$ dans les termes du premier et du troisième ordre des équations (2). Les coefficients de $h^0, l^0, \ldots, q'^0$ dans les développements de $h, l, \ldots, q'$ sont périodiques; donc $x, y; x', y'$ sont donnés par des équations de la forme

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \phantom{-}a_1 y - a_2 y' + \sum b \cos[(ig + i'g')t + q], \\ \frac{dy}{dt} &= -a_1 x - a_2 x' + \sum d \cos[(ig + i'g')t + q], \\ \frac{dx'}{dt} &= \phantom{-}a'_1 y + a'_2 y' + \sum b' \cos[(ig + i'g')t + q], \\ \frac{dy'}{dt} &= -a'_1 x - a'_2 x' + \sum d' \cos[(ig + i'g')t + q]. \end{aligned}\right.$$

En y faisant abstraction des termes compris sous le signe $\sum$, ces équations se réduisent aux équations (4) dont nous avons trouvé pour l'intégrale générale

$$x = \mathrm{N}\sin(gt+\beta) + \mu, \qquad x' = \frac{a'_2}{a_2}\mathrm{N}\sin(gt+\beta) - \frac{a_1}{a_2}\mu,$$

$$y = \mathrm{N}\cos(gt+\beta) + \lambda, \qquad y' = \frac{a'_2}{a_2}\mathrm{N}\cos(gt+\beta) - \frac{a_1}{a_2}\mu,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{X}\sin gt + \mathrm{Y}\cos gt + \mu, \\ y &= \mathrm{X}\cos gt - \mathrm{Y}\sin gt + \lambda, \\ x' &= \frac{a'_2}{a_2}\mathrm{X}\sin gt + \frac{a'_2}{a_2}\mathrm{Y}\cos gt - \frac{a_1}{a_2}\mu, \\ y' &= \frac{a'_2}{a_2}\mathrm{X}\cos gt + \frac{a'_2}{a_2}\mathrm{Y}\sin gt - \frac{a_1}{a_2}\lambda, \end{aligned}\right.$$

et, d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires, l'intégration des équations (8) est ramenée à celle des équations

$$\frac{dX}{dt}\sin gt + \frac{dY}{dt}\cos gt + \frac{d\mu}{dt} = \sum b\cos[(ig + i'g')t + q],$$
$$\frac{dX}{dt}\cos gt - \frac{dY}{dt}\sin gt + \frac{d\lambda}{dt} = \sum d\cos[(ig + i'g')t + q],$$

$$\frac{a'_2}{a_2}\frac{dX}{dt}\sin gt + \frac{a'_2}{a_2}\frac{dY}{dt}\cos gt - \frac{a_1}{a_2}\frac{d\mu}{dt} = \sum b'\cos[(ig + i'g')t + q],$$
$$\frac{a'_2}{a_2}\frac{dX}{dt}\cos gt - \frac{a'_2}{a_2}\frac{dY}{dt}\sin gt - \frac{a_1}{a_2}\frac{d\lambda}{dt} = \sum d'\cos[(ig + i'g')t + q].$$

En éliminant $\frac{d\mu}{dt}$ entre la première et la troisième de ces équations, et $\frac{d\lambda}{dt}$ entre la deuxième et la quatrième, on a

$$\frac{dX}{dt}\sin gt + \frac{dY}{dt}\cos gt = \sum c\cos[(ig + i'g')t + q],$$
$$\frac{dX}{dt}\cos gt - \frac{dY}{dt}\sin gt = \sum c'\cos[(ig + i'g')t + q],$$

d'où

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \sum \mathrm{H}\cos[(ig + i'g')t + q],\\ \frac{dY}{dt} &= \sum \mathrm{H}'\cos[(ig + i'g')t + q],\end{aligned}\right.$$

et ensuite, on trouve, pour déterminer $\lambda$, $\mu$, des équations de la forme

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= \sum \mathrm{K}\cos[(ig + i'g')t + q],\\ \frac{d\lambda}{dt} &= \sum \mathrm{K}'\cos[(ig + i'g')t + q].\end{aligned}\right.$$

En portant les intégrales des équations (10) et (11) dans les formules (9) et en déterminant convenablement les valeurs initiales, on aura les coefficients des termes en $h^{03}$ dans les développements de $h$, $l$, $h'$, $l'$.

On déterminerait absolument de la même façon les coefficients d'un autre terme quelconque du troisième ordre.

Après avoir déterminé les coefficients des termes du premier et du troisième ordre, on sera conduit, pour avoir ceux du quatrième ordre, à des équations de même forme que (8). Et ainsi de suite, de proche en proche, on pourra déterminer les coefficients des termes d'ordre quelconque des développements de $h$, $l$, ..., $q'$.