S. MANGEOT

Sur les éléments de la courbure des courbes et surfaces

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 87-89
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__87_0>

SUR LES ÉLÉMENTS

DE LA

COURBURE DES COURBES ET SURFACES,

PAR M. S. MANGEOT,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE TROYES.

Je considère une quadrique et une sphère tangente, et j'imagine le cône qui, ayant son sommet placé en leur point de contact M, passe par leur courbe commune. Ce cône est du deuxième degré. On peut voir que celles des sections normales de la quadrique, au point M, qui touchent les traces du cône sur le plan tangent, ont leur rayon de courbure égal au rayon de la sphère; si le cône est en contact avec ce plan, l'arête de contact devra coïncider avec une tangente principale de la quadrique. On conclut de là ces deux règles :

1° *Pour avoir les centres de courbures principaux et les tangentes principales en un point simple* M *d'une quadrique définie par son équation, il suffit d'exprimer que, par l'intersection de la quadrique et d'une sphère la touchant en* M, *on peut faire passer un cône ayant son sommet en* M *et tangent à la quadrique. Le centre de la sphère et l'arête de contact du cône avec le plan tangent sont un centre de courbure principal et la tangente principale correspondante de la quadrique.*

2° *Pour avoir le cercle osculateur en un point ordinaire* M *de la courbe d'intersection de deux quadriques définies analytiquement, il suffit d'exprimer que, par l'intersection de chacune d'elles avec une sphère la touchant en* M, *on peut faire passer un cône ayant son sommet au point* M *et* *tangent à la courbe en ce point. Le cercle commun aux deux sphères ainsi déterminées est le cercle cherché* (1).

Je suppose maintenant que l'on veuille résoudre les deux mêmes problèmes sur des surfaces quelconques. On pourra, pour cet objet, remplacer chacune de celles qui ne sont pas des surfaces du premier ou du second degré par une quadrique ayant avec elle, au point que l'on considère, un contact d'ordre égal ou supérieur à 2 : car, si deux surfaces ont entre elles un tel contact, elles admettent, au point de contact, les mêmes directions principales et les mêmes courbures principales, et, d'un autre côté, quand deux surfaces ont respectivement un contact d'ordre au moins égal à 2 avec deux autres surfaces en un de leurs points communs, la courbe d'intersection des deux premières surfaces a le même cercle de courbure, en ce point, que la courbe commune aux deux autres. Or, si

$$f(x, y, z) = 0$$

est l'équation ponctuelle d'une surface, et si x', y', z' sont les coordonnées d'un point non singulier de cette surface, on obtient l'équation d'une quadrique particulière qui la touche en ce point, le contact étant au moins du second ordre, en annulant la fonction

$$\sum_{n=1}^{n=2} \frac{1}{n} \left[(x - x') \frac{\partial}{\partial x'} + (y - y') \frac{\partial}{\partial y'} + (z - z') \frac{\partial}{\partial z'} \right]^n f(x', y', z'),$$

c'est-à-dire en ne conservant, du développement de l'équation de la surface suivant les puissances entières et positives de $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, que les termes qui sont du premier et du second degré par rapport à ces différences.

Veut-on, par exemple, connaître les rayons principaux, à l'origine O des coordonnées supposées rectangulaires, de la surface A qui correspond à l'équation

$$e^x - e^y - \sin z = 0?$$

---

(1) Si l'une des deux quadriques se réduit à un plan, le cercle osculateur est l'intersection de ce plan avec la sphère relative à l'autre quadrique.

On peut, à cet effet, remplacer la surface A par la quadrique qui a pour équation

$$\left(1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}\right)-\left(1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}\right)-z=0$$

ou

$$2(x-y-z)+x^2-y^2=0,$$

et appliquer à cette quadrique la règle énoncée plus haut. Une sphère la touchant au point O est

$$x^2+y^2+z^2+2\rho(x-y-z)=0;$$

le cône ayant comme sommet ce point et comme directrice l'intersection de la quadrique et de la sphère est

$$x^2+y^2+z^2-\rho(x^2-y^2)=0.$$

Pour qu'il soit en contact avec la quadrique, c'est-à-dire pour qu'il soit tangent au plan $x-y-z=0$, il faut prendre $\rho=\pm\sqrt{3}$. Les centres de courbure principaux de la surface A sont donc les centres des deux sphères

$$x^2+y^2+z^2\pm 2\sqrt{3}(x-y-z)=0\ (^1).$$

---

(1) Pour avoir les rayons principaux d'une surface, on peut aussi faire usage du théorème suivant, facile à démontrer :

Quand une quadrique et une sphère sont tangentes, le rayon de la sphère et les rayons de courbure principaux de la quadrique, au point de contact, sont proportionnels à la racine double et aux deux autres racines de l'équation dite équation en λ *relative aux deux surfaces rapportées à trois axes coordonnés quelconques,* λ *étant en multiplicateur devant les coefficients de l'équation de la quadrique.*