Annales scientifiques de l'É.N.S.

Ernest Vessiot

Sur une classe d'équations différentielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 53-64

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__53_0>

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

Par M. E. VESSIOT,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

Nous nous proposons d'étudier les équations différentielles du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t), \tag{1}$$

qui jouissent de cette propriété que leur intégrale générale x s'exprime, en fonction d'un certain nombre d'intégrales particulières

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \tag{2}$$

par une formule, connue ou inconnue,

$$x = f(x_1, \ldots, x_n \mid a), \tag{3}$$

qui subsiste lorsqu'on y remplace les intégrales (2) par n autres intégrales particulières quelconques.

En d'autres termes, il s'agit des équations du premier ordre, qui possèdent ce que l'on peut appeler des *systèmes fondamentaux* d'intégrales. Nous montrerons que ces équations se ramènent, par un changement de fonction

$$x = \varphi(X),$$

à des équations linéaires du premier ordre avec ou sans second membre, ou à des équations de Riccati, résultat qui a été démontré par

M. Königsberger [1], dans le cas où la relation (3) est algébrique en $x_1, \ldots, x_n$. Nous indiquerons ensuite comment on peut les caractériser et en ramener l'intégration soit à deux quadratures, soit à l'intégration d'une équation de Riccati [2].

I. Nous démontrons d'abord un lemme sur les groupes de transformations. Il résulte des propositions fondamentales de la théorie de M. Lie, que la condition nécessaire et suffisante pour que les équations

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

définissent un groupe à r paramètres est que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ soient les n intégrales d'un système complet de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{r} \beta_{hk}(a_1, \ldots, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

qui se réduisent respectivement à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, quand on y donne aux a certaines valeurs particulières $a_1^0, \ldots, a_r^0$. On doit supposer, de plus, que le déterminant des fonctions β_{hk} n'est pas identiquement nul.

Cela posé, soient

$$(4) \qquad x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations d'un groupe simplement transitif; et faisons-y le changement de paramètres

$$(5) \qquad b_i = f_i(x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

les nouvelles équations du groupe

$$(6) \qquad x'_i = g_i(x_1, \ldots, x_n \mid b_1, \ldots, b_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont telles que g_i se réduit à b_i quand on y remplace $x_1, \ldots, x_n$ par

(1) *Acta mathematica*, t. III.

(2) Ceci prouve, comme nous l'avions annoncé, que les équations du premier ordre que l'on rencontre dans l'application de notre méthode d'intégration des équations linéaires peuvent être remplacées par des équations de Riccati. (Voir *Ann. de l'École Norm.*, 1892.)

$x_1^0, \ldots, x_n^0$. Or, d'après le théorème précédent, les g sont intégrales d'un système complet

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{hi}(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{n} \beta_{hk}(b_1, \ldots, b_n) \frac{\partial f}{\partial b_k} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

et, de plus, le groupe (4) étant transitif, le déterminant des ξ_{hi} n'est pas identiquement nul. Donc, toujours en vertu du même théorème, les équations

$$b'_i = g_i(x_1, \ldots, x_n \mid b_1, \ldots, b_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

définissent un groupe aux paramètres $x_1, \ldots, x_n$. C'est le résultat que nous voulions obtenir.

2. Revenons à l'équation (1). De la propriété que nous lui supposons résulte que les équations

$$x'_i = f(x_1, \ldots, x_n \mid a_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

définissent un groupe simplement transitif. Si donc l'on pose

$$b_i = f(x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid a_i),$$

on aura des équations analogues

$$x'_i = g(x_1, \ldots, x_n \mid b_i);$$

et, en vertu de notre lemme, les équations

$$b'_i = g(x_1, \ldots, x_n \mid b_i)$$

définissent elles-mêmes un groupe, ce qui revient à dire que la seule équation

$$b' = g(x_1, \ldots, x_n \mid b)$$

définit un groupe. On peut donc supposer que, dans la formule (3), la constante d'intégration a est tellement choisie que l'équation

$$a' = f(x_1, \ldots, x_n \mid a) \tag{8}$$

définisse un groupe aux paramètres $x_1, \ldots, x_n$.

Or M. Lie a démontré qu'il n'y a que trois types de groupes à un paramètre : le groupe linéaire homogène, le groupe linéaire général et le groupe projectif. Donc, par un changement de variables convenable,

$$a = \varphi(c), \qquad a' = \varphi(c'),$$

l'équation (8) prendra l'une des trois formes

$$c' = c\,\theta\,(x_1, \ldots, x_n),$$
$$c' = c\,\theta_1(x_1, \ldots, x_n) + \theta_2(x_1, \ldots, x_n),$$
$$c' = \frac{c\,\theta_1(x_1, \ldots, x_n) + \theta_2(x_1, \ldots, x_n)}{c\,\theta_3(x_1, \ldots, x_n) + \theta_4(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Cela revient à dire que l'équation (3), qui définit l'intégrale générale de l'équation (1), prend, par le changement de fonction et de constante

$$x = \varphi(\mathrm{X}), \qquad a = \varphi(c),$$

l'une des trois formes

$$\mathrm{X} = c\,\alpha\,(t),$$
$$\mathrm{X} = c\,\alpha_1(t) + \alpha_2(t),$$
$$\mathrm{X} = \frac{c\,\alpha_1(t) + \alpha_2(t)}{c\,\alpha_3(t) + \alpha_4(t)},$$

et que, par suite, le changement de fonction

$$x = \varphi(\mathrm{X}),$$

appliqué à l'équation (1), fournit une équation linéaire sans second membre, ou avec second membre, ou une équation de Riccati. C'est le théorème annoncé.

La réciproque est, du reste, évidente, en vertu des propriétés bien connues des équations linéaires et de l'équation de Riccati. Elle montre enfin que le nombre n des intégrales d'un système fondamental est 1, 2 ou 3. De là trois classes d'équations que nous allons étudier successivement.

3. *Équations de la première classe.* — **L'équation (1) provient, par un changement de fonction**

$$x = \varphi(\mathrm{X}),$$

d'une équation linéaire sans second membre

$$\frac{dX}{dt} + P(t)X = 0. \tag{9}$$

On a donc

$$F(x, t) = -P(t)\,X\,\varphi'(X),$$

c'est-à-dire que F est le produit d'une fonction x par une fonction de t, ce qui s'exprime par l'identité

$$\frac{\partial^2 \log F}{\partial x\,\partial t} = 0$$

ou

$$F\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est remplie, l'équation (1) est une équation de la première classe, et s'intègre par deux quadratures indépendantes. On a, en effet,

$$F(x, t) = P(t)\,\psi(x),$$

et l'on pourra prendre

$$P(t) = k\,F(x_0, t), \qquad \psi(x) = k'\,F(x, t_0),$$

k et k' étant deux constantes satisfaisant à la condition

$$kk'\,F(x_0, t_0) = 1.$$

Posons alors

$$\psi(x) = -X\frac{dx}{dX},$$

c'est-à-dire

$$X = e^{-\int \frac{dx}{\psi(x)}};$$

et cette équation définira le changement de fonction qui ramène l'équation donnée à la forme (9). D'autre part, la proposée s'écrit

$$\frac{dx}{\psi(x)} = P(t)\,dt;$$

d'où l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\psi(x)} = \int P(t)\,dt.$$

En résumé, *les équations de la première classe sont celles où les variables sont séparées.*

4. *Équations de la deuxième classe.* — Si l'équation (1) provient d'une équation linéaire avec second membre

$$\frac{dX}{dt} + P(t)X = Q(t), \tag{10}$$

par un changement de fonction

$$x = \varphi(X),$$

on a

$$F(x, t) = -P(t)X\varphi'(X) + Q(t)\varphi'(X).$$

F est donc intégrale d'une équation linéaire du second ordre, dont les coefficients sont fonctions de x seul. De plus, deux des intégrales de cette équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)y = 0 \tag{11}$$

sont

$$y_1 = X\varphi'(X), \qquad y_2 = \varphi'(X),$$

et sont, par suite, liées par la relation

$$\frac{1}{y_2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_2}\right),$$

c'est-à-dire

$$y_2 = y_2 y'_1 - y_1 y'_2. \tag{12}$$

L'équation (11) a donc cette propriété que le déterminant fonctionnel de deux intégrales est une intégrale; on en conclut sans peine

$$\mu(x) = \lambda'(x).$$

Réciproquement, si cette condition est remplie, je dis qu'on peut trouver deux intégrales de l'équation (11) vérifiant la relation (12). Soient, en effet, z_1, z_2 deux intégrales quelconques; on a, par hypothèse,

$$z_2 z'_1 - z_1 z'_2 = a z_1 + b z_2; \tag{13}$$

et si l'on pose

$$y_2 = a z_1 + b z_2, \qquad y_1 = \frac{1}{b} z_1,$$

on retombe précisément sur la relation (2). $\Big($Si b était nul, on poserait $y_1 = -\frac{1}{a} z_2.\Big)$

Supposons donc que F soit intégrale d'une équation de la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda(x)\frac{dy}{dx} + \lambda'(x) y = 0; \tag{14}$$

$F(x, t_1)$, $F(x, t_2)$ en sont deux intégrales, et l'on a une identité

$$F(x, t) = A_1(t) F(x, t_1) + A_2(t) F(x, t_2),$$

où l'on déterminera A_1 et A_2 en donnant à x deux valeurs particulières. On a de plus une identité de la forme

$$F(x, t_2)\frac{\partial F(x, t_1)}{\partial x} - F(x, t_1)\frac{\partial F(x, t_2)}{\partial x} = a F(x, t_1) + b F(x, t_2),$$

où les constantes a et b se déterminent de même. Si l'on pose alors

$$y_2 = a F(x, t_1) + b F(x, t_2), \qquad y_1 = \frac{1}{b} F(x, t_1),$$

on a enfin une dernière identité de la forme

$$F(x, t) = -P(t) y_1 + Q(t) y_2,$$

où P et Q sont connus, et où y_1, y_2 vérifient la condition (12). L'équation

$$X = \frac{y_1}{y_2}$$

définit alors un changement de fonction qui transforme l'équation donnée en

$$\frac{dX}{dt} = [-P(t) y_1 + Q(t) y_2]\frac{d}{dx}\frac{y_1}{y_2}$$

ou, à cause de (12),

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{y_2}[-P(t) y_1 + Q(t) y_2],$$

c'est-à-dire en l'équation (10). Celle-ci s'intègre dès lors par deux quadratures superposées.

En résumé, *les équations de la deuxième classe sont celles pour lesquelles* F *est intégrale d'une équation linéaire du second ordre à coefficients en x telle que le déterminant fonctionnel de deux intégrales en soit une intégrale; elles s'intègrent par deux quadratures.*

Remarque. — On peut traduire cette condition par deux identités entre F et ses dérivées. F satisfaisant à l'équation (14), il en est de même de $\frac{\partial F}{\partial t}$; de plus, F et $\frac{\partial F}{\partial t}$ sont deux intégrales indépendantes, sans quoi

$$\Delta = F\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

et l'équation serait de la première classe. On doit donc avoir (et cela suffit)

$$\lambda(x) = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \qquad \lambda'(x) = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial t}\right).$$

Les conditions annoncées sont donc

$$\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial x\,\partial t} = 0,$$

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial t}\right) + \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial x^2} = 0.$$

On peut enfin remarquer que la première, développée, s'écrit

$$\begin{vmatrix} F & \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial t} & \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial t} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} & \frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial t^2} & \frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial t^2} \end{vmatrix} = 0.$$

5. *Équations de la troisième classe.* — Si l'équation (1) provient d'une équation de Riccati,

$$(15) \qquad \frac{dX}{dt} = P(t)X^2 + Q(t)X + R(t),$$

par le changement de fonction $x = \varphi(X)$, on a

$$F(x, t) = P(t) X^2 \varphi'(X) + Q(t) X \varphi'(X) + R(t) \varphi'(X).$$

F est donc intégrale de l'équation linéaire du troisième ordre, à coefficients indépendants de t,

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \lambda(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \mu(x) \frac{dy}{dx} + \nu(x) y = 0, \tag{16}$$

qui admet pour intégrales

$$y_1 = X^2 \varphi'(X), \qquad y_2 = X \varphi'(X), \qquad y_3 = \varphi'(X).$$

Ces intégrales vérifient les identités

$$y_1 y_3 - y_2^2 = 0, \tag{17}$$

$$y_3 = y_3 y_2' - y_2 y_3', \qquad 2 y_2 = y_3 y_1' - y_1 y_3', \qquad y_1 = y_2 y_1' - y_1 y_2'; \tag{18}$$

l'équation (16) est donc identique à sa transformée au déterminant fonctionnel de deux intégrales. Je dis que, réciproquement, s'il en est ainsi, on peut trouver trois intégrales vérifiant les identités (17) et (18). Soient, en effet, u_1, u_2, u_3 trois intégrales quelconques. On a, par hypothèse,

$$\left\{ \begin{aligned} u_2 u_3' - u_3 u_2' &= a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3, \\ u_3 u_1' - u_1 u_3' &= a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + a_{23} u_3, \\ u_1 u_2' - u_2 u_1' &= a_{31} u_1 + a_{32} u_2 + a_{33} u_3, \end{aligned} \right. \tag{19}$$

d'où la relation quadratique

$$\sum_{i,k} a_{ik} u_i u_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

On peut alors trouver trois nouvelles intégrales z_1, z_2, z_3 telles que cette relation prenne la forme

$$z_1 z_3 - z_2^2 = 0. \tag{20}$$

Posons

$$w_1 = z_2 z_1' - z_1 z_2', \qquad 2 w_2 = z_3 z_1' - z_1 z_3', \qquad w_3 = z_3 z_2' - z_2 z_3';$$

on a

$$w_1 z_3 + w_3 z_1 - 2 w_2 z_2 = 0,$$
$$w_1 z_3' + w_3 z_1' - 2 w_2 z_2' = 0,$$

et aussi, à cause de (20),

$$z_1 z_3 + z_3 z_1 - 2 z_2 z_2 = 0,$$
$$z_1 z_3' + z_3 z_1' - 2 z_2 z_2' = 0$$

et, par suite,

$$\frac{w_1}{z_1} = \frac{w_2}{z_2} = \frac{w_3}{z_3} = \omega.$$

Or ces identités sont de la forme

$$b_{11} z_1 + b_{12} z_2 + b_{13} z_3 = \omega z_1,$$
$$b_{21} z_1 + b_{22} z_2 + b_{23} z_3 = \omega z_2,$$
$$b_{31} z_1 + b_{32} z_2 + b_{33} z_3 = \omega z_3,$$

où les b sont des constantes. On a donc

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \omega & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \omega & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \omega \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire que ω est lui-même une constante donnant lieu aux identités

$$(21) \qquad \omega z_1 = z_2 z_1' - z_1 z_2', \qquad 2\omega z_2 = z_3 z_1' - z_1 z_3', \qquad \omega z_3 = z_3 z_2' - z_2 z_3'.$$

Si alors on pose

$$(22) \qquad z_1 = \omega y_1, \qquad z_2 = \omega y_2, \qquad z_3 = \omega y_3,$$

y_1, y_2, y_3 sont les trois intégrales demandées.

Cela posé, supposons que $F(x, t)$ satisfasse à une équation (16) ayant la propriété énoncée. On pourra poser

$$u_1 = F(x, t_1), \qquad u_2 = F(x, t_2), \qquad u_3 = F(x, t_3),$$

et reprendre les calculs précédents, les constantes a_{ik} et ω qui y figurent se calculant, comme on l'a vu au paragraphe précédent, au moyen d'équations du premier degré. Les intégrales y_1, y_2, y_3 étant déterminées, on a

$$F(x, t) = P(t)y_1 + Q(t)y_2 + R(t)y_3,$$

et les fonctions P, Q, R s'obtiennent encore en donnant à x trois valeurs particulières. Si l'on pose alors

$$X = \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3},$$

on trouve, en vertu des identités (18),

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{dx}F(x, t) = \frac{y_1}{y_2^2}(Py_1 + Qy_2 + Ry_3)$$

ou

$$\frac{dX}{dt} = X^2P + XQ + \frac{y_1 y_3}{y_2^2}R,$$

c'est-à-dire l'équation (15). On a donc bien affaire à une équation de la troisième classe, et tout revient à intégrer l'équation de Riccati (15).

En résumé, *les équations de la troisième classe sont celles pour lesquelles* F *est intégrale d'une équation linéaire du troisième ordre, à coefficients en* x, *identique à sa transformée au déterminant fonctionnel de deux intégrales. L'intégration s'en ramène, par des calculs algébriques, à celle d'une équation de Riccati.*

Remarque. — Il est facile de donner la forme générale des équations (16) qui jouissent de la propriété précédente. Posons, en effet,

$$z = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

il vient

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + 2\lambda\frac{d^2 z}{dx^2} + (\lambda^2 + \lambda' + \mu)\frac{dz}{dx} + (\lambda\mu + \mu' - \nu) = 0.$$

Identifiant avec (16), on obtient

$$\lambda = 0, \qquad \mu' = 2\nu.$$

Le type d'équation cherché est donc

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \mu(x)\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}\mu'(x)y = 0.$$

C'est la forme générale des équations linéaires du troisième ordre, manquant de second terme, et dont trois intégrales sont liées par une relation quadratique à coefficients constants.

Il serait facile de déduire de là, comme on l'a fait au paragraphe précédent, les relations différentielles entre F et ses dérivées, qui caractérisent les équations de la troisième classe.