X. STOUFF

Sur les lignes asymptotiques de quelques surfaces algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 45-52
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__45_0>

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES

DE

QUELQUES SURFACES ALGÉBRIQUES,

PAR M. X. STOUFF,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

I.

Ce Travail a pour objet l'étude des lignes asymptotiques de quelques surfaces. Je m'étais proposé d'abord de déterminer les surfaces sur lesquelles les lignes asymptotiques forment deux systèmes analytiquement distincts; le discriminant de l'équation du second degré qui donne, en chaque point de la surface, les directions des asymptotes de l'indicatrice, doit être alors le carré d'une fonction douée sur la surface d'une valeur unique, mais pouvant avoir deux valeurs pour les points situés en dehors. Ce discriminant n'est autre que le hessien à un facteur carré près. Ce dernier polynôme considéré comme fonction des trois coordonnées d'un point de la surface, augmenté d'un multiple convenablement choisi du premier membre de l'équation de cette surface, doit être un carré parfait. Dans le cas des quadriques, le hessien est une constante; les deux systèmes de lignes asymptotiques ou, ce qui revient au même, les deux systèmes de génératrices rectilignes, sont séparés par l'adjonction de la racine carrée du hessien. Cette remarque m'a engagé à chercher si cette propriété des surfaces du second ordre ne pourrait pas être communiquée à des surfaces du troisième ordre enveloppées par des quadriques. J'ai obtenu incidemment une classe étendue de surfaces du troisième ordre dont on peut déterminer les lignes asymptotiques à l'aide des fonctions elliptiques. Une partie de ces surfaces jouissent de la propriété désirée. Enfin j'indique quelques autres surfaces répondant à la question.

Soit

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x,y,z) = {} & A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz \\ & + 2 B' xz + 2 B'' xy + 2 C x + 2 C' y + 2 C'' z + F = 0 \end{aligned}\right.$$

l'équation d'une quadrique. Soient X, Y, Z les demi-dérivées partielles de $f(x,y,z)$; les lignes asymptotiques sont déterminées par les deux équations

$$(2)\qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

$$(3)\qquad A\,dx^2 + A'\,dy^2 + A''\,dz^2 + 2B\,dy\,dz + 2B'\,dx\,dz + 2B''\,dx\,dy = 0.$$

En éliminant dz entre les équations (2) et (3), on obtient l'équation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & (A''X^2 - 2B'XZ + AZ^2)\,dx^2 + 2(A''XY - BXZ - B'YZ + B''Z^2)\,dx\,dy \\ & \qquad + (A''Y^2 - 2BYZ + A'Z^2)\,dy^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Le discriminant de cette équation est, en faisant abstraction du facteur Z^2 égal à

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & X \\ B'' & A' & B & Y \\ B' & B & A'' & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix};$$

en tenant compte de l'équation (1), ce déterminant se réduit à

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & F \end{vmatrix} = H,$$

c'est-à-dire au hessien. Les lignes asymptotiques ont donc pour équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-A''XY + BXZ + B'YZ - B''Z^2 \pm Z\sqrt{H}}{A''Y^2 - 2BYZ + A'Z^2}.$$

Les deux systèmes diffèrent donc par le signe de $\sqrt{H}$. En désignant par H_A par exemple le mineur du déterminant H relatif à A, cette équation peut s'écrire

$$(5)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-\mathrm{H_F}xy + \mathrm{H_{C'}}x + \mathrm{H_C}y - \mathrm{H_{B''}} \pm (\mathrm{B}'x + \mathrm{B}y + \mathrm{A}''z + \mathrm{C}'')\sqrt{\mathrm{H}}}{-\mathrm{H_F}x^2 + 2\mathrm{H_C}x - \mathrm{H_A}}.$$

L'équation des lignes asymptotiques sous forme finie est, en désignant par m un paramètre arbitraire,

$$(6)\qquad m = \frac{\mathrm{H_F}xy - \mathrm{H_{C'}}x - \mathrm{H_C}y + \mathrm{H_{B''}} \pm (\mathrm{B}'x + \mathrm{B}y + \mathrm{A}''z + \mathrm{C}'')\sqrt{\mathrm{H}}}{\mathrm{H_F}x^2 - 2\mathrm{H_C}x + \mathrm{H_A}}.$$

II.

Considérons les surfaces Σ du troisième ordre représentées en coordonnées tétraédriques par l'équation générale ([1])

$$(7)\qquad (x^2 + y^2 + z^2 + u^2)(ax + by + cz + hu) + (mx + ny + pz + qu)^3 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(7')\qquad \left\{\begin{aligned} &[x^2 + y^2 + z^2 + u^2 - 3\lambda(mx + ny + pz + qu)^2 \\ &\quad - 3\lambda^2(mx + ny + pz + qu)(ax + by + cz + hu) \\ &\quad - \lambda^3(ax + by + cz + hu)^2](ax + by + cz + hu) \\ &\quad + [mx + ny + pz + qu + \lambda(ax + by + cz + hu)]^3 = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations obtenues en égalant à zéro les polynômes contenus dans les crochets représentent la première une quadrique Q, la seconde un plan P. Le long de l'intersection de P et de Q, Σ a avec P un contact du second ordre; les directions des lignes asymptotiques sont donc les mêmes pour Q et pour Σ. Or le hessien de la quadrique Q ne dépend que de λ; nous le désignerons par H, soit

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + h^2 &= \mathrm{A}, \\ m^2 + n^2 + p^2 + q^2 &= \mathrm{M}, \\ am + bn + cp + hq &= \mathrm{S}, \end{aligned}\right.$$

$$(9)\qquad \frac{\mathrm{H}}{4} = 3\lambda^4(\mathrm{AM} - \mathrm{S}^2) - 4\mathrm{A}\lambda^3 - 12\mathrm{S}\lambda^2 - 12\mathrm{M}\lambda + 4.$$

[1] Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences en décembre 1885, M. de Saint-Germain signale ces surfaces comme possédant une infinité d'ombilics. (Voir *Comptes rendus*.)

Si l'on exprime que ce polynôme est carré parfait, on trouve les relations

$$S = \frac{8A - 27M^3}{36M}, \qquad 2^8A^2 - 2^6.3^3AM^3 + 3^6M^6 = 0. \tag{10}$$

Lorsque ces deux dernières relations sont satisfaites, les systèmes de lignes asymptotiques sont distinctes. Remarquons que l'équation de Σ peut être mise sous la forme (7) de bien des manières. Il y a une infinité de quadriques Q. En rapportant l'une quelconque de ces quadriques à un tétraèdre conjugué, l'équation de Σ prendra la forme (7). Les quantités A, M, S restent invariables lorsque, sans changer la quadrique fondamentale, on passe d'un tétraèdre conjugué par rapport à cette quadrique à un autre tétraèdre conjugué; la quantité $AM - S^2$ est un invariant pour toutes les quadriques Q.

Pour former l'équation différentielle des lignes asymptotiques, prenons pour coordonnées sur la surface les quantités définies par les équations

$$mx + ny + pz + qu + \lambda(ax + by + cz + hu) = 0, \tag{11}$$

$$ax + by + cz + hu = \mu u. \tag{12}$$

Cette équation devient

$$\left\{\begin{aligned}
&\mu^2\big[-\tfrac{3}{4}\lambda^4\mu^2(AM - S^2 - Mh^2 - Aq^2 + 2Shq) + \lambda^3\mu^2(A - h^2) \\
&\qquad + 3\lambda^2\mu(Aq - Sh) + 3\lambda\mu^2(M - q^2) - 6\lambda\mu(Mh - Sq) \\
&\qquad\qquad + 3\lambda(AM - S^2) - \mu^2 + 2h\mu - A\big]\,d\lambda^2 \\
&\quad + \mu\big[\lambda^3\mu(Aq - Sh) + 3\lambda^2\mu(Sq - Mh) + 3\lambda^2(AM - S^2) \\
&\qquad\qquad + 2h\lambda\mu - 2A\lambda + 2q\mu - 2S\big]\,d\lambda\,d\mu \\
&\qquad + \big[\lambda^3(AM - S^2) - A\lambda^2 - 2S\lambda - M\big]\,d\mu^2 = 0.
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Le discriminant de l'équation en $\frac{d\mu}{d\lambda}$ est égal à

$$\left\{\begin{aligned}
&[3\lambda^4(AM - S^2) - 4A\lambda^3 - 12S\lambda^2 - 12M\lambda + 4] \\
&\quad\times\big\{[\lambda^3(AM - S^2 - Mh^2 - Aq^2 + 2Shq) + \lambda^2(h^2 - A) + 2\lambda(hq - S) + q^2 - M]\mu^2 \\
&\qquad - 2\mu[\lambda(Aq - Sh) - Mh + Sq] - AM + S^2\big\},
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

et les lignes asymptotiques sont représentées par l'équation

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &2[\lambda^3(\mathrm{AM}-\mathrm{S}^2)-\mathrm{A}\lambda^2-2\mathrm{S}\lambda-\mathrm{M}]\,d\mu \\ &+\left\{\begin{aligned} &\lambda^3\mu(\mathrm{A}q-\mathrm{S}h)+3\lambda^2\mu(\mathrm{S}q-\mathrm{M}h)+3\lambda^2(\mathrm{AM}-\mathrm{S}^2)+2h\lambda\mu-2\mathrm{A}\lambda+2q\mu-2\mathrm{S} \\ &\pm\sqrt{3\lambda^4(\mathrm{AM}-\mathrm{S}^2)-4\mathrm{A}\lambda^3-12\mathrm{S}\lambda^2-12\mathrm{M}\lambda+4} \\ &\times\sqrt{\left\{\begin{aligned}&[\lambda^3(\mathrm{AM}-\mathrm{S}^2-\mathrm{M}h^2-\mathrm{A}q^2+2hq\mathrm{S})+\lambda^2(h^2-\mathrm{A})+2\lambda(hq-\mathrm{S})+q^2-\mathrm{M}]\mu^2 \\ &-2[\lambda(\mathrm{A}q-\mathrm{S}h)-\mathrm{M}h+\mathrm{S}q]\mu-\mathrm{AM}+\mathrm{S}^2\end{aligned}\right\}}\end{aligned}\right\}\mu\,d\lambda=0.\end{aligned}\right.$$

La seconde irrationnalité n'est, pour ainsi dire, qu'accidentelle et tient au choix de la coordonnée μ sur la surface. Elle se présente quand on veut exprimer $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$ en fonction de λ et de μ. Voici, par exemple, l'expression de $\frac{z}{u}$:

$$(16)\quad \frac{z}{u}=\frac{\left\{\begin{aligned}&[c(am+bn)-p(a^2+b^2)]\lambda\mu+[p(am+bn)-c(m^2+n^2)]\mu \\ &-pq(a^2+b^2)+(am+bn)(cq+hp)-ch(m^2+n^2)+(an-bm)\sqrt{\mathrm{R}(\lambda,\mu)}\end{aligned}\right\}}{\mathrm{AM}-\mathrm{S}^2-\mathrm{M}h^2-\mathrm{A}q^2+2hq\mathrm{S}};$$

$\mathrm{R}(\lambda,\mu)$ désigne le polynôme qui figure dans (15) sous le second radical. Soient t une nouvelle variable et $\varphi(\lambda)$ le polynôme déterminés par les équations

$$(17)\quad \sqrt{\mathrm{R}(\lambda,\mu)}=\sqrt{\mathrm{S}^2-\mathrm{AM}}-\frac{\lambda(\mathrm{A}q-\mathrm{S}h)+\mathrm{M}h-\mathrm{S}q}{\sqrt{\mathrm{S}^2-\mathrm{AM}}}+t\mu,$$

$$(18)\quad \varphi(\lambda)=3\lambda^4(\mathrm{AM}-\mathrm{S}^2)-4\mathrm{A}\lambda^3-12\mathrm{S}\lambda^2-12\mathrm{M}\lambda+4.$$

Il est intéressant de remarquer que $\varphi'(\lambda)$ est le discriminant de $\mathrm{R}(\lambda,\mu)$ considéré comme fonction de μ. L'équation des lignes asymptotiques devient alors, après la suppression du facteur,

$$t^2+\frac{\mathrm{AM}-\mathrm{S}^2-\mathrm{M}h^2-\mathrm{A}q^2+2hq\mathrm{S}}{12(\mathrm{AM}-\mathrm{S}^2)}\varphi'(\lambda),$$

qui, égalé à zéro, constitue une solution étrangère

$$\begin{aligned}&2[\lambda^3(\mathrm{AM}-\mathrm{S}^2)-\mathrm{A}\lambda^2-2\mathrm{S}\lambda-\mathrm{M}]\,dt \\ &\quad+\left[\sqrt{\varphi(\lambda)}\sqrt{\mathrm{S}^2-\mathrm{AM}}-3\lambda^2(\mathrm{AM}-\mathrm{S}^2)+2\mathrm{A}\lambda+2\mathrm{S}\right]t\,d\lambda=0\end{aligned}$$

ou plus simplement

$$\frac{2\,dt}{t}=\frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}d\lambda\pm\frac{12\sqrt{\varphi(\lambda)}(\mathrm{S}^2-\mathrm{AM})}{\varphi'(\lambda)}d\lambda.$$

et

$$\frac{t^2}{\varphi'(\lambda)} = e^{\pm \int \frac{12\sqrt{\varphi(\lambda)(S^2 - AM)}\, d\lambda}{\varphi'(\lambda)}}. \tag{19}$$

L'ensemble des deux variables λ et $\sqrt{\varphi(\lambda)}$ définit un système de fonctions elliptiques. Les invariants g_2 et g_3 sont donnés par les formules [1]

$$g_2 = 0, \tag{20}$$

$$g_3 = 32 S^3 - 36 AMS - 27 AM^3 + 27 M^2 S^2 - 4 A^2. \tag{21}$$

Il résulte de la nullité de g_2 que ces fonctions elliptiques *admettent la multiplication complexe par une racine cubique de l'unité*, ou, ce qui revient au même, la cubique plane correspondante est équianharmonique. En posant

$$\frac{12\sqrt{S^2 - AM}\, d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} = du,$$

on aura

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} = F(u),$$

$F(u)$ désignant une fonction doublement périodique de u douée de huit infinis dans chaque parallélogramme des périodes. Désignons-les par $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, 8)$, l'équation (19) devient

$$\frac{t^2}{\varphi'(\lambda)} = \prod_{i=1}^{8} \sigma(u - \alpha_i)^{\beta_i} e^{Cu};$$

σ désigne la fonction de M. Weierstrass, β_i des exposants fixes.

Quand $\varphi(\lambda)$ est carré parfait, posons

$$\varphi(\lambda) = 3(AM - S^2) P^2,$$

P étant un polynôme du second degré en λ; les deux systèmes de lignes asymptotiques sont alors représentés par les équations

$$\frac{t^2}{PP'} = C(P')^{\pm\sqrt{-3}},$$

où C est une constante.

---

(1) *Voir* WEBER, *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, p. 13.

III.

Voici quelques exemples de surfaces du quatrième ordre sur lesquelles les lignes asymptotiques sont distinctes ([1]) :

1°
$$zu^3 = x^2y^2;$$

les lignes asymptotiques ont pour équation

$$\frac{y}{u} = C\left(\frac{x}{u}\right)^{-2\pm\sqrt{3}},$$

2°
$$zu^3 = x^4 + 6x^2y^2 + y^4;$$

les lignes asymptotiques ont pour équation

$$x^2 + y^2 \pm 2ixy = Cu^2;$$

dans ces deux équations, C est une constante arbitraire.

3°
$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 6z^2u^2 = 0;$$

les lignes asymptotiques ont pour équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-16x^3y^3 \pm (x^6 + 5x^4y^2 - 5x^2y^4 - y^6)\sqrt{-3}}{3x^6 + 3x^4y^2 + 9x^2y^4 + y^6},$$

équation homogène et qui s'intègre sans difficulté.

4°
$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 + z^4 + 6z^2u^2 + u^4 = 0,$$

les lignes asymptotiques ont pour équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy(z^3 + 3z) - (z^2 + 1)(x^3 + 3xy^2)(3x^2y + y^3) \pm (z^3 + 3z)(x^2 - y^2)(z^2 - 1)}{(x^3 + 3z)^2(x^2 + y^2) + (z^2 + 1)(3x^2y + y^3)}$$

IV.

On peut encore obtenir des surfaces sur lesquelles les lignes asymptotiques forment deux systèmes distincts, par le procédé suivant. Ima-

---

([1]) Les surfaces indiquées dans ce paragraphe rentrent toutes dans la catégorie de celles dont les lignes asymptotiques peuvent être déterminées par le procédé de M. Jamet, (*Annales de l'École Normale*, 1887; Picard, *Traité d'Analyse*, p. 403).

ginons des surfaces S dépendant d'un paramètre arbitraire λ, et sur lesquelles les lignes asymptotiques soient déjà distinctes, par exemple des surfaces réglées d'ordre supérieur au second. Si ces surfaces ont un contact du second ordre avec leur enveloppe, cette enveloppe jouira de la même propriété.

Exemple :

$$x^2 z u + y^4 = 0. \tag{22}$$

Cette équation peut s'écrire

$$\begin{aligned} \{ x^2 z - \lambda[y^3(3+\mathrm{K}) + \lambda y^2 u(3+3\mathrm{K}) + \lambda^2 y u^2(1+3\mathrm{K}) + \lambda^3 \mathrm{K} u^3] \} u & \\ + (y + \lambda \mathrm{K} u)(y + \lambda u)^3 = 0; & \end{aligned}$$

K désigne une constante indéterminée. Nous en disposerons de telle sorte que le multiplicateur de λ dans les premières parenthèses ait un facteur double. En désignant par P et Q des polynômes linéaires, l'équation prend alors la forme

$$(x^2 z - \lambda \mathrm{P}^2 \mathrm{Q}) u + (y + \lambda \mathrm{K} u)(y + \lambda u)^3 = 0.$$

La surface

$$x^2 z - \lambda \mathrm{P}^2 \mathrm{Q} = 0$$

est évidemment réglée et admet pour enveloppe la surface (22). Cette surface présente donc des lignes asymptotiques formant deux systèmes distincts, pourvu que l'on adjoigne les valeurs de K ([1]). On trouve pour ces valeurs

$$\mathrm{K} = \frac{7 \pm 4\sqrt{-2}}{27},$$

et la surface peut être regardée de deux manières différentes comme l'enveloppe de surfaces réglées du troisième ordre. Les lignes asymptotiques se déterminent d'ailleurs sans difficulté.

([1]) J'entends ici l'expression *adjoindre* au sens où elle est habituellement employée par M. Kronecker.