ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RIQUIER.

Sur la réduction d'un système différentiel quelconque à un système linéaire et complètement intégrable du premier ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 359-386

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__359_0>

SUR LA RÉDUCTION

D'UN

SYSTÈME DIFFÉRENTIEL QUELCONQUE

A UN

SYSTÈME LINÉAIRE ET COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE DU PREMIER ORDRE,

PAR M. RIQUIER,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN.

Dans deux Notes communiquées à l'Académie des Sciences (28 mars 1892, 27 février 1893), et dans un Mémoire ayant pour titre : *De l'Existence des intégrales dans un système différentiel quelconque* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1893), j'ai montré comment on peut, de deux manières différentes, mais toujours par de simples résolutions d'équations, combinées avec des différentiations, ramener un système différentiel quelconque à une forme complètement intégrable, que j'ai nommée *harmonique* (1), et dont l'ordre est généralement supérieur à 1. Cette première réduction une fois effectuée, on peut, comme j'en ai acquis récemment la certitude, en effectuer une seconde, et ramener, par de simples différentiations, un système harmonique et complètement intégrable d'ordre quelconque, à un système harmonique et complètement intégrable du premier ordre, possédant en outre la forme linéaire par rapport aux dérivées des fonctions inconnues. Ce nouveau résultat, dont l'exposition détaillée constitue l'objet du présent Mémoire, a été communiqué à l'Académie des Sciences

(1) Nonobstant cette dénomination d'*harmonique*, il n'y a rien de commun entre les recherches d'Analyse générale dont je m'occupe actuellement et la théorie d'une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre, dont la considération est souvent usitée en Physique mathématique.

dans la séance du 24 avril 1893; il m'a permis, cela va sans dire, de simplifier dans une mesure considérable ma première démonstration de la convergence des développements des intégrales.

J'aurai souvent à m'appuyer, dans le cours de ce travail, sur les résultats qui font l'objet de mon dernier Mémoire (*De l'Existence des intégrales dans un système différentiel quelconque*) : les chiffres suivis d'un astérisque renverront le lecteur aux divisions du Mémoire dont il s'agit, et les chiffres non suivis d'un astérisque à celles du présent Mémoire.

Systèmes harmoniques. — Conditions de passivité d'un système harmonique.

1. *Voir* les n^os 1* à 13* du Mémoire cité plus haut (*Annales de l'École Normale supérieure*, p. 65 à 86; 1893).

Existence des intégrales ordinaires dans un système harmonique, passif et linéaire du premier ordre.

2. *Lorsqu'un système différentiel du premier ordre est harmonique, passif et linéaire par rapport aux dérivées des fonctions inconnues, il admet un groupe d'intégrales ordinaires* (2*), *et un seul, répondant à des conditions initiales données* (8*).

Pour établir l'existence du groupe unique d'intégrales dont parle l'énoncé, il suffit, comme nous l'avons dit ailleurs (8*, III), de prouver la convergence des développements de ces intégrales. L'artifice employé, pour certains systèmes du premier ordre, dans un Mémoire publié par M. Méray avec ma collaboration ([1]), m'a suggéré la démonstration suivante.

I. *Définition des majorantes.*

Voir 15*, I (*Annales de l'École Normale supérieure*, p. 124; 1893).

II. *Soient* $f(x, y, \ldots)$ *une fonction olotrope à l'intérieur d'un sys-*

([1]) *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, p. 47 et suivantes; 1890).

tème de cercles de rayons R_x, R_y, ...; x_0, y_0, ... *des valeurs particulières intérieures aux cercles dont il s'agit; r une première quantité positive inférieure aux différences* $R_x - \operatorname{mod} x_0$, $R_y - \operatorname{mod} y_0$, ...; α *une deuxième, positive ou nulle, quelconque d'ailleurs;* M *une troisième supérieure à tous les modules que peut acquérir la valeur de* $f(x, y, \ldots)$ *à l'intérieur et sur les circonférences des cercles de rayon r décrits respectivement de* x_0, y_0, ... *comme centres;* β, γ, ... *des constantes positives au moins égales à* $\frac{1}{r}$; *enfin m un entier positif.*

Cela étant, la fonction

$$\frac{M+\alpha}{[1-\beta(x-x_0)-\gamma(y-y_0)-\ldots]^m}-\alpha$$

est majorante pour $f(x, y, \ldots)$ *relativement aux valeurs* x_0, y_0, ...

Voir 15*, II (*Annales de l'École Normale supérieure,* p. 124 et 125; 1893).

III. *Si l'on désigne par u une fonction inconnue de la variable indépendante x, par* $U_1(x, u)$ *une composante donnée, olotrope à l'intérieur d'un système de cercles, et par* x_0, u_0 *des valeurs intérieures aux cercles dont il s'agit, l'équation différentielle*

$$\frac{du}{dx} = U_1(x, u)$$

est identiquement vérifiée par la substitution à u de la somme d'une série entière en $x - x_0$, *se réduisant à* u_0 *pour* $x = x_0$.

Voir 15*, III (*Ann. de l'École Normale supérieure,* p. 125 à 127; 1893).

IV. Nous nommerons désormais:

($\mathfrak{A}$) le système harmonique, passif et linéaire du premier ordre que vise l'énoncé;

x_0, y_0, ... les valeurs initiales des variables indépendantes x, y, ...;

u_0, v_0, ... celles des fonctions inconnues u, v, ...;

υ, φ, ... les déterminations initiales de u, v, ...;

coefficients du système ($\mathfrak{A}$) les diverses fonctions de x, y, ..., u, v, ... qui figurent dans ses seconds membres, soit comme multiplicateurs des dérivées paramétriques premières, soit comme termes indépendants de ces dérivées.

Les coefficients ainsi définis sont, bien entendu, tous olotropes dans quelque système de cercles, et les valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$ respectivement intérieures aux cercles dont il s'agit.

Cela posé :

Le système déduit de $(\mathfrak{A})$, *en y remplaçant les coefficients des seconds membres par certaines majorantes relatives aux valeurs initiales* x_0, $y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$, *possède un groupe d'intégrales satisfaisant à la double condition :* 1° *de se réduire respectivement à* $u_0, v_0, \ldots$ *pour* $x = x_0, y = y_0, \ldots$; 2° *d'admettre, pour leurs dérivées paramétriques de tous ordres, des valeurs initiales positives et supérieures aux modules de celles qui ont été choisies pour les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de* $(\mathfrak{A})$.

Aux variables indépendantes et aux fonctions inconnues

$$x, \quad y, \quad \ldots, \quad u, \quad v, \quad \ldots$$

du système $(\mathfrak{A})$, faisons correspondre autant de constantes positives

$$\alpha', \quad \alpha'', \quad \ldots, \quad \beta', \quad \beta'', \quad \ldots,$$

que nous nommerons, pour abréger, leurs *poids* respectifs; considérant ensuite l'une quelconque des dérivées premières de $u, v, \ldots$, appelons *poids* de cette dérivée le quotient obtenu en divisant le poids de la fonction à laquelle elle appartient par celui de la variable indépendante à laquelle elle se rapporte. Soient enfin :

g le nombre des fonctions inconnues $u, v, \ldots$;
ε une quantité positive moindre que 1;
μ une quantité positive quelconque;
$\Theta(\tau)$ la fonction $\frac{1}{1-\tau}$.

Il résulte de l'alinéa III que, en désignant par w une fonction inconnue de la variable indépendante t, l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\mu\Theta(t+gw)}{1-\varepsilon\Theta(t+gw)}$$

est identiquement vérifiée par la substitution à w d'une série entière en t dont la somme s'annule avec t. D'ailleurs les valeurs initiales des dérivées de cette intégrale sont toutes positives. Effectivement, si l'on développe $\Theta(\tau)$ par la formule

$$1 + \tau + \tau^2 + \dots,$$

et que, après avoir remplacé τ par $t + gw$, on ordonne le résultat par rapport aux puissances de t et w, on voit immédiatement que les valeurs initiales de la fonction $\Theta(t + gw)$ et de ses dérivées de tous ordres sont essentiellement positives. Il en est de même de la fonction $\frac{1}{1 - \varepsilon\Theta(t + gw)}$, qu'on peut développer suivant la formule

$$1 + \varepsilon\Theta + \varepsilon^2\Theta^2 + \dots,$$

par suite enfin du produit

$$\mu\Theta(t + gw)\,\frac{1}{1 - \varepsilon\Theta(t + gw)},$$

second membre de l'équation (1). Les valeurs initiales des dérivées de tous ordres de notre intégrale jouissent donc, elles aussi, de la propriété annoncée; car, en vertu des formules ultimes appliquées à leur calcul, elles se présentent sous forme d'expressions entières, à coefficients entiers et positifs, par rapport aux valeurs initiales du second membre et de ses dérivées partielles. Nous désignerons par $W(t)$ l'intégrale considérée de l'équation (1). Nous observerons en outre que cette même équation peut encore s'écrire, soit sous la forme

$$(2)\qquad \frac{dw}{dt} = \mu\Theta(t + gw) + \frac{\mu\varepsilon\Theta^2(t + gw)}{1 - \varepsilon\Theta(t + gw)},$$

soit sous la forme

$$(3)\qquad \frac{dw}{dt} = \mu\Theta(t + gw) + \varepsilon_1\Theta(t + gw)\frac{dw}{dt} + \varepsilon_2\Theta(t + gw)\frac{dw}{dt} + \dots,$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ désignent des quantités positives, en nombre limité, ayant pour somme ε. Si, dans l'une quelconque des équations (2), (3), on remplace alors la variable t par

$$\alpha'(x - x_0) + \alpha''(y - y_0) + \dots,$$

et la quantité $g\varpi$ par

$$\beta'(u-u_0)+\beta''(v-v_0)+\ldots,$$

si l'on substitue enfin à la dérivée $\frac{d\varpi}{dt}$, qui peut figurer dans divers termes de l'équation considérée, divers produits obtenus chacun en multipliant par son poids l'une quelconque des dérivées premières de $u, v, \ldots$ relatives à $x, y, \ldots$, il est facile de voir que la relation résultante est identiquement vérifiée pour

$$(4)\qquad \begin{cases} u=u_0+\dfrac{1}{\beta'}\,\mathrm{W}[\alpha'(x-x_0)+\alpha''(y-y_0)+\ldots], \\ v=v_0+\dfrac{1}{\beta''}\,\mathrm{W}[\alpha'(x-x_0)+\alpha''(y-y_0)+\ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Cela posé, prenons dans le système ($\mathfrak{A}$) une relation quelconque ($\mathfrak{a}$), et désignons par q le nombre ($\geqq 0$) des dérivées contenues dans son second membre, par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_q$ les dérivées dont il s'agit, par Δ celle qui figure dans son premier membre, par $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_q, \varpi$ les poids respectifs de toutes ces dérivées; posons enfin, pour abréger,

$$s=\alpha'(x-x_0)+\alpha''(y-y_0)+\ldots+\beta'(u-u_0)+\beta''(v-v_0)+\ldots.$$

Suivant que l'entier q sera nul ou positif, c'est-à-dire suivant que l'équation ($\mathfrak{a}$) aura l'une ou l'autre des deux formes

$$\Delta=f(x, y, \ldots, u, v, \ldots),$$

$$\Delta=f(x, y, \ldots, u, v, \ldots)+f_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots)\Delta_1 \\ +f_2(x, y, \ldots, u, v, \ldots)\Delta_2+\ldots+f_q(x, y, \ldots, u, v, \ldots)\Delta_q,$$

on considérera l'une ou l'autre des deux relations

$$\varpi\Delta=\mu\Theta(s)+\frac{\mu\varepsilon\Theta^2(s)}{1-\varepsilon\Theta(s)},$$

$$\varpi\Delta=\mu\Theta(s)+\frac{\varepsilon}{q}\varpi_1\Theta(s)\Delta_1+\frac{\varepsilon}{q}\varpi_2\Theta(s)\Delta_2+\ldots+\frac{\varepsilon}{q}\varpi_q\Theta(s)\Delta_q,$$

et on multipliera par $\frac{1}{\varpi}$ les deux membres de la relation dont il s'agit;

l'équation résultante $((\mathfrak{a}))$ ne différera alors de $(\mathfrak{a})$ que par les coefficients, fonctions de x, y, ..., u, v, ..., qui figurent dans le second membre. A chaque équation du système $(\mathfrak{A})$ on fera correspondre de la même manière une équation telle que $((\mathfrak{a}))$: on obtiendra finalement un système $((\mathfrak{A}))$, ne différant de $(\mathfrak{A})$ que par les coefficients des seconds membres, et identiquement vérifié par la substitution à u, v, ... des seconds membres de (4), c'est-à-dire de fonctions qui prennent en $x_0, y_0, \ldots$ les valeurs initiales $u_0, v_0, \ldots$, tandis que leurs dérivées de tous ordres ont des valeurs initiales essentiellement positives. Chacun des nouveaux coefficients s'obtient d'ailleurs en faisant le produit de $\Theta(s)$ par quelque constante positive, et y ajoutant parfois le produit de

$$\frac{\Theta^2(s)}{1-\varepsilon\,\Theta(s)}$$

par quelque autre constante positive. La première de ces deux constantes, qui seule est importante à considérer, et que nous nommerons, pour abréger, *caractéristique* du coefficient, dépend de ε ou de μ suivant que le coefficient où elle figure multiplie ou non quelque dérivée. Son produit par $\Theta(s)$ est identique au coefficient de $((\mathfrak{A}))$ dont il s'agit, ou l'admet pour majorante relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$.

La constante positive ε étant choisie sous la seule condition d'être inférieure à 1, fixons maintenant les valeurs des constantes positives

$$(5)\qquad \mu,\quad \alpha',\quad \alpha'',\quad \ldots,\quad \beta',\quad \beta'',\quad \ldots.$$

A cet effet, soient :

$R_x, R_y, \ldots, R_u, R_v, \ldots$ les rayons des cercles à l'intérieur desquels les coefficients des seconds membres de $(\mathfrak{A})$ sont supposés olotropes;

r une quantité positive inférieure, d'une part à toutes les différences

$$\begin{array}{lll} R_x - \operatorname{mod} x_0, & R_y - \operatorname{mod} y_0, & \ldots, \\ R_u - \operatorname{mod} u_0, & R_v - \operatorname{mod} v_0, & \ldots, \end{array}$$

d'autre part aux rayons de convergence des déterminations initiales υ, φ, ... choisies pour les intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{A})$;

M une quantité positive supérieure à tous les modules que peuvent acquérir les coefficients des seconds membres de ($\mathfrak{A}$), et les dérivées premières des déterminations initiales υ, φ, ..., à l'intérieur et sur les circonférences des cercles de rayon r ayant pour centres les valeurs initiales de leurs variables respectives;

P la plus grande des deux quantités M, $\frac{1}{r}$;

Q un entier positif supérieur à la plus grande valeur que puisse atteindre, pour une équation quelconque du système ($\mathfrak{A}$), le nombre des dérivées figurant dans le second membre;

h_1, h_2, ..., h_p les plus petites valeurs que puissent respectivement atteindre les cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ des diverses variables indépendantes (1*);

G_1, G_2, ..., G_p les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des diverses fonctions inconnues;

j_1, j_2, ..., j_p les plus petites valeurs et J_1, J_2, ..., J_p les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre celles des diverses dérivées figurant dans l'ensemble des équations ($\mathfrak{A}$).

Désignant en outre par

$$\alpha,\quad \beta,\quad \theta_1,\quad \theta_2,\quad \ldots,\quad \theta_p$$

$p+2$ constantes positives, dont les valeurs vont être fixées dans un instant, nous prendrons : 1° pour chacune des quantités α', α'', ... le produit de α par des puissances de θ_1, θ_2, ..., θ_p d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la variable correspondante; 2° pour chacune des quantités β', β'', ... le quotient de β par des puissances de θ_1, θ_2, ..., θ_p d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue correspondante. Le poids d'une dérivée première quelconque aura alors pour valeur le quotient de $\frac{\beta}{\alpha}$ par des puissances de θ_1, θ_2, ..., θ_p d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la dérivée considérée.

Cela étant, on peut disposer de θ_1, θ_2, ..., θ_p de manière que les caractéristiques dépendant de ε soient toutes supérieures à P, quels que soient α et β. Il suffit, pour réaliser cette condition, de prendre successivement

$$
(6)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{ll} \theta_p & > 1, \\ \theta_p & > \dfrac{PQ}{\varepsilon}; \end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{ll} \theta_{p-1} & > 1, \\ \theta_{p-1} & > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\, \theta_p^{J_p - i_p}; \end{array}\right. \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[1ex]
\left\{\begin{array}{ll} \theta_2 & > 1, \\ \theta_2 & > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\, \theta_3^{J_3 - i_3} \ldots \theta_p^{J_p - i_p}; \end{array}\right. \\[2ex]
\left\{\begin{array}{ll} \theta_1 & > 1, \\ \theta_1 & > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\, \theta_2^{J_2 - i_2} \theta_3^{J_3 - i_3} \ldots \theta_p^{J_p - i_p}. \end{array}\right.
\end{array}
\right.
$$

En effet, si l'on considère une relation quelconque du système $((\mathfrak{A}))$, chacune des dérivées que contient son second membre a, par hypothèse : soit une cote première inférieure à celle du premier membre; soit une cote première égale à celle du premier membre, avec une cote seconde inférieure; ...; soit des cotes première, seconde, ..., $(p-2)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $(p-1)^{\text{ième}}$ inférieure; soit enfin des cotes première, seconde, ..., $(p-1)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $p^{\text{ième}}$ inférieure. Comme on a pris $\theta_1 > 1$, $\theta_2 > 1$, ..., $\theta_p > 1$, les caractéristiques dépendant de ε ont donc, suivant le cas, une valeur supérieure à l'une ou à l'autre des quantités

$$
\begin{array}{l}
\dfrac{\varepsilon}{Q}\, \theta_p^{i_p - J_p} \ldots \theta_3^{i_3 - J_3} \theta_2^{i_2 - J_2} \theta_1, \\[2ex]
\dfrac{\varepsilon}{Q}\, \theta_p^{i_p - J_p} \ldots \theta_3^{i_3 - J_3} \theta_2, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\[1ex]
\dfrac{\varepsilon}{Q}\, \theta_p^{i_p - J_p} \theta_{p-1}, \\[2ex]
\dfrac{\varepsilon}{Q}\, \theta_p;
\end{array}
$$

elles sont donc toutes supérieures à P, en vertu des inégalités (6).

Si, après avoir ainsi fixé $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$, on prend

$$\alpha > \frac{P}{\theta_1^{h_1}\theta_2^{h_2}\ldots\theta_p^{h_p}},$$
$$\beta > P\,\theta_1^{G_1}\theta_2^{G_2}\ldots\theta_p^{G_p},$$

les constantes $\alpha', \alpha'', \ldots, \beta', \beta'', \ldots$ seront elles-mêmes supérieures à P.

Enfin, si, désignant par a la plus petite des quantités $\alpha', \alpha'', \ldots$, et par B la plus grande des quantités $\beta', \beta'', \ldots$, on prend $\mu > \frac{PB}{a}$, toute caractéristique dépendant de μ, étant au moins égale à $\frac{\mu a}{B}$, sera, par suite, supérieure à P.

En rapprochant de l'alinéa II tout ce qui précède, on voit sans peine que les divers coefficients du système $(\mathfrak{A})$ admettent comme majorantes, par rapport aux valeurs $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$, les coefficients correspondants du système $((\mathfrak{A}))$. Ce dernier possède d'ailleurs, comme nous l'avons remarqué il y a un instant, un groupe d'intégrales se réduisant respectivement à $u_0, v_0, \ldots$ pour $x = x_0, y = y_0, \ldots$, et admettant des dérivées de tous ordres à valeurs initiales positives. Il nous reste à faire voir que, parmi ces dérivées, celles qui sont paramétriques ont des valeurs initiales supérieures aux modules de celles que l'on a choisies pour les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{A})$.

Or, d'après les formules (4), toute dérivée d'ordre total m et d'ordres partiels $k', k'', \ldots$ des intégrales considérées de $((\mathfrak{A}))$ est égale à la dérivée semblable de quelqu'une des fonctions

$$\frac{1}{\beta'}\,W[\alpha'(x-x_0)+\alpha''(y-y_0)+\ldots],$$
$$\frac{1}{\beta''}\,W[\alpha'(x-x_0)+\alpha''(y-y_0)+\ldots],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

sa valeur initiale s'obtient donc en divisant

$$\alpha'^{k'}\alpha''^{k''}\ldots\left[\frac{d^m W(t)}{dt^m}\right]_{t=0}$$

par l'une ou l'autre des constantes β', β'', ... Chacune de ces dernières étant au plus égale à B, et chacune des constantes α', α'', ... au moins égale à a, la valeur initiale dont il s'agit est supérieure à

$$\frac{a^m}{B}\left[\frac{d^m W(t)}{dt^m}\right]_{t=0}.$$

D'un autre côté, le second membre de l'équation (1) qui, avec la condition initiale

$$w = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0, \tag{7}$$

définit la fonction $W(t)$, est majorant pour la fonction $\mu\Theta(t)$, car la suppression du dénominateur $1 - \varepsilon\Theta(t + gw)$, et la substitution de o à la constante positive g dans le numérateur $\mu\Theta(t + gw)$, ne peuvent évidemment que diminuer les valeurs initiales, pour $t = 0$, $w = 0$, du second membre et de ses dérivées de tous ordres relatives à t et w. Si donc on considère successivement l'équation (1) et l'équation

$$\frac{dw}{dt} = \mu\Theta(t),$$

il résulte immédiatement de la forme des expressions ultimes que les dérivées de tous ordres de l'intégrale déterminée par la condition initiale (7) auront, dans le premier cas, des valeurs initiales supérieures à celles qu'elles possèdent dans le second. D'après cela, toute dérivée paramétrique d'ordre m des intégrales considérées du système $((\mathfrak{A}))$ a une valeur initiale supérieure à la quantité

$$\frac{a^m}{B}\mu\,1.2\ldots(m-1) = \frac{\mu a}{B}\,1.2\ldots(m-1)\,a^{m-1} > P\,\frac{1.2\ldots(m-1)}{r^{m-1}}.$$

A plus forte raison a-t-elle une valeur initiale supérieure au module de celle que l'on a choisie pour la dérivée paramétrique semblable des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{A})$: car cette dernière peut être considérée comme une dérivée d'ordre $m-1$ de quelqu'une des dérivées premières des déterminations initiales données, et dès lors le module de sa valeur initiale tombe nécessairement au-dessous de

$$P\,\frac{1.2\ldots(m-1)}{r^{m-1}}.$$

V. *Les développements des intégrales hypothétiques de* ($\mathfrak{A}$) *sont convergents.*

Pour le système ($\mathfrak{A}$), en effet, les expressions ultimes des dérivées principales sont des sommes de produits pouvant contenir comme facteurs quatre sortes de quantités, savoir : certains entiers positifs; certains coefficients des seconds membres; certaines dérivées partielles de ces coefficients; enfin certaines dérivées paramétriques des fonctions inconnues. Et pour le système majorant (($\mathfrak{A}$)), dont la formation est expliquée ci-dessus (IV), les expressions ultimes des mêmes dérivées sont composées exactement de la même façon avec les entiers positifs dont il s'agit, les majorantes des coefficients de ($\mathfrak{A}$), leurs dérivées partielles et les dérivées paramétriques des fonctions inconnues. Dès lors, puisque, dans le système majorant, les valeurs initiales des dérivées paramétriques de tous ordres sont positives et supérieures aux modules de celles que possèdent les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de ($\mathfrak{A}$), la même propriété subsiste pour les dérivées principales. Or, les développements des intégrales effectives de (($\mathfrak{A}$)) sont de toute nécessité convergents; par suite, ceux des intégrales hypothétiques de ($\mathfrak{A}$) ne peuvent manquer de l'être aussi.

Réduction d'un système différentiel quelconque à un système harmonique et passif.

3. *Voir* les n^{os} 18* à 22* du Mémoire déjà cité (*Annales de l'École Normale supérieure*, p. 167 à 181; 1893).

Réduction d'un système harmonique et passif quelconque à un système harmonique, passif et linéaire du premier ordre.

4. Étant donné un système harmonique et passif, dont nous désignerons l'ordre par K, si l'on partage en groupes les diverses équations qui le composent, suivant que les premiers membres des équations dont il s'agit appartiennent à telle ou telle des fonctions inconnues, et si, dans chacun des groupes résultants, on évalue le nombre des équations d'ordre K, le plus grand des entiers ainsi obtenus se nommera, pour abréger, le *genre* du système.

Cela posé :

Tout système harmonique et passif d'ordre $K > 1$ *se ramène à un système également harmonique et passif, qui est :*

Ou d'ordre moindre;

Ou d'ordre égal, mais de genre moindre.

I. Nous supposerons jusqu'à nouvel ordre que, dans le système harmonique et passif donné, UN PREMIER MEMBRE, QUEL QU'IL SOIT, N'EST LA DÉRIVÉE D'AUCUN AUTRE, ET NOUS DÉSIGNERONS EN PAREIL CAS PAR Σ LE SYSTÈME DONT IL S'AGIT; cette restriction ne sera supprimée que dans la dernière partie de la démonstration (VI, *inf.*).

Si l'on partage en groupes les diverses équations du système Σ, suivant que leurs premiers membres appartiennent à telle ou telle des fonctions inconnues, il est clair que *toute fonction correspondant à un groupe d'ordre* K *admet, dans chacun des ordres* $1, 2, \ldots, K-1$, *quelque dérivée paramétrique.*

II. Nous déduirons du système Σ, à l'aide du mécanisme décrit ci-après, un nouveau système jouissant de propriétés remarquables que nous établirons ensuite.

A. Désignant par $x, y, \ldots$ les variables indépendantes, et par u, $v, \ldots$ les fonctions inconnues du système Σ, nous adjoindrons à u, $v, \ldots$ de nouvelles fonctions inconnues en nombre égal à celui des dérivées paramétriques des ordres $1, 2, \ldots, K-1$, et nous écrirons que celles-ci sont respectivement égales aux nouvelles fonctions inconnues; nous obtiendrons ainsi un PREMIER GROUPE $\mathfrak{G}_1$, d'ordre $K-1$, soit

$$D.u = \mathfrak{u},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

B. En supposant, pour fixer les idées, que la fonction u soit une de celles dont quelque dérivée d'ordre K figure comme premier membre dans Σ, désignons par Σ_u l'ensemble des équations de Σ qui ont pour premiers membres des dérivées de la fonction u, et partageons Σ_u en deux groupes Σ'_u, Σ''_u, dont le premier contienne les équations des ordres $1, 2, \ldots, K-1$, et le second les équations d'ordre K. Si, dans les ordres $1, 2, \ldots, K-1$, on prend à volonté une dérivée paramétrique de la fonction u (I), sa comparaison avec les divers premiers membres de Σ''_u pourra donner lieu aux deux cas suivants : ou bien quelque premier membre de Σ''_u aura avec la dérivée considérée quelque variable de différentiation commune; ou bien un premier membre, quel qu'il soit, de Σ''_u n'aura avec la dérivée considérée aucune variable de différentiation commune. Nous pourrons, d'après cela, partager les dérivées paramétriques de u d'ordre inférieur à K en deux groupes (λ_u), (γ_u), contenant, le premier les dérivées de la première sorte, et le second les dérivées de la deuxième sorte. Un semblable partage devra d'ailleurs être fait pour toutes celles d'entre les fonctions inconnues dont quelque dérivée d'ordre K figure comme premier membre dans Σ.

Comme nous l'avons expliqué au n° 1*, chacune des variables indépendantes $x, y, \ldots$ et des fonctions inconnues $u, v, \ldots$ du système harmonique Σ, par suite aussi chacune des dérivées de ces dernières, se trouve affectée de p cotes. Cela étant, *nous attribuerons à chacune des nouvelles fonctions inconnues* $\mathfrak{u}, \ldots$ *des cotes première, seconde,* ..., $p^{\text{ième}}$ *respectivement égales à celles de la dérivée paramétrique correspondante; nous affecterons en outre les variables indépendantes* $x, y, \ldots$ *de cotes* $(p+1)^{\text{ièmes}}$ *toutes égales entre elles, les anciennes fonctions inconnues* $u, v, \ldots$ *de cotes* $(p+1)^{\text{ièmes}}$ *quelconques, enfin les nouvelles fonctions inconnues* $\mathfrak{u}, \ldots$ *de cotes* $(p+1)^{\text{ièmes}}$ *satisfaisant à la double condition suivante :* 1° *Si l'on considère les nouvelles fonctions inconnues dérivées d'une même ancienne quelconque, leurs cotes* $(p+1)^{\text{ièmes}}$ *sont toutes distinctes entre elles;* 2° *Si la fonction* u *est une de celles dont quelque dérivée d'ordre* K *figure comme premier membre dans* Σ, *les cotes* $(p+1)^{\text{ièmes}}$ *des nouvelles fonctions inconnues qui correspondent aux dérivées paramétriques du groupe* (λ_u) *sont inférieures à celles des nouvelles fonctions inconnues qui correspondent aux dérivées paramétriques du groupe* (γ_u).

C. Désignons actuellement par k un entier positif $\leqq K-1$, par q un entier positif quelconque, et considérons, relativement au système Σ, une dérivée paramétrique d'ordre $k+q$; on peut, et souvent même de diverses manières, la regarder comme résultant d'une différentiation d'ordre q exécutée sur telle ou telle des dérivées paramétriques de l'ordre k, et, par suite, sur telle ou telle des nouvelles fonctions inconnues qui correspondent à celles-ci. Il est clair (**B**) que les diverses dérivées d'ordre q (des nouvelles fonctions inconnues) qui reproduisent ainsi, à la notation près, une même dérivée paramétrique d'ordre $k+q$ du système Σ, ont des cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ respectivement égales aux cotes homologues de cette dernière; de plus, si ces dérivées sont en nombre supérieur à 1, *leurs cotes* $(p+1)^{\text{ièmes}}$ *sont nécessairement distinctes entre elles*, car les nouvelles fonctions inconnues auxquelles elles appartiennent respectivement ont des cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ toutes distinctes, tandis que les variables indépendantes ont des cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ toutes égales entre elles.

D. Partageant les équations du système Σ en deux groupes Σ', Σ'', dont le premier contienne les équations des ordres $1, 2, \ldots, K-1$, et le second les équations d'ordre K, on considérera le groupe Σ', et l'on substituera aux dérivées paramétriques qui figurent dans les seconds membres les nouvelles fonctions inconnues correspondantes. On tombera ainsi sur un DEUXIÈME GROUPE $\mathfrak{G}_2$, dont l'ordre ne peut dépasser $K-1$.

E. Considérons à volonté deux équations, l'une dans le groupe $\mathfrak{G}_1$, l'autre dans le groupe $\mathfrak{G}_2$, sous la seule condition que leurs premiers membres soient les dérivées d'une même fonction inconnue. Si, pour fixer les idées, $\mathrm{D}.u = \mathfrak{u}$ est l'équation extraite de $\mathfrak{G}_1$, et $\mathfrak{D}.\mathrm{D}.u$ la résultante d'ordre minimum des deux premiers membres, la dérivation exprimée par le symbole $\mathfrak{D}$ est d'ordre nécessairement supérieur à zéro et au plus égal à $K-1$. Cela étant, on considérera la relation ultime de Σ qui a pour premier membre $\mathfrak{D}.\mathrm{D}.u$, et on y remplacera celui-ci par $\mathfrak{D}.\mathfrak{u}$; quant aux dérivées paramétriques qui peuvent figurer dans le second membre, on les remplacera, si elles sont d'ordres $1, 2, \ldots, K-1$, par les nouvelles fonctions inconnues correspondantes, et, si elles sont d'ordres $K, K+1, \ldots$, par des dérivées d'ordres $1, 2, \ldots$ appartenant à celles d'entre les nouvelles fonctions inconnues qui correspondent aux anciennes dérivées paramétriques de l'ordre $K-1$; on aura soin seulement, toutes les fois qu'une substitution de cette dernière sorte sera possible de plusieurs manières, de choisir, parmi les diverses dérivées à substituer, celle dont la cote $(p+1)^{\text{ième}}$ est la plus faible (**C**).

En variant de toutes les manières possibles, sous la seule condition que leurs premiers membres appartiennent à une même fonction inconnue, le choix des deux équations respectivement prises dans les groupes $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, et répétant chaque fois l'opération précédente, on obtiendra un TROISIÈME GROUPE $\mathfrak{G}_3$, dont les premiers membres ont des ordres au plus égaux à $K-1$.

F. Supposons que la fonction u soit une de celles dont quelque dérivée d'ordre K figure comme premier membre dans Σ, et prenons à volonté une dérivée du groupe (λ_u) et un premier membre de Σ''_u (**B**). Si, pour fixer les idées, $D.u = \mathfrak{u}$ est la dérivée considérée du groupe (λ_u), et $\mathfrak{D}.D.u$ la résultante d'ordre minimum des deux dérivées, la dérivation indiquée par le symbole $\mathfrak{D}$ est d'ordre supérieur à zéro et au plus égal à K. Cela posé, on considérera la relation ultime de Σ ayant pour premier membre la résultante dont il s'agit, on y remplacera ce premier membre par $\mathfrak{D}.\mathfrak{u}$, et on effectuera sur le second l'opération décrite dans **E**; puis on variera de toutes les manières possibles le choix des deux dérivées prises, l'une dans le groupe (λ_u), l'autre parmi les premiers membres de Σ''_u, et l'on construira chaque fois, comme nous venons de l'indiquer, une relation correspondante.

En opérant de semblable manière pour chacune des fonctions inconnues dont quelque dérivée d'ordre K figure comme premier membre dans Σ, nous tomberons sur un QUATRIÈME GROUPE $\mathfrak{G}_4$, dont les premiers membres ont des ordres au plus égaux à K.

G. Désignons par δ une dérivée des anciennes fonctions inconnues $u, v, \ldots$, jouissant de la double propriété d'être paramétrique par rapport au système Σ, et cardinale (11*) par rapport au système des équations $\mathfrak{G}_1$; puis considérons, dans le groupe formé par les nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}, \ldots$ et leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, K-1$, les divers termes que le changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $D.u, \ldots$ rend identiques à δ; partageons enfin les termes dont il s'agit en groupes successifs d'après les valeurs décroissantes de leurs ordres (positifs ou nuls), et rangeons les dérivées de chaque groupe d'après les valeurs décroissantes de leurs cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$, nécessairement distinctes (**C**) : la suite totale ainsi obtenue comprend nécessairement plus d'un terme, et nous égalerons le dernier d'entre eux à chacun des précédents, en ayant soin qu'ils figurent toujours, ceux-ci dans les premiers membres, celui-là dans les seconds membres des équations résultantes.

En variant de toutes les manières possibles, sous les conditions indiquées, le choix de la dérivée δ, et répétant chaque fois l'opération précédente, nous tomberons sur un CINQUIÈME ET DERNIER GROUPE $\mathfrak{G}_5$, dont l'ordre ne dépasse pas $K - 1$.

H. Nous nommerons Ω le système différentiel

$$[\mathfrak{G}_1,\ \mathfrak{G}_2,\ \mathfrak{G}_3,\ \mathfrak{G}_4,\ \mathfrak{G}_5],$$

formé par la réunion des cinq groupes précédents.

III. *Le système* Ω (II, **H**) *est, comme* Σ (I), *harmonique et passif.*

A. *Chacune des équations du système* Ω, *considérée isolément, est harmonique* (12*, III).

Le point en question est évident pour les groupes $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_5$.

Considérons maintenant une équation appartenant soit au groupe $\mathfrak{G}_3$, soit au groupe $\mathfrak{G}_4$. Si l'équation considérée a été déduite d'une relation ultime de Σ dont l'ordre soit inférieur ou égal à $K - 1$, elle ne contient dans son second membre aucune dérivée. Supposons, au contraire, qu'elle ait été déduite d'une relation ultime d'ordre supérieur à $K - 1$: deux cas sont alors à distinguer. Lorsque la nouvelle fonction inconnue dont quelque dérivée figure dans le premier membre de cette équation correspond à une ancienne dérivée paramétrique d'ordre inférieur à $K - 1$, le second membre est d'ordre nécessairement inférieur au premier membre. Lorsque la fonction inconnue dont il s'agit correspond au contraire à une ancienne dérivée paramétrique d'ordre $K - 1$, le second membre peut contenir quelque dérivée d'ordre égal au premier membre; mais alors, comme la substitution aux nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}, \ldots$ et à leurs dérivées des quantités $D.u, \ldots$ et de leurs dérivées semblables transforme l'équation considérée en une relation ultime, nécessairement harmonique (12*, III), (12*, IV), du système Σ, il résulte du choix que nous avons fait, pour les cotes des nouvelles fonctions inconnues (II, **B**), que les dérivées d'ordre égal au premier membre qui figurent dans le second remplissent, relativement à leurs cotes premières, secondes, ..., $p^{\text{ièmes}}$, les conditions indiquées au n° 1*.

B. *Aucun des premiers membres du système Ω ni aucune de leurs dérivées ne figurent dans le second membre d'une équation quelconque de ce système.*

1° Les équations $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ ont pour premiers membres diverses dérivées des anciennes fonctions inconnues, et ne contiennent dans leurs seconds membres aucune dérivée quelle qu'elle soit.

2° Aucune dérivée des anciennes fonctions inconnues ne figure dans $[\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4, \mathfrak{G}_5]$.

3° Les premiers membres de $\mathfrak{G}_5$, non plus que leurs dérivées, ne peuvent figurer dans les seconds membres de $\mathfrak{G}_5$.

Effectivement, si l'on prend à volonté l'une des équations $\mathfrak{G}_5$, et si l'on considère, dans le groupe formé par les nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}$, ... et leurs dérivées de tous ordres, les divers termes que le changement de $\mathfrak{u}$, ... en $D.u$, ... transforme, avec le second membre de cette équation, en une même dérivée de quelque ancienne, le second membre dont il s'agit, comparé aux autres termes, appartient certainement à l'ordre minimum, en même temps qu'il possède, dans cet ordre, la cote $(p+1)^{\text{ième}}$ la plus faible. D'un autre côté, dans chacune des équations $\mathfrak{G}_5$ ou de celles qu'on en déduit par différentiations, le premier membre est toujours, soit d'ordre supérieur au second membre, soit d'ordre égal avec une cote $(p+1)^{\text{ième}}$ supérieure; il ne peut donc coïncider avec le second membre d'aucune des équations $\mathfrak{G}_5$.

4° Les premiers membres de $[\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4]$, non plus que leurs dérivées, ne peuvent figurer dans les seconds membres de $[\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4, \mathfrak{G}_5]$.

Car le changement de $\mathfrak{u}$, ... en $D.u$, ... transforme les seconds membres des équations $\mathfrak{G}_5$ en autant de dérivées paramétriques du système Σ; il transforme les seconds membres de $[\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4]$ en expressions ultimes (du système Σ) ne contenant aucune dérivée principale, et enfin les premiers membres de $[\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4]$, ainsi que leurs dérivées, en autant de dérivées principales.

5° Les premiers membres de $\mathfrak{G}_5$ ou leurs dérivées ne peuvent figurer dans les seconds membres de $[\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4]$.

Car le premier membre de chaque relation $\mathfrak{G}_5$ et ses dérivées, qui, après le changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $\mathrm{D}.u, \ldots$, deviennent respectivement identiques au second membre correspondant et à ses dérivées semblables, ont, avant cette substitution, soit des ordres respectivement supérieurs, soit des ordres respectivement égaux avec des cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ respectivement supérieures; et d'un autre côté, dans les relations ultimes du système Σ qui ont servi à former $[\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4]$, on a eu soin de remplacer chaque dérivée paramétrique des ordres $1, 2, \ldots, \mathrm{K}-1$ par la nouvelle fonction inconnue correspondante, puis chaque dérivée paramétrique d'ordre supérieur à $\mathrm{K}-1$ par une dérivée de nouvelle fonction inconnue qui fût d'ordre le plus petit possible, en même temps qu'elle possédait, dans cet ordre, la cote $(p+1)^{\text{ième}}$ la plus faible.

C. *Le simple rapprochement de* **A** *et* **B** *prouve la nature harmonique du système* Ω, et il nous reste à établir sa passivité.

D. *Si aux nouvelles fonctions inconnues* $\mathfrak{u}, \ldots$ *du système* Ω *et à leurs dérivées paramétriques de tous ordres on substitue respectivement* $\mathrm{D}.u, \ldots$ *et leurs dérivées semblables, on reproduit une fois et une seule chacune des dérivées paramétriques du système* Σ, *et aucune de ses dérivées principales.*

Ce point résulte immédiatement des suivants :

1° Si aux nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}, \ldots$ et à leurs dérivées de tous ordres on substitue respectivement $\mathrm{D}.u, \ldots$ et leurs dérivées semblables, on reproduit, avec certaines dérivées principales du système Σ, au moins une fois chacune de ses dérivées paramétriques.

Car, dans le système Σ, toute dérivée paramétrique d'ordre supérieur à $\mathrm{K}-1$ est forcément la dérivée de quelque dérivée paramétrique des ordres $1, 2, \ldots, \mathrm{K}-1$; une dérivée paramétrique d'ordre quelconque coïncide donc, à la notation près, soit avec quelqu'une des nouvelles fonctions inconnues, soit avec quelqu'une de leurs dérivées.

2° Parmi les dérivées des nouvelles fonctions inconnues, celles que le changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $\mathrm{D}.u, \ldots$ transforme en dérivées principales du système Σ, sont elles-mêmes principales relativement au système Ω.

Pour fixer les idées, considérons, parmi les nouvelles fonctions inconnues, celle que définit la relation $\mathrm{D}.u = \mathfrak{u}$: il s'agit de faire voir que la dérivée $\mathfrak{D}.\mathfrak{u}$ est nécessairement principale dans le système Ω, si la dérivée $\mathfrak{D}.\mathrm{D}.u$ l'est elle-même dans le système Σ.

Supposons d'abord que, parmi les premiers membres de Σ' (II, $\mathbf{D}$), il en existe quelqu'un, $\mathrm{D}'.u$, qui, lui ou une de ses dérivées, soit identique à $\mathfrak{D}.\mathrm{D}.u$: en désignant par $\mathfrak{D}'.\mathrm{D}.u$ la résultante d'ordre minimum de $\mathrm{D}.u$ et $\mathrm{D}'.u$, $\mathfrak{D}.\mathrm{D}.u$ coïncide forcément avec l'expression $\mathfrak{D}'.\mathrm{D}.u$ ou quelqu'une de ses dérivées ; $\mathfrak{D}.\mathfrak{u}$ se confond par suite avec l'expression $\mathfrak{D}'.\mathfrak{u}$ ou quelqu'une de ses dérivées, c'est-à-dire avec un des premiers membres du groupe $\mathfrak{G}_3$ ou quelqu'une de ses dérivées.

Supposons en second lieu que $\mathfrak{D}.\mathrm{D}.u$ ne coïncide avec aucun des premiers membres de Σ' ni aucune de leurs dérivées. Comme elle est principale dans le système Σ, il y a certainement quelque premier membre de Σ'', par exemple $\mathrm{D}''.u$, qui, lui ou une de ses dérivées, se confond avec $\mathfrak{D}.\mathrm{D}.u$, et la fonction u est au nombre de celles dont quelque dérivée d'ordre K figure comme premier membre dans Σ. D'ailleurs $\mathrm{D}''.u$ est lui-même une dérivée première de quelque dérivée d'ordre $\mathrm{K}-1$ de u, et cette dérivée d'ordre $\mathrm{K}-1$, nécessairement paramétrique en vertu de la restriction formulée dans l'alinéa I, appartient évidemment au groupe (λ_u), puisqu'elle a pour dérivée un premier membre de Σ''_u. Cela posé, nous distinguerons deux cas, suivant que la dérivée $\mathrm{D}.u$ appartient au groupe (λ_u) ou au groupe (γ_u). — Si la dérivée $\mathrm{D}.u$ appartient au groupe (λ_u), on désignera par $\mathfrak{D}''.\mathrm{D}.u$ la résultante d'ordre minimum de $\mathrm{D}.u$ et $\mathrm{D}''.u$, et on observera que $\mathfrak{D}.\mathrm{D}.u$ coïncide forcément avec l'expression $\mathfrak{D}''.\mathrm{D}.u$ ou quelqu'une de ses dérivées, que, par suite, $\mathfrak{D}.\mathfrak{u}$ se confond avec l'expression $\mathfrak{D}''.\mathfrak{u}$ ou quelqu'une de ses dérivées, c'est-à-dire avec un des premiers membres du groupe $\mathfrak{G}_4$ ou quelqu'une de ses dérivées. — Si la dérivée $\mathrm{D}.u$ appartient au groupe (γ_u), on se souviendra que $\mathfrak{D}.\mathrm{D}.u$ est forcément la dérivée de quelque dérivée appartenant tout ensemble au groupe (λ_u) et à l'ordre $\mathrm{K}-1$, soit $\mathrm{D}^{(\mathrm{K}-1)}.u = \mathfrak{u}^{(\mathrm{K}-1)}$, et on en conclura que $\mathfrak{D}.\mathrm{D}.u$ coïncide nécessairement, soit avec la résultante d'ordre minimum de $\mathrm{D}.u$ et $\mathrm{D}^{(\mathrm{K}-1)}.u$, soit avec quelque dérivée de cette résultante. Or celle-ci, évidemment cardinale par rapport au groupe $\mathfrak{G}_1$, est nécessairement paramétrique dans le système Σ : effectivement, elle ne peut, à cause de notre hypothèse, coïncider avec aucun des premiers membres de Σ' ni aucune de leurs dérivées; et, d'un autre côté, s'il existait quelque premier membre de Σ'' qui, lui ou une de ses dérivées, se confondît avec elle, comme le premier membre en question serait d'ordre K, et, par suite, d'un ordre plus élevé que $\mathrm{D}^{(\mathrm{K}-1)}.u$, $\mathrm{D}.u$ aurait quelque variable de différentiation commune avec ce même premier membre, ce qui est impossible, puisque $\mathrm{D}.u$ est supposée appartenir au groupe (γ_u). Cela posé, soient

$$\mathfrak{T}.\mathrm{D}.u,\qquad \mathfrak{T}^{(\mathrm{K}-1)}.\mathrm{D}^{(\mathrm{K}-1)}.u$$

les deux expressions dont la résultante en question est susceptible à l'aide de $\mathrm{D}.u$ et $\mathrm{D}^{(\mathrm{K}-1)}.u$, et où $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{(\mathrm{K}-1)}$ désignent des symboles de dérivation d'ordres au plus égaux à $\mathrm{K}-1$. Si $\mathrm{D}.u$ est d'ordre inférieur à $\mathrm{K}-1$, la première des expressions

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{u},\qquad \mathfrak{T}^{(\mathrm{K}-1)}.\mathfrak{u}^{(\mathrm{K}-1)}$$

est d'ordre supérieur à la seconde; si $\mathrm{D}.u$ est d'ordre $\mathrm{K}-1$, les deux expressions sont d'un même ordre nécessairement supérieur à zéro, mais la première a une cote $(p+1)^{\text{ième}}$ supérieure à la seconde, puisque $\mathrm{D}.u=\mathfrak{u}$ fait partie du groupe (γ_u), et $\mathrm{D}^{(\mathrm{K}-1)}.u=\mathfrak{u}^{(\mathrm{K}-1)}$ du groupe (λ_u) (II, **B**); donc, dans tous les cas, $\mathfrak{T}.\mathfrak{u}$ est le premier membre de quelque équation du groupe $\mathfrak{G}_5$. Finalement, puisque $\mathfrak{D}.\mathrm{D}.u$ coïncide avec $\mathfrak{T}.\mathrm{D}.u$ ou quelqu'une de ses dérivées, $\mathfrak{D}.\mathfrak{u}$ coïncide avec $\mathfrak{T}.\mathfrak{u}$ ou quelqu'une de ses dérivées; c'est donc une dérivée principale du système Ω.

3° Si, dans le groupe formé par les nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres, on considère tous les termes que le changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $\mathrm{D}.u, \ldots$ transforme en une même dérivée paramétrique du système Σ, il en est un et un seul qui coïncide avec quelqu'une des nouvelles fonctions inconnues ou de leurs dérivées paramétriques (relativement à Ω).

Effectivement, si l'on partage les termes considérés en groupes successifs d'après les valeurs décroissantes de leurs ordres (positifs ou nuls), et que l'on range ensuite les termes de chaque groupe d'après les valeurs décroissantes de leurs cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$, nécessairement distinctes (II, C), un terme quelconque de la suite

$$(8)\qquad \mathfrak{D}^{(1)}.\mathfrak{u}^{(1)},\quad \ldots,\quad \mathfrak{D}^{(r)}.\mathfrak{u}^{(r)},\quad \ldots,\quad \mathfrak{D}^{(s)}.\mathfrak{u}^{(s)},$$

ainsi obtenue, est évidemment étranger au groupe formé par les premiers membres de $[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4]$ et leurs dérivées, et il suffit dès lors de prouver que le dernier d'entre eux est étranger au groupe formé par les premiers membres de $\mathfrak{G}_5$ et leurs dérivées, tandis qu'au contraire chacun des précédents en fait nécessairement partie.

Or, si le dernier terme $\mathfrak{D}^{(s)}.\mathfrak{u}^{(s)}$ figurait comme premier membre dans quelqu'une des équations $\mathfrak{G}_5$ ou de celles qu'on en déduit par différentiations, le second membre de cette relation, que la substitution de $\mathfrak{u}, \ldots$ à $\mathrm{D}.u, \ldots$ transforme en la même dérivée paramétrique du système Σ, serait, ou d'ordre inférieur au premier membre, ou d'ordre égal avec une cote $(p+1)^{\text{ième}}$ inférieure; $\mathfrak{D}^{(s)}.\mathfrak{u}^{(s)}$ ne serait donc pas le dernier terme de la suite (8), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Considérons maintenant, dans la suite (8), l'un quelconque des termes qui précèdent le dernier, par exemple $\mathfrak{D}^{(r)}.\mathfrak{u}^{(r)}$, et soient

$$\mathrm{D}^{(r)}.u = \mathfrak{u}^{(r)},$$
$$\mathrm{D}^{(s)}.u = \mathfrak{u}^{(s)}$$

celles d'entre les équations $\mathfrak{G}_1$ qui définissent les nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}^{(r)}, \mathfrak{u}^{(s)}$. La dérivée paramétrique du système Σ en laquelle se transforment, par le changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $\mathrm{D}.u, \ldots$, les différents termes de la suite (8), admet alors, entre autres expressions, les deux suivantes

$$\mathfrak{D}^{(r)}.\mathrm{D}^{(r)}.u,\qquad \mathfrak{D}^{(s)}.\mathrm{D}^{(s)}.u,$$

et par suite coïncide forcément, soit avec la résultante d'ordre minimum de $\mathrm{D}^{(r)}.u$, $\mathrm{D}^{(s)}.u$, nécessairement paramétrique par rapport à Σ, soit avec quelque dérivée de cette résultante. Si l'on désigne maintenant par

$$\mathfrak{D}^{(r')}.\mathrm{D}^{(r)}.u,\qquad \mathfrak{D}^{(s')}.\mathrm{D}^{(s)}.u$$

les deux expressions dont cette résultante est susceptible au moyen de $\mathrm{D}^{(r)}.u$, $\mathrm{D}^{(s)}.u$, il est facile de voir que la quantité $\mathfrak{D}^{(r')}.\mathfrak{u}^{(r)}$ est forcément, ou d'ordre supérieur à $\mathfrak{D}^{(s')}.\mathfrak{u}^{(s)}$, ou d'ordre égal avec une cote $(p+1)^{\text{ième}}$ supérieure : car une même différentiation (d'ordre positif ou nul), exécutée sur $\mathfrak{D}^{(r')}.\mathfrak{u}^{(r)}$, $\mathfrak{D}^{(s')}.\mathfrak{u}^{(s)}$, fait retomber sur les quantités $\mathfrak{D}^{(r)}.\mathfrak{u}^{(r)}$, $\mathfrak{D}^{(s)}.\mathfrak{u}^{(s)}$, dont la première jouit précisément, par rapport à la seconde, de l'une ou l'autre propriété. D'ailleurs les ordres de $\mathfrak{D}^{(r')}.\mathfrak{u}^{(r)}$, $\mathfrak{D}^{(s')}.\mathfrak{u}^{(s)}$ sont au plus égaux à $K-1$. Il résulte alors du mode de formation des équations $\mathfrak{G}_5$ que $\mathfrak{D}^{(r')}.\mathfrak{u}^{(r)}$ se confond avec quelqu'un de leurs premiers membres, et par suite que $\mathfrak{D}^{(r)}.\mathfrak{u}^{(r)}$ se confond, soit avec quelqu'un de ces premiers membres, soit avec quelqu'une de leurs dérivées.

E. *Les relations ultimes du système Ω peuvent être partagées en deux catégories se distinguant l'une de l'autre par ce caractère, que le changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $\mathrm{D}.u, \ldots$ transforme celles de la première en relations ultimes du système Σ, et celles de la deuxième en relations identiques ayant chacune pour premier et pour second membre une même dérivée paramétrique du système Σ.*

Le point dont il s'agit est évident pour les relations ultimes de première classe (4°) du système Ω, puisqu'elles font *directement* partie du système en question; il suffit dès lors de prouver qu'en le supposant exact pour les relations ultimes des classes $1, 2, \ldots, j$, il ne cesse pas de l'être pour les relations ultimes de classe $j+1$.

Or, les relations *primitives* (2°) de classe $j+1$ du système Ω sont de trois sortes, suivant que la substitution des quantités $\mathrm{D}.u, \ldots$ à $\mathfrak{u}, \ldots$ les transforme : 1° en relations identiques ayant chacune pour premier et pour second membre une même dérivée paramétrique du système Σ; 2° en relations identiques ayant chacune pour premier et pour second membre une même dérivée principale du système Σ; 3° en relations ultimes du système Σ ou en relations ultimes différentiées.

Si, dans une relation primitive de la première sorte, le second membre est paramétrique relativement au système Ω, cette relation est en même temps ultime, et appartient à la seconde des deux catégories dont parle l'énoncé. Si le second membre est au contraire principal, il appartient forcément à quelqu'une des classes $1, 2, \ldots, j$, et toute expression ultime du second membre est de deuxième catégorie (nous voulons dire qu'elle est fournie par une relation ultime de deuxième catégorie); en la substituant au second membre dont il s'agit, on tombe évidemment sur une relation ultime de même catégorie.

Dans une relation primitive de la seconde sorte, le second membre, nécessairement principal (**D**, 2°), appartient à quelqu'une des classes 1, 2, ..., j; toute expression ultime de ce second membre est donc de première catégorie, et, en le substituant au second membre, on tombe sur une relation ultime de première catégorie.

Enfin, dans une relation primitive de la troisième sorte, le second membre peut contenir des dérivées principales de classes 1, 2, ..., j, dont chacune doit être remplacée par une expression ultime de première ou de seconde catégorie, suivant que le changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $\mathrm{D}.u, \ldots$ la transforme en une dérivée principale ou paramétrique du système Σ. Comme celui-ci, à cause de sa passivité, n'admet pour chacune de ses dérivées principales qu'une seule expression *immédiate* (12*, VII), cette substitution, suivie du changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $\mathrm{D}.u, \ldots$, redonne forcément une relation ultime du système Σ.

F. *Le système Ω est passif.*

Dans le système Ω, deux relations ultimes de même premier membre appartiennent toutes deux à la première catégorie, ou toutes deux à la seconde (**E**).

Si deux relations ultimes de même catégorie ont le même premier membre, elles ont forcément aussi le même second membre; car, selon qu'elles appartiennent à la première ou à la seconde catégorie, le changement de $\mathfrak{u}, \ldots$ en $\mathrm{D}.u, \ldots$ les transforme, soit en une même relation ultime du système Σ, soit en une même identité ayant pour premier et pour second membre quelque dérivée paramétrique de ce dernier; et, d'un autre côté, si l'on forme successivement, dans le système Σ et dans le système Ω, un groupe avec les variables indépendantes, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques, les deux groupes ainsi obtenus sont identiques à la notation près (**D**).

IV. *Les fonctions u, v, ..., constituant un groupe d'intégrales ordinaires du système Σ, figurent dans quelque groupe d'intégrales ordinaires du système Ω. Réciproquement, les fonctions u, v, ..., figurant dans* *quelque groupe d'intégrales ordinaires de* Ω, *constituent un groupe d'intégrales ordinaires de* Σ.

En conséquence, la recherche des intégrales ordinaires de Σ *se ramène à celle des intégrales ordinaires de* Ω.

La proposition directe est évidente.

Pour la réciproque, on observera : 1° qu'à la notation près, Σ' se confond avec $\mathfrak{G}_2$; 2° qu'en vertu de la restriction formulée dans l'alinéa I, tout premier membre de Σ'' peut être considéré comme une dérivée d'ordre $K-1$ de quelque dérivée paramétrique première, et que dès lors, à la notation près, l'équation correspondante fait partie du groupe $\mathfrak{G}_4$.

V. *Le système* Ω *est forcément :*

Ou d'ordre $K-1$;

Ou d'ordre K, *mais de genre moindre que* Σ.

Les groupes $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{G}_5$ étant d'ordre $K-1$ dans leur ensemble, tout revient à l'examen du groupe $\mathfrak{G}_4$.

Supposons, pour fixer les idées, que u soit l'une des fonctions inconnues dont quelque dérivée d'ordre K figure comme premier membre dans Σ, et $D.u = \mathfrak{u}$ l'une des nouvelles fonctions inconnues du groupe (λ_u). Pour obtenir celles d'entre les équations $\mathfrak{G}_4$ qui ont pour premiers membres des dérivées de $\mathfrak{u}$, il faut, comme nous l'avons vu (II, **F**), comparer successivement $D.u$ à tous les premiers membres de Σ''_u : toutes les fois que $D.u$ et un premier membre de Σ''_u ont quelque variable de différentiation commune, l'équation correspondante est d'ordre inférieur à K; toutes les fois que $D.u$ et un premier membre de Σ''_u n'ont aucune variable de différentiation commune, l'équation correspondante est d'ordre K. Or, puisque $D.u$ fait partie du groupe (λ_u), la première circonstance se présentera au moins une fois : donc, dans le système Ω, le nombre des équations ayant pour premiers membres des dérivées d'ordre K de la fonction $\mathfrak{u}$ est inférieur d'une unité au moins à celui des équations Σ''_u.

On en déduit immédiatement le point qu'il s'agit de prouver.

VI. La proposition qui fait l'objet de notre énoncé général se trouve maintenant établie en supposant que, dans le système harmonique et passif donné, un premier membre, quel qu'il soit, n'est la dérivée d'aucun autre. Lorsque cette condition restrictive ne se trouve pas satisfaite, on commence par supprimer du système donné les diverses équations dont les premiers membres, comparés à ceux de telles ou telles équations d'ordre inférieur, en peuvent être considérés comme des dérivées; ainsi que nous l'avons fait observer ailleurs (13*), le système résultant admet les mêmes intégrales que le proposé, et possède, comme lui, la forme harmonique et passive; s'il est d'ordre inférieur au proposé, ou bien encore s'il est d'ordre égal, mais de genre moindre, il satisfait aux conditions de l'énoncé; dans le cas contraire, on lui applique le mécanisme décrit à l'alinéa II.

5. *Tout système harmonique et passif du premier ordre est réductible à un système de même nature, possédant en outre la forme linéaire par rapport aux dérivées des fonctions inconnues.*

Les raisonnements à l'aide desquels on établit cette proposition offrant une grande analogie avec ceux du numéro précédent, en même temps qu'une grande simplicité relative, nous nous bornerons à décrire, sans démonstration, le mécanisme à l'aide duquel on passe du premier système au second.

A. En désignant par $x, y, \ldots$ les variables indépendantes, et par $u, v, \ldots$ les fonctions inconnues du système donné, nous adjoindrons à $u, v, \ldots$ de nouvelles fonctions inconnues en nombre égal à celui des dérivées paramétriques du premier ordre, et nous écrirons que celles-ci sont respectivement égales aux nouvelles fonctions inconnues : nous formerons ainsi un PREMIER GROUPE $\mathfrak{B}_1$.

B. Remplaçant dans les équations proposées les diverses dérivées paramétriques par les nouvelles fonctions inconnues qui leur correspondent, nous formerons un DEUXIÈME GROUPE $\mathfrak{B}_2$.

C. Chacune des variables indépendantes et des fonctions inconnues du système harmonique donné, par suite aussi chacune des dérivées de ces dernières, se trouve, comme on sait, affectée de p cotes (p désignant un certain entier). Cela étant, nous attribuerons à chacune des nouvelles fonctions inconnues des cotes première, seconde, $\ldots$, $p^{\text{ième}}$

respectivement égales à celles de la dérivée paramétrique correspondante; nous affecterons en outre les variables x, y, ... de cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ toutes égales entre elles, les anciennes fonctions inconnues u, v, ... de cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ quelconques, enfin les nouvelles fonctions inconnues dérivées d'une même ancienne quelconque de cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ toutes distinctes entre elles.

De là résulte, en particulier, la conséquence suivante : si quelque dérivée des anciennes fonctions inconnues est paramétrique par rapport au système donné et intéresse à la fois plusieurs variables indépendantes, les diverses expressions dont cette dérivée est susceptible, à l'aide des nouvelles fonctions inconnues, ont leurs cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ nécessairement distinctes.

D. Considérons à volonté deux équations, l'une dans le groupe $\mathfrak{B}_1$, l'autre dans le groupe $\mathfrak{B}_2$, sous la seule condition que leurs premiers membres soient les dérivées d'une même fonction inconnue. Si, pour fixer les idées, $\frac{du}{dy} = u'_y$ est l'équation extraite de $\mathfrak{B}_1$, et $\frac{du}{dx} = \ldots$ l'équation extraite de $\mathfrak{B}_2$, on considérera la relation ultime du système donné qui a pour premier membre $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, et l'on y remplacera celui-ci par $\frac{du'_y}{dx}$; quant aux dérivées paramétriques qui peuvent figurer dans le second membre, on les remplacera, si elles sont du premier ordre, par les nouvelles fonctions inconnues correspondantes, et, si elles sont du second ordre, par des dérivées premières appartenant aux nouvelles fonctions inconnues; on aura soin seulement, toutes les fois qu'une substitution de cette dernière sorte sera possible de deux manières, de choisir, parmi les deux dérivées à substituer, celle dont la cote $(p+1)^{\text{ième}}$ est la plus faible (**C**).

En variant de toutes les manières possibles, sous la seule condition que leurs premiers membres appartiennent à une même fonction inconnue, le choix des deux équations respectivement prises dans les groupes $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, et répétant chaque fois l'opération précédente, on formera un TROISIÈME GROUPE $\mathfrak{B}_3$.

E. Désignons enfin par δ une dérivée (seconde) des anciennes fonctions inconnues, possédant la double propriété d'être paramétrique par rapport au système donné, et cardinale par rapport au groupe $\mathfrak{B}_1$; puis, égalons entre elles les deux expressions dont cette dérivée est susceptible à l'aide des nouvelles fonctions inconnues, en ayant soin de faire figurer au second membre celle dont la cote $(p+1)^{\text{ième}}$ est la plus faible (**C**).

En variant de toutes les manières possibles le choix de la dérivée δ, et répétant chaque fois l'opération précédente, on obtiendra un QUATRIÈME ET DERNIER GROUPE $\mathfrak{B}_4$.

F. Le système

$$[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4],$$

formé par la réunion des quatre groupes, est celui auquel fait allusion notre énoncé.

6. Du simple rapprochement des deux numéros précédents (4), (5), il est facile de conclure qu'*à l'aide de simples différentiations, un système harmonique et passif d'ordre quelconque se ramène, de proche en proche, à un système harmonique et passif du premier ordre, présentant la forme linéaire par rapport aux dérivées des fonctions inconnues qu'il implique.*

Dès lors, et en vertu du n° 3, *de simples résolutions d'équations, combinées avec des différentiations, permettent, dans les circonstances générales, de ramener un système différentiel quelconque à un système harmonique, passif et linéaire du premier ordre.*

FIN DU TOME X DE LA TROISIÈME SÉRIE.