ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. ADAM

Sur les surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système ou dans les deux systèmes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 319-358
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__319_0>

SUR LES

SURFACES ISOTHERMIQUES

A LIGNES DE COURBURE PLANES

DANS UN SYSTÈME OU DANS LES DEUX SYSTÈMES,

PAR M. P. ADAM,

INGÉNIEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES.

M. Darboux a fait connaître le premier (¹) les équations des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système. Sa méthode, extrêmement ingénieuse, repose sur l'emploi des formules de Codazzi et de la théorie savante des fonctions doublement périodiques que nous devons à M. Hermite (²).

M. Darboux s'est borné au cas général, dans lequel les plans des lignes de courbure du premier système enveloppent un cône.

Je me propose, en suivant la voie tracée par l'éminent géomètre, de traiter le cas particulier dans lequel les plans des lignes de courbure du premier système enveloppent un cylindre, puis de dégager du résultat :

1° Les équations des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes;

2° Les équations des surfaces à courbure moyenne constante et à lignes de courbure planes dans un système.

Les fonctions doublement périodiques rencontrées par M. Darboux

---

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1er semestre de 1883. — *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. VII, 1883.

(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXV.

sont de deuxième espèce; on verra que ces fonctions deviennent de première espèce lorsque le sommet du cône enveloppé par les lignes de courbure du premier système s'éloigne à l'infini, et que les coordonnées de la surface peuvent, par un calcul qui constitue une intéréssante application de la théorie des fonctions H et Θ de Jacobi, s'exprimer à l'aide des fonctions elliptiques sn, cn et dn, isolées ou engagées sous le signe $\int$, et d'une fonction arbitraire. Je montrerai aussi que les coordonnées des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes dépendent uniquement des fonctions elliptiques, isolées ou engagées sous le signe $\int$, et qu'en donnant au module k de ces fonctions la valeur zéro, on obtient deux catégories de surfaces comprenant la première les cyclides et la seconde les surfaces minima d'Ossian Bonnet et la surface minima d'Enneper.

I.

Rappel succinct du Mémoire de M. Darboux.

Le ds^2 des surfaces considérées par M. Darboux peut s'écrire

$$ds^2 = e^{2h}(du^2 + dv^2),$$

u et v désignant les paramètres des lignes de courbure.

Si l'on suppose que les $v = \text{const.}$ soient les lignes de courbure planes, les six rotations p, q, r, p_1, q_1, r_1 introduites par M. Darboux doivent avoir pour valeurs

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &p = 0, & &p_1 = -V' - \frac{V\dfrac{\partial^2 h}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial h}{\partial v}},\\ &q = V\frac{\partial h}{\partial v}, & &q_1 = 0,\\ &r = -\frac{\partial h}{\partial v}, & &r_1 = \frac{\partial h}{\partial u},\end{aligned}\right.$$

et la fonction h doit satisfaire aux deux équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial h}{\partial v}}\right)=\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v}, \tag{2}$$

$$(1+V^2)\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}+VV'\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}=0, \tag{3}$$

V étant une fonction de v.

L'équation (2) s'intègre facilement et donne

$$\frac{\partial h}{\partial u}=U e^h+U_1 e^{-h}, \tag{4}$$

U et U_1 désignant des fonctions de U.

Quant à l'équation (3), si l'on remplace v par une autre variable v_1 telle que $dv_1=\dfrac{dv}{\sqrt{1+V^2}}$, elle prend la forme très simple

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2}=0. \tag{5}$$

Le problème est ainsi ramené à l'intégration simultanée des équations (4) et (5).

M. Darboux démontre que U et U_1 doivent satisfaire toutes deux à

$$\frac{y''}{y}=2k^2\,\mathrm{sn}^2 u-1-k^2+2k^2\,\mathrm{sn}^2\omega, \tag{6}$$

et que leur produit doit avoir pour valeur

$$UU_1=\frac{k^2}{4}(\mathrm{sn}^2\omega-\mathrm{sn}^2 u), \tag{7}$$

ω désignant une constante arbitraire.

Or (6) est le cas le plus simple d'une équation considérée par Lamé et intégrée par M. Hermite [1]; M. Darboux déduit du résultat donné

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXV.

par M. Hermite les expressions suivantes de U et de U_1 puis de e^h

(8)
$$\left\{\begin{aligned} U &= -\frac{H'(0)H(u+\omega)}{2\Theta(\omega)\Theta(u)}e^{-u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},\\ U_1 &= \frac{H'(0)H(u+\omega)}{2\Theta(\omega)\Theta(u)}e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},\end{aligned}\right.$$

(9)
$$e^h = \frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)\Theta\left(\frac{u-iv_1-\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)H\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)}e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

Il reste à calculer les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface. A cet effet, M. Darboux introduit une nouvelle fonction σ de u et de v_1; si l'on remarque que e^h est le carré du module de

$$\frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)}e^{\frac{u+iv_1}{2}\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

on peut poser

(10)
$$e^{\frac{h+i\sigma}{2}} = \frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)}e^{\frac{u+iv_1}{2}\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

ce qui donne

(11)
$$e^{i\sigma} = \frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1-\omega}{2}\right)H\left(\frac{u-iv_1+\omega}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1+\omega}{2}\right)\Theta\left(\frac{u-iv_1-\omega}{2}\right)}e^{iv_1\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

On a d'ailleurs les relations

(12)
$$\frac{\partial h}{\partial v_1} = -\frac{\partial\sigma}{\partial u},\qquad \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial\sigma}{\partial v_1}$$

parce que $h+i\sigma$ est une fonction de la variable complexe $u+iv_1$.

La fonction σ ne différant de h que par les notations satisfait à

(13)
$$\frac{\partial\sigma}{\partial v_1} = Me^{i\sigma} + Ne^{-i\sigma}$$

avec

$$
(14)\qquad \left\{
\begin{aligned}
M &= \frac{H'(0)\,\Theta(\omega + iv_1)}{2\,\Theta(\omega)\,H(iv_1)}\, e^{-iv_1 \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},\\
N &= -\frac{H'(0)\,\Theta(\omega - iv_1)}{2\,\Theta(\omega)\,H(iv_1)}\, e^{iv_1 \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.
\end{aligned}
\right.
$$

M. Darboux se sert ensuite d'une représentation sphérique particulière dans laquelle le rayon de la sphère est parallèle à la tangente à la courbe $v =$ const. tracée sur la surface, c'est-à-dire dans laquelle les coordonnées de la sphère sont les cosinus a, a', a'' directeurs de la tangente à la courbe $v =$ const.

Dans cette représentation, le ds^2 de la sphère s'écrit

$$dS^2 = da^2 + da'^2 + da''^2.$$

En se servant des relations différentielles entre a, a', a'' et les six rotations p, q, r, p_1, q_1, r_1 considérées par Codazzi, des valeurs (1) de ces rotations et enfin des relations (12), on trouve

$$dS^2 = d\sigma^2 + V^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v_1}\right)^2 dv_1^2,$$

ou, en vertu de l'équation (13),

$$(15)\qquad dS^2 = d\sigma^2 + (VMe^{i\sigma} + VNe^{-i\sigma})^2\, dv_1^2,$$

ce qui montre, qu'en représentation sphérique, les $v_1 =$ const. sont des grands cercles et que σ est la distance d'un point quelconque de la sphère à une courbe fixe Γ orthogonale à ces grands cercles. Les plans des lignes de courbure du premier système sont d'ailleurs parallèles aux plans de ces grands cercles.

En appelant x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de Γ exprimées au moyen de l'arc s de Γ, on a

$$
(16)\qquad \left\{
\begin{aligned}
2a &= [x - i(yz' - zy')]e^{i\sigma} + [x + i(yz' - zy')]e^{-i\sigma},\\
2a' &= [y - i(zx' - xz')]e^{i\sigma} + [y + i(zx' - xz')]e^{-i\sigma},\\
2a'' &= [z - i(xy' - yx')]e^{i\sigma} + [z + i(xy' - yx')]e^{-i\sigma},
\end{aligned}
\right.
$$

ce qui donne une seconde expression de dS^2

$$(17)\qquad dS^2 = da^2 + da'^2 + da''^2 = d\sigma^2 + \left(\frac{1 + i\Delta}{2}\frac{ds}{dv_1}e^{i\sigma} + \frac{1 - i\Delta}{2}\frac{ds}{dv_1}e^{-i\sigma}\right)^2 dv_1^2,$$

Δ désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

La comparaison de (15) et (17) conduit à

$$(18)\qquad \begin{cases} (1 + i\Delta)\, ds = 2\mathrm{VM}\, dv_1, \\ (1 - i\Delta)\, ds = 2\mathrm{VN}\, dv_1. \end{cases}$$

Les coordonnées X, Y, Z de la surface cherchée se déduisent enfin des formules $d\mathrm{X} = e^h(a\,du + b\,dv)$ qui prennent la forme suivante, en se servant des relations différentielles entre a, a', a'' et les six rotations p, q, r, p_1, q_1, r_1 et des relations (12)

$$(19)\qquad d\mathrm{X} = e^h\left(a\,du + \frac{\dfrac{\partial a}{\partial v_1}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial v_1}}\,dv_1\right),$$

et l'on obtient

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \dfrac{\Theta^2(\omega)[x - i(yz' - zy')]}{\mathrm{H}(2\omega)\,\mathrm{H}'(0)}\,\dfrac{\mathrm{H}\left(\dfrac{u + iv_1 - 3\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\dfrac{u + iv_1 + \omega}{2}\right)}\,e^{(u+iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}} \\[2ex] \qquad + \dfrac{\Theta^2(\omega)[x + i(yz' - zy')]}{\mathrm{H}(2\omega)\,\mathrm{H}'(0)}\,\dfrac{\mathrm{H}\left(\dfrac{u - iv_1 - 3\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\dfrac{u - iv_1 + \omega}{2}\right)}\,e^{(u-iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

On peut, ou bien se donner arbitrairement la courbe Γ et alors (18) déterminent s et V en v_1, ou bien se donner V arbitrairement en v_1; alors (18) définissent s et Δ en v_1 c'est-à-dire Δ en s, et l'on peut calculer x, y, z, coordonnées de Γ.

Les lignes de courbure du premier système sont dans les plans

$$x'\mathrm{X} + y'\mathrm{Y} + z'\mathrm{Z} = 0$$

normaux à Γ.

II.

Équations des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système lorsque les plans des lignes de courbure de ce système enveloppent un cylindre.

Tant que ω n'est pas nul, la courbe Γ ne peut pas être un cercle, c'est-à-dire que les plans des lignes de courbure du premier système enveloppent un cône véritable; en effet, si ω est différent de zéro, le rapport $\frac{M}{N}$ donné par les valeurs (14) dépend de v_1, et en divisant membre à membre les relations (18), on voit que Δ dépend aussi de v_1; or, si Γ était un cercle, on reconnaît aisément que Δ serait constant.

Pour que les plans des lignes de courbure du premier système enveloppent un cylindre, il faut donc que $\omega = 0$.

Cette condition est suffisante, car, si $\omega = 0$, on a

$$\frac{M}{N} = 1,$$

d'où

$$1 + i\Delta = -(1 - i\Delta),$$

$$\Delta = \infty,$$

et la courbe Γ étant réduite à un point, les plans des grands cercles normaux à cette courbe passent par un même diamètre de la sphère; les plans des lignes de courbure du premier système, qui sont parallèles aux plans de ces grands cercles, sont donc parallèles à une direction fixe.

Soit alors $\omega = 0$.

On peut supposer le point auquel se réduit Γ placé sur Oz, c'est-à-dire

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 1.$$

Les expressions (20) des coordonnées de la surface se présentent dans ce cas sous forme indéterminée et il faut reprendre le calcul.

En faisant $\omega = 0$, il vient

$$(8') \quad \begin{cases} U = -\dfrac{k}{2}\operatorname{sn} u, \\ U_1 = \dfrac{k}{2}\operatorname{sn} u, \end{cases}$$

$$(9') \quad e^h = \frac{\Theta\left(\dfrac{u+iv_1}{2}\right)\Theta\left(\dfrac{u-iv_1}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\dfrac{u+iv_1}{2}\right)\mathrm{H}\left(\dfrac{u-iv_1}{2}\right)},$$

$$(10') \quad e^{h+i\sigma} = \frac{\Theta^2\left(\dfrac{u+iv_1}{2}\right)}{\mathrm{H}^2\left(\dfrac{u+iv_1}{2}\right)},$$

$$(11') \quad e^{i\sigma} = \frac{\Theta\left(\dfrac{u+iv_1}{2}\right)\mathrm{H}\left(\dfrac{u-iv_1}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\dfrac{u+iv_1}{2}\right)\Theta\left(\dfrac{u-iv_1}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sn}\left(\dfrac{u-iv_1}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(\dfrac{u+iv_1}{2}\right)},$$

$$(13') \quad \frac{\partial\sigma}{\partial v_1} = \mathrm{M}(e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}),$$

$$(14') \quad \mathrm{M} = -\mathrm{N} = \frac{\sqrt{k}}{2}\frac{\Theta(iv_1)}{\mathrm{H}(iv_1)} = \frac{1}{2\operatorname{sn} iv_1}.$$

Quant aux expressions (16) des coordonnées de la sphère, en assimilant le point Γ au cercle infiniment petit de rayon ρ

$$x = \rho\cos\frac{s}{\rho},$$

$$y = \rho\sin\frac{s}{\rho},$$

$$z = 1;$$

puis, en posant $\frac{s}{\rho} = \lambda$, elles deviennent

$$(16') \quad \begin{cases} a = \dfrac{\cos\lambda}{2i}(e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}), \\ a' = \dfrac{\sin\lambda}{2i}(e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}), \\ a'' = \frac{1}{2}(e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}); \end{cases}$$

λ représente alors l'angle du plan zOx avec le plan du méridien qui passe en (a, a', a'') et σ est l'arc de ce méridien compris entre le pôle Γ et le point (a, a', a'').

Il est d'ailleurs aisé d'établir directement les formules (16').

Les deux expressions (15) et (17) du dS^2 de la sphère sont maintenant

$$(15')\qquad dS^2 = d\sigma^2 + V^2M^2(e^{i\sigma} - e^{-i\sigma})^2\, dv_1^2,$$

$$(17')\qquad dS^2 = da^2 + da'^2 + da''^2 = d\sigma^2 - \left(\frac{e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}}{2}\right)^2 d\lambda^2.$$

Il faut donc que

$$(18')\qquad d\lambda = 2iMV\, dv_1.$$

Tout cela posé, on obtient pour les expressions (19) des différentielles dX, dY et dZ

$$(19')\qquad \left\{\begin{aligned} dX &= \frac{\cos\lambda}{i}\left(e^{h+i\sigma}\, d\frac{u+iv_1}{2} - e^{h-i\sigma}\, d\frac{u-iv_1}{2}\right) - e^h V \sin\lambda\, dv_1,\\ dY &= \frac{\sin\lambda}{i}\left(e^{h+i\sigma}\, d\frac{u+iv_1}{2} - e^{h-i\sigma}\, d\frac{u-iv_1}{2}\right) + e^h V \cos\lambda\, dv_1,\\ dZ &= \qquad e^{h+i\sigma}\, d\frac{u+iv_1}{2} + e^{h-i\sigma}\, d\frac{u-iv_1}{2}. \end{aligned}\right.$$

Or les fonctions e^h et $e^{h+i\sigma}$, dont les expressions sont (9') et (10'), sont doublement périodiques de première espèce; si on leur applique la méthode de décomposition de M. Hermite, on trouve

$$e^h = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,iv_1}\,\frac{\Theta'(iv_1)}{\Theta(iv_1)} - \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,iv_1}\left[\frac{H'\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)} - \frac{H'\left(\frac{u-iv_1}{2}\right)}{H\left(\frac{u-iv_1}{2}\right)}\right],$$

$$e^{h+i\sigma} = \frac{\zeta}{k} - \frac{1}{k}\,D_{\frac{u+iv_1}{2}}\,\frac{H'\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)}{H\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)},$$

ζ désignant la constante $\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}$, et $D_{\frac{u+iv_1}{2}}$ signifiant dérivée par rapport

Ces résultats, portés dans $(19')$, donnent à dX, dY, dZ des formes immédiatement intégrables, et il vient, en remplaçant la surface (X, Y, Z) par la surface homothétique $\left(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k}, \frac{Z}{k}\right)$,

$')$

$$\left\{\begin{aligned}
X &= i\cos\lambda\left[\frac{\mathrm{H}'\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)}-\frac{\mathrm{H}'\left(\frac{u-iv_1}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u-iv_1}{2}\right)}\right]+\int\left[\zeta\cos\lambda-\frac{\Theta'(iv_1)}{\Theta(iv_1)}\frac{V\sin\lambda}{\operatorname{sn} iv_1}\right]dv_1,\\
Y &= i\sin\lambda\left[\frac{\mathrm{H}'\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)}-\frac{\mathrm{H}'\left(\frac{u-iv_1}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u-iv_1}{2}\right)}\right]+\int\left[\zeta\sin\lambda+\frac{\Theta'(iv_1)}{\Theta(iv_1)}\frac{V\cos\lambda}{\operatorname{sn} iv_1}\right]dv_1,\\
Z &= \zeta u-\left[\frac{\mathrm{H}'\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)}+\frac{\mathrm{H}'\left(\frac{u-iv_1}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u-iv_1}{2}\right)}\right].
\end{aligned}\right.$$

On peut transformer ces expressions de façon qu'elles ne contiennent plus que les trois fonctions elliptiques sn, cn, dn.

Prenons d'abord l'intégrale qui se trouve dans X; en se servant des relations connues

$$\frac{\Theta'(iv_1)}{\Theta(iv_1)} = 2\,\frac{\Theta'\left(\frac{iv_1}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{iv_1}{2}\right)} - k^2 \operatorname{sn} iv_1 \operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2},$$

$$d\,\frac{\Theta'\left(\frac{iv_1}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{iv_1}{2}\right)} = \left(\zeta - k^2\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}\right)\frac{i\,dv_1}{2}$$

et en ayant égard à $(18')$, il vient

$$\begin{aligned}
&\int\left[\zeta\cos\lambda-\frac{\Theta'(iv_1)}{\Theta(vi_1)}\frac{V\sin\lambda}{\operatorname{sn} iv_1}\right]dv_1\\
&\quad = -2i\cos\lambda\,\frac{\Theta'\left(\frac{iv_1}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{iv_1}{2}\right)} + k^2\int\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}\,(\cos\lambda + V\sin\lambda)\,dv_1.
\end{aligned}$$

On a de même

$$\int\left[\zeta\sin\lambda+\frac{\Theta'(iv_1)}{\Theta(iv_1)}\,\frac{\mathrm{V}\cos\lambda}{\operatorname{sn} iv_1}\right]dv_1=-2i\sin\lambda\,\frac{\Theta'\left(\frac{iv_1}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{iv_1}{2}\right)}+k^2\int\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}(\sin\lambda-\mathrm{V}\cos\lambda)\,dv_1.$$

D'autre part, on sait que

$$\frac{\mathrm{H}'\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)}=\frac{\Theta'\left(\frac{iv_1}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{iv_1}{2}\right)}+\frac{\mathrm{H}'\left(\frac{u}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u}{2}\right)}-\frac{\operatorname{sn}\frac{iv_1}{2}}{\operatorname{sn}\frac{u}{2}\operatorname{sn}\frac{u+iv_1}{2}},$$

$$\operatorname{sn}\frac{u+iv_1}{2}=\frac{\operatorname{sn}\frac{u}{2}\operatorname{cn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{dn}\frac{iv_1}{2}-\operatorname{sn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{cn}\frac{u}{2}\operatorname{dn}\frac{u}{2}}{1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}}$$

et

$$\zeta u-2\,\frac{\mathrm{H}'\left(\frac{u}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u}{2}\right)}=\int\frac{du}{\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}}+\text{const.}$$

Si l'on porte ces expressions dans (20′), on obtient, réductions faites,

$$(21)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathrm{X}&=2i\cos\lambda\,\frac{\operatorname{sn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{cn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{dn}\frac{iv_1}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}-\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}}+k^2\int\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}(\cos\lambda+\mathrm{V}\sin\lambda)\,dv_1,\\
\mathrm{Y}&=2i\sin\lambda\,\frac{\operatorname{sn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{cn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{dn}\frac{iv_1}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}-\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}}+k^2\int\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}(\sin\lambda-\mathrm{V}\cos\lambda)\,dv_1,\\
\mathrm{Z}&=2\,\frac{\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}}\,\frac{\operatorname{sn}\frac{u}{2}\operatorname{cn}\frac{u}{2}\operatorname{dn}\frac{u}{2}}{\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}-\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}}+\int\frac{du}{\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

On pourrait, dans ces équations, remplacer $\frac{u}{2}$ et $\frac{v_1}{2}$ par deux autres variables t et τ, à la condition de remplacer aussi $\frac{v_1}{2}$ par τ dans (18′); V et λ deviendraient alors des fonctions de τ. On pourrait aussi faire disparaître i, qui ne figure qu'en apparence, en se servant des relations

$$\operatorname{sn}(ix, k) = i\frac{\operatorname{sn}(x, k')}{\operatorname{cn}(x, k')},$$
$$\operatorname{cn}(ix, k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(x, k')},$$
$$\operatorname{dn}(ix, k) = \frac{\operatorname{dn}(x, k')}{\operatorname{cn}(x, k')}.$$

Mais nous laisserons les équations de la surface sous la forme (21).

Les équations (21) contiennent deux fonctions V et λ de v_1 liées par (18′). On peut prendre arbitrairement soit V, soit λ, et (18′) détermine alors soit λ, soit V.

III.

Mode de génération de la surface.

Posons

$$k^2\int \operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}(\cos\lambda + V\sin\lambda)\,dv_1 = W,$$
$$k^2\int \operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}(\sin\lambda - V\cos\lambda)\,dv_1 = W_1.$$

La ligne de courbure (C), pour laquelle $v_1 =$ const., est dans le plan

$$(22) \qquad Y - W_1 = \operatorname{tang}\lambda\,(X - W),$$

parallèle à OZ. Ce plan coupe le plan XOY, suivant une droite Ax qui rencontre l'axe OY en A, et l'on a

$$OA = W_1 - W\operatorname{tang}\lambda.$$

Prenons sur Ax

$$AO' = \frac{W}{\cos\lambda}.$$

Rapportons la ligne de courbure (C), dans son plan, à $O'x$ et à $O'z$

parallèle à OZ. On a, pour les coordonnées de cette courbe,

$$(23)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{X}{\cos\lambda} - \dfrac{W}{\cos\lambda} = 2i\,\dfrac{\operatorname{sn}\dfrac{iv_1}{2}\operatorname{cn}\dfrac{iv_1}{2}\operatorname{dn}\dfrac{iv_1}{2}}{\operatorname{sn}^2\dfrac{iv_1}{2} - \operatorname{sn}^2\dfrac{u}{2}}, \\ z = Z. \end{cases}$$

Donc la forme des courbes (C) ne dépend pas de V : elles sont les mêmes pour toutes les surfaces pour lesquelles le module k a la même valeur.

Cherchons la droite (D) suivant laquelle le plan de la ligne de courbure touche son enveloppe. Elle est définie par (22) et par

$$-W'_1 = \frac{1}{\cos^2\lambda}(X - W) - W'\operatorname{tang}\lambda,$$

ce qui donne

$$(24)\qquad X = (W'\operatorname{tang}\lambda - W'_1)\cos^2\lambda + W,$$

et, en appelant M le point où (D) rencontre $O'x$,

$$O'M = \frac{X}{\cos\lambda} - \frac{W}{\cos\lambda} = k^2 V \operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2}.$$

La courbe (L), enveloppe de $O'x$, a d'ailleurs pour équations (22) et (24) qui peuvent s'écrire

$$(25)\qquad \begin{cases} X = k^2 V \operatorname{sn}^2\dfrac{iv_1}{2}\cos\lambda + W, \\ Y = k^2 V \operatorname{sn}^2\dfrac{iv_1}{2}\sin\lambda + W_1. \end{cases}$$

Cette courbe, dont la forme dépend de V, est quelconque; son ds diffère de la différentielle de $O'M'$ de la quantité

$$g = ds - d.O'M,$$

de sorte que, si, $O'x$ enveloppant (L), on veut que (C) engendre la surface cherchée, il faut que le plan de (C) glisse parallèlement à XOY de la quantité g quand v_1 varie de dv_1.

La surface cherchée est donc engendrée par la courbe plane (C) *qui se* *déforme, quand v_1 varie, comme le veulent les équations* (23), *et dont le plan roule sur un cylindre parallèle à* OZ *et de directrice* (L) *quelconque située dans le plan* XOY, *en même temps qu'il subit parallèlement à* XOY *le glissement élémentaire g.*

Le lieu de O' est une courbe (L_1), ayant pour équations

$$X = W,$$
$$Y = W_1.$$

On peut donc dire encore que :

La surface cherchée est engendrée par la courbe (C), *d'équations* (23), *variable de forme avec v_1, dont le plan $zO'x$ demeure parallèle à* OZ, *le point* O' *décrivant la courbe* (L_1) *et la droite $O'x$ s'appuyant constamment sur la courbe* (L).

IV.

Cherchons si, parmi les surfaces trouvées, il y en a pour lesquelles les plans des lignes de courbure $v_1 =$ const. passent par une droite fixe.

Il faut et il suffit pour cela que la courbe (L) se réduise à un point, c'est-à-dire que les différentielles des coordonnées (25) de cette courbe soient nulles. Cela conduit à deux conditions qui, combinées entre elles, peuvent s'écrire

$$\frac{d}{dv_1}\left(V \operatorname{sn}^2 \frac{iv_1}{2}\right) + \operatorname{sn}^2 \frac{iv_1}{2} = 0,$$
$$d\lambda - dv_1 = 0.$$

En vertu de la relation (18'), la seconde donne

$$1 = 2iMV = \frac{iV}{\operatorname{sn} iv_1},$$

d'où

$$V = -i \operatorname{sn} iv_1.$$

Portant dans la première, il faudrait donc que

$$\frac{d}{dv_1}\left(\operatorname{sn} iv_1 \operatorname{sn}^2 \frac{iv_1}{2}\right) + i \operatorname{sn}^2 \frac{iv_1}{2} = 0.$$

Or on reconnaît aisément que cette relation ne peut exister. Donc les surfaces trouvées n'en comprennent pas pour lesquelles les lignes de courbure $v_1 = \text{const.}$ soient dans des plans passant par une droite fixe.

Ce résultat nous conduira plus loin à énoncer un théorème.

V.

Surfaces (21) pour lesquelles $k = 1$.

Si $k = 1$, il vient

$$\operatorname{sn}\frac{u}{2} = \operatorname{tangh}\frac{u}{2},$$

$$\operatorname{cn}\frac{u}{2} = \operatorname{dn}\frac{u}{2} = \frac{1}{\cosh\frac{u}{2}},$$

$$\operatorname{sn} iv_1 = i \operatorname{tang} v_1,$$

$$\operatorname{sn}\frac{iv_1}{2} = i \operatorname{tang}\frac{v_1}{2},$$

$$\operatorname{cn}\frac{iv_1}{2} = \operatorname{dn}\frac{iv_1}{2} = \frac{1}{\cos\frac{v_1}{2}}.$$

$$(14'') \qquad M = \frac{1}{2i \operatorname{tang} v_1}.$$

$$(18'') \qquad \partial\lambda = \frac{V\,dv_1}{\operatorname{tang} v_1}.$$

$$(21') \quad \left\{ \begin{aligned} X &= 2\cos\lambda \frac{\operatorname{tang}\frac{v_1}{2}}{\cos^2\frac{v_1}{2}\left(\operatorname{tang}^2\frac{v_1}{2} + \operatorname{tang}^2 h\frac{u}{2}\right)} - \int \operatorname{tang}^2\frac{v_1}{2}(\cos\lambda + V\sin\lambda)\,dv_1, \\ Y &= 2\sin\lambda \frac{\operatorname{tang}\frac{v_1}{2}}{\cos^2\frac{v_1}{2}\left(\operatorname{tang}^2\frac{v_1}{2} + \operatorname{tang}^2 h\frac{u}{2}\right)} - \int \operatorname{tang}^2\frac{v_1}{2}(\sin\lambda - V\cos\lambda)\,dv_1, \\ Z &= 2\frac{\operatorname{tangh}\frac{u}{2}}{\cos^2\frac{v_1}{2}\left(\operatorname{tang}^2\frac{v_1}{2} + \operatorname{tang}^2 h\frac{u}{2}\right)} + u. \end{aligned} \right.$$

Nous examinerons plus loin l'hypothèse $k = 0$.

VI.

Surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes.

Les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes comprennent :

1° Les surfaces pour lesquelles les lignes de courbure d'un système sont dans des plans parallèles à un plan fixe et les lignes de courbure du second système dans des plans parallèles à une droite fixe. Ce sont les surfaces moulures de Monge.

Il est facile de reconnaître *géométriquement* que, de ces surfaces, les cylindres, les cônes et les surfaces de révolution sont les seules sur lesquelles les lignes de courbure puissent dessiner un réseau isotherme; aussi n'est-ce pas de ces surfaces que nous avons à nous occuper.

2° Les surfaces pour lesquelles les lignes de courbure de chacun des deux systèmes sont dans des plans parallèles à une droite fixe, les deux droites fixes qui correspondent aux deux systèmes de lignes de courbure étant rectangulaires.

Celles des surfaces de ce second groupe qui sont isothermes ont leurs équations nécessairement comprises dans les équations (21).

Les équations (21) supposent que les lignes de courbure du premier système ($v_1 =$ const.) sont dans des plans parallèles à OZ; nous prendrons OY comme direction fixe à laquelle nous voulons que les plans des lignes de courbure du second système ($u =$ const.) soient parallèles.

Pour que ces lignes soient planes, il faut et il suffit, dans ces conditions, que l'on ait

$$\frac{\dfrac{\partial X}{\partial v_1}}{\dfrac{\partial Z}{\partial v_1}} = \text{fonction de } u.$$

Pour exprimer cela, le moyen le plus simple consiste à partir des équations différentielles (19'), lesquelles donnent

$$(26)\qquad \frac{\cos\lambda(e^{i\sigma}+e^{-i\sigma})-\mathrm{V}\sin\lambda}{e^{i\sigma}-e^{-i\sigma}}=\text{fonction de } u.$$

Or, si l'on pose

$$\frac{\operatorname{sn}\frac{u}{2}}{\operatorname{cn}\frac{u}{2}\operatorname{dn}\frac{u}{2}}=\alpha,\qquad \frac{\operatorname{sn}\frac{iv_1}{2}}{\operatorname{cn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{dn}\frac{iv_1}{2}}=\beta,$$

l'expression (11') de $e^{i\sigma}$ fournit

$$(27)\qquad e^{i\sigma}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta},\qquad e^{-i\sigma}\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta},$$

ce qui transforme (26) en la condition suivante

$$\frac{\alpha^2(\cos\lambda-\mathrm{V}\sin\lambda)+\beta^2(\cos\lambda+\mathrm{V}\sin\lambda)}{\beta}=\text{fonction de }\alpha.$$

Comme V et λ ne dépendent que de v_1, c'est-à-dire de β, il faut donc que

$$(28)\qquad \begin{cases}\mathrm{V}\sin\lambda+\cos\lambda=\dfrac{2\mathrm{A}i}{\beta},\\ \mathrm{V}\sin\lambda-\cos\lambda=2\mathrm{B}i\beta,\end{cases}$$

A et B étant deux constantes absolues, réelles pour une surface réelle. On vérifie aisément que, quels que soient A et B, les expressions de V et de λ tirées de (28) satisfont à la relation différentielle (18'); (28) déterminent donc les fonctions V et λ de v_1 pour lesquelles la surface (21) a ses lignes de courbure planes dans les deux systèmes.

A l'égard des constantes A et B, il convient de faire cette remarque que, pour une surface réelle, $1-4\mathrm{AB}$ est positif; on tire, en effet, des relations (28),

$$(1+\mathrm{V}^2)\sin^2\lambda=1-4\mathrm{AB}.$$

Avec la première des relations (28), l'intégrale qui se trouve dans la coordonnée X de la surface (21) se calcule immédiatement; elle a pour valeur

$$2\mathrm{A}ik^2\int\operatorname{sn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{cn}\frac{iv_1}{2}\operatorname{dn}\frac{iv_1}{2}\,dv_1=2\mathrm{A}k^2\operatorname{sn}^2\frac{iv_1}{2},$$

en remplaçant d'autre part, dans X, $\cos\lambda$ par sa valeur tirée de (28)

$$\cos\lambda = i\frac{A - B\beta^2}{\beta} = i\frac{A\,\mathrm{cn}^2\frac{iv_1}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{iv_1}{2} - B\,\mathrm{sn}^2\frac{iv_1}{2}}{\mathrm{sn}\frac{iv_1}{2}\,\mathrm{cn}\frac{iv_1}{2}\,\mathrm{dn}\frac{iv_1}{2}},$$

il vient

$$X = -2\frac{A\,\mathrm{cn}^2\frac{iv_1}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{iv_1}{2} - B\,\mathrm{sn}^2\frac{iv_1}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{iv_1}{2} - \mathrm{sn}^2\frac{u}{2}} + 2Ak^2\,\mathrm{sn}^2\frac{iv_1}{2}.$$

Un calcul facile permet d'écrire X de la manière suivante

$$X = -2\frac{\mathrm{sn}^2\frac{iv_1}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}}\,\frac{A\,\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{u}{2} - B\,\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{iv_1}{2} - \mathrm{sn}^2\frac{u}{2}} + \frac{2A}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}}.$$

Cette expression, comparée à celle de Z, montre que

$$(29)\qquad \frac{X - \dfrac{2A}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}}}{A\,\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{u}{2} - B\,\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}} + \frac{Z - \displaystyle\int\frac{du}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}}}{\mathrm{sn}\frac{u}{2}\,\mathrm{cn}\frac{u}{2}\,\mathrm{dn}\frac{u}{2}} = 0.$$

Les lignes de courbure $u = \text{const.}$ du deuxième système sont donc bien dans des plans parallèles à OY.

On a, en définitive, comme coordonnées de la surface,

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= 2i\cos\lambda\frac{\mathrm{sn}\frac{iv_1}{2}\,\mathrm{cn}\frac{iv_1}{2}\,\mathrm{dn}\frac{iv_1}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{iv_1}{2} - \mathrm{sn}^2\frac{u}{2}} + 2Ak^2\,\mathrm{sn}^2\frac{iv_1}{2},\\ Y &= 2i\sin\lambda\frac{\mathrm{sn}\frac{iv_1}{2}\,\mathrm{cn}\frac{iv_1}{2}\,\mathrm{dn}\frac{iv_1}{2}}{\mathrm{sn}^2\frac{iv_1}{2} - \mathrm{sn}^2\frac{u}{2}} + k^2\int\mathrm{sn}^2\frac{iv_1}{2}(\sin\lambda - V\cos\lambda)\,dv_1,\end{aligned}\right.$$

les fonctions V et λ devant être remplacées par leurs expressions tirées de (28).

Nous savons déjà que les lignes de courbure $v_1 =$ const. des surfaces (30) ne peuvent passer par une droite fixe. Il en est de même des lignes de courbure $u =$ const.; sans cela, en effet, d'après l'équation (29), $\int \frac{du}{\mathrm{sn}^2 \frac{u}{2}}$ serait exprimable algébriquement au moyen de $\mathrm{sn}\frac{u}{2}$ considéré comme la variable; or il ne peut en être ainsi, car, si l'on pose $\mathrm{sn}\frac{u}{2} = x$, $\int \frac{du}{\mathrm{sn}^2 \frac{u}{2}}$ est une intégrale elliptique de troisième espèce.

VII.

Classement en deux catégories des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes.

Nous avons rappelé plus haut que, abstraction faite des surfaces moulures de Monge dont nous n'avons pas à nous occuper, les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes ont, pour chaque système, leurs lignes de courbure dans des plans parallèles à une droite fixe.

Ces surfaces peuvent être regardées comme engendrées de la manière suivante :

On prend deux coniques focales l'une de l'autre et situées dans deux plans rectangulaires; on considère deux sphères dont les centres décrivent respectivement ces deux coniques et dont les rayons varient suivant deux lois quelconques; le plan radical de ces deux sphères enveloppe la surface demandée.

Les deux coniques focales peuvent être :

1° Une ellipse et une hyperbole;

2° Deux paraboles.

Pour les surfaces 1°, l'équation du plan tangent peut être ramenée à la forme

$$(31) \qquad \left[\mu(1-t^2) - \sqrt{(\mu^2-1)(1+\tau^2)}\right]X + \tau Y - tZ = f(t) + \varphi(\tau),$$

et pour les surfaces 2°

$$(32) \qquad (1 - t^2 - \tau^2)X - 2\tau Y + 2tZ = f(t) + \varphi(\tau),$$

t et τ désignant les paramètres des deux systèmes de lignes de courbure, μ étant une constante arbitraire et f, φ deux fonctions arbitraires.

Je vais démontrer que l'équation du plan tangent aux surfaces (30) a la forme (31) quand les constantes A et B contenues dans (28) sont toutes deux différentes de zéro, et la forme (32) quand on a soit $A = 0$, soit $B = 0$.

En effet, supposons d'abord A et B différents de zéro; les coefficients des coordonnées courantes dans l'équation tangentielle des surfaces (30) sont proportionnels à

$$\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v_1} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Or les dérivées $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v_1}$, $\cdots$ se tirent immédiatement des équations différentielles (19′) et il vient

$$(33) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v_1} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v_1} &= -\sin\lambda - \frac{V\cos\lambda}{2}(e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}),\\ \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v_1} - \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v_1} &= \quad\cos\lambda - \frac{V\sin\lambda}{2}(e^{i\sigma} + e^{-i\sigma}),\\ \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v_1} - \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v_1} &= \frac{V}{2i}(e^{i\sigma} - e^{-i\sigma}). \end{aligned}\right.$$

Remplaçons $e^{i\sigma}$, $e^{-i\sigma}$ par leurs expressions (27) en α et β; puis, dans le deuxième coefficient, λ et V par leurs expressions tirées de (28); divisons ensuite les trois coefficients par

$$(34) \qquad -\frac{2i\beta V(A + B\alpha^2)}{\sqrt{4AB}(\alpha^2 - \beta^2)},$$

posons enfin

$$\frac{\alpha}{A + B\alpha^2} = \frac{t}{\sqrt{4AB}},$$
$$\frac{1}{V} = \frac{\tau}{\sqrt{4AB}},$$

tout calcul fait, les trois coefficients prendront la forme

$$\frac{1}{\sqrt{4AB}}\sqrt{1-t^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{4AB}-1\right)(1+\tau^2)},$$
$$\tau,$$
$$-t.$$

Il n'y a plus qu'à poser $\frac{1}{\sqrt{4AB}}=\mu$ pour obtenir les coefficients du premier membre de l'équation (31).

On voit que, tant que A et B sont tous deux différents de zéro, les surfaces (30) appartiennent à la première catégorie (31).

Supposons maintenant $A=0$.

Dans ce cas, on prend comme diviseur des coefficients (33), au lieu de l'expression (34), la suivante

$$\frac{iB\alpha^2\beta V}{\alpha^2-\beta^2},$$

et l'on pose

$$\frac{1}{B\alpha}=t, \qquad \frac{1}{V}=\tau,$$

ce qui donne

$$1-t^2-\tau^2,$$
$$-2\tau,$$
$$2t,$$

c'est-à-dire les trois coefficients du premier membre de l'équation (32).

Si $A=0$, les surfaces (30) appartiennent donc à la deuxième catégorie (32).

Supposons enfin $B=0$.

Il suffit alors de prendre comme diviseur des coefficients (33)

$$-\frac{Ai\beta V}{\alpha^2-\beta^2}$$

et de poser

$$-\frac{\alpha}{A}=t, \qquad -\frac{1}{V}=\tau,$$

pour retrouver encore les trois coefficients de l'équation (32).

Ainsi $B=0$ donne aussi des surfaces de la deuxième catégorie (32).

VIII.

Surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes pour lesquelles $k=1$. Exemple.

Si l'on fait $k=1$, les relations (28) et les équations (30) deviennent

$$(28')\qquad \begin{cases} \cos\lambda + V\sin\lambda = \dfrac{4A}{\sin v_1}, \\ \cos\lambda - V\sin\lambda = B\sin v_1. \end{cases}$$

$$(30')\qquad \begin{cases} X = 2\cos\lambda \dfrac{\operatorname{tang}\dfrac{v_1}{2}}{\cos^2\dfrac{v_1}{2}\left(\operatorname{tang}^2\dfrac{v_1}{2} + \operatorname{tangh}^2\dfrac{u}{2}\right)} - 2A\operatorname{tang}^2\dfrac{v_1}{2}, \\ Y = 2\sin\lambda \dfrac{\operatorname{tang}\dfrac{v_1}{2}}{\cos^2\dfrac{v_1}{2}\left(\operatorname{tang}^2\dfrac{v_1}{2} + \operatorname{tangh}^2\dfrac{u}{2}\right)} - \displaystyle\int \operatorname{tang}^2\dfrac{v_1}{2}(\sin\lambda - V\cos\lambda)\,dv_1, \\ Z = -2\dfrac{\operatorname{tangh}\dfrac{u}{2}}{\cos^2\dfrac{v_1}{2}\left(\operatorname{tang}^2\dfrac{v_1}{2} + \operatorname{tangh}^2\dfrac{u}{2}\right)} + u. \end{cases}$$

Si l'on fait, par exemple, $A=0$ et $B=2$, il vient

$$\cos\lambda = \sin v_1.$$

On peut prendre

$$\sin\lambda = -\cos v_1,$$

ce qui donne

$$V = -\operatorname{cot}\operatorname{tang}\lambda = \operatorname{tang} v_1,$$

$$\int \operatorname{tang}^2\frac{v_1}{2}(\sin\lambda - V\cos\lambda)\,dv_1 = \int \frac{\operatorname{tang}^2\dfrac{v_1}{2}\,dv_1}{\cos v_1} = -2\operatorname{tang}\frac{v_1}{2} + \log\frac{1+\operatorname{tang}\dfrac{v_1}{2}}{1-\operatorname{tang}\dfrac{v_1}{2}}.$$

On a d'ailleurs

$$dv_1 = \frac{dv}{\sqrt{1+V^2}} = \cos v_1\,dv,$$

d'où l'on déduit

$$\operatorname{tang}\frac{\rho_1}{2} = \operatorname{tangh}\frac{\rho}{2}.$$

Cela posé, si l'on ajoute à X la constante -2, si l'on remarque que

$$u = \log\frac{1+\operatorname{tangh}\dfrac{u}{2}}{1-\operatorname{tangh}\dfrac{u}{2}},$$

et enfin si l'on pose

$$\operatorname{tangh}\frac{u}{2} = t,$$

$$\operatorname{tangh}\frac{\rho}{2} = \tau,$$

on obtient, pour la surface, les équations très symétriques

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= 2\frac{\tau^2 - t^2}{\tau^2 + t_2}, \\ Y &= \log\frac{1+\tau}{1-\tau} - \frac{2\tau(1+t^2)}{\tau^2+t^2}, \\ Z &= \log\frac{1+t}{1-t} - \frac{2t(1+\tau^2)}{\tau^2+t^2}. \end{aligned}\right.$$

Quant à e^h, on trouve qu'il a pour valeur $\frac{1+t^2\tau^2}{\tau^2+t^2}$, de sorte que le ds^2 de la surface a pour expression

$$ds^2 = \left(\frac{1+t^2\tau^2}{t^2+\tau^2}\right)^2 (du^2 + dv^2),$$

ou

$$ds^2 = 4\left(\frac{1+t^2\tau^2}{t^2+\tau^2}\right)^2 \left[\frac{dt^2}{(1-t^2)^2} + \frac{d\tau^2}{(1-\tau^2)^2}\right].$$

De la symétrie des équations (35) il résulte que les lignes de courbure planes des deux systèmes ont la même forme qui est celle de la ligne (C) ayant (23) comme équations, quand on suppose $k=1$. On voit, de plus, que le plan $Y = Z$ est plan de symétrie pour cette surface, laquelle possède dans ce plan la droite $X = 0$. Enfin, A étant nul pour la surface (35), les deux coniques focales qui servent à sa génération sont deux paraboles.

Revenant aux équations (30′), on reconnaît, comme dans le cas général où k est < 1, que les plans des lignes de courbure ne peuvent, pour aucun des deux systèmes, passer par une droite fixe.

IX.

Surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système, pour lesquelles $k = 0$.

Si $k = 0$, l'équation (7) donne $UU_1 = 0$, ce qui exige soit $U = 0$, soit $U_1 = 0$. On ne peut alors conserver les expressions (8) qui donneraient à la fois $U = U_1 = 0$.

Il faut donc reprendre le calcul dans les deux hypothèses $U = 0$ et $U_1 = 0$.

Première hypothèse : $U_1 = 0$. — Dans cette hypothèse, qui doit nous donner en particulier les cyclides de Dupin [1], la fonction h de u et de v doit satisfaire encore à l'équation (5)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2} = 0 \tag{5}$$

et à l'équation (4), qui se réduit ici à

$$\frac{\partial h}{\partial u} = U e^h. \tag{4'}$$

La variable v_1 est, comme dans le cas général, définie par

$$dv_1 = \frac{dv}{\sqrt{1 + V^2}}.$$

L'équation (5) donne

$$e^{-h} = f(u + iv_1)\,\varphi(u - iv_1),$$

[1] Les cyclides de Dupin ayant, en effet, leurs lignes de courbure planes dans les deux systèmes et isothermes, doivent satisfaire à l'équation (3)

$$\frac{\partial h}{\partial u} = U e^h + U_1 e^{-h},$$

et il est facile d'établir que $U_1 = 0$ pour ces surfaces.

d'où

$$-e^{-h}\frac{\partial h}{\partial u}=\varphi f'+f\varphi'.$$

Il faut donc, pour satisfaire à (4'), que

$$\varphi f'+f\varphi'=-\mathrm{U},$$

c'est-à-dire

$$\varphi f''-f\varphi''=0.$$

Cela exige

$$\frac{f''}{f}=\frac{\varphi''}{\varphi}=a^2,$$

a désignant une constante réelle ou purement imaginaire.

Il vient ensuite

$$f'^2=a^2f^2+b^2,$$

b désignant une constante réelle ou purement imaginaire, et

$$f=\frac{b}{a}\sin a(u+iv_1).$$

On aura de même

$$\varphi=\frac{c}{a}\sin a(u-iv_1);$$

d'où, en laissant de côté le produit bc, qui donnerait une surface homothétique à celle que nous allons trouver

$$e^h=\frac{1}{f\varphi}=\frac{a^2}{\sin a(u+iv_1)\sin a(u-iv_1)}.$$

Cette forme de e^h nous conduit à introduire, comme dans le cas général où U et U_1 ne sont pas nuls, une fonction σ définie par

$$e^{\frac{h+i\sigma}{2}}=\frac{a}{\sin a(u+iv_1)},$$

de sorte que

$$e^{i\sigma}=\frac{\sin a(u-iv_1)}{\sin a(u+iv_1)}$$

et

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v_1}=\frac{\partial h}{\partial u}=-\frac{a\sin 2au}{\sin a(u+iv_1)\sin a(u-iv_1)}.$$

Cherchons si l'on peut poser

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v_1} = \mathrm{M}e^{i\sigma} + \mathrm{N}e^{-i\sigma},$$

M et N ne dépendant que de v_1. En identifiant, on trouve

$$\mathrm{M} = -\mathrm{N} = \frac{a}{\sin 2aiv_1}.$$

D'après ce que nous avons exposé précédemment, ce résultat signifie que les plans des lignes de courbure de la surface cherchée enveloppent un cylindre et que les équations (18′) et (19′) s'appliquent au cas actuel.

On a donc

$$d\lambda = 2i\mathrm{MV}\,dv_1 = \frac{2ai\mathrm{V}\,dv_1}{\sin 2aiv_1}, \tag{18''}$$

$$\tag{19'}\left\{\begin{aligned} d\mathrm{X} &= \frac{\cos\lambda}{i}\left(e^{h+i\sigma}\,d\frac{u+iv_1}{2} - e^{h-i\sigma}\,d\frac{u-iv_1}{2}\right) - e^h\mathrm{V}\sin\lambda\,dv_1,\\ d\mathrm{Y} &= \frac{\sin\lambda}{i}\left(e^{h+i\sigma}\,d\frac{u+iv_1}{2} - e^{h-i\sigma}\,d\frac{u-iv_1}{2}\right) + e^h\mathrm{V}\cos\lambda\,dv_1,\\ d\mathrm{Z} &= \qquad e^{h+i\sigma}\,d\frac{u+iv_1}{2} + e^{h-i\sigma}\,d\frac{u-iv_1}{2}. \end{aligned}\right.$$

En remplaçant dans ces différentielles $e^{h+i\sigma}$, $e^{h-i\sigma}$, e^h par leurs valeurs et en intégrant, il vient pour les coordonnées de la surface changées de signe

$$\tag{36}\left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= ai\cos\lambda\,\frac{\sin 2aiv_1}{\cos 2aiv_1 - \cos 2au},\\ \mathrm{Y} &= ai\sin\lambda\,\frac{\sin 2aiv_1}{\cos 2aiv_1 - \cos 2au},\\ \mathrm{Z} &= \qquad a\,\frac{\sin 2au}{\cos 2aiv_1 - \cos 2au}, \end{aligned}\right.$$

où λ doit être regardé comme une fonction quelconque de v_1.

Si a n'est pas nul, on peut faire $2a = 1$ et remplacer X, Y, Z par leurs moitiés, ce qui donne

$$X = i\cos\lambda \frac{\sin i v_1}{\cos i v_1 - \cos u},$$
$$Y = i\sin\lambda \frac{\sin i v_1}{\cos i v_1 - \cos u},$$
$$Z = \frac{\sin u}{\cos i v_1 - \cos u}.$$

Si a tend vers zéro, les coordonnées de la surface deviennent

$$X = \frac{v_1 \cos\lambda}{u^2 + v_1^2},$$
$$Y = \frac{v_1 \sin\lambda}{u^2 + v_1^2},$$
$$Z = \frac{u}{u^2 + v_1^2}.$$

Les équations (36) comprenant les deux cas $a \neq 0$ et $a = 0$, nous les garderons sous cette forme.

Les lignes de courbure $v_1 =$ const. de la surface trouvée sont dans des plans

$$Y = X \operatorname{tang}\lambda,$$

passant par l'axe des Z. Il est facile de voir que ces lignes de courbure sont des cercles ayant leurs centres dans le plan XOY et que $a = 0$ correspond au cas où tous ces cercles sont tangents à OZ; le lieu des centres de ces cercles est une courbe quelconque, parce que λ est une fonction quelconque de v_1.

Si une surface admet un système de lignes de courbure planes dont les plans passent par une droite fixe OZ, les lignes de courbure du second système sont tracées sur des sphères ayant leurs centres sur cette droite.

Cela se vérifie dans le cas actuel.

En coordonnées cartésiennes, les surfaces (36) ont pour équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = X f\left(\frac{Y}{X}\right) + \text{const.},$$

f désignant une fonction arbitraire.

Pour déduire des équations (36) les équations des cyclides, il suffit de chercher celles des surfaces (36) qui ont leurs lignes de courbure planes dans les deux systèmes. A cet effet, on écrira que

$$\frac{\dfrac{\partial X}{\partial v_1}}{\dfrac{\partial Z}{\partial v_1}} = \text{fonction de } u,$$

comme nous l'avons fait pour obtenir en général les surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. On trouve que les deux fonctions λ et V doivent être définies par

$$\begin{aligned} V \sin\lambda - \cos\lambda \cos 2aiv_1 &= a A i \sin 2aiv_1, \\ V \sin\lambda \cos 2aiv_1 - \cos\lambda &= a B i \sin 2aiv_1, \end{aligned}$$

A et B étant deux constantes quelconques réelles pour une surface réelle.

Comme dans le cas général où U et U_1 sont tous deux différents de zéro, on reconnaît que, si A et B ne sont pas nuls, les deux coniques focales l'une de l'autre qui servent de base à la génération des cyclides sont une ellipse et une hyperbole et que ces deux coniques dégénèrent en deux paraboles si l'on a $A = 0$ ou $B = 0$.

Deuxième hypothèse $U = 0$. — La fonction h satisfait toujours à l'équation (5)

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2} = 0,$$

et à l'équation (4) qui se réduit ici à

$$(4'') \qquad \frac{\partial h}{\partial u} = U_1 e^{-h},$$

et l'on a

$$dv_1 = \frac{dv}{\sqrt{1 + V^2}}.$$

L'équation (5) donne

$$e^h = f(u + iv_1)\,\varphi(u - iv_1),$$

d'où

$$e^h \frac{\partial h}{\partial u} = \varphi f' + f\varphi'.$$

Il faut donc, pour satisfaire à (4″), que

$$\varphi f' + f\varphi' = U_1,$$
$$\varphi f'' - f\varphi'' = 0.$$

Cette dernière équation, traitée comme celle que nous avons obtenue dans le cas $U_1 = 0$, donne

$$f = \frac{b}{a} \sin a(u + iv_1),$$

$$\varphi = \frac{c}{a} \sin a(u - iv_1),$$

et l'on peut prendre

$$e^h = \frac{1}{a^2} \sin a(u + iv_1) \sin a(u - iv_1).$$

Introduisons la fonction σ définie par

$$e^{\frac{h+i\sigma}{2}} = \frac{1}{a} \sin a(u + iv_1),$$

de sorte que

$$e^{i\sigma} = \frac{\sin a(u + iv_1)}{\sin a(u - iv_1)}$$

et

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v_1} = \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{a \sin 2au}{\sin a(u + iv_1) \sin a(u - iv_1)}.$$

Cherchons si l'on peut poser

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v_1} = M e^{i\sigma} + N e^{-i\sigma},$$

M et N ne dépendant que de v_1. En identifiant, on trouve

$$M = -N = \frac{a}{\sin 2aiv_1}.$$

Par suite, les lignes de courbure $v_1 =$ const. de la surface cherchée enveloppent un cylindre et les équations (18′) et (19′) s'appliquent encore ici. On a donc

$$(18''') \qquad d\lambda = 2i\mathrm{MV}\,dv_1 = \frac{2ai\mathrm{V}\,dv_1}{\sin 2aiv_1},$$

$$(19') \quad \begin{cases} d\mathrm{X} = \dfrac{\cos\lambda}{i}\left(e^{h+i\sigma}\,d\dfrac{u+iv_1}{2} - e^{h-i\sigma}\,d\dfrac{u-iv_1}{2}\right) - e^{h}\mathrm{V}\sin\lambda\,dv_1, \\ d\mathrm{Y} = \dfrac{\sin\lambda}{i}\left(e^{h+i\sigma}\,d\dfrac{u+iv_1}{2} - e^{h-i\sigma}\,d\dfrac{u-iv_1}{2}\right) + e^{h}\mathrm{V}\cos\lambda\,dv_1, \\ d\mathrm{Z} = \qquad e^{h+i\sigma}\,d\dfrac{u+iv_1}{2} + e^{h-i\sigma}\,d\dfrac{u-iv_1}{2}. \end{cases}$$

Supposons d'abord $a \neq 0$.

En remplaçant dans les différentielles (19') $e^{h+i\sigma}$, $e^{h-i\sigma}$ et e^{h} par leurs valeurs et en intégrant, il vient pour les coordonnées de la surface multipliées par $4a^2$

$$\mathrm{X} = \frac{i}{a}\cos\lambda\cos 2au\sin 2aiv_1 - \frac{i}{a}\int(\cos\lambda - \mathrm{V}\sin\lambda\cos 2aiv_1)\,d\,2aiv_1,$$

$$\mathrm{Y} = \frac{i}{a}\sin\lambda\cos 2au\sin 2aiv_1 - \frac{i}{a}\int(\sin\lambda + \mathrm{V}\cos\lambda\cos 2aiv_1)\,d\,2aiv_1,$$

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{a}(2au - \sin 2au\cos 2aiv_1).$$

Dans ces équations, a ne figure que multiplié par u ou par v_1, ou comme diviseur des seconds membres; on peut donc donner à a telle valeur que l'on veut et, en particulier, la valeur $\frac{i}{2}$; si de plus on divise les seconds membres par 2, les équations prennent la forme

$$(37) \quad \begin{cases} \mathrm{X} = -\cos\lambda\cos iu\sin v_1 + \int(\cos\lambda - \mathrm{V}\sin\lambda\cos v_1)\,dv_1, \\ \mathrm{Y} = -\sin\lambda\cos iu\sin v_1 + \int(\sin\lambda + \mathrm{V}\cos\lambda\cos v_1)\,dv_1, \\ \mathrm{Z} = u + i\sin iu\cos v_1. \end{cases}$$

En second lieu, supposons que a tende vers zéro; il vient alors

$$e^{h} = u^2 + v_1^2,$$

$$e^{\frac{h+i\sigma}{2}} = u + iv_1,$$

$$\mathrm{M} = -\mathrm{N} = \frac{1}{2iv_1},$$

et les coordonnées de la surface ont pour expressions

$$(38)\quad \begin{cases} X = v_1 u^2 \cos\lambda - \int v_1^2(\cos\lambda + V \sin\lambda)\, dv_1, \\ Y = v_1 u^2 \sin\lambda - \int v_1^2(\sin\lambda - V\cos\lambda)\, dv_1, \\ Z = \dfrac{u^3}{3} - u v_1^2. \end{cases}$$

Dans (37) et (38), on doit regarder λ et V comme deux fonctions de v_1 assujetties à la seule condition (18‴); on pourra, par exemple, prendre λ arbitrairement et (18‴) donnera V par une simple différentiation.

En raisonnant comme dans le cas général où U et U_1 ne sont pas nuls, on verra que :

1° La ligne de courbure (C) pour laquelle $v_1 =$ const. est dans le plan parallèle à OZ

$$(22')\qquad Y - W_1 = \tang\lambda(X - W),$$

W et W_1 désignant les $\int$ contenues dans X et Y, pour la surface (37) ou la surface (38);

2° Que cette ligne de courbure a pour équations dans son plan

$$x = \cos iu \sin v_1,$$
$$z = Z,$$

pour la surface (37), et

$$x = v_1 u^2,$$
$$z = Z$$

pour la surface (38).

La ligne (C) a donc une forme indépendante de V.

Quant au cylindre enveloppe du plan (22′), sa directrice (L) est quelconque parce que V est quelconque.

Enfin, en opérant comme dans le cas général de $U \neq 0$ et $U_1 \neq 0$, on reconnait que la directrice (L) ne peut se réduire à un point pour aucune des surfaces (37) et (38). Ce résultat, rapproché de ce qui a été dit précédemment, permet (en laissant de côté bien entendu les surfaces de révolution) d'énoncer ce théorème :

Les seules surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système pour lesquelles les plans de ces lignes de courbure passent par une *droite fixe sont les surfaces pour lesquelles* $U_1 = 0$; *elles ont les équations* (36) *et leurs lignes de courbure planes sont des cercles.*

Cherchons, parmi les surfaces (37), celles qui sont à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. Il faut pour cela que l'on ait

$$\frac{\dfrac{\partial X}{\partial v_1}}{\dfrac{\partial Z}{\partial v_1}} = \text{fonction de } u,$$

ce qui conduit aux deux relations suivantes en λ et V

$$(39) \qquad \begin{cases} V \sin\lambda - \cos\lambda \cos v_1 = A \sin v_1, \\ V \sin\lambda \cos v_1 - \cos\lambda = B \sin v_1, \end{cases}$$

A et B étant deux constantes quelconques.

Les expressions de λ et V tirées de ces deux relations et portées dans les équations (37) donnent

$$(40) \qquad \begin{cases} X = B(\cos iu + \cos v_1) - A \cos iu \cos v_1, \\ Y = \left(\dfrac{AB}{1 + A^2} - \cos iu\right)\sqrt{\sin^2 v_1 - (A \cos v_1 - B)^2} \\ \qquad + \dfrac{1 + A^2 - B^2}{(1 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,cos} \dfrac{(1 + A^2)\cos v_1 - AB}{\sqrt{1 + A^2 - B^2}}, \\ Z = u - i \sin iu \cos v_1 \end{cases}$$

en remarquant que $1 + A^2 - B^2$ est positif pour une surface réelle, car des deux relations (39) on tire

$$(1 + V^2)\sin^2\lambda = 1 + A^2 - B^2.$$

Les valeurs de X et Z montrent, de suite, que les lignes de courbure $u =$ const. sont bien dans des plans parallèles à OY.

Calculons v_1 en fonction de v au moyen de l'équation différentielle

$$dv_1 = \frac{dv}{\sqrt{1 + V^2}}$$

et des relations (39); on obtient

$$\cos \frac{v\sqrt{1 + A^2}}{\sqrt{1 + A^2 - B^2}} = \frac{(1 + A^2)\cos v_1 - AB}{\sqrt{1 + A^2 - B^2}}.$$

Cette relation permet de remplacer ρ_1 par ρ dans les équations (40), ce qui donne

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned}
X &= \left(\frac{B}{1+A^2} - \frac{A\sqrt{1+A^2-B^2}}{1+A^2}\cos\frac{\rho\sqrt{1+A^2}}{\sqrt{1+A^2-B^2}}\right)\cos iu \\
&\quad + \frac{B\sqrt{1+A^2-B^2}}{1+A^2}\cos\frac{\rho\sqrt{1+A^2}}{\sqrt{1+A^2-B^2}}, \\
Y &= \left(\frac{AB}{1+A^2} - \cos iu\right)\frac{\sqrt{1+A^2-B^2}}{\sqrt{1+A^2}}\sin\frac{\rho\sqrt{1+A^2}}{\sqrt{1+A^2-B^2}} + \frac{\rho\sqrt{1+A^2-B^2}}{1+A^2}, \\
Z &= u + \left(\frac{AB}{1+A^2} + \frac{\sqrt{1+A^2-B^2}}{1+A^2}\cos\frac{\rho\sqrt{1+A^2}}{\sqrt{1+A^2-B^2}}\right) i\sin iu.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait $B = 0$ et si l'on pose $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}} = h$, on obtient les surfaces minima d'Ossian Bonnet

$$\begin{aligned}
X &= \sqrt{1-h^2}\cos\rho\cos iu, \\
Y &= h\rho - \sin\rho\cos iu, \\
Z &= u + ih\sin iu\cos\rho.
\end{aligned}$$

Passons maintenant aux surfaces (38) et cherchons celles de ces surfaces qui sont à lignes de courbure planes dans les deux systèmes.

On trouve les deux relations suivantes entre V et λ

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}
\cos\lambda - V\sin\lambda &= 2A\rho_1, \\
\cos\lambda + V\sin\lambda &= \frac{2B}{\rho_1},
\end{aligned}\right.$$

et les équations de la surface deviennent

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
X &= u^2(A\rho_1^2 + B) - B\rho_1^2, \\
Y &= u^2\sqrt{\rho_1^2 - (A\rho_1^2 + B)^2} + \frac{1-2AB}{4A^3}\sqrt{1-4AB-[2A^2\rho_1^2-(1-2AB)]^2} \\
&\quad + \frac{1-4AB}{4A^3}\arcsin\frac{2A^2\rho_1^2-(1-2AB)}{\sqrt{1-4AB}}, \\
Z &= \frac{u^3}{3} - u\rho_1^2,
\end{aligned}\right.$$

en remarquant que $1 - 4AB$ est positif pour une surface réelle, car des relations (42) on tire

$$(1+V^2)\sin^2\lambda = 1 - 4AB.$$

Les valeurs de X et Z montrent de suite que les lignes de courbure $u =$ const. sont dans des plans parallèles à OY.

Calculons v_1 en fonction de v au moyen de l'équation différentielle $dv_1 = \frac{dv}{\sqrt{1+V^2}}$ et des relations (42); il vient

$$(44) \qquad v_1^2 = \frac{1-2AB}{2A^2} - \frac{\sqrt{1-4AB}}{2A^2}\sin\frac{2Av}{\sqrt{1-4AB}},$$

ce qui transforme les équations (43) en les suivantes

$$X = \frac{u^2}{2A}\left(1+\sqrt{1-4AB}\sin\frac{2Av}{\sqrt{1-4AB}}\right),$$

$$Y = \left(u^2 + \frac{1-2AB}{2A^2}\right)\frac{\sqrt{1-4AB}}{2A}\cos\frac{2Av}{\sqrt{1-4AB}} + \frac{v\sqrt{1-4AB}}{2A^2},$$

$$Z = \frac{u^3}{3} - \frac{u}{2A^2}\left(1-2AB+\sqrt{1-4AB}\sin\frac{2Av}{\sqrt{1-4AB}}\right).$$

Si l'on remplace u et v par Bu et Bv, puis qu'on divise les seconds membres par B^3 et qu'on appelle m le produit AB, ces équations prennent la forme plus simple

$$(45) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{u^2}{2m}\left(1+\sqrt{1-4m}\sin\dfrac{2mv}{\sqrt{1-4m}}\right), \\[2ex] Y = (2m^2u^2+1-2m)\dfrac{\sqrt{1-4m}}{4m^3}\cos\dfrac{2mv}{\sqrt{1-4m}} + \dfrac{v\sqrt{1-4m}}{2m^2}, \\[2ex] Z = \dfrac{u^3}{3} - \dfrac{u}{2m^2}\left(1-2m+\sqrt{1-4m}\sin\dfrac{2mv}{\sqrt{1-4m}}\right). \end{cases}$$

Considérons, en particulier, le cas $A = 0$. La relation (44) et les équations (43) et (45) tombent en défaut, et il faut reprendre le calcul.

Les relations (42) deviennent

$$(46) \qquad \begin{cases} \cos\lambda - V\sin\lambda = 0, \\[1ex] \cos\lambda + V\sin\lambda = \dfrac{2B}{v_1}, \end{cases}$$

et l'on trouve, pour les équations de la surface,

$$(47)\qquad \begin{cases} X = B(u^2 - v_1^2), \\ Y = \left(u^2 - \dfrac{v_1^2 - 4B^2}{3}\right)\sqrt{v_1^2 - B^2}, \\ Z = \dfrac{u^3}{3} - uv_1^2. \end{cases}$$

La relation entre v_1 et v prend la forme

$$v^2 = v_1^2 - B^2,$$

de sorte que les coordonnées de la surface s'expriment de la manière suivante en u et v (à des constantes additives près et en changeant Z en $-$Z)

$$\begin{aligned} X &= B(u^2 - v^2), \\ Y &= v(u^2 + B^2) - \frac{v^3}{3}, \\ Z &= u(v^2 + B^2) - \frac{u^3}{3}. \end{aligned}$$

C'est la surface d'Enneper, dont les équations se simplifient en remplaçant u et v par Bu et Bv et divisant les seconds membres par B^3 :

$$\begin{aligned} X &= u^2 - v^2, \\ Y &= v(u^2 + 1) - \frac{v^3}{3}, \\ Z &= u(v^2 + 1) - \frac{u^3}{3}. \end{aligned}$$

On reconnaît sans peine que, pour les surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes (41), (45) et (47), les plans des lignes de courbure de chaque système ne peuvent passer par une droite fixe.

Ce résultat, rapproché de ce qui précède, donne le théorème suivant :

Les cyclides de Dupin sont les seules surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes pour lesquelles les plans des lignes de courbure de l'un des systèmes passent par une droite fixe. On *sait d'ailleurs que, pour ces surfaces, les plans des lignes de courbure passent, pour chacun des deux systèmes, par une droite fixe.*

A l'égard des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes pour lesquelles $U = 0$, on peut s'assurer encore que les deux coniques focales qui servent de base à leur génération sont une ellipse et une hyperbole quand A et B sont tous deux différents de zéro, et deux paraboles si $A = 0$ ou $B = 0$.

On a donc, en particulier, deux paraboles pour les surfaces minima d'Ossian Bonnet et pour la surface d'Enneper.

Il convient enfin de remarquer que les surfaces (36), pour lesquelles $U_1 = 0$, peuvent se déduire des surfaces (21) en faisant tendre k vers zéro; mais qu'il n'en est pas de même pour les surfaces (37) caractérisées par $U = 0$.

X.

Surfaces à courbure moyenne constante et à lignes de courbure planes dans un système.

Les surfaces à courbure moyenne constante ont leurs lignes de courbure isothermes.

Les surfaces à courbure moyenne constante et à lignes de courbure planes dans un système sont donc comprises parmi les surfaces qui font l'objet de ce Mémoire.

Je vais d'abord montrer que, pour les surfaces cherchées, les plans des lignes de courbure du premier système ($v = \text{const.}$) enveloppent un cylindre.

Le ds^2 de ces surfaces pouvant être mis sous la forme introduite par M. Darboux dans son Mémoire

$$ds^2 = e^{2h}(du^2 + dv^2),$$

les rayons de courbure principaux R et R' ont, en chaque point (u, v) pour valeur

$$R = -\frac{e^h}{q}, \qquad R' = \frac{e^h}{p_1},$$

q et p_1 étant deux des six rotations.

Nous voulons que

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=-2a^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{p_1-q}{e^h}=-2a^2, \tag{48}$$

a désignant une constante réelle ou purement imaginaire.

Nous laisserons de côté le cas $a=0$. Si, en effet, a est nul, on a $R+R'=0$ et il s'agit alors de chercher les surfaces minima à lignes de courbure planes dans un système. Or ces surfaces sont connues : ce sont les surfaces de Bonnet qui ont leurs lignes de courbure planes dans les deux systèmes. On vérifie d'ailleurs sans peine ce résultat.

Soit donc $a \neq 0$.

Si l'on remplace, dans l'équation (48), p_1 et q par leurs expressions (1), elle prend la forme

$$a^2\frac{\partial}{\partial v}e^{2h}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\mathrm{V}e^h\frac{\partial h}{\partial v}\right).$$

On a donc, en intégrant,

$$a^2[e^{2h}+f^2(u)]=\mathrm{V}e^h\frac{\partial h}{\partial v}, \tag{49}$$

$f^2(u)$ désignant une fonction de u, et, en intégrant une nouvelle fois,

$$e^h=f(u)\operatorname{tang}\left[\varphi(u)+a^2f(u)\int\frac{dv}{\mathrm{V}}\right], \tag{50}$$

$\varphi(u)$ désignant une seconde fonction de u.

Il faut, d'après l'équation (4), que

$$\frac{\partial h}{\partial u}=\mathrm{U}e^h+\mathrm{U}_1e^{-h},$$

c'est-à-dire

$$e^h\frac{\partial h}{\partial u}=\mathrm{U}e^{2h}+\mathrm{U}_1.$$

Or on tire de (50)

$$\begin{aligned}e^h\frac{\partial h}{\partial u}&=f'(u)\operatorname{tang}\left[\varphi(u)+a^2f(u)\int\frac{dv}{\mathrm{V}}\right]\\&\quad+f(u)\left[\varphi'(u)+a^2f'(u)\int\frac{dv}{\mathrm{V}}\right]\left\{1+\operatorname{tang}^2\left[\varphi(u)+a^2f(u)\int\frac{dv}{\mathrm{V}}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Si l'on compare ces deux expressions de $e^h \frac{\partial h}{\partial u}$, on voit qu'il faut et il suffit, pour obtenir une surface répondant à la question, que l'on ait

$$(51)\quad \left\{ \begin{aligned} & U f^2 \operatorname{tang}^2\left(\varphi + a^2 f \int \frac{dv}{V}\right) + U_1 \\ & \quad = f' \operatorname{tang}\left(\varphi + a^2 f \int \frac{dv}{V}\right) \\ & \qquad + f\left(\varphi' + a^2 f' \int \frac{dv}{V}\right)\left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\varphi + a^2 f \int \frac{dv}{V}\right)\right], \end{aligned} \right.$$

quels que soient u et v, ou u et $\int \frac{dv}{V}$.

Si l'on supposait $f'(u) \neq 0$, $\int \frac{dv}{V}$ figurerait dans (51) isolément et sous le signe tang et l'on aurait $\int \frac{dv}{V} =$ fonction de u, c'est-à-dire $\int \frac{dv}{V} =$ const., c'est-à-dire enfin $e^h =$ fonction de u, ce qui conduirait à une surface de révolution.

Laissons ce cas de côté et soit $f'(u) = 0$, d'où $f =$ une constante m; (51) ne contient plus $\int \frac{dv}{V}$ que dans tang^2; il faut alors que (51) ait lieu quel que soit tang^2, ce qui donne

$$U m^2 = m\varphi'(u) = U_1.$$

Le rapport de U à U_1 doit donc être constant. Mais les expressions (8) de U et de U_1 montrent que cela ne peut avoir lieu que si $\omega = 0$, et nous savons qu'alors les lignes de courbure $v =$ const. enveloppent un cylindre.

Ainsi :

Quand une surface à courbure moyenne constante a ses lignes de courbure planes dans un système, les plans de ces lignes de courbure enveloppent un cylindre.

Prenons pour U et U_1 les valeurs (8'). Cela exige que l'on fasse $m^2 = -1$,

$$m = i.$$

L'équation (44) devient alors

$$a^2(e^{2h}-1)=\mathrm{V}e^h\frac{\partial h}{\partial v},$$

et, en introduisant à la place de v la variable v_1 liée à v par $dv_1=\frac{dv}{\sqrt{1+\mathrm{V}^2}}$,

$$(52)\qquad a^2(e^{2h}-1)=\frac{\mathrm{V}}{\sqrt{1+\mathrm{V}^2}}e^h\frac{\partial h}{\partial v_1}.$$

Cette relation va nous donner la fonction V pour les surfaces que nous cherchons.

e^h doit, en effet, avoir la valeur (9')

$$(9')\qquad e^h=\frac{\Theta\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)\Theta\left(\frac{u-iv_1}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{u+iv_1}{2}\right)\mathrm{H}\left(\frac{u-iv_1}{2}\right)},$$

laquelle peut s'écrire

$$(53)\qquad e^h=\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}\,\mathrm{sn}^2\frac{iv_1}{2}}{k\left(\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}-\mathrm{sn}^2\frac{iv_1}{2}\right)}.$$

Si l'on porte cette expression dans (52), u disparaît et il reste

$$\frac{\mathrm{V}}{\sqrt{1+\mathrm{V}^2}}=\frac{-2a^2}{ki\,\mathrm{sn}\,iv_1}.$$

Nous avons posé plus haut

$$\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}=-2a^2,$$

pour la commodité du calcul.

Posons maintenant

$$\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}=\frac{1}{a},$$

c'est-à-dire remplaçons $-2a^2$ par $\frac{1}{a}$; il viendra

$$\frac{\sqrt{1+\mathrm{V}^2}}{\mathrm{V}}=aki\,\mathrm{sn}\,iv,$$

d'où

$$V^2 = -\frac{1}{1 + a^2 k^2 \operatorname{sn}^2 i v_1}. \tag{54}$$

La fonction λ se déterminera ensuite au moyen de l'équation différentielle (18')

$$d\lambda = 2 i \mathrm{MV}\, dv_1, \tag{18'}$$

avec

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2 \operatorname{sn} i v_1}.$$

Connaissant V et λ, on les portera dans les équations (21) qui représenteront alors les surfaces à courbure moyenne constante et à lignes de courbure planes dans un système.

Si l'on voulait chercher celles de ces surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans les deux systèmes, il faudrait identifier l'expression de V tirée des relations (28) avec l'expression (54). On trouve que cette identification est impossible. Donc :

A part les surfaces minima de Bonnet, il n'existe pas de surfaces à courbure moyenne constante et à lignes de courbure planes dans les deux systèmes.

Dans tout ceci, nous avons laissé de côté le cas où la fonction $f(u)$, au lieu de se réduire à une constante m différente de zéro, serait nulle; dans ce cas, en effet, l'équation (49) donnerait pour $\frac{\partial h}{\partial u}$ une expression de la forme $\mathrm{U}e^h$ et la surface cherchée rentrerait dans la catégorie des surfaces (36) à lignes de courbure circulaires dans un système. Or il est facile de s'assurer, soit géométriquement, soit par le calcul, que la sphère est la seule de ces surfaces qui soit à courbure moyenne constante.