ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. FITTE

Sur les résistances qu'éprouve une surface mobile de la part d'un milieu fluide dans lequel elle se meut

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 315-318
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__315_0>

SUR LES RÉSISTANCES

QU'ÉPROUVE

UNE SURFACE MOBILE DE LA PART D'UN MILIEU FLUIDE

DANS LEQUEL ELLE SE MEUT,

PAR M. L. FITTE,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE TOURNON.

1. M. Léon Geoffroy a traité ce sujet dans un Mémoire inséré aux *Annales scientifiques de l'École Normale*, 2e série, t. VII, p. 215. Je me propose de compléter ce Mémoire par l'intégration des équations aux dérivées partielles qu'il contient.

En prenant pour axe des z l'axe instantané de rotation et de glissement et en employant les coordonnées semi-polaires, on trouve facilement que la résistance normale et la résistance tangentielle rapportées à l'unité de surface, en un point dont les coordonnées sont z, ρ, θ, ont respectivement pour valeur, à un instant donné,

$$(1)\qquad N = \frac{a^2\left(n + \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2},$$

$$(2)\qquad T = \frac{a_1^2\left[(r^2 + n^2)\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right] + \dfrac{n^2}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 - 2n\dfrac{\partial z}{\partial \theta} + r^2}{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2},$$

si l'on admet la même hypothèse de résistance que dans le Mémoire cité. Dans ces formules, a et a_1 sont des constantes à l'instant considéré et n représente le rapport de la vitesse de translation à la vitesse angulaire de rotation.

2. Les surfaces dont la résistance normale à l'instant considéré est la même en tous les points sont définies par l'équation

$$\mathrm{N} = \text{const.},$$

ou, en désignant par b une constante et en mettant la valeur de N,

$$\left[n + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right] = b^2 \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right]. \tag{3}$$

On trouve aisément une solution complète de cette équation sous la forme de la somme d'une fonction de θ et d'une fonction de r. En désignant par h et k deux constantes arbitraires, cette solution complète est donnée par la formule

$$z = h\theta + \frac{1}{b}\int \sqrt{[(n+h)^2 - b^2]\,r^2 - b^2 h^2}\,\frac{dr}{r} + k. \tag{4}$$

De cette solution complète, qui représente un hélicoïde réglé, on déduira facilement l'intégrale générale définie par les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} z &= h\theta + \frac{1}{b}\int \sqrt{[(n+h)^2 - b^2]\,r^2 - b^2 h^2}\,\frac{dr}{r} + \varphi(h), \\ 0 &= \theta + \frac{1}{b}\int \frac{(n+h)\,r^2 - b^2 h}{\sqrt{[(n+h)^2 - b^2]\,r^2 - b^2 h^2}}\,\frac{dr}{r} + \varphi'(h), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

dans lesquelles $\varphi(h)$ désigne une fonction arbitraire du paramètre h.

Si l'on imprime à l'une des surfaces, représentées par les équations (5), un mouvement hélicoïdal continu autour de l'axe des z et tel que le rapport n soit constant, la résistance normale restera toujours la même en tous les points.

Les surfaces représentées par les équations (5) jouissent encore de la propriété remarquable suivante, démontrée par M. Darboux, *Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes*, etc. (*Annales scientifiques de l'École Normale*, 2^e série, t. VII, p. 125) :

Si l'on imprime à l'une de ces surfaces un mouvement hélicoïdal autour de l'axe des z, défini par le rapport constant n de la vitesse de translation à la vitesse angulaire de rotation, elle engendre une famille de surfaces faisant partie d'un système triple orthogonal.

On obtient les surfaces dont la résistance normale est nulle en tous les points, en faisant dans les résultats précédents $b = 0$, ce qui donne

$$z = -n\theta + \varphi(r), \tag{6}$$

$\varphi(r)$ désignant une fonction arbitraire de r. C'est l'équation des hélicoïdes. Ce résultat est évident *a priori*, car, ces surfaces étant les seules qui jouissent de la propriété de coïncider avec elles-mêmes quand elles sont animées du mouvement hélicoïdal précédemment défini, la direction de la vitesse d'un point quelconque est toujours contenue dans le plan tangent à la surface; par conséquent, la résistance normale est nulle.

3. Les surfaces dont la résistance de frottement à l'instant considéré est la même en tous les points sont définies par l'équation

$$T = \text{const.},$$

ou, en remplaçant T par sa valeur et désignant par c une constante,

$$(r^2 + n^2 - c^2)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{n^2 - c^2}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 - 2n\frac{\partial z}{\partial \theta} + r^2 - c^2 = 0. \tag{7}$$

Cette équation admet la solution complète suivante

$$z = h\theta + \int\sqrt{\frac{(2nh + c^2 - r^2)r^2 - (n^2 - c^2)h^2}{r^2 + n^2 - c^2}}\,\frac{dr}{r} + k, \tag{8}$$

qui représente un hélicoïde et de laquelle on déduira, sans difficultés, la solution générale.

Si les surfaces définies par l'équation (7) sont animées d'un mouvement hélicoïdal continu autour de l'axe des z et tel que le rapport n soit constant, la résistance de frottement sera toujours la même en tous les points.

4. On trouvera, par la même méthode, les surfaces telles que la résistance normale et la résistance de frottement en tous les points soient liées par une relation donnée

$$F(N, T) = 0;$$

car, en remplaçant N et T par leurs valeurs, les surfaces cherchées seront représentées par une équation de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial r} = f\left(r, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right), \tag{9}$$

qui ne contient pas explicitement la variable indépendante θ. Cette équation admet l'intégrale complète suivante

$$z = h\theta + \int f(r, h)\, dr + k, \tag{10}$$

dans laquelle h et k désignent deux constantes arbitraires.

Cette équation représente un hélicoïde. On en déduira aisément l'intégrale générale de l'équation (9).