ELLIOT

Sur le mouvement d'un point matériel dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 231-252

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__231_0>

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

DANS LE CAS

D'UNE RÉSISTANCE PROPORTIONNELLE A LA VITESSE,

Par M. ELLIOT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

I.

Équations de Lagrange et système canonique.

1. Les équations différentielles du mouvement d'un point libre de masse égale à l'unité, sollicité par des forces dérivant d'un potentiel U que nous supposerons dépendre seulement des coordonnées du point matériel, et, en outre, soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse, dirigée en sens inverse de la direction de la vitesse, sont

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + k\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Cherchons ce que deviennent ces équations par le changement de variables

$$x_i = \varphi_i(q_1, q_2, q_3), \tag{2}$$

où les φ_i ne contiennent pas le temps. D'après la méthode générale de Lagrange, on ajoutera les équations (1), après les avoir multipliées par $\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_h}$; on aura ainsi

$$\sum_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_h} + k\sum_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_h} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_h}, \tag{3}$$

et l'on sait qu'en posant

$$T = \tfrac{1}{2}(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2),$$

le premier terme de l'expression (3) se transforme en

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_h}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_h}.$$

Quant au second terme, en utilisant l'identité bien connue

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_h} = \frac{\partial x'_i}{\partial q'_h},$$

on voit immédiatement qu'il a pour expression $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_h}$, en sorte que les équations (1) deviennent

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_h}\right) + k\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_h} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_h} \qquad (h = 1, 2, 3).$$

Si le point est assujetti à rester sur une surface ou sur une courbe donnée, nous pouvons supposer que les équations (2) représentent cette surface ou cette courbe, à condition de supprimer la variable q_3 dans le premier cas, les variables q_2, q_3 dans le second cas. Les équations (1) ne sont plus celles du mouvement, et on doit les compléter en ajoutant dans les seconds membres les composantes de la réaction; mais, cette réaction étant dirigée suivant la normale à la surface ou suivant une normale à la courbe ([1]), les termes complémentaires disparaîtront dans la combinaison que nous avons faite des équations (1). Les équations (4) au nombre de deux conviendront donc au mouvement d'un point sur une surface et détermineront les deux paramètres q_1 et q_2 en fonction du temps. Dans le cas du mouvement sur une courbe, il n'y aura qu'une équation (4) qui définira le paramètre q_1.

2. Proposons-nous maintenant de ramener les équations (4) à la forme canonique, c'est-à-dire de faire un changement de variables tel que ces équations coïncident avec celles des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles dont il suffira, d'après la méthode de Jacobi, de trouver une intégrale complète pour écrire les équations finies du mouvement.

([1]) On voit que, dans notre hypothèse, la résistance ne provient pas d'un frottement tel qu'on l'admet habituellement de la part de la surface ou de la courbe. On peut supposer que cette résistance est due au milieu, la surface ou la courbe étant parfaitement polie.

Pour cela, nous substituerons aux variables q'_h de nouvelles variables p_h définies par

$$p_h = e^{kt}\frac{\partial T}{\partial q'_h}.$$

La transformation se fera immédiatement dans le premier et le second terme de l'équation (4), et le second membre n'est pas modifié. Pour transformer le terme $\frac{\partial T}{\partial q_h}$, remarquons que T qui est primitivement une fonction des q_h et q'_h devient une fonction des q_h, p_h et de t. Afin d'éviter toute confusion, entourons provisoirement d'un crochet les dérivées partielles relatives à ce dernier système de variables. En exprimant dans les deux systèmes la différentielle totale de T, on aura

$$(5)\quad \sum_h \frac{\partial T}{\partial q_h}\delta q_h + \sum_h \frac{\partial T}{\partial q'_h}\delta q'_h = \sum_h \left[\frac{\partial T}{\partial q_h}\right]\delta q_h + \sum_h \left[\frac{\partial T}{\partial p_h}\right]\delta p_h + \left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]\delta t.$$

La fonction T étant homogène et du second degré par rapport aux q'_h, on aura

$$2T = \sum_h q'_h \frac{\partial T}{\partial q'_h};$$

par suite, en prenant la différentielle totale

$$2\delta T = \sum_h \frac{\partial T}{\partial q'_h}\delta q'_h + \sum_h q'_h \delta\frac{\partial T}{\partial q'_h} = \sum_h \frac{\partial T}{\partial q'_h}\delta q'_h + \sum_h q'_h \delta e^{-kt} p_h.$$

L'identité (5) devient, en remplaçant le second terme du premier membre par sa valeur tirée de la dernière relation

$$\sum_h \frac{\partial T}{\partial q_h}\delta q_h + 2\delta T - \sum_h q'_h \delta e^{-kt} p_h = \sum_h \left[\frac{\partial T}{\partial q_h}\right]\delta q_h + \sum_h \left[\frac{\partial T}{\partial p_h}\right]\delta p_h + \left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]\delta t.$$

Remplaçant enfin la différentielle δT par son expression relative au nouveau système de variables, on aura

$$\begin{aligned}\sum_h \left[\frac{\partial T}{\partial q_h}\right]\delta q_h + \sum_h \left[\frac{\partial T}{\partial p_h}\right]\delta p_h + \left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]\delta t \\ = -\sum_h \frac{\partial T}{\partial q_h}\delta q_h + e^{-kt}\sum_h q'_h \delta p_h - k e^{-kt}\delta t \sum_h p_h q'_h.\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de δq_h et δp_h dans les deux membres, nous aurons les relations

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = -\left[\frac{\partial T}{\partial q_h}\right], \qquad e^{-kt} q'_h = \left[\frac{\partial T}{\partial p_h}\right]. \tag{6}$$

Les équations (4) deviennent, en supprimant les crochets désormais inutiles

$$\frac{d}{dt}(e^{-kt} p_h) + k e^{-kt} p_h + \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial U}{\partial q_h},$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{dp_h}{dt} = -e^{kt} \frac{\partial (T - U)}{\partial q_h}. \tag{7}$$

La seconde équation (6) peut s'écrire, en remarquant que U ne dépend pas des p_h

$$\frac{dq_h}{dt} = e^{kt} \frac{\partial (T - U)}{\partial p_h}. \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) forment un système canonique. Appelons n le nombre des variables q; n aura la valeur 3 pour le mouvement d'un point libre, les valeurs 2 ou 1 quand le point doit rester sur une surface ou une courbe. Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial V}{\partial t} + e^{kt}(T - U),$$

où les q'_h ont été exprimés au moyen des p_h, et où les p_h eux-mêmes sont supposés remplacés par $\frac{\partial V}{\partial q_h}$. Cette équation est à $n + 1$ variables indépendantes $t, q_1, q_2, \ldots, q_n$ et ne contient pas la fonction V. Abstraction faite d'une constante additive, une intégrale complète contient n constantes arbitraires $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, et si l'on a trouvé une telle intégrale

$$V(t, q_1, \ldots, q_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

les q_h seront déterminés en fonction de t par les équations

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i} = \varepsilon'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les ε' désignent de nouvelles constantes arbitraires.

3. Dans ce qui précède, la fonction U n'est déterminée qu'à une constante additive près. On peut vérifier directement que, si l'on ajoutait à U une constante quelconque h, cette addition ne modifierait en rien les équations du mouvement.

Prenons le cas d'un point libre, et rapportons le mouvement à trois axes rectangulaires. On a

$$T = \tfrac{1}{2}(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2).$$

En introduisant les variables canoniques $p_h = e^{kt} x'_h$, on trouve l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tfrac{1}{2} e^{-kt}\left(\frac{\partial V^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial V^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial V^2}{\partial x_3^2}\right) - e^{kt} U = 0.$$

Posons $V = e^{kt} W$, où W est supposé dépendre seulement de x_1, x_2, x_3; on a, pour déterminer W, l'équation

$$(9) \qquad \frac{\partial W^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial W^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial W^2}{\partial x_3^2} + 2kW - 2U = 0.$$

Si l'on connaît une intégrale complète $W(x_1, x_2, x_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, il résulte de la transformation précédente que les équations du mouvement sont

$$e^{kt} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = \varepsilon'_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Or la constante h qui entre dans U peut être modifiée à volonté en ajoutant à la fonction W de l'équation (9) une constante arbitraire, et cette dernière n'a évidemment aucune influence sur les équations du mouvement qui viennent d'être écrites. La même remarque s'applique sans modification dans le cas d'un mouvement sur une surface ou une courbe.

4. *Mouvement sur une surface.* — Supposons l'élément linéaire de la surface représenté sous la forme habituelle

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

où E, F, G sont des fonctions connues des deux paramètres u et v. Dans la fonction

$$T = \tfrac{1}{2}(E u'^2 + 2F u'v' + G v'^2),$$

il faut introduire les variables canoniques en posant

$$\begin{aligned} \mathrm{E}u' + \mathrm{F}v' &= pe^{-kt}, \\ \mathrm{F}u' + \mathrm{G}v' &= qe^{-kt}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{G}p^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{E}q^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,e^{-2kt}.$$

L'équation aux dérivées partielles dont il s'agit d'avoir une intégrale complète est

$$(10) \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \tfrac{1}{2}e^{-kt}\,\frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{V}^2}{\partial u^2} - 2\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v} + \mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{V}^2}{\partial v^2}}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} - e^{kt}\mathrm{U} = 0.$$

Elle est à trois variables indépendantes; en posant, comme précédemment, $\mathrm{V} = e^{kt}\mathrm{W}$, elle se transforme en une autre à deux variables indépendantes, mais renfermant la fonction inconnue

$$(11) \qquad \frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{W}^2}{\partial u^2} - 2\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial v} + \mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{W}^2}{\partial v^2}}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} + 2k\mathrm{W} - 2\mathrm{U} = 0.$$

Une intégrale complète de l'équation (10) avec deux constantes ε, ε_1 donne u et v en fonction de t par les formules

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varepsilon} = \varepsilon', \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varepsilon_1} = \varepsilon'_1.$$

Une intégrale complète de l'équation (11) donne u et v par les formules

$$e^{kt}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \varepsilon} = \varepsilon', \qquad e^{kt}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \varepsilon_1} = \varepsilon'_1.$$

5. *Mouvement sur une courbe.* — Si l'élément linéaire de la courbe est représenté par la formule $ds^2 = \mathrm{E}\,du^2$, où E est une fonction connue du paramètre u, on trouvera de la même façon l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \frac{e^{-kt}}{2\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{V}^2}{\partial u^2} - e^{kt}\mathrm{U} = 0,$$

ou, en posant $\mathrm{V} = e^{kt}\mathrm{W}$,

$$(12) \qquad \frac{1}{\mathrm{E}}\frac{d\mathrm{W}^2}{du^2} + 2k\mathrm{W} - 2\mathrm{U} = 0,$$

qui est une équation différentielle ordinaire à une seule variable. Si l'on a trouvé son intégrale générale $W(u, \varepsilon)$, l'équation qui définit le paramètre u en fonction de t sera

$$e^{kt}\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \varepsilon'.$$

Remarquons que le mouvement sur une courbe quelconque peut être ramené au mouvement sur une ligne droite. Prenons, en effet, l'arc s de la courbe comme variable indépendante, et supposons que le potentiel U ait alors pour expression $f(s)$. L'équation du mouvement sera

$$(13) \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} + k\frac{ds}{dt} - f'(s) = 0.$$

Regardant maintenant s comme une longueur portée sur une ligne droite donnée, on voit que l'équation (13) définit le mouvement sur la droite d'un point qui serait sollicité par une force fonction de la distance du mobile à un point fixe de la droite, avec une résistance proportionnelle à la vitesse.

Que le problème se ramène à l'intégration d'une équation du premier ordre, c'est ce qui est évident sur l'équation (13), où t n'entre pas explicitement, mais, cette intégration supposée faite, on aura à effectuer une quadrature, tandis que la méthode de Jacobi, dès que l'on a intégré l'équation (12), n'exige plus qu'une différentiation.

II.

Examen de quelques cas où l'on peut intégrer l'équation aux dérivées partielles.

6. Commençons par le cas du mouvement sur une courbe, ou, si l'on veut, sur une ligne droite. Remplaçant s par x dans l'équation (13) du numéro précédent, nous aurons à examiner les cas d'intégrabilité de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} - f'(x) = 0.$$

Nous avons vu qu'il suffit, pour intégrer cette équation, de trouver l'intégrale générale de l'équation du premier ordre

$$\frac{dW^2}{dx^2} + 2kW - 2f(x) = 0, \tag{2}$$

l'équation

$$e^{kt}\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \varepsilon' \tag{3}$$

donnant l'intégrale cherchée avec les deux constantes ε, ε'.

Si l'on ramène, par le principe des courbes unicursales, l'équation (2) à une autre ne contenant la dérivée qu'au premier degré, on aura

$$\frac{dW}{dx} = \theta, \qquad W = \frac{2f(x) - \theta^2}{2k}.$$

L'équation en θ

$$\frac{d\theta}{dx} = -k + \frac{f'(x)}{\theta} \tag{4}$$

se présente sous la forme que j'ai étudiée dans un travail antérieur (¹). Les deux cas d'intégrabilité signalés au début de ce travail correspondent à l'hypothèse que $f(x)$ est un polynôme du premier ou du second degré.

La force qui sollicite le mobile est constante ou bien proportionnelle à la distance. On peut, dans ce cas, intégrer l'équation (4) et vérifier, par un calcul qui n'offre pas de difficultés, que l'équation (3) donne bien l'intégrale générale de (1). Mais, comme cette équation (1) est linéaire et à coefficients constants, il est clair qu'il est préférable d'en écrire immédiatement l'intégrale générale qui fournira la solution du problème.

C'est ce qui arrive dans le problème classique du mouvement d'un point pesant sur une cycloïde dont la tangente au sommet est horizontale. On peut ajouter le cas d'un point se mouvant sur une chaînette et attiré par la base de la chaînette proportionnellement à la distance, ou bien encore supposer que le point se meut sur une spirale loga-

---

(¹) *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. VII.

rithmique avec une attraction du pôle proportionnelle à la distance, en admettant toujours une résistance proportionnelle à la vitesse.

M. Appell [1] a indiqué, relativement aux équations de la forme

$$(\alpha) \qquad \frac{dy}{dx} = y^3 + y^2\varphi(x),$$

un certain nombre de cas d'intégrabilité, soit qu'on puisse effectuer l'intégration au moyen de quadratures, soit qu'on ramène l'intégration à celle d'une équation de Riccati. Il a résumé les plus simples dans les quatre formules suivantes

$$\varphi(x) = \frac{a}{\sqrt{x}}, \qquad \varphi(x) = ae^x, \qquad \varphi(x) = ax, \qquad \varphi(x) = \frac{a}{x^2}.$$

Le changement de fonction $y = \frac{1}{\theta}$ et un changement de variable facile à établir ramène l'équation (α) à la forme (4).

L'hypothèse $\varphi(x) = \frac{a}{\sqrt{x}}$ répond au cas déjà examiné où

$$f(x) = b(x - x_0)^2 \qquad \text{ou plus simplement} \qquad f(x) = bx^2.$$

L'hypothèse $\varphi(x) = ae^x$ correspond à $f(x) = blx$. La force qui sollicite le mobile varie en raison inverse de la distance. L'équation (4) est

$$\frac{d\theta}{dx} = -k + \frac{b}{x\theta}.$$

Le changement de fonction $\theta = \theta_1 - kx$ la transforme en l'équation intégrable

$$\frac{dx}{d\theta_1} = \frac{x(\theta_1 - kx)}{b}.$$

Nous verrons un peu plus loin que, quand la force varie en raison inverse de la distance, la méthode de Jacobi permet d'écrire les équations du mouvement pour un point qui reste dans un plan. Le problème actuel en est un cas particulier.

Lorsque $\varphi(x) = ax$, on trouve aisément $f(x) = b\sqrt{x}$. La force

---

[1] *Journal de Mathématiques*, t. V; 1889.

varie en raison inverse de la racine carrée de la distance. L'équation (4) est alors

$$\frac{d\theta}{dx} = -k + \frac{b}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\theta}.$$

Introduisant, au lieu de θ et x, une nouvelle variable x_1 et une nouvelle fonction θ_1 définies par les relations

$$\theta = x_1 - kx, \qquad x = \theta_1^2,$$

l'équation se transforme en l'équation de Riccati

$$b\frac{d\theta_1}{dx_1} = x_1 - k\theta_1^2.$$

Enfin à l'hypothèse $\varphi(x) = \frac{a}{x^2}$ répond $f(x) = \frac{b}{x}$. La force varie en raison inverse du carré de la distance. L'équation (4) est

$$\frac{d\theta}{dx} = -k - \frac{b}{x^2}\frac{1}{\theta}.$$

Faisons encore un changement de variable et de fonction défini par les formules

$$\theta = \theta_1 - kx, \qquad \frac{1}{x} = x_1 + \frac{\theta_1^2}{2b},$$

qui traduisent, comme dans les deux cas précédents, la méthode d'intégration de M. Appell. On obtient l'équation de Riccati

$$\frac{d\theta_1}{dx_1} + \frac{2bx_1 + \theta_1^2}{2k} = 0.$$

Mouvement dans un plan.

7. Supposons d'abord que le point soit soumis de la part d'un point fixe que nous prendrons comme origine à une attraction ou répulsion fonction de la distance. En faisant sur les équations du mouvement

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + k\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + k\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial y}, \end{cases}$$

la combinaison qui donne le théorème des aires quand $k=0$, on aura, puisque $x\frac{\partial U}{\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial x}$ est identiquement nul, l'intégrale

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = Ce^{-kt},$$

où C est une constante arbitraire. En coordonnées polaires r, θ, cette intégrale sera

$$r^2\,d\theta = Ce^{-kt}\,dt. \tag{6}$$

En se servant de cette intégrale, on peut ramener le problème à l'intégration d'une équation du second ordre. Multiplions les équations (5) respectivement par x et y et ajoutons-les. On aura

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} = x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} - k\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right).$$

Remplaçons le premier membre par sa valeur tirée de l'identité que l'on obtient en différentiant par rapport à t

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}.$$

Remarquons que $U = f(r)$ donne

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = rf'(r).$$

Nous obtenons ainsi l'équation

$$r\frac{d^2r}{dt^2} - r^2\frac{d\theta^2}{dt^2} = rf'(r) - kr\frac{dr}{dt},$$

qui devient, en vertu de l'intégrale (6),

$$\frac{d^2r}{dt^2} + k\frac{dr}{dt} - f'(r) - \frac{C^2}{r^3}e^{-2kt} = 0. \tag{7}$$

Si l'on a intégré cette dernière équation, l'intégrale (6) donnera θ en fonction de t par une quadrature, et le problème sera complètement résolu.

On voit que cette équation ne diffère que par le dernier terme de celle qui a été obtenue dans le cas du mouvement sur une ligne droite. On retrouve ce cas particulier en supposant que la constante C est nulle.

Appliquons maintenant la méthode de Jacobi. Il faut trouver une intégrale avec deux constantes arbitraires de l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tfrac{1}{2} e^{-kt}\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2}{\partial y^2}\right) - e^{kt} f(r) = 0,$$

ou en coordonnées polaires

$$2 r^2 e^{kt} \frac{\partial V}{\partial t} + r^2 \frac{\partial V^2}{\partial r^2} - 2 e^{2kt} r^2 f(r) + \frac{\partial V^2}{\partial \theta^2} = 0.$$

Cette équation peut être satisfaite en posant $V = C\theta + V_1$, où V_1 ne dépend que de r et t. Il suffira donc de trouver une intégrale avec une constante arbitraire non additive de l'équation

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \tfrac{1}{2} e^{-kt}\left(\frac{\partial V_1^2}{\partial r^2} + \frac{C^2}{r^2}\right) - e^{kt} f(r) = 0. \tag{8}$$

Si l'on a trouvé une intégrale de cette équation $V_1(r, t, C, \varepsilon)$ avec une constante arbitraire ε, on conclura de la relation qui lie V à V_1 que les intégrales du mouvement sont

$$\frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon} = \varepsilon',$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial C} = \theta_0 - \theta,$$

ε' et θ_0 étant deux nouvelles constantes arbitraires. La première de ces deux équations, qui ne contient pas la variable θ, est l'intégrale générale de l'équation (7), comme on peut le vérifier, si on le veut, par la méthode suivie dans tous les cas analogues en Mécanique.

8. L'équation (8), dont dépend toute la solution du problème, peut être ramenée par le changement de variable $e^{-kt} = kt_1$ à celle-ci :

$$\frac{\partial V_1^2}{\partial r^2} - 2\frac{\partial V_1}{\partial t_1} + \frac{C^2}{r^2} - 2\frac{f(r)}{k^2 t_1^2} = 0.$$

Cherchons si, pour une détermination convenable de la fonction $f(r)$, l'équation précédente peut admettre une intégrale du premier degré. Pour la commodité du calcul, appelons un moment x et y les variables r et t_1, et représentons par p et q les dérivées partielles de la fonction V_1. L'équation aux dérivées partielles s'écrit

$$F = p^2 - 2q + 2A = 0, \qquad A = \frac{1}{2}\frac{C^2}{x^2} - \frac{f(x)}{k^2 y^2}.$$

Pour qu'elle admette l'intégrale

$$\Phi = \alpha p + \beta q + \gamma = \varepsilon,$$

où α, β, γ sont des fonctions de x et y, et ε une constante arbitraire, il faut que l'on ait identiquement $(F, \Phi) = 0$, en tenant compte de $F = 0$, c'est-à-dire

$$p\left(p\frac{\partial \alpha}{\partial x} + q\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) - \alpha\frac{\partial A}{\partial x} - \left(p\frac{\partial \alpha}{\partial y} + q\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial y}\right) - \beta\frac{\partial A}{\partial y} = 0.$$

Remplaçons q par $\frac{1}{2}p^2 + A$ et égalons à zéro les coefficients des diverses puissances de p. On voit d'abord que β doit être une fonction Y de y seulement; on aura ensuite les conditions

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \tfrac{1}{2}Y' = 0, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \qquad \alpha\frac{\partial A}{\partial x} + Y\frac{\partial A}{\partial y} + AY' + \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0.$$

Les deux premières déterminent les fonctions α et γ

$$\alpha = \tfrac{1}{2}xY' + Y_1,$$
$$\gamma = \tfrac{1}{4}x^2 Y'' + xY_1' + Y_2,$$

où Y_1 et Y_2 désignent deux nouvelles fonctions arbitraires de y.

La dernière équation donne alors, pour déterminer A, l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\tfrac{1}{2}x\mathrm{Y}' + \mathrm{Y}_1\right)\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \mathrm{Y}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} + \mathrm{Y}'\mathrm{A} + \frac{x^2}{4}\mathrm{Y}''' + x\mathrm{Y}_1'' + \mathrm{Y}_2' = 0.$$

Pour nous borner, dans l'intégration de cette équation, à ce qui est relatif à notre problème de Mécanique, nous allons chercher si elle peut être satisfaite en déterminant convenablement $f(x)$ dans la fonction

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{C}^2}{x^2} - \frac{f(x)}{k^2 y^2}.$$

Le coefficient de C^2 doit être nul après que l'on a fait cette substitution de A, car la fonction $f(x)$ que nous cherchons doit être indépendante de C. Cela donne $\mathrm{Y}_1 = 0$. La fonction $f(x)$ doit donc satisfaire à l'équation

$$\frac{2\mathrm{Y}}{k^2 y^3} f(x) - \frac{\mathrm{Y}'}{2k^2 y^2}\left[x f'(x) + 2f(x)\right] + \tfrac{1}{4}x^2\mathrm{Y}''' + \mathrm{Y}_2' = 0.$$

Prenons $\mathrm{Y} = y^m$, où m est une constante quelconque; on voit alors que les variables x et y se séparent dans notre équation qui peut s'écrire

$$\frac{2f(x)}{k^2} - \frac{m}{2k^2}\left[xf'(x) + 2f(x)\right] + \tfrac{1}{4}m(m-1)(m-2)x^2 + y^{3-m}\mathrm{Y}_2' = 0.$$

On doit donc avoir, en désignant par a une constante,

$$(9)\qquad \begin{cases} f'(x) + 2\dfrac{m-2}{mx}f(x) - \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)k^2x + \dfrac{2k^2a}{mx} = 0, \\ y^{3-m}\mathrm{Y}_2' = -a. \end{cases}$$

On en déduit par l'intégration

$$f(x) = -\frac{k^2 a}{m-2} + \tfrac{1}{8}m(m-2)k^2x^2 + bx^{\frac{2(2-m)}{m}},$$

$$\mathrm{Y}_2 = -\frac{a}{m-2}y^{m-2} + a_1,$$

b et a_1 désignant de nouvelles constantes arbitraires. On peut, du reste, supposer $a = 0$, puisque notre problème ne dépend que de la dérivée de la fonction $f(x)$. En nous rappelant la signification de la variable x, nous voyons donc qu'il y aura une intégrale du premier degré, si la fonction des forces est une fonction de la distance du mobile à un centre fixe définie par l'expression

$$f(x) = \tfrac{1}{8} m(m-2) k^2 x^2 + b x^{\frac{2(2-m)}{m}}.$$

L'hypothèse $b = 0$ correspond à une force qui varie en raison directe de la distance dont l'intensité à l'unité de distance peut être choisie à volonté, à cause de l'arbitraire m. Mais, dans ce cas, les équations différentielles du mouvement s'intègrent immédiatement.

Les résultats précédents comprennent en particulier un cas intéressant quand on suppose $m = 2$. Les équations (9) deviennent

$$f'(x) + \frac{k^2 a}{x} = 0, \qquad Y'_2 = -\frac{a}{y}.$$

On en conclut

$$f(x) = -k^2 a l x, \qquad Y_2 = -a l y.$$

Il y a donc une intégrale du premier degré lorsque la force varie en raison inverse de la distance. Achevons complètement l'intégration dans ce cas. L'équation

$$(10) \qquad p^2 - 2q + \frac{C^2}{x^2} + \frac{2 a l x}{y^2} = 0$$

admet une intégrale du premier degré. On a ici

$$Y = y^2, \qquad Y_1 = 0, \qquad Y_2 = -a l y,$$

$$\alpha = xy, \qquad \beta = y^2, \qquad \gamma = \frac{x^2}{2} - a l y.$$

L'intégrale du premier degré est

$$(11) \qquad xyp + y^2 q + \frac{x^2}{2} - a l y = \varepsilon.$$

L'élimination de q entre les équations (10) et (11) donne

$$y^2p^2 + 2xyp + C^2\frac{y^2}{x^2} - 2al\frac{y}{x} + x^2 - 2\varepsilon = 0.$$

On en tire

$$p = -\frac{x}{y} \pm \frac{1}{y}\sqrt{2\varepsilon + 2al\frac{y}{x} - C^2\frac{y^2}{x^2}},$$

et l'on en conclut pour q l'expression

$$q = \frac{\varepsilon}{y^2} + a\frac{ly}{y^2} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{y^2} \mp \frac{x}{y^2}\sqrt{2\varepsilon + 2al\frac{y}{x} - C^2\frac{y^2}{x^2}}.$$

Donc l'expression de $p\,dx + q\,dy$ sera

$$\left(\frac{\varepsilon}{y^2} + a\frac{ly}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{2}\frac{x^2}{y^2}dy - \frac{x}{y}dx\right) \pm \left(\frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2}dy\right)\sqrt{2\varepsilon + 2al\frac{y}{x} - C^2\frac{y^2}{x^2}}.$$

On aperçoit immédiatement l'intégrale qui est

$$-\frac{\varepsilon}{y} + a\int\frac{ly}{y^2}dy - \frac{x^2}{2y} \pm \int\sqrt{2\varepsilon - 2al\frac{x}{y} - C^2\frac{y^2}{x^2}}\,d\left(\frac{x}{y}\right).$$

Revenons maintenant aux variables primitives r et t.

L'équation (8) du n° 7

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \tfrac{1}{2}e^{-kt}\left(\frac{\partial V_1^2}{\partial r^2} + \frac{C^2}{r^2}\right) + k^2 a\, e^{kt} lr = 0$$

admet l'intégrale

$$-k\varepsilon e^{kt} + ak^2\int(kt + lk)e^{kt}\,dt - \tfrac{1}{2}kr^2e^{kt} + \int\sqrt{2\varepsilon - 2alu - \frac{C^2}{u^2}}\,du,$$

où l'on a posé

(12) $$u = kre^{kt}.$$

Le deuxième et le troisième terme ne donneront aucun résultat quand on prendra les dérivées par rapport à ε ou par rapport à C. Les intégrales du mouvement pour un mobile sollicité par un centre fixe en raison inverse de la distance, et soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse, sont donc

$$-ke^{kt}+\int\frac{du}{\sqrt{2\varepsilon-2alu-\frac{C^2}{u^2}}}=\varepsilon',$$

$$-C\int\frac{\frac{1}{u^2}\,du}{\sqrt{2\varepsilon-2alu-\frac{C^2}{u^2}}}=\theta_0-\theta,$$

u étant défini en r et t pour la formule (12). On peut vérifier sans difficulté que la première équation est, avec deux constantes arbitraires ε, ε', l'intégrale générale de l'équation (7) où $f(r)=-k^2alr$. Quant à la deuxième équation, si on la dérive par rapport à t, on retrouve l'intégrale

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=Ce^{-kt}.$$

9. Nous avons ramené, dans ce qui précède, l'intégration du mouvement d'un point sollicité par une force centrale fonction de la distance, et soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse, à la recherche d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles. Cette équation du premier ordre est du second degré par rapport aux dérivées partielles, et les termes du second degré forment un carré parfait. Il est bon d'indiquer que ce problème peut être aussi ramené à une recherche de lignes géodésiques.

L'équation (11) du n° 4, quand le mobile se meut dans un plan, devient

$$\frac{\partial W^2}{dx^2}+\frac{\partial W^2}{\partial y^2}+2kW-2U=0.$$

En coordonnées polaires, cette équation s'écrit

$$\frac{\partial W^2}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial W^2}{\partial\theta^2}+2[kW-f(r)]=0.$$

On peut faire disparaître la fonction inconnue par le procédé ordinaire. Soit $T(r, \theta, W) = 0$ une intégrale quelconque de l'équation précédente; la fonction T satisfait à l'équation

$$r^2 \frac{\partial T^2}{\partial r^2} + 2r^2[kW - f(r)] \frac{\partial T^2}{\partial W^2} + \frac{\partial T^2}{\partial \theta^2} = 0.$$

On peut la vérifier en posant $T = h\theta + T_1$, où T_1 ne dépend que des deux variables r et W, h étant une constante. L'équation en T_1 est

$$r^2 \frac{\partial T_1^2}{\partial r^2} + 2r^2[kW - f(r)] \frac{\partial T_1^2}{\partial W^2} + h^2 = 0.$$

Avec les notations habituelles, et en désignant par x et y les variables r et W, cette dernière équation s'écrit

$$p^2 + 2[ky - f(x)]q^2 + \frac{h^2}{x^2} = 0.$$

Le problème revient à une recherche de lignes géodésiques; mais il paraît difficile de mettre en évidence des cas d'intégrabilité de l'équation précédente.

10. Reprenons maintenant le problème du mouvement dans un plan, mais sans supposer que la force qui sollicite le mobile est une fonction de la distance à un centre fixe. Il faut, d'après ce qui a été vu au n° 4, trouver une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles

$$F = p^2 + q^2 + 2kz - 2U = 0, \tag{12}$$

z désignant la fonction inconnue. Il est naturel de chercher si l'équation peut admettre l'intégrale du premier degré

$$\Phi = \alpha p + \beta q + z + \gamma = C,$$

où nous supposons que α, β, γ sont des fonctions de x et y et que C est une constante arbitraire. Il faut exprimer ici que l'on a $[F, \Phi] = 0$, et cette dernière équation, qui ne contient pas z, doit être vérifiée identiquement, quels que soient p, q, x, y. La condition développée donne

$$p\left(p\frac{\partial\alpha}{\partial x}+q\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}+p\right)+q\left(p\frac{\partial\alpha}{\partial y}+q\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}-q\right)$$
$$+\alpha\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}-kp\right)+\beta\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}-kq\right)=0.$$

On devra donc avoir

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}+1=0,\qquad \frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\beta}{\partial y}+1=0,$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}-k\alpha=0,\qquad \frac{\partial\gamma}{\partial y}-k\beta=0,\qquad \alpha\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+\beta\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}=0.$$

Pour que la fonction γ existe, il faut que l'on ait $\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial\beta}{\partial x}\cdot$ En rapprochant cette condition de la deuxième, on voit que $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$ et $\frac{\partial\beta}{\partial x}$ doivent être nulles. En désignant par a et b des constantes, on doit avoir

$$\alpha=a-x,\qquad \beta=b-y,\qquad \gamma=-\frac{k}{2}(x^2+y^2)+kax+kby.$$

La fonction U doit satisfaire à l'équation

$$(a-x)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+(b-y)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}=0.$$

On peut maintenant, par un simple transport des axes, supposer nulles les constantes a et b. La fonction U doit être alors homogène et du degré zéro. Ainsi l'équation

$$p^2+q^2+2kz-2f\left(\frac{y}{x}\right)=0 \tag{14}$$

admet l'intégrale du premier degré

$$px+qy-z+\frac{k}{2}(x^2+y^2)=\mathrm{C}. \tag{15}$$

La fonction U est fonction de l'angle θ en coordonnées polaires.

La force qui sollicite le mobile est toujours perpendiculaire au rayon vecteur.

En résolvant les équations (14) et (15), on aura

$$p = \frac{x\left[z + C - \frac{k}{2}(x^2+y^2)\right] \pm y\sqrt{R}}{x^2+y^2},$$

$$q = \frac{y\left[z + C - \frac{k}{2}(x^2+y^2)\right] \mp x\sqrt{R}}{x^2+y^2},$$

où

$$R = 2(x^2+y^2)f\left(\frac{y}{x}\right) - \left[C - \frac{k}{2}(x^2+y^2)\right]^2 - k(x^2+y^2)z - 2Cz - z^2.$$

La recherche d'une intégrale complète revient à l'intégration de l'équation aux différentielles totales

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Pour effectuer cette intégration, posons

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad f(\operatorname{tang}\theta) = F(\theta).$$

L'équation à intégrer est

$$dz = (z + C)\frac{dr}{r} - \tfrac{1}{2}kr\,dr \mp \sqrt{R}\,d\theta,$$

où l'on a maintenant

$$R = 2r^2F(\theta) - (C - \tfrac{1}{2}kr^2)^2 - kr^2z - 2Cz - z^2.$$

Faisant d'abord l'intégration par rapport à z, et désignant par $\Phi(\theta)$ la constante d'intégration, on aura

$$z = r\Phi(\theta) - C - \tfrac{1}{2}kr^2.$$

Il faut maintenant exprimer que le carré de $\frac{\partial z}{\partial\theta}$ est égal à R. En faisant ce calcul, on constate, comme cela doit être, que r disparaît, et la fonction Φ se trouve déterminée par l'équation

$$\frac{d\Phi^2}{d\theta^2} + \Phi^2 = 2F + 2kC. \tag{16}$$

Ces résultats s'appliquent encore lorsque $k = 0$, c'est-à-dire quand il n'y a pas de résistance. La difficulté analytique est la même; elle consiste dans l'intégration de l'équation (16). C'est à cette équation que l'on ramène la recherche des lignes géodésiques des surfaces spirales; on ne sait l'intégrer que dans un nombre très restreint de cas. Je me propose d'indiquer, dans une autre occasion, quelques formes de la fonction F, pour lesquelles l'intégrale peut être exprimée sous forme finie.

Si l'on veut que le problème de Mécanique, comportant une résistance proportionnelle à la vitesse, se résolve par des quadratures, il faudra que l'équation (16) s'intègre quelle que soit la constante arbitraire qu'on ajoute à la fonction F, et cette condition rendra plus rares encore les cas d'intégrabilité.

11. Lorsque le mobile est assujetti à rester sur une surface développable et qu'il n'y a pas de force autre que la résistance, on peut toujours trouver les équations finies du mouvement. On sait que l'on peut déterminer deux variables u et v, telles que l'élément linéaire de la surface soit

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

L'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial W^2}{\partial u^2} + \frac{\partial W^2}{\partial v^2} + 2kW = 0$$

admet une solution de la forme

$$W = f(u) + \varphi(v),$$

les fonctions f et φ étant déterminées par les équations différentielles

$$\frac{df^2}{du^2} + 2kf = 0, \qquad \frac{d\varphi^2}{dv^2} + 2k\varphi = 0;$$

on en tire

$$f = -\frac{k}{2}(u+\varepsilon)^2, \qquad \varphi = -\frac{k}{2}(v+\varepsilon_1)^2.$$

On en conclut que u et v sont donnés en fonction du temps par les relations

$$u+\varepsilon = \varepsilon' e^{-kt}, \qquad v+\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 e^{-kt},$$

avec les quatre constantes arbitraires ε, ε', ε_1, ε'_1.