

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE BOREL

## Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 9 (1892), p. 63-90

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1892\\_3\\_9\\_\\_63\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__63_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉQUATION ADJOINTE  
ET SUR  
CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

PAR M. ÉMILE BOREL,  
ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

C'est Lagrange qui a le premier considéré l'équation adjointe à une équation linéaire donnée; il a montré que la relation entre les deux équations est réciproque et a fait voir comment l'intégration partielle de l'une facilite l'intégration de l'autre.

Le but de ce travail est d'indiquer quelle est la signification géométrique de l'équation adjointe et de ses principales propriétés, et d'étudier comme application les équations équivalentes à leur adjointe et certains systèmes d'équations différentielles qui s'y rattachent.

Ces équations ont une certaine importance dans diverses questions, de sorte que les géomètres ont été naturellement conduits à les considérer. Ce sont d'abord les équations d'ordre pair qui ont été rencontrées dans la théorie de la variation seconde des intégrales simples. Jacobi en a donné les principales propriétés, M. Bertrand et Otto Hesse ont aussi publié des travaux à ce sujet; mais tous ces auteurs ont laissé systématiquement de côté les équations d'ordre impair qui ne leur étaient d'aucune utilité. Ces équations d'ordre impair se sont présentées à M. Darboux qui en a fait une étude approfondie (*Théorie des surfaces*, Livre IV, Chap. V). Je renvoie à ce Chapitre pour tout ce qui concerne la théorie analytique de l'équation adjointe et je me servirai, autant que possible, des notations qui y sont employées.

## I.

Dans un espace à  $n$  dimensions,  $k$  relations entre les  $n$  coordonnées (ou  $n + 1$  coordonnées homogènes) représentent une surface à  $n - k$  dimensions que je représenterai par  $S_{n-k}$ . Si  $k = n - 1$ , les coordonnées sont fonction d'un seul paramètre et nous avons une courbe; si  $k = n$ , un nombre limité de points; de sorte qu'il est naturel de convenir que  $S_1$  désignera une courbe et  $S_0$  un nombre limité de points.

Un plan est une surface dont toutes les équations sont linéaires; un plan  $P_1$  est une droite; un plan  $P_0$  un point unique. Le degré d'une surface  $S_k$  est le nombre de ses points d'intersection avec un plan  $P_{n-k}$  arbitraire.

Au lieu de considérer les surfaces comme lieux de points, on peut les considérer comme enveloppes de plans  $P_{n-1}$ . On est ainsi conduit à classer les surfaces suivant le nombre de paramètres dont dépendent les plans  $P_{n-1}$  qui leur sont tangents. Dans le cas où le plan  $P_{n-1}$  dépend d'un seul paramètre, il enveloppe une surface développable; soit

$$(1) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n + 1 = 0$$

l'équation du plan  $P_{n-1}$ , les  $u$  étant fonction d'un paramètre  $t$ ; pour avoir son enveloppe, il faut adjoindre à l'équation (1) sa dérivée par rapport à  $t$

$$(2) \quad \frac{du_1}{dt} x_1 + \dots + \frac{du_n}{dt} x_n = 0.$$

Les équations (1) et (2) représentent un plan  $P_{n-2}$  qui est la caractéristique du plan  $P_{n-1}$ . Ces plans  $P_{n-2}$  forment une développable  $\Delta_{n-1}$ . Mais nous pouvons ajouter aux deux équations précédentes la dérivée de l'équation (2) par rapport à  $t$

$$(3) \quad \frac{d^2 u_1}{dt^2} x_1 + \dots + \frac{d^2 u_n}{dt^2} x_n = 0.$$

Les trois équations (1), (2), (3) représentent un plan  $P_{n-3}$  qui est analogue à un point de l'arête de rebroussement d'une surface développable dans l'espace ordinaire.

La surface lieu des plans  $P_{n-3}$  sera dite une développable  $\Delta_{n-2}$ , et les plans  $P_{n-1}$  sont osculateurs à cette surface, c'est-à-dire renferment trois plans  $P_{n-3}$  infiniment voisins. Il y a une analogie parfaite jusqu'ici avec ce que l'on sait des relations d'une courbe gauche avec ses plans osculateurs et ses tangentes (représentées ici par les plans  $P_{n-2}$ ). Seulement, nous pouvons continuer et prendre les dérivées successives des équations obtenues :

$$\begin{aligned} (4) \quad & \frac{d^3 u_1}{dt^3} x_1 + \dots + \frac{d^3 u_n}{dt^3} x_n = 0, \\ & \dots\dots\dots, \\ (n) \quad & \frac{d^{n-1} u_1}{dt^{n-1}} x_1 + \dots + \frac{d^{n-1} u_n}{dt^{n-1}} x_n = 0. \end{aligned}$$

Les  $k$  équations (1), (2), ..., ( $k$ ) représentent un plan  $P_{n-k}$  dont le lieu est une développable  $\Delta_{n-k+1}$ , et le plan  $P_{n-k}$  ( $h < k$ ) représenté par les  $h$  premières coupe cette développable suivant  $k - h + 1$  plans  $P_{n-k}$  infiniment voisins. Les  $n$  équations représentent un point dont le lieu est une courbe, dite arête de rebroussement de toutes les développables considérées, et la développable  $\Delta_{n-k+1}$  est formée des plans  $P_{n-k}$  osculateurs à cette courbe, c'est-à-dire en renfermant  $n - k + 1$  points infiniment voisins. Tous ces résultats sont intuitifs et, d'ailleurs, faciles à vérifier par le calcul.

Nous avons admis que les  $n$  équations donnent pour les  $x$  des valeurs déterminées et fonctions de  $t$ . Pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord que le déterminant des équations ne soit pas nul; mais on sait qu'il ne peut l'être que s'il existe entre les  $u$  une relation homogène à coefficients constants de la forme

$$(a) \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = 0.$$

De plus, il faut que les dérivées  $\frac{dx_i}{dt}$  ne soient pas toutes nulles; or, ces dérivées sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned} (1') \quad & u_1 \frac{dx_1}{dt} + u_2 \frac{dx_2}{dt} + \dots + u_n \frac{dx_n}{dt} = 0, \\ (2') \quad & \frac{du_1}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{du_n}{dt} \frac{dx_n}{dt} = 0, \\ & \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

$$(n-1') \quad \frac{d^{n-2}u_1}{dt^{n-2}} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{d^{n-2}u_n}{dt^{n-2}} \frac{dx_n}{dt} = 0,$$

$$(n') \quad \frac{d^{n-1}u_1}{dt^{n-1}} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{d^{n-1}u_n}{dt^{n-1}} \frac{dx_n}{dt} = - \left( \frac{d^n u_1}{dt^n} x_1 + \dots + \frac{d^n u_n}{dt^n} x_n \right).$$

Ces équations donnent pour les dérivées des valeurs non toutes nulles, à moins que l'on n'ait

$$(n+1) \quad \frac{d^n u_1}{dt^n} x_1 + \dots + \frac{d^n u_n}{dt^n} x_n = 0.$$

Cette équation ne peut être vérifiée pour toutes les valeurs des  $x$  qui vérifient les équations (1), (2), ..., (n) que si l'on a

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dt} \dots \frac{du_n}{dt} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d^n u_1}{dt^n} \dots \frac{d^n u_n}{dt^n} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire s'il existe une relation à coefficients constants de la forme

$$b_1 \frac{du_1}{dt} + \dots + b_n \frac{du_n}{dt} = 0,$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$(b) \quad b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n + b_{n+1} = 0.$$

La relation (a) étant un cas particulier de la relation (b), il suffit de tenir compte de cette dernière. Elle exprime que le plan donné passe par un point fixe, à distance finie ou infinie. Supposons, pour plus de généralité, qu'il renferme constamment un plan  $P_{n-k-1}$ ; nous pouvons toujours supposer que les équations de ce plan sont en coordonnées homogènes

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_k = 0, \quad x_{n+1} = 0.$$

On peut dire aussi que le plan donné est constamment parallèle à un plan  $P_{n-k}(x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0)$ , et il aura une équation de la forme

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_k x_k + 1 = 0,$$

les  $u$  n'étant liés par aucune relation linéaire à coefficients constants. En considérant les  $x$  comme les coordonnées d'un point dans un espace à  $k$  dimensions, cette équation représente un plan  $P_{k-1}$ , dont l'enveloppe est une développable  $\Delta_{k-1}$ , admettant une arête de rebroussement parfaitement déterminée. Les équations de cette arête de rebroussement sont

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_k = \varphi_k(t).$$

Dans l'espace à  $n$  dimensions, ces équations représentent une surface  $S_{n-k+1}$ , formée d'une infinité simple de plans  $P_{n-k}$  contenant un plan fixe  $P_{n-k-1}$ ; c'est ce que nous appellerons un *cône*  $C_{n-k+1}^{n-k-1}$ , l'indice supérieur indiquant la dimension du plan multiple du cône; un cône ordinaire serait désigné par  $C_2^0$  (il est inutile d'introduire la dénomination de cylindre dans le cas où l'élément multiple est à l'infini, car nous nous plaçons uniquement au point de vue des propriétés projectives des figures). Les équations qui dans l'espace à  $k$  dimensions représentaient une développable  $\Delta_i$  représentent un cône développable  $C_{n-k+i}^{n-k-1}$  formé des plans  $P_{n-k+i-1}$  osculateurs au cône  $C_{n-k+1}^{n-k-1}$ , qui joue le rôle de l'arête de rebroussement et peut être appelé *cône de rebroussement*. L'expression *cône développable* n'est pas un pléonasme, car, dans l'espace à  $n$  dimensions, un cône n'est pas, en général, une surface développable, c'est-à-dire dont les plans tangents ne dépendent que d'un paramètre; par exemple, un cône formé des droites passant par un point fixe et rencontrant une surface  $S_2$  non développable n'est évidemment pas développable.

Ces notions étant établies, il est facile d'étudier la transformation corrélatrice ou correspondance homographique entre les points et les plans  $P_{n-1}$ . Il est clair que cette transformation fait correspondre aux points d'une courbe  $C$  non plane, les plans tangents d'une développable  $\Delta_{n-1}$ , ou si l'on veut les plans osculateurs  $\Pi_{n-1}$  d'une courbe gauche  $\Gamma$ . Aux points de  $\Gamma$  correspondent les plans  $P_{n-1}$  osculateurs de  $C$  et plus généralement les plans  $P_{n-k}$  osculateurs à l'une des courbes correspondent aux plans  $P_{k-1}$  osculateurs à l'autre. Comme une courbe et les développables qui en dérivent sont données en même temps et qu'il n'est pas plus général de considérer la courbe comme lieu de points que comme arête de rebroussement d'une développable  $\Delta_k$ , il

n'y aura aucun inconvénient à dire que les courbes  $C$  et  $\Gamma$  se correspondent.

Si la courbe  $C$  est plane et renfermée dans un plan  $P_k$ , il correspondra à ses points les plans tangents d'un cône développable  $\Gamma_{n-1}^{n-k-1}$  et à ses plans osculateurs  $P_{k+1}$ , les plans générateurs du cône de rebroussement  $\Gamma_{n-k+1}^{n-k-1}$  de ce cône développable.

## II.

Étant donnée une équation différentielle linéaire sans second membre, d'ordre  $n$ , on peut lui faire correspondre une courbe dans un espace à  $n - 1$  dimensions en regardant  $n$  intégrales distinctes de l'équation comme les coordonnées homogènes d'un point de la courbe. La courbe *attachée* à une équation donnée est déterminée, si l'on ne regarde pas comme distinctes deux courbes transformées l'une de l'autre par une substitution homographique qui équivaut, comme on sait, à un simple changement de coordonnées. Mais à une courbe correspondent une infinité d'équations, car on peut dans une équation changer la variable indépendante, ou multiplier la fonction inconnue par une fonction déterminée quelconque, sans que la courbe correspondante soit modifiée. On peut aussi évidemment multiplier le premier membre de l'équation par un facteur quelconque.

Il résulte des relations connues entre les solutions d'une équation linéaire et celles de l'équation adjointe (DARBOUX, *loc. cit.*, p. 103) que les courbes attachées à deux équations adjointes l'une de l'autre se correspondent dualistiquement. On pourrait prendre cette propriété comme définition de l'équation adjointe et dire que deux équations sont adjointes lorsque les courbes correspondantes sont corrélatives; cette définition aurait l'avantage de mettre en lumière le fait que la relation entre les deux équations est réciproque; mais, d'après ce que nous venons de dire, elle ne serait pas suffisamment nette, puisque l'équation correspondant à une courbe donnée n'est pas parfaitement déterminée. Il est donc nécessaire de la préciser un peu.

D'abord, il est clair que l'on ne doit pas changer la variable indépendante, c'est-à-dire que dans les formules citées les  $u$  et les  $v$  sont

Cette restriction étant faite, il suffit de multiplier les premiers membres des équations qui correspondent aux courbes par un facteur convenable pour que ces équations deviennent adjointes l'une de l'autre.

$$\frac{dx_1}{\varrho_1} = \frac{dx_2}{\varrho_2} = \dots = \frac{dx_n}{\varrho_n} = \lambda dt,$$
$$\frac{x_1}{\varrho_1} = \frac{x_2}{\varrho_2} = \dots = \frac{x_n}{\varrho_n}.$$
$$(1) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n = u,$$

Les  $x$  sont déterminés par l'équation (1) et les suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dt} x_1 + \dots + \frac{du_n}{dt} x_n = \frac{du}{dt}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d^{n-1} u_1}{dt^{n-1}} x_1 + \frac{d^{n-1} u_2}{dt^{n-1}} x_2 + \dots = \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}}. \end{cases}$$

Ce sont des fonctions linéaires de  $u$  et de ses dérivées jusqu'à



l'ordre  $n - 1$ . Pour calculer la valeur de  $\lambda$ , différencions la dernière des équations (2) et remplaçons les  $\frac{dx_i}{dt}$  par leurs valeurs; il vient

$$(3) \quad \frac{d^n u}{dt^n} x_1 + \dots + \frac{d^n u_n}{dt^n} x_n = \frac{d^n u}{dt^n} - \lambda \left( v_1 \frac{d^{n-1} u_1}{dt^{n-1}} + \dots + v_n \frac{d^{n-1} u_n}{dt^{n-1}} \right).$$

En éliminant les  $x$  entre les équations (1), (2), (3), on obtient

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} \frac{d^n u}{dt^n} & \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} & \dots & u \\ \frac{d^n u_1}{dt^n} & \dots & \dots & u_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^n u_n}{dt^n} & \dots & \dots & u_n \end{vmatrix}}{\left( v_1 \frac{d^{n-1} u_1}{dt^{n-1}} + \dots + v_n \frac{d^{n-1} u_n}{dt^{n-1}} \right) \begin{vmatrix} \frac{d^{n-1} u_1}{dt^{n-1}} & \dots & u_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1} u_n}{dt^{n-1}} & \dots & u_n \end{vmatrix}} = f(u).$$

Si l'on pose

$$v_1 \frac{d^{n-1} u_1}{dt^{n-1}} + \dots + v_n \frac{d^{n-1} u_n}{dt^{n-1}} = \frac{1}{\lambda_n},$$

$f(u)$  sera de la forme

$$f(u) = \lambda_0 u + \lambda_1 \frac{du}{dt} + \dots + \lambda_n \frac{d^n u}{dt^n},$$

et il résulte de son expression même, sous forme de déterminant, que c'est l'équation linéaire qui admet pour solutions  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . D'après ce que l'on a vu,  $x_i = \int v_i f(u)$  est une fonction linéaire de  $u$  et de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n - 1$ . D'ailleurs, les fonctions des  $u_k$  qui entrent dans  $x_i$  s'exprimeront nécessairement au moyen de  $v_i$  et des coefficients de l'équation linéaire  $f(u)$ ; cela résulte de ce fait que,  $u$  étant indéterminé et l'intégrale  $\int v_i f(u)$  s'exprimant sans signe de quadrature portant sur  $u$  ou ses dérivées, elle s'exprime complètement sans signe de quadrature.

On voit ainsi que, de la définition géométrique, on peut déduire la propriété fondamentale de l'équation adjointe et même la valeur du

facteur par lequel il faut multiplier le premier membre de l'équation linéaire en  $u$  pour que son produit par une quelconque des quantités  $\epsilon$  soit une dérivée exacte. Cela résulte de l'expression de  $\lambda_n$ .

### III.

Cherchons maintenant à quelle condition une équation d'ordre  $n$  est équivalente à son adjointe. D'après ce qui précède, la courbe attachée à l'équation doit être corrélative à elle-même; si nous désignons par  $x$  les coordonnées de ses points et par  $u$  les coefficients des équations de ses plans osculateurs  $P_{n-2}$ , on doit avoir

$$(1) \quad u_i = \sum_1^n a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

De ces équations et de la relation identique

$$\sum_1^n u_i x_i = 0,$$

on déduit

$$\varphi = \sum_1^n \sum_1^n a_{ik} x_i x_k = 0.$$

Il faut observer que ces calculs ne sont légitimes que parce que, suivant une remarque déjà faite, les  $u$  et les  $x$  sont fonctions d'une même variable indépendante.

Pour que la forme quadratique  $\varphi$  soit identiquement nulle, il faut que l'on ait

$$(2) \quad a_{ii} = 0, \quad a_{ik} + a_{ki} = 0,$$

c'est-à-dire que le déterminant des  $a$  soit un déterminant gauche. Ce cas ne peut se présenter si  $n$  est impair, car ce déterminant doit être essentiellement supposé différent de zéro.

Je m'occuperai plus loin du cas où,  $n$  étant pair, on a les relations (2).

Supposons donc d'abord que  $\varphi$  n'est pas identiquement nul, et faisons usage des relations

$$\left. \begin{aligned} (3) \quad & \sum_1^n u_i \frac{d^h x_i}{dt^h} = 0 \\ (4) \quad & \sum_1^n x_i \frac{d^h u_i}{dt^h} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (h = 0, 1, 2, \dots, n-2).$$

En ajoutant ces équations membre à membre et remplaçant les  $u$  par leurs valeurs (1), on a

$$(5) \quad \sum_1^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{d^h x_i}{dt^h} = 0 \quad (h = 0, 1, 2, \dots, n-2).$$

En comparant les systèmes d'équations (3) et (5) et remarquant que les déterminants formés avec les dérivées des  $x$  ne sont pas nuls, puisque les  $x$  sont des solutions linéairement indépendantes, on obtient

$$\frac{u_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}} = \frac{u_2}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}} = \dots = \frac{u_n}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}} = \frac{u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} x_n} = \frac{\varphi}{2\varphi} = \frac{1}{2}.$$

La dernière égalité résulte de l'hypothèse que  $\varphi$  n'est pas identiquement nul. On a donc

$$(6) \quad u_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

et, par suite,

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

La courbe considérée est située sur la surface du second degré  $Q_{n-2}$  représentée par l'équation  $\varphi = 0$  et son plan osculateur  $P_{n-2}$  est le plan tangent à la surface; nous dirons que c'est une ligne asymptotique de la surface.

Nous sommes ainsi conduits à étudier les surfaces du second degré à un nombre quelconque de dimensions; cette étude qui présente de l'intérêt par elle-même a déjà fait l'objet de plusieurs travaux [voir notamment C. SEGRE, *Studio sulle quadriche* (*Memorie della reale Accade-*

*mia di Torino*, serie seconda, t. XXXVI)]. Mais comme elle est étrangère à la question qui nous occupe ici, je me bornerai à énoncer les résultats principaux qui me seront nécessaires, dont quelques-uns sont peut-être nouveaux, mais qui sont tous faciles à vérifier.

Je me borne au cas des surfaces dont le discriminant n'est pas nul, car les propriétés des cônes s'en déduisent facilement.

Les surfaces d'un nombre pair de dimensions  $Q_{2n}$  (qui sont les surfaces les plus générales dans un espace à  $2n + 1$  dimensions) admettent deux systèmes de plans générateurs  $P_n$ . Ces plans  $P_n$  se correspondent à eux-mêmes dans une transformation par polaires réciproques. Deux plans  $P_n$  d'un même système ont en commun un plan  $P_{n-2k}$  et deux plans de systèmes différents un plan  $P_{n-2k+1}$  ( $k$  étant un entier quelconque tel que  $n - 2k$  ou  $n - 2k + 1$  soient positifs ou nuls). Il en résulte que deux plans générateurs infiniment voisins (qui appartiennent nécessairement au même système) ne peuvent avoir en commun qu'un plan  $P_{n-2}$  et jamais un plan  $P_{n-1}$ , et, par suite, ne peuvent être osculateurs à une même courbe gauche. On reconnaît une grande analogie avec les quadriques de l'espace ordinaire, et l'on peut prévoir que ces surfaces n'ont pas d'autres lignes asymptotiques que des courbes tracées dans leurs plans générateurs, ce qui ne correspond à rien pour les équations d'ordre pair équivalentes à leur adjointe. Donc, pour ces équations d'ordre pair, on est toujours dans le cas où  $\varphi$  est identiquement nul et que nous examinerons dans le paragraphe suivant, la fin de celui-ci étant exclusivement consacrée aux équations d'ordre impair.

Les propriétés des quadriques  $Q_{2n+1}$  sont en effet tout à fait différentes; ces surfaces possèdent un seul système de plans générateurs  $P_n$  et à ces plans correspondent, dans une transformation par polaires réciproques par rapport à la surface des plans  $P_{n+1}$  générateurs de la surface au point de vue tangentiel, c'est-à-dire tels que tout plan  $P_{2n+1}$  les renfermant soit tangent à la surface.

Les lignes asymptotiques de ces surfaces sont caractérisées par le fait que la développable correspondante est transformée en elle-même par polaires réciproques; à leurs plans osculateurs  $P_n$  correspondent leurs plans osculateurs  $P_{n+1}$ ; comme ceux-ci renferment les plans  $P_n$  correspondants, ce sont des plans générateurs tangentiels et les plans

$P_n$  sont générateurs ponctuels. Réciproquement, si une ligne tracée sur la surface a pour plans osculateurs  $P_n$  des plans de la surface, c'est une ligne asymptotique, car la développable  $\Delta_{n+1}$  formée de ces plans  $P_n$  admet comme plan tangent en tous les points d'un plan  $P_n$  le plan  $P_{n+1}$  générateur tangentiel correspondant (cela résulte de ce qu'elle est sur la surface); par suite, elle se correspond à elle-même par polaires réciproques.

Cherchons à traduire analytiquement ces résultats. Il est évident que, si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont les coordonnées homogènes d'un point d'une courbe,  $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$  sont les coordonnées d'un point de la tangente;  $\frac{d^2x_1}{dt^2}, \dots, \frac{d^2x_n}{dt^2}$  les coordonnées d'un point du plan osculateur  $P_2$ ; et, d'une manière générale,  $\frac{d^kx_1}{dt^k}, \dots, \frac{d^kx_n}{dt^k}$  les coordonnées d'un point du plan osculateur  $P_k$ .

Par suite, dans le cas d'une équation d'ordre  $2n + 3$  à laquelle correspond une courbe tracée sur une surface  $Q_{2n+1}$ , puisque les plans  $P_n$  osculateurs de la courbe sont sur la surface, si l'on pose, pour abréger,

$$\sum \sum a_{ik} x_i x_k = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{2n+3}) = \varphi(x),$$

on a

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad \varphi\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0.$$

C'est-à-dire que la relation quadratique vérifiée par les intégrales subsiste quand on les remplace par leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé. Ce résultat a déjà été énoncé par M. Darboux (*loc. cit.*); mais les considérations géométriques par lesquelles nous l'avons obtenu nous permettent de démontrer facilement la réciproque et surtout de la généraliser.

Si  $2n + 3$  fonctions et leurs dérivées, jusqu'à l'ordre  $n$  inclusive-ment, vérifient une même relation quadratique homogène à coefficients constants, ce sont les solutions d'une équation d'ordre  $2n + 3$  équivalente à son adjointe. En effet, ces équations expriment que la courbe est tracée sur une surface du second degré, qui renferme aussi un point de sa tangente en un point quelconque, distinct du point de contact. La tangente est donc tout entière située sur la surface puisque

celle-ci est du second degré; et l'on voit qu'il en est de même des plans  $P_n$  osculateurs à la courbe; celle-ci est donc une ligne asymptotique de la surface. On obtient ainsi l'intégrale générale d'un système particulier d'équations différentielles. Il est évident que l'on pourrait prendre aussi une courbe située dans un plan générateur de la surface, c'est-à-dire établir entre les  $x$  des relations linéaires à coefficients constants telles que l'équation  $\varphi(x) = 0$  soit vérifiée identiquement; il en est alors de même de  $\varphi\left(\frac{d^k x}{dt^k}\right) = 0$  quel que soit  $k$ ; mais cette solution est peu intéressante.

Proposons-nous de généraliser ce résultat et de chercher à intégrer sans quadratures un système d'équations de la forme

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0, \quad \dots, \quad \varphi\left(\frac{d^k x}{dt^k}\right) = 0,$$

où  $\varphi$  est une forme quadratique à coefficients constants des  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (à discriminant différent de zéro). Il résultera de la solution même que, si le nombre entier  $k$  est supérieur ou égal à  $\frac{n}{2} - 1$ , ces équations ne peuvent être vérifiées qu'en établissant entre les  $x$  des relations linéaires à coefficients constants. Laissons de côté cette solution banale qui existe toujours et supposons donc  $k < \frac{n}{2} - 1$ ; les équations expriment que la développable  $\Delta_{k+1}$  formée des plans  $P_k$  osculateurs à la courbe cherchée est située tout entière sur la surface du second degré  $Q_{n-2}$ , représentée par l'équation  $\varphi(x) = 0$ .

Considérons un plan  $P_{n-2}$  tangent à  $Q_{n-2}$  en un point M; ce plan  $P_{n-2}$  coupe  $\Delta_{k+1}$  suivant une développable  $\Delta_k$  et la surface suivant un cône  $C_{n-3}^0$ ; considérons le cône développable qui a pour sommet le point M et qui renferme  $\Delta_k$ , et coupons ce cône et le cône  $C_{n-3}^0$  par un plan  $P'_{n-2}$ ; nous obtiendrons une quadrique  $Q_{n-4}$  et une développable  $\Delta'_k$  située sur cette quadrique. Réciproquement, soit  $\Delta_k$  une développable située dans le plan  $P_{n-2}$ , et C une courbe tracée sur  $Q_{n-2}$  et dont les tangentes rencontrent l'arête de rebroussement de  $\Delta_k$ ; la développable  $\Delta_{k+1}$  correspondant à C sera située sur  $Q_{n-2}$ , car les plans  $P_k$  osculateurs à C sont déterminés par un point de la courbe et le plan  $P_{k-1}$  formant  $\Delta_k$ . Nous pouvons donc ramener le problème considéré à celui où  $k$  est diminué d'une unité et  $n$  de deux unités; pour  $k = 0$ , nous

avons une courbe qui n'est assujettie à d'autre condition que d'être tracée sur la surface, qui est alors une quadrique  $Q_{n-2k-2}$ ; et l'on a

$$n - 2k - 2 > 0,$$

puisque

$$k < \frac{n}{2} - 1.$$

Pour achever la solution du problème, il reste à faire voir comment on peut déterminer sur une quadrique une courbe dont les tangentes rencontrent une courbe donnée  $\Gamma$  dans un plan tangent de la quadrique. Le problème ainsi posé exigerait, en général, des intégrations; mais il faut remarquer que la courbe donnée n'est pas parfaitement déterminée, mais assujettie seulement à se trouver sur le cône  $C_2^0$  qui a pour sommet le point de contact  $M$  du plan tangent, et pour base l'arête de rebroussement  $\Gamma'$  de  $\Delta'_k$ ; il suffit alors de déterminer un cône  $\Gamma_2^0$  de sommet  $M$ , et dont les plans tangents  $P_2$  renferment les génératrices de  $C_2^0$ ; l'intersection de  $\Gamma_2^0$  avec la quadrique est la courbe cherchée; le problème s'effectue ainsi sans quadrature, et il s'introduit une fonction arbitraire dans la détermination de  $\Gamma_2^0$ .

Il est facile de traduire analytiquement cette méthode; nous pouvons supposer l'équation de la quadrique ramenée à la forme

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) + x_{n-1}x_n = 0;$$

$x_n = 0$  est alors un plan tangent, et  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-2} = x_{n-1} = 0$  les coordonnées de son point de contact; on connaît l'arête de rebroussement  $\Gamma'$  d'une développable  $\Delta'_k$  située sur la quadrique :

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) = 0, \quad x_{n-1} = 0, \quad x_n = 0.$$

(Le plan  $P'_{n-2}$  est ici  $x_{n-1} = 0$ ).

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$  les coordonnées de  $\Gamma'$ ; l'arête de rebroussement  $\Gamma$  de  $\Delta_k$  aura pour coordonnées  $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, b_{n-1}, 0$ ;  $b_{n-1}$  étant une fonction arbitraire. Il faut déterminer une courbe tracée sur  $Q_{n-2}$ , et dont les tangentes rencontrent cette arête de rebroussement  $\Gamma$ ; en faisant  $x_n = 1$ , cela revient à intégrer le système

$$(1) \quad \frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_{n-2}}{a_{n-2}} = \frac{dx_{n-1}}{b_{n-1}},$$

auquel il faut joindre l'équation

$$(2) \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) + x_{n-1} = 0.$$

Il suffit pour cela d'intégrer le système

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_{n-2}}{a_{n-2}},$$

ce que l'on sait faire (en introduisant même une fonction arbitraire);  $x_{n-1}$  est alors déterminé par l'équation (2) et  $b_{n-1}$ , qui est arbitraire, est exprimé au moyen de la fonction arbitraire que l'on a introduite; on peut ainsi résoudre le problème pour des valeurs quelconques de  $k$  et de  $n$ , en partant de la solution évidente pour les valeurs 0 et  $n - 2k$ .

Dans le cas où  $n = 2m + 3$  et  $k = m$ , cette méthode permet de déterminer de proche en proche sans quadrature l'expression générale des solutions d'une équation d'ordre  $2m + 3$ , équivalente à son adjointe (ou, si l'on préfère, les lignes asymptotiques d'une surface  $Q_{2m+1}$ ). M. Darboux a donné déjà la solution analytique de ce problème par des formules plus symétriques que celles qui viennent d'être établies. On peut, d'ailleurs, simplifier un peu la solution indiquée et se donner directement la courbe  $\Gamma$ ; il est, en effet, possible de démontrer que, dans ce cas, l'on obtient le cône  $\Gamma_2^0$  en transformant la courbe  $\Gamma$  par polaires réciproques par rapport à la surface; la fonction que l'on se donne alors arbitrairement est celle qui était désignée par  $b_{n-1}$ ; cette dernière méthode a l'avantage de bien montrer pourquoi la solution finale s'exprime sans quadrature, puisqu'on n'effectue jamais que des différentiations et des éliminations.

Il y a d'ailleurs d'autres cas dans lesquels on peut introduire des simplifications à la méthode générale, qui a surtout l'avantage de montrer la possibilité du problème, mais qui conduirait souvent à des calculs inextricables. Avant de donner un exemple des simplifications qui peuvent se présenter, je ferai une courte remarque. Il résulte de la forme même des équations, et aussi d'ailleurs de leur signification géométrique, que les valeurs de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  peuvent être multipliées par une fonction quelconque. Il en résulte qu'en donnant une forme



convenable à cette fonction arbitraire, on peut exprimer sans signe de quadrature  $\int x_1 dt, \int x_2 dt, \dots, \int x_n dt$ , c'est-à-dire, si l'on veut, considérer le système

$$\varphi\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0, \quad \dots, \quad \varphi\left(\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}\right) = 0,$$

en posant

$$\frac{dy_i}{dt} = x_i.$$

Je vais maintenant, comme application, intégrer le système

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2, \end{aligned}$$

dont il est inutile d'indiquer la signification cinématique simple.

D'après ce que l'on a vu, cela revient à chercher sur une quadrique  $Q_4$  les courbes dont les tangentes sont sur la surface. Les quadriques  $Q_4$  ont des plans générateurs  $P_2$ ; deux plans générateurs de systèmes différents ont en commun une droite ou bien ne se rencontrent pas; deux plans générateurs d'un même système ont en commun un point et un seul. Considérons les plans générateurs de l'un des systèmes qui passent par les tangentes à la courbe cherchée; il est clair que deux de ces plans infiniment voisins ont en commun le point de contact.

Inversement, si l'on considère un plan générateur dont l'équation dépend d'un paramètre, deux plans infiniment voisins, qui appartiennent nécessairement au même système, ont en commun un point, et le lieu de ce point est une courbe à laquelle les plans sont tangents et dont les tangentes sont, par suite, sur la surface.

Appliquons cette méthode; l'équation d'un plan générateur est

$$\begin{aligned} x - x_1 &= c(y + y_1) - b(z + z_1), \\ y - y_1 &= a(z + z_1) - c(x + x_1), \\ z - z_1 &= b(x + x_1) - a(y + y_1). \end{aligned}$$

Nous supposons que  $a, b, c$  sont fonction d'un paramètre  $\iota$ . L'intersection de ce plan avec le plan infiniment voisin est déterminée par les

équations

$$(y + y_1) \frac{dc}{dt} - (z + z_1) \frac{db}{dt} = 0,$$

$$(z + z_1) \frac{da}{dt} - (x + x_1) \frac{dc}{dt} = 0,$$

$$(x + x_1) \frac{db}{dt} - (y + y_1) \frac{da}{dt} = 0,$$

qui se réduisent à deux, comme cela était évident d'après les propriétés des plans générateurs. Nous satisferons à ces équations en prenant

$$\rho(x + x_1) = 2 \frac{da}{dt}, \quad \rho(y + y_1) = 2 \frac{db}{dt}, \quad \rho(z + z_1) = 2 \frac{dc}{dt},$$

et nous aurons alors la solution du système proposé par les formules

$$\rho x = \frac{da}{dt} + c \frac{db}{dt} - b \frac{dc}{dt}, \quad \rho x_1 = -\frac{da}{dt} + c \frac{db}{dt} - b \frac{dc}{dt},$$

$$\rho y = \frac{db}{dt} + a \frac{dc}{dt} - c \frac{da}{dt}, \quad \rho y_1 = -\frac{db}{dt} + a \frac{dc}{dt} - c \frac{da}{dt},$$

$$\rho z = \frac{dc}{dt} + b \frac{da}{dt} - a \frac{db}{dt}, \quad \rho z_1 = -\frac{dc}{dt} + b \frac{da}{dt} - a \frac{db}{dt}.$$

$\rho, a, b, c$  désignant des fonctions arbitraires de  $t$ .

On peut d'ailleurs expliquer facilement ces résultats par la Géométrie ordinaire.

Considérons, en effet,  $x, y, z, x_1, y_1, z_1$  comme les coordonnées d'une droite; cela est possible, à condition de choisir comme forme fondamentale

$$x^2 + y^2 + z^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 = 0.$$

On peut d'ailleurs exprimer  $x, y, z, x_1, y_1, z_1$  au moyen des coordonnées de Plücker par les formules

$$\begin{aligned} x - x_1 &= X, & x + x_1 &= L, \\ y - y_1 &= Y, & y + y_1 &= M, \\ z - z_1 &= Z, & z + z_1 &= N, \end{aligned}$$

de manière que la forme fondamentale devienne

$$LX + MY + NZ = 0.$$

La condition pour que la droite engendre une développable est alors

$$dLdX + dM dY + dN dZ = 0.$$

On obtiendra donc les valeurs les plus générales de  $L, M, N, X, Y, Z$  satisfaisant à ces équations en prenant les coordonnées plückériennes de la tangente à une courbe gauche arbitraire.

Désignons par  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$  les coordonnées homogènes de la courbe gauche, nous prendrons

$$\begin{aligned} X &= 2(\delta\alpha' - \alpha\delta'), & L &= 2(\gamma\beta' - \beta\gamma'), \\ Y &= 2(\delta\beta' - \beta\delta'), & M &= 2(\alpha\gamma' - \gamma\alpha'), \\ Z &= 2(\delta\gamma' - \gamma\delta'), & N &= 2(\beta\alpha' - \alpha\beta'), \end{aligned}$$

et nous aurons

$$\begin{aligned} x &= \delta\alpha' - \alpha\delta' + \gamma\beta' - \beta\gamma', & x_1 &= -\delta\alpha' + \alpha\delta' + \gamma\beta' - \beta\gamma', \\ y &= \delta\beta' - \beta\delta' + \alpha\gamma' - \gamma\alpha', & y_1 &= -\delta\beta' + \beta\delta' + \alpha\gamma' - \gamma\alpha', \\ z &= \delta\gamma' - \gamma\delta' + \beta\alpha' - \alpha\beta', & z_1 &= -\delta\gamma' + \gamma\delta' + \beta\alpha' - \alpha\beta'. \end{aligned}$$

Pour rendre ces formules identiques à celles que l'on a déjà données, il suffirait d'y faire

$$\frac{\alpha}{\delta} = a, \quad \frac{\beta}{\delta} = b, \quad \frac{\gamma}{\delta} = c, \quad \frac{1}{\delta^2} = \rho.$$

Les quantités  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , qui s'introduisent ici naturellement, ont d'ailleurs une signification cinématique très simple; si l'on fait rouler la courbe lieu du point  $x_1, y_1, z_1$  sur la courbe lieu du point  $x, y, z$ , les deux courbes étant rapportées à des axes de même origine, on peut définir le déplacement en donnant les cosinus des angles que font à chaque instant les axes mobiles avec les axes fixes. Les quantités  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ne sont pas autre chose que les variables d'Olinde Rodrigues, au moyen desquelles on peut exprimer rationnellement les neuf cosinus. La conception de la géométrie de la droite, comme étant la géométrie d'un point sur une quadrique  $Q_4$ , est trop connue pour que je juge utile d'insister sur l'identité parfaite des deux méthodes géométriques employées.

## IV.

Revenons maintenant aux équations équivalentes à leur adjointe. Nous avons examiné le cas où la forme que nous avons désignée par  $\varphi$  n'est pas identiquement nulle, et constaté que la recherche des équations correspondantes se ramenait à celle des lignes asymptotiques de la surface du second degré  $\varphi = 0$ . Nous avons vu que les équations que l'on déterminait ainsi étaient nécessairement d'ordre impair et montré géométriquement comment leurs solutions s'exprimaient complètement sans signe de quadrature. Dans le cas des équations d'ordre pair, auxquelles nous arrivons maintenant, la forme  $\varphi$  est, par suite, toujours identiquement nulle, et la méthode ne s'applique plus.

Néanmoins, il y a entre les deux cas une certaine analogie; la méthode employée dans le paragraphe précédent avait pour base la transformation corrélatrice par rapport à une surface du second degré; dans le cas où le déterminant des  $a_{ik}$  est symétrique gauche, les équations (1) définissent encore une transformation corrélatrice, mais par rapport à ce que l'on peut appeler un *complexe linéaire*. C'est, en effet, une corrélation telle que le plan correspondant à un point donné renferme ce point, car on a identiquement

$$\sum u_i x_i = 0,$$

en vertu des relations

$$u_i = \sum a_{ik} x_k, \quad a_{ik} + a_{ki} = 0.$$

L'équation du plan correspondant à un point  $y$  est

$$\sum_i \left( \sum_k a_{ik} y_k \right) x_i = 0$$

ou

$$\sum \sum a_{ik} (x_i y_k - x_k y_i) = 0.$$

On peut, en laissant de côté les cas singuliers, ramener cette forme

bilinéaire à la forme canonique

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i) = 0,$$

en supposant le nombre des variables égal à  $2n$ . Les équations de la transformation sont alors

$$\left. \begin{aligned} u_{n+i} &= x_i \\ u_i &= -x_{n+i} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Par cette transformation à tout plan  $P_k$  correspond un plan  $P_{2n-2-k}$ . Je dirai qu'un plan  $P_k$  appartient au complexe ( $k \leq n-1$ ), s'il est renfermé dans le plan  $P_{2n-2-k}$  correspondant qui sera dit lui aussi appartenir au complexe. D'après cette définition, tout point  $P_0$  appartient au complexe, car le plan correspondant  $P_{2n-2}$  passe par  $P_0$ . Les droites passant par  $P_0$  et appartenant au complexe doivent être dans le plan  $P_{2n-2}$ , car le plan correspondant à l'un quelconque de leurs points doit passer par  $P_0$ ; cette condition est d'ailleurs suffisante. On voit facilement qu'il y a des plans  $P_{n-1}$  qui se correspondent à eux-mêmes; pour qu'un plan  $P_h$  appartienne au complexe, il faut et il suffit qu'il soit dans l'un de ces plans  $P_{n-1}$  (si l'on a  $h < n-1$ ) ou qu'il renferme un de ces plans (si  $h > n-1$ ). On peut d'ailleurs trouver facilement les équations de ces plans  $P_{n-1}$ .

Soit, en effet, un plan  $P_{n-1}$

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} x_{n+1} + a_{12} x_{n+2} + \dots + a_{1n} x_{2n}, \\ x_2 &= a_{21} x_{n+1} + a_{22} x_{n+2} + \dots + a_{2n} x_{2n}, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_n &= a_{n1} x_{n+1} + a_{n2} x_{n+2} + \dots + a_{nn} x_{2n}. \end{aligned}$$

On obtient les équations du plan correspondant en remplaçant  $x_1, x_2, \dots, x_n$  par ces valeurs dans l'équation

$$\sum (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i) = 0,$$

et en égalant à zéro les coefficients de  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$ . On obtient

ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1 &= a_{11}\mathcal{Y}_{n+1} + a_{21}\mathcal{Y}_{n+2} + \dots + a_{n1}\mathcal{Y}_{2n}, \\ \mathcal{Y}_2 &= a_{12}\mathcal{Y}_{n+1} + \dots + a_{n2}\mathcal{Y}_{2n}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \mathcal{Y}_n &= a_{1n}\mathcal{Y}_{n+1} + a_{2n}\mathcal{Y}_{n+2} + \dots + a_{nn}\mathcal{Y}_{2n}. \end{aligned}$$

Pour que ces deux plans coïncident, il faut et il suffit que  $a_{ik} = a_{ki}$ ; ce que l'on peut exprimer de la manière suivante :  $\varphi$  étant une forme quadratique quelconque à coefficients constants des  $n$  variables  $\mathcal{Y}_{n+1}, \mathcal{Y}_{n+2}, \dots, \mathcal{Y}_{2n}$ , les équations

$$\mathcal{Y}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathcal{Y}_{n+i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

représentent un plan  $P_{n-1}$  du complexe. Ce sont ces plans qui jouent le même rôle que les droites dans le complexe à trois dimensions.

Nous sommes maintenant en état d'interpréter géométriquement les équations différentielles auxquelles nous avons été conduits. Ces équations étaient les suivantes

$$\sum_i u_i \frac{d^k x_i}{dt^k} = 0.$$

Comme nous considérons ici un espace à  $2n - 1$  dimensions, cette équation a lieu pour  $k = 0, 1, 2, \dots, 2n - 2$ . D'après les formules déjà écrites

$$u_i = x_{n+i}, \quad u_{n+i} = -x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ces équations s'écrivent

$$\sum_1^n \left( x_i \frac{d^k x_{n+i}}{dt^k} - x_{n+i} \frac{d^k x_i}{dt^k} \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2n - 2).$$

Elles expriment que le plan correspondant au point  $x$  dans le complexe passe aussi par les points  $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{2n-2} x}{dt^{2n-2}}$ , c'est-à-dire est le plan osculateur de la courbe au point considéré.

Par conséquent, nous sommes ramenés au problème de Géométrie suivant : *Trouver les courbes telles que leurs plans osculateurs  $P_{2n-2}$  en*

chaque point soient les plans correspondants à ce point dans le complexe.

On voit, par des raisonnements absolument identiques à ceux qui ont été faits pour les surfaces du second degré et leurs lignes asymptotiques, que pour caractériser ces courbes il suffit de dire : ou bien qu'elles se correspondent à elles-mêmes par polaires réciproques par rapport au complexe, ou bien que leurs plans osculateurs  $P_{n-1}$  sont les plans  $P_{n-1}$  du complexe.

Le problème de la détermination de ces courbes est résolu pour l'espace ordinaire ( $n = 2$ ), et l'on sait que les courbes, dont les tangentes font partie d'un complexe, ont pour plan osculateur en un point le plan focal de ce point. On sait obtenir ces courbes sans quadrature; mais si l'on cherche à généraliser l'une des méthodes qui les donnent sans quadrature, on obtient non pas les courbes que nous cherchons, mais des surfaces  $S_{n-1}$  dont les plans tangents  $P_{n-1}$  sont les plans du complexe; en désignant par  $\varphi$  une fonction quelconque homogène et du second degré de  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_n$ , ces surfaces sont représentées par les équations

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+k}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_n &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2n}}. \end{aligned}$$

Ce sont ces surfaces qui sont la véritable généralisation des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Si  $\varphi$  est une forme quadratique, les équations représentent un plan  $P_{n-1}$  du complexe.

Ces surfaces  $S_{n+1}$  jouissent de la propriété de se transformer en elles-mêmes par polaires réciproques par rapport au complexe; les courbes que l'on cherche ne sont pas autre chose que les lignes asymptotiques de ces surfaces, c'est-à-dire les lignes telles que leur plan osculateur  $P_{n-1}$  soit tangent à la surface. Mais il ne semble pas que l'on puisse arriver en suivant cette voie, qui était une généralisation naturelle de ce que l'on sait faire dans le cas de trois dimensions, à

une détermination simple des courbes cherchées. Il est dès lors naturel de chercher à généraliser la méthode géométrique qui a réussi pour les lignes asymptotiques des surfaces du second degré. Supposons donc les courbes cherchées connues dans l'espace à  $2n - 3$  dimensions, et tâchons d'en déduire celles de l'espace à  $2n - 1$  dimensions.

Pour cela, nous remarquons d'abord que, si l'on considère dans l'espace à  $2n - 1$  dimensions une développable  $D_n$  formée de plans  $P_{n-1}$  du complexe, son intersection par un plan quelconque  $P_{2n-2}$  sera une développable  $D_{n-1}$  formée de plans  $P_{n-2}$ . Ces plans  $P_{n-2}$  appartiennent au complexe; les plans  $P_n$  correspondants doivent donc les renfermer; il en résulte que le pôle  $M$  du plan  $P_{2n-2}$  et l'un de ces plans  $P_{n-2}$  déterminent un plan  $P_{n-1}$  du complexe, intersection du plan  $P_n$  avec  $P_{2n-2}$ . On voit que la projection de la développable sur un plan  $P_{2n-3}$  renfermé dans  $P_{2n-2}$ , le point de vue étant le point  $M$ , est une développable formée de plans  $P_{n-2}$  appartenant à un complexe linéaire, intersection de  $P_{2n-3}$  avec le complexe donné.

Jusqu'ici, il y a identité parfaite avec ce qui se passe pour les surfaces du second degré; nous avons pris un plan quelconque de l'espace (au lieu de prendre un plan tangent à la surface), et avons projeté du pôle de ce plan (tenant lieu du point de contact) l'intersection de la développable par ce plan. On peut aussi, comme dans le cas des surfaces du second degré, procéder par une transformation par polaires réciproques. Si nous considérons le cône qui a son sommet en un point quelconque de l'espace et pour base la courbe considérée  $C$ , la polaire réciproque de ce cône est une courbe  $C'$  située dans le plan polaire de son sommet, et dont la projection  $C''$  sur un plan  $P_{2n-3}$  est aussi une courbe dont les plans osculateurs appartiennent à un complexe. Malheureusement, en cherchant la réciproque, on ne réussit pas aussi bien que pour les quadriques; on n'arrive pas à la détermination sans intégration des courbes cherchées.

Je considère un plan  $P_{2n-2}$ , et dans ce plan une courbe telle que  $C'$ , que je dois regarder comme connue, puisque je suppose connues les courbes telles que  $C''$  dans l'espace à  $2n - 3$  dimensions; si je prends la polaire réciproque de  $C'$  j'aurai un cône  $\Gamma'_2$ , ayant pour sommet le pôle  $M$  de  $P_{2n-2}$ . Je dis que si l'on détermine sur  $\Gamma'_2$  une courbe  $C$  dont les tangentes rencontrent  $C'$ , cette courbe  $C$  sera une des courbes



cherchées. Il est d'ailleurs clair, d'après ce que l'on a vu, qu'en choisissant pour  $C'$  une courbe arbitraire satisfaisant aux conditions indiquées, on obtiendra de cette manière toutes les courbes cherchées.

Il faut montrer que la courbe  $C$  se transforme en elle-même par polaires réciproques par rapport au complexe; or elle est définie par le fait qu'elle est tracée sur le cône  $\Gamma'_2$  et que ses tangentes rencontrent la courbe  $C'$ , et la transformation par polaires réciproques a pour effet d'échanger  $\Gamma'_2$  et  $C'$ ; la définition de  $C$  n'est donc pas changée.

Mais la détermination des courbes tracées sur un cône, et dont les tangentes rencontrent une courbe donnée, ne peut pas en général s'effectuer sans intégration; et l'on voit facilement que si l'on appliquait cette méthode à la détermination dans l'espace à trois dimensions des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe, on aurait à effectuer une quadrature; elle est donc plus compliquée et moins naturelle que la précédente dans le cas de trois dimensions, mais elle a l'avantage de se généraliser.

Cherchons à la traduire analytiquement afin de voir aussi nettement que possible à quel degré de difficulté le problème est ramené. Afin de simplifier l'écriture, je considère simplement un espace à cinq dimensions; mais on verra facilement ce qui, dans la méthode, est indépendant du nombre des variables.

Soit donc le complexe linéaire

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + x_5 y_6 - x_6 y_5 = 0.$$

Il s'agit de déterminer les courbes qui satisfont aux quatre équations différentielles

$$\begin{aligned} (1) \quad & x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + x_3 dx_4 - x_4 dx_3 = dx_5, \\ (2) \quad & x_1 d^2 x_2 - x_2 d^2 x_1 + x_3 d^2 x_4 - x_4 d^2 x_3 = d^2 x_5, \\ (3) \quad & x_1 d^3 x_2 - x_2 d^3 x_1 + x_3 d^3 x_4 - x_4 d^3 x_3 = d^3 x_5, \\ (4) \quad & x_1 d^4 x_2 - x_2 d^4 x_1 + x_3 d^4 x_4 - x_4 d^4 x_3 = d^4 x_5, \end{aligned}$$

dans lesquelles j'ai supposé  $x_6 = 1$  pour simplifier. On peut remplacer les trois dernières par les trois suivantes

$$\begin{aligned} (2') \quad & dx_1 dx_2 - dx_2 dx_1 + dx_3 dx_4 - dx_4 dx_3 = 0, \\ (3') \quad & dx_1 d^2 x_2 - dx_2 d^2 x_1 + dx_3 d^2 x_4 - dx_4 d^2 x_3 = 0, \\ (4') \quad & dx_1 d^3 x_2 - dx_2 d^3 x_1 + dx_3 d^3 x_4 - dx_4 d^3 x_3 = 0, \end{aligned}$$

obtenues en différentiant chacune des équations (1), (2), (3), en tenant compte de la suivante. [L'équation (2') est une identité, ce qui démontre un théorème, très connu dans l'espace ordinaire.]

Nous considérons l'intersection du complexe par le plan  $x_6 = 0$ , dont le pôle est le point  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0$ ,  $x_5 = 1$ . Nous connaissons, par hypothèse, dans le plan  $x_6 = x_5 = 0$ , les courbes dont les tangentes appartiennent au complexe

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 = 0,$$

c'est-à-dire qui vérifient les équations différentielles

$$(3'') \quad x_1 dx_2 - x_2 dx_1 + x_3 dx_4 - x_4 dx_3 = 0,$$

$$(4'') \quad x_1 d^2 x_2 - x_2 d^2 x_1 + x_3 d^2 x_4 - x_4 d^2 x_3 = 0.$$

Ce qu'il est essentiel de remarquer, c'est que ces deux équations ne sont pas autre chose que les équations (3') et (4'), dans lesquelles tous les indices de dérivation sont diminués d'une unité, et l'on voit facilement que ce fait est indépendant du nombre des variables. Prenons, par exemple, comme solution des équations (3'') et (4''), les expressions

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta', \\ x_2 &= \iota, \\ x_3 &= 2\beta - \iota\beta', \\ x_4 &= 1, \end{aligned}$$

où  $\beta$  est une fonction quelconque de  $\iota$ . Nous aurons les équations d'une courbe  $C'$  en ajoutant à ces équations les deux suivantes

$$\begin{aligned} x_5 &= \gamma, \\ x_6 &= 0, \end{aligned}$$

$\gamma$  étant une fonction quelconque de  $\iota$ . Pour trouver la polaire réciproque de  $C'$ , il faut prendre le plan polaire du point  $x$  et chercher son enveloppe, ce qui donne

$$(5) \quad \beta' y_2 - \iota y_1 + (2\beta - \iota\beta') y_4 - y_3 + \gamma y_6 = 0,$$

$$(6) \quad \beta'' y_2 - y_1 + (\beta' - \iota\beta'') y_4 + \gamma' y_6 = 0,$$

$$(7) \quad \beta''' y_2 - \iota\beta''' y_4 + \gamma'' y_6 = 0,$$

$$(7') \quad y_2 - \iota y_4 + \left(\frac{\gamma''}{\beta'''}\right) y_6 = 0,$$

$$(8) \quad -y_4 + \left(\frac{\gamma'''}{\beta''''}\right)' y_6 = 0.$$

Si l'on pose  $\frac{\gamma''}{\beta'''} = u$  et si l'on prend  $\gamma_6 = 1$ , la solution de ces équations est, comme on le trouve en les résolvant de proche en proche,

$$(9) \quad \begin{cases} \gamma_1 = \beta' u' - \beta'' u + \gamma', \\ \gamma_2 = t u' - u, \\ \gamma_3 = (t \beta'' - \beta') u + (2\beta - t \beta') u' + \gamma - t \gamma', \\ \gamma_4 = u', \\ \gamma_6 = 1, \\ u = \frac{\gamma''}{\beta'''} \end{cases}$$

Ces équations représentent le cône  $\Gamma'_2$ . Il faut maintenant chercher la courbe C tracée sur ce cône et dont les tangentes rencontrent C'. Il faut, par conséquent, chercher à adjoindre à ces équations une autre

$$(10) \quad \gamma_5 = \lambda,$$

de manière que la courbe représentée par les équations (9) et (10) soit une des courbes cherchées, c'est-à-dire satisfasse aux équations (1), (2), (3), (4), où l'on remplacerait les  $x$  par les  $\gamma$ . Mais les équations (2), (3), (4) peuvent être remplacées par (2'), (3'), (4') qui ne renferment pas  $x_5$ ; puisque nous savons qu'il y a une solution, ces équations sont vérifiées par les valeurs (9), et il ne reste plus que l'équation (1) qui fera connaître  $\lambda$  par une quadrature. Il y a donc simplement une quadrature à effectuer.

On peut voir, d'une autre manière, que les valeurs (9) vérifient les équations (2'), (3'), (4').

On a, en effet, évidemment

$$\frac{d\gamma_1}{x_1} = \frac{d\gamma_2}{x_2} = \frac{d\gamma_3}{x_3} = \frac{d\gamma_4}{x_4}.$$

On peut ici vérifier facilement, par le calcul, que ces rapports sont égaux en calculant leur valeur commune  $u'' dt$ , mais ces équations sont évidentes géométriquement, car elles expriment simplement qu'un plan tangent  $P_2$  au cône, représenté par ces équations (9), rencontre la courbe dont les coordonnées sont  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , ce qui résulte de la manière même dont on a obtenu le cône et du fait que la courbe se

transforme en elle-même par polaires réciproques dans son espace. Comme on a remarqué que les équations (3') et (4') ne sont pas autre chose que les équations (3'') et (4''), dans lesquelles on a augmenté d'une unité l'indice de toutes les dérivations, et que les  $x$  vérifient par hypothèse (3'') et (4''), il en résulte que les  $y$  vérifient les équations (3') et (4'). Ces équations ne changent évidemment pas, en effet, si l'on multiplie toutes les variables par un même facteur. On voit donc que l'on passera toujours du cas de  $2n - 3$  variables au cas de  $2n - 1$  par une quadrature.

Achevons la solution dans le cas de  $n = 3$ .

Nous avons alors

$$(11) \quad \begin{cases} dy_1 = \beta' u'' dt, \\ dy_2 = tu'' dt, \\ dy_3 = (2\beta - t\beta') u'' dt, \\ dy_4 = u'' dt, \end{cases}$$

et l'équation qui donne  $\lambda$  est alors, toutes réductions faites,

$$d\lambda = u'' \gamma dt;$$

on a  $u = \frac{\gamma''}{\beta'''}.$  En intégrant par parties, on a la formule un peu plus simple

$$\lambda = u' \gamma - u \gamma' + \int \frac{\gamma''^2}{\beta'''} dt.$$

On voit que l'on pourrait faire disparaître tout signe d'intégration si l'on savait déterminer de la manière la plus générale trois fonctions  $\alpha, \beta, \gamma$  de  $t$ , telles que l'on ait

$$(12) \quad \alpha' \beta''' = \gamma''^2.$$

Mais la résolution de cette équation indéterminée, dont il faut une solution renfermant deux fonctions arbitraires, ne paraît pas simple.

D'ailleurs, si l'on savait résoudre le problème que l'on s'est proposé ou, ce qui revient au même, si l'on connaissait la forme des solutions de l'équation linéaire du sixième ordre équivalente à son adjointe, sans signe de quadrature et avec deux fonctions arbitraires, on pourrait déterminer sans autre intégration la solution générale de l'équation (12), dépendant aussi de deux fonctions arbitraires.

En effet, si l'on connaît des expressions de  $y_1, y_2, \dots, y_3$ , on voit facilement que l'ensemble des équations (9) et (11) permet de calculer  $\beta$  et  $\gamma$  sans effectuer d'intégration. Il faut, bien entendu, choisir convenablement la variable indépendante  $z$ ; les équations (11) donnent

$$z = \frac{dy_2}{dy_1}.$$

On a alors

$$\lambda = y_3 \quad \text{et} \quad \alpha = \lambda - u'\gamma + u\gamma',$$

et  $\alpha, \beta, \gamma$  vérifient visiblement l'équation (12), la variable indépendante étant  $z$ .

Le problème auquel on a été ramené est donc exactement équivalent à celui dont on est parti, et s'il est impossible de résoudre l'équation (12) plus simplement qu'en prenant pour  $\beta$  et  $\gamma$  des fonctions arbitraires de  $z$  et en calculant  $\alpha$  par une quadrature, il est aussi impossible de déterminer sans quadrature les solutions de l'équation du sixième ordre, équivalente à son adjointe. C'est d'ailleurs, *a fortiori*, impossible pour les ordres supérieurs. La méthode géométrique que nous avons suivie, si elle ne donne pas la solution du problème sans quadrature, donne tout au moins une idée précise de son degré de difficulté et permet d'obtenir, tout au moins pour le sixième ordre, des expressions renfermant un seul signe de quadrature et relativement assez simples.

