

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

W. KAPTEYN

Nouvelle méthode pour l'intégration de l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G^2(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)(u - \delta)$$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 9 (1892), p. 35-62

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__35_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLE MÉTHODE

POUR

L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G^2(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)(u - \delta),$$

PAR M. W. KAPTEYN,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ D'UTRECHT.



Je me propose de satisfaire à l'équation différentielle

$$(1) \quad \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G^2(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)(u - \delta)$$

ou

$$(2) \quad \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = C_0 + C_1 u + C_2 u^2 + C_3 u^3 + C_4 u^4$$

par une série de la forme

$$(3) \quad u = f(z) = \frac{A_1}{z - a_1} + \frac{A_2}{z - a_2} + \dots = \sum \frac{A_r}{z - a_r},$$

les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A$ et a étant des constantes réelles ou imaginaires.

En posant $u = \frac{A_r}{z - a_r} + R_r(z)$, on aura

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{A_r^2}{(z - a_r)^2} + \frac{2 A_r R_r(z)}{z - a_r} + R_r^2(z), \\ u^3 &= \frac{A_r^3}{(z - a_r)^3} + \frac{3 A_r^2 R_r(z)}{(z - a_r)^2} + \frac{3 A_r R_r^2(z)}{z - a_r} + R_r^3(z), \\ u^4 &= \frac{A_r^4}{(z - a_r)^4} + \frac{4 A_r^3 R_r(z)}{(z - a_r)^3} + \frac{6 A_r^2 R_r^2(z)}{(z - a_r)^2} + \frac{4 A_r R_r^3(z)}{z - a_r} + R_r^4(z), \\ \left(\frac{du}{dz}\right)^2 &= \frac{A_r^2}{(z - a_r)^4} - \frac{2 A_r R_r'(z)}{(z - a_r)^2} + R_r'^2(z). \end{aligned}$$

Développons maintenant les fonctions u , u^2 , u^3 , u^4 , $\left(\frac{du}{dz}\right)^2$ dans le voisinage d'un pôle a_r , en substituant $a_r + \varepsilon$ au lieu de z .

Les fonctions $R_r(z)$ et $R_r^2(z)$, $R_r^3(z)$, $R_r^4(z)$, $R_r'(z)$ et $R_r'^2(z)$ étant holomorphes pour des valeurs suffisamment petites de ε , on pourra les développer d'après la formule de Maclaurin. En remplaçant $R_r(a_r)$, $R_r'(a_r)$, ... simplement par R , R' , ..., on obtient

$$R_r(a_r + \varepsilon) = R + R'\varepsilon + \frac{R''}{2}\varepsilon^2 + \frac{R'''}{6}\varepsilon^3 + \frac{R^{IV}}{24}\varepsilon^4 + \dots,$$

$$R_r^2(a_r + \varepsilon) = R^2 + 2RR'\varepsilon + (RR'' + R'^2)\varepsilon^2 + \left(\frac{1}{3}RR''' + R'R''\right)\varepsilon^3 + \dots,$$

$$R_r^3(a_r + \varepsilon) = R^3 + 3R^2R'\varepsilon + \left(\frac{3}{2}R^2R'' + 3RR'^2\right)\varepsilon^2 + \dots,$$

$$R_r^4(a_r + \varepsilon) = R^4 + 4R^3R'\varepsilon + \dots,$$

$$R_r'(a_r + \varepsilon) = R' + R''\varepsilon + \frac{R'''}{2}\varepsilon^2 + \frac{R^{IV}}{9}\varepsilon^3 + \dots,$$

$$R_r'^2(a_r + \varepsilon) = R'^2 + 2R'R''\varepsilon + \dots$$

et, par suite,

$$u = \frac{A_r}{\varepsilon} + R + R'\varepsilon + \dots,$$

$$u^2 = \frac{A_r^2}{\varepsilon^2} + \frac{2A_rR}{\varepsilon} + (2A_rR' + R^2) + (A_rR'' + 2RR')\varepsilon + \dots,$$

$$u^3 = \frac{A_r^3}{\varepsilon^3} + \frac{3A_r^2R}{\varepsilon^2} + \frac{3A_r^2R' + 3A_rR^2}{\varepsilon} + \left(\frac{3}{2}A_r^2R'' + 6A_rRR' + R^3\right) + \dots,$$

$$u^4 = \frac{A_r^4}{\varepsilon^4} + \frac{4A_r^3R}{\varepsilon^3} + \frac{4A_r^3R' + 6A_r^2R^2}{\varepsilon^2} + \frac{2A_r^3R'' + 12A_r^2RR' + 4AR^3}{\varepsilon} + \frac{2}{3}A_r^3R''' + 6A_r^2(RR'' + R'^2) + 12AR^2R' + R^4 + \dots,$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \frac{A_r^2}{\varepsilon^4} - \frac{2A_rR'}{\varepsilon^2} - \frac{2A_rR''}{\varepsilon} + (R'^2 - A_rR''') + \dots$$

Substituons, dans l'équation différentielle (2), à la place de u , u^2 , u^3 , u^4 , $\left(\frac{du}{dz}\right)^2$, les séries précédentes, et égalons les coefficients des mêmes puissances de ε dans les deux membres. Nous obtiendrons

ainsi

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} A_r^2 = A_r^2 C_4, \\ 0 = 4 A_r^3 R C_4 + A_r^3 C_3, \\ -2 A_r R' = (4 A_r^3 R' + 6 A_r^2 R^2) C_4 + 3 A_r^2 R C_3 + A_r^2 C_2, \\ -2 A_r R'' = (2 A_r^3 R'' + 12 A_r^2 R R' + 4 A_r R^3) C_4 \\ \quad + (3 A_r^2 R' + 3 A_r R^2) C_3 + 2 A_r R C_2 + A_r C_1, \\ R'^2 - A_r R''' = \left[\frac{2}{3} A_r^3 R''' + 6 A_r^2 (R R'' + R'^2) + 12 A_r R^2 R' + R^4 \right] C_4 \\ \quad + \left(\frac{3}{2} A_r^2 R'' + 6 A_r R R' + R^3 \right) C_3 + (2 A_r R' + R^2) C_2 + R C_1 + C_0, \\ \dots \end{array} \right.$$

ou, après une réduction facile,

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} 1 = A_r^2 C_4, \\ 0 = 4 R C_4 + C_3, \\ 0 = 6 A_r R' - 6 R^2 + A_r^2 C_2, \\ 0 = 4 R'' + 2 R^2 C_3 + 2 R C_2 + C_1, \\ 0 = \frac{5}{3} A_r R''' + 5 R'^2 - 3 R^2 (4 A_r R' + R^2) C_4 + (2 A_r R' + R^2) C_2 + R C_1 + C_0, \\ \dots \end{array} \right.$$

La première des équations (5) montre que la valeur de A_r^2 doit être constante, c'est-à-dire que les numérateurs des fractions de la série (3) devront tous avoir la même valeur absolue. La seconde fait voir que $R = R_r(a_r)$ doit avoir la même valeur pour tous les pôles a_r de la fonction u ; la troisième, quatrième et cinquième de ces équations apprennent respectivement que chacune des valeurs

$$A_r R'_r(a_r), \quad R''_r(a_r), \quad A_r R'''_r(a_r)$$

doit être constante, quel que soit le pôle a_r .

En étudiant les équations suivantes du même système (4), on reconnaît aisément qu'il faudra avoir toujours

$$R_r^{(2n)}(a_r) = \text{const.} \quad \text{et} \quad A_r R_r^{(2n+1)}(a_r) = \text{const.},$$

quel que soit le pôle a_r et quel que soit le nombre entier n .

En effet, en remarquant que $R_r(a_r)$ a une valeur constante, et en

désignant par (p) une fonction linéaire des fonctions

$$[R'_r(a_r)]^{p_1}, [R''_r(a_r)]^{p_2}, \dots, [R_r^{(p)}(a_r)]^{p_p},$$

où $p_1, p_2, \dots, p_p$ sont des nombres entiers qui satisfont à la relation

$$p_1 + p_2 + \dots + p_p = p,$$

on aura

$$\begin{aligned} R_r(a_r + \varepsilon) &= \Sigma(p) \varepsilon^p, \\ R_r^2(a_r + \varepsilon) &= \Sigma(p) \varepsilon^p, \\ R_r^3(a_r + \varepsilon) &= \Sigma(p) \varepsilon^p, \\ R_r^4(a_r + \varepsilon) &= \Sigma(p) \varepsilon^p, \\ R'_r(a_r + \varepsilon) &= \Sigma(p+1) \varepsilon^p, \\ R_r'^2(a_r + \varepsilon) &= \Sigma(p+2) \varepsilon^p; \end{aligned}$$

par suite, les coefficients de ε^p , dans les fonctions $u, u^2, u^3, u^4, \left(\frac{du}{dz}\right)^2$, seront respectivement

$$\begin{aligned} &(p), \\ &A_r(p+1) + (p), \\ &A_r^2(p+2) + A_r(p+1) + (p), \\ &A_r^3(p+3) + A_r^2(p+2) + A_r(p+1) + (p), \\ &A_r(p+3) + (p+2). \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation différentielle, on obtient, pour $p = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} A_r(p+3) + (p+2) &= C_1(p) + C_2[A_r(p+1) + (p)] \\ &\quad + C_3[A_r^2(p+2) + A_r(p+1) + (p)] \\ &\quad + C_4[A_r^3(p+3) + A_r^2(p+2) + A_r(p+1) + (p)]. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant la condition $A_r^2 = \text{const.}$, et remarquons que $(C_1 + C_2 + C_3 + C_4)(p)$ est encore une fonction (p) , La dernière équation prend la forme plus simple

$$A_r(p+3) = (p) + A_r(p+1) + (p+2).$$

Les cinq premières équations (4) nous ayant appris que

$$A_r(1) = \text{const.}, \quad (2) = \text{const.} \quad \text{et} \quad A_r(3) = \text{const.},$$

l'équation précédente montre qu'il faut avoir de même

$$(4) = \text{const.}, \quad A_r(5) = \text{const.}, \quad \dots$$

Pour mettre en évidence les deux espèces de pôles possibles, nous posons

$$A_r^2 = \text{const.} = A^2$$

et

$$(6) \quad u = f(z) = \sum \left(\frac{A}{z - a_r} - \frac{A}{z - b_r} \right).$$

Dans le voisinage d'un pôle de chacune des deux espèces, on aura donc

$$R_r(z) = f(z) - \frac{A}{z - a_r} = R_r(a_r) + (z - a_r) R'_r(a_r) + \frac{(z - a_r)^2}{1.2} R''_r(a_r) + \dots$$

et

$$R_r(z) = f(z) + \frac{A}{z - b_r} = R_r(b_r) + (z - b_r) R'_r(b_r) + \frac{(z - b_r)^2}{1.2} R''_r(b_r) + \dots,$$

ou, en introduisant les propriétés trouvées et posant

$$(7) \quad \begin{aligned} & R_r(a_r) = R_r(b_r) = N_0 = \text{const.}, \\ & AR'_r(a_r) = -AR'_r(b_r) = N_1 = \text{const.}, \\ & R''_r(a_r) = R''_r(b_r) = 1.2 N_2 = \text{const.}, \\ & AR'''_r(a_r) = -AR'''_r(b_r) = 1.2.3 N_3 = \text{const.}, \\ & \dots\dots\dots, \\ & \left\{ \begin{aligned} R_r(z) &= N_0 + \frac{N_1}{A} (z - a_r) + N_2 (z - a_r)^2 + \frac{N_3}{A} (z - a_r)^3 + \dots, \\ R_r(z) &= N_0 - \frac{N_1}{A} (z - b_r) + N_2 (z - b_r)^2 - \frac{N_3}{A} (z - b_r)^3 + \dots \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Il est facile de déduire des dernières séries une propriété caractéristique de la fonction $u = f(z)$. Pour cela, représentons deux pôles de même espèce, a_r et a_{r+1} , par deux points dans un plan, et menons par ces points deux parallèles de même longueur, aboutissant aux points z_1 et z_2 , de sorte qu'on ait

$$z_1 - a_r = z_2 - a_{r+1} = t;$$

alors on aura

$$f(z_1) = \frac{A}{t} + N_0 + \frac{N_1}{A} t + N_2 t^2 + \dots,$$

$$f(z_2) = \frac{A}{t} + N_0 + \frac{N_1}{A} t + N_2 t^2 + \dots$$

Dans le cercle de convergence de la série

$$N_0 + \frac{N_1}{A} t + N_2 t^2 + \dots,$$

on aura donc

$$f(z_1) = f(z_2).$$

La même chose aura lieu quand on mène deux parallèles de même longueur et de même direction par deux pôles b_r et b_{r+1} .

Considérons maintenant deux pôles a_r et b_r de différente espèce, et posons

$$z_1 - a_r = b_r - z_2 = t.$$

Dans ce cas, on aura encore

$$f(z_1) = \frac{A}{t} + N_0 + \frac{N_1}{A} t + N_2 t^2 + \dots,$$

$$f(z_2) = \frac{A}{t} + N_0 + \frac{N_1}{A} t + N_2 t^2 + \dots$$

La fonction passera donc par les mêmes valeurs dans les points correspondants de deux droites parallèles de même direction menées par tous les points a , et dans les points correspondants de deux parallèles de direction opposée menées par un point a et un point b . Quoique cette propriété n'ait été prouvée qu'entre des limites convenables, on voit bien qu'elle aura lieu généralement; car on sait, d'après un théorème dû à Riemann, que si deux fonctions uniformes qui ont un nombre quelconque, fini ou infini, de pôles ou points singuliers essentiels, coïncident le long d'un élément de grandeur finie, aussi petit qu'on le veut, elles sont nécessairement identiques.

Occupons-nous maintenant de la distribution des pôles dans le plan, et supposons d'abord que la ligne qui joint deux pôles a et la ligne qui joint deux pôles b ont la même direction. Dans ce cas, il suffit de connaître un pôle a_r et deux pôles a_{r+1} et b_r , les plus rapprochés du premier, pour en déduire tous les autres.

En effet, dans ce cas, tous les points

$$a_r + n(a_{r+1} - a_r),$$

$$b_r + n(a_{r+1} - a_r),$$

n étant un nombre entier, situés sur deux parallèles menées par a_r et b_r seront des pôles : les premiers, des pôles du système a ; les seconds, des pôles du système b . En prolongeant les droites $a_r b_r$, $a_{r+1} b_{r+1}$, ... de part et d'autre à l'infini, le plan sera divisé en bandes égales; aux points correspondants de ces différentes bandes, la fonction reprendra les mêmes valeurs, tandis que, dans une bande, elle aura la même valeur aux points

$$a_r + z$$

et

$$b_{r+1} - z.$$

Soient $a_r = x$, $b_r = y$, $a_{r+1} - a_r = \omega$, on aura

$$(8) \quad u = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{z - x - m\omega} - \frac{A}{x - y - m\omega} \right),$$

m étant un nombre entier. Dans l'hypothèse que nous avons faite, on voit que la fonction u sera une fonction simplement périodique ayant deux infinis dans chaque bande. Ajoutons encore que les pôles b_r , b_{r+1} , ... pourraient être situés sur la droite qui joint les pôles a_r , a_{r+1} , ...; dans ce cas, la direction des bandes serait arbitraire.

Jusqu'à présent, nous avons admis que la droite qui joint deux pôles b avait la même direction que la droite qui joint deux pôles a .

Supposons, en second lieu, que ces directions soient différentes. Dans ce cas, il suffit de connaître deux pôles consécutifs du système a et deux pôles consécutifs du système b . Posons, dans ce cas,

$$\begin{aligned} a_r &= x, & a_{r+1} - a_r &= \omega, \\ b_r &= y, & b_{r+1} - b_r &= \omega', \end{aligned}$$

et marquons sur le plan de représentation les points $x + m\omega + n\omega'$ et $y + m\omega + n\omega'$, m et n étant des nombres entiers; il est évident que les premiers seront tous les pôles du système a , les seconds tous les pôles du système b .

En menant par le point x et les points $x + \omega$ et $x + \omega'$ deux droites, et par tous les points $x + n\omega'$ et $x + m\omega$ des droites respectivement parallèles aux premières et aux secondes, on divisera le plan en parallélogrammes égaux. D'après la propriété de la fonction que nous

avons trouvée, on voit donc que la fonction reprendra la même valeur aux points homologues de ces divers parallélogrammes. Elle possédera donc deux périodes ω et ω' , et passera, dans chaque parallélogramme, deux fois par la même valeur. En effet, la fonction aura la même valeur aux points

$$a_r + z \quad \text{et} \quad b_r - z$$

ou

$$x + z \quad \text{et} \quad y - z.$$

Si le dernier point n'était pas situé dans le même parallélogramme que le premier point, on pourra toujours l'y ramener en ajoutant quelque multiple des périodes.

La fonction peut être représentée, dans ce cas, par

$$(9) \quad u = f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{z - x - m\omega - n\omega'} - \frac{A}{z - y - m\omega - n\omega'} \right).$$

Considérons maintenant les deux cas séparément.

Premier cas. — D'après ce qui précède, la fonction u aura la forme

$$(8) \quad u = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{z - x - m\omega} - \frac{A}{z - y - m\omega} \right).$$

Avec la formule connue

$$(10) \quad \cot z = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - m\pi},$$

on réduira l'équation (8) à

$$(11) \quad u = A \frac{\pi}{\omega} \left[\cot \frac{\pi(z-x)}{\omega} - \cot \frac{\pi(z-y)}{\omega} \right].$$

Pour déterminer les quantités x , y , ω , A en fonction des coefficients C de l'équation différentielle (2), nous allons calculer les quantités constantes

$$R_r(a_r), \quad A_r R'_r(a_r), \quad R''_r(a_r) \quad \text{et} \quad A_r R'''_r(a_r).$$

D'après la définition, on a

$$R_r(z) = u - \frac{A_r}{z - a_r} = u - \frac{A}{z - x - m\omega}$$

ou, pour $z = x + m\omega + \varepsilon$,

$$\begin{aligned} R_r(x + m\omega + \varepsilon) &= A \frac{\pi}{\omega} \left[\cot \frac{\pi \varepsilon}{\omega} - \cot \frac{\pi}{\omega} (x - y + \varepsilon) \right] - \frac{A}{\varepsilon} \\ &= A \frac{\pi}{\omega} \left[\left(-\frac{1}{3} \frac{\pi}{\omega} \varepsilon - \frac{1}{45} \frac{\pi^3}{\omega^3} \varepsilon^3 - \dots \right) - \cot \frac{\pi}{\omega} (x - y) \right. \\ &\quad + \frac{\pi}{\omega} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{\omega} (x - y)} \varepsilon - \frac{\pi^2}{\omega^2} \frac{\cos \frac{\pi}{\omega} (x - y)}{\sin^3 \frac{\pi}{\omega} (x - y)} \varepsilon^2 \\ &\quad \left. + \frac{\pi^3}{3 \omega^3} \frac{1 + 2 \cos^2 \frac{\pi}{\omega} (x - y)}{\sin^4 \frac{\pi}{\omega} (x - y)} \varepsilon^3 + \dots \right], \\ R'_r(x + m\omega + \varepsilon) &= A \frac{\pi}{\omega} \left[\left(-\frac{1}{3} \frac{\pi}{\omega} - \frac{1}{15} \frac{\pi^3}{\omega^3} \varepsilon^2 - \dots \right) + \frac{\pi}{\omega} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{\omega} (x - y)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \pi^2}{\omega^2} \frac{\cos \frac{\pi}{\omega} (x - y)}{\sin^3 \frac{\pi}{\omega} (x - y)} \varepsilon + \frac{\pi^3}{\omega^3} \frac{1 + 2 \cos^2 \frac{\pi}{\omega} (x - y)}{\sin^4 \frac{\pi}{\omega} (x - y)} \varepsilon^2 + \dots \right], \\ R''_r(x + m\omega + \varepsilon) &= A \frac{\pi}{\omega} \left[\left(-\frac{2}{15} \frac{\pi^3}{\omega^3} \varepsilon - \dots \right) - \frac{2 \pi^2}{\omega^2} \frac{\cos \frac{\pi}{\omega} (x - y)}{\sin^3 \frac{\pi}{\omega} (x - y)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \pi^3}{\omega^3} \frac{1 + 2 \cos^2 \frac{\pi}{\omega} (x - y)}{\sin^4 \frac{\pi}{\omega} (x - y)} \varepsilon + \dots \right], \\ R'''_r(x + m\omega + \varepsilon) &= A \frac{\pi}{\omega} \left[\left(-\frac{2}{15} \frac{\pi^3}{\omega^3} - \dots \right) + \frac{2 \pi^3}{\omega^3} \frac{1 + 2 \cos^2 \frac{\pi}{\omega} (x - y)}{\sin^4 \frac{\pi}{\omega} (x - y)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

En substituant, dans ces équations, $\varepsilon = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} R &= R_r(\alpha_r) = -A \frac{\pi}{\omega} \cot(x - \gamma), \\ A_r R' &= A R'_r(\alpha_r) = A^2 \frac{\pi^2}{\omega^2} \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{\omega} (x - \gamma)} \right], \\ R'' &= R''_r(\alpha_r) = -2A \frac{\pi^3}{\omega^3} \frac{\cos \frac{\pi}{\omega} (x - \gamma)}{\sin^3 \frac{\pi}{\omega} (x - \gamma)}, \\ A_r R''' &= A R'''_r(\alpha_r) = 2A^2 \frac{\pi^4}{\omega^4} \left[-\frac{1}{15} + \frac{1 + 2 \cos^2 \frac{\pi}{\omega} (x - \gamma)}{\sin^4 \frac{\pi}{\omega} (x - \gamma)} \right]. \end{aligned}$$

Ces valeurs, substituées dans les cinq premières équations (5) ou dans les suivantes,

$$(12) \quad \begin{cases} C_4 = \frac{1}{A^2}, \\ C_3 = -4 \frac{R}{A^2}, \\ C_2 = \frac{6(R^2 - A_r R')}{A_r^2}, \\ C_1 = -4R'' - \frac{4R^3}{A_r^2} + \frac{12RR'}{A_r}, \\ C_0 = -\frac{5}{3} A_r R''' + 4RR'' + 7R'^2 - \frac{6R^2 R'}{A_r} + \frac{R^4}{A_r}, \end{cases}$$

donnent

$$(13) \quad \begin{cases} C_4 = \frac{1}{A^2}, \\ C_3 = \frac{4}{A} \frac{\pi}{\omega} \cot \frac{\pi}{\omega} (x - \gamma), \\ C_2 = -4 \frac{\pi^2}{\omega^2}, \\ C_1 = 0, \\ C_0 = 0. \end{cases}$$

Dans l'hypothèse que nous avons faite, l'équation différentielle se réduit à

$$(14) \quad \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = C_2 u^2 + C_3 u^3 + C_4 u^4.$$

Si donc cette équation possède une intégrale de la forme (3), cette intégrale sera

$$u = A \frac{\pi}{\omega} \left[\cot \frac{\pi(z-x)}{\omega} - \cot \frac{\pi(z-y)}{\omega} \right],$$

une fonction simplement périodique dont le facteur A , la période ω et la situation relative des deux infinis d'une bande seront déterminés en fonction des coefficients C_2, C_3, C_4 par les équations (13). La quantité x sera donnée par la condition initiale.

On vérifiera aisément que la fonction (11) satisfait à l'équation différentielle (14) à l'aide des équations (13).

Second cas. — Dans ce cas, la fonction u aura la forme

$$(9) \quad u = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{z-x-m\omega-n\omega'} - \frac{A}{z-y-m\omega-n\omega'} \right)$$

ou, d'après la formule (10),

$$u = A \frac{\pi}{\omega} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\cot \frac{\pi}{\omega} (z-x-n\omega') - \cot \frac{\pi}{\omega} (z-y-n\omega') \right].$$

En introduisant une nouvelle fonction

$$\begin{aligned} Z_1(z) &= \frac{\pi}{\omega} \sum_{-\infty}^{\infty} \cot \frac{\pi}{\omega} (z-n\omega') \\ &= \frac{\pi}{\omega} \cot \frac{\pi z}{\omega} + \frac{\pi}{\omega} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\cot \frac{\pi}{\omega} (z-n\omega') + \cot \frac{\pi}{\omega} (z+n\omega') \right] \end{aligned}$$

ou

$$(15) \quad Z_1(z) = \frac{\pi}{\omega} \cot \frac{\pi z}{\omega} + 4 \frac{\pi}{\omega} \sin \frac{2\pi z}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - 2q^{2n} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}},$$

où $q = e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}}$, on obtient

$$(16) \quad u = f(z) = A [Z_1(z - x) - Z_1(z - y)].$$

Remarquons que la série, dans le second membre de l'équation (15), est absolument convergente quand $\text{mod } q < 1$ ⁽¹⁾. Pour que cette condition soit vérifiée, il faut donc que, en posant

$$\frac{\omega'}{\omega} = r + si,$$

s soit une quantité positive.

La fonction $Z_1(z)$, qui s'introduit ici d'une manière naturelle, possède les propriétés suivantes :

$$(17) \quad \begin{cases} Z_1(z + \omega) = Z_1(z), \\ Z_1(z + \omega') = -\frac{2\pi i}{\omega} + Z_1(z). \end{cases}$$

Déterminons maintenant les quantités constantes

$$R_r(a_r), \quad A_r R'_r(a_r), \quad R''(a_r), \quad A_r R'''(a_r).$$

D'après la définition, on a

$$R_r(z) = f(z) - \frac{A}{z - x - m\omega - n\omega'};$$

en posant

$$z = x + m\omega + n\omega' + \varepsilon,$$

on obtient donc

$$R_r(a_r + \varepsilon) = A [Z_1(z - x) - Z_1(z - y)]_{z=x+m\omega+n\omega'+\varepsilon} - \frac{A}{\varepsilon}.$$

Dans cette équation

$$Z_1(m\omega + n\omega' + \varepsilon) = -\frac{2\pi ni}{\omega} + Z_1(\varepsilon)$$

et

$$Z_1(x - y + m\omega + n\omega' + \varepsilon) = -\frac{2\pi ni}{\omega} + Z_1(x - y + \varepsilon),$$

par suite

$$R_r(a_r + \varepsilon) = A \left[Z_1(\varepsilon) - Z_1(x - y + \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \right].$$

⁽¹⁾ EISENSTEIN, *Journal de Crelle*, t. 35.

Soit maintenant

$$Z_1(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} = b_1\varepsilon + b_3\varepsilon^3 + b_5\varepsilon^5 + \dots,$$

l'équation précédente se réduit à

$$R_r(\alpha_r + \varepsilon) = A \left[b_1\varepsilon + b_3\varepsilon^3 + \dots - Z_1(x-y) - Z'(x-y)\varepsilon - \frac{Z''(x-y)}{2}\varepsilon^2 - \dots \right],$$

d'où

$$(18) \quad \begin{cases} R = R_r(\alpha_r) = -AZ_1(x-y), \\ A_r R' = A_r R'_r(\alpha_r) = A^2[b_1 - Z'_1(x-y)], \\ R'' = R''_r(\alpha_r) = -AZ'_1(x-y), \\ A_r R''' = A_r R'''_r(\alpha_r) = A^2[6b_3 - Z'''_1(x-y)]. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans les cinq premières équations (5) ou dans les équations (12), on obtient, quand on met simplement Z_1 au lieu de $Z_1(x-y)$, ... ,

$$(19) \quad \begin{cases} C_4 = \frac{1}{A^2}, \\ C_3 = \frac{4}{A} Z_1, \\ C_2 = 6(Z'_1 + Z_1^2 - b_1), \\ C_1 = 4A(Z''_1 + 3Z_1 Z'_1 + Z_1^3 - 3b_1 Z_1), \\ C_0 = A^2 \left(\frac{5}{3} Z'''_1 + 4Z_1 Z''_1 + 7Z_1'^2 - 14b_1 Z'_1 + 7b_1^2 + 6Z_1^2 Z'_1 - 6b_1 Z_1^2 + Z_1^4 - 10b_3 \right). \end{cases}$$

Ces équations, qui déterminent les inconnues en fonction des coefficients de l'équation différentielle, sont bien difficiles à résoudre. C'est pourquoi nous allons suivre un autre chemin, pour revenir ensuite sur ces équations remarquables.

L'équation (16), avec la première des équations (19), nous apprend que l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz} \right)^2 = G^2(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)(u-\delta)$$

peut être satisfaite par

$$u = \frac{1}{G} [Z_1(z-x) - Z_1(z-y)].$$

Les valeurs de z , pour lesquelles $\frac{du}{dz} = 0$, satisfont à l'équation

$$Z_1'(z-x) = Z_1'(z-y).$$

Or, $Z_1'(z)$ étant une fonction doublement périodique de quatrième ordre, aux périodes ω et ω' , qui satisfait aux équations

$$\begin{aligned} Z_1'(-z) &= Z_1'(z), \\ Z_1'(\omega - z) &= Z_1'(z), \\ Z_1'(\omega' - z) &= Z_1'(z), \\ Z_1'(\omega + \omega' - z) &= Z_1'(z), \end{aligned}$$

on trouve les quatre solutions

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} z &= A_1 = \frac{x+y}{2}, \\ z &= A_2 = \frac{x+y}{2} + \frac{\omega}{2}, \\ z &= A_3 = \frac{x+y}{2} + \frac{\omega'}{2}, \\ z &= A_4 = \frac{x+y}{2} + \frac{\omega + \omega'}{2}. \end{aligned} \right.$$

Il est évident qu'on peut ajouter à ces solutions autant de multiples des périodes qu'on veut, et qu'il y aura quatre solutions dans chaque parallélogramme; par suite, nous pourrions admettre que les solutions précédentes soient situées dans le premier parallélogramme.

D'autre part, les valeurs de u correspondant à ces quatre solutions sont $u = \alpha$, $u = \beta$, $u = \gamma$, $u = \delta$, comme on le déduit immédiatement de l'équation différentielle.

Posons donc

$$\alpha = \frac{1}{G} [Z_1(A_1 - x) - Z_1(A_1 - y)],$$

$$\beta = \frac{1}{G} [Z_1(A_2 - x) - Z_1(A_2 - y)],$$

$$\gamma = \frac{1}{G} [Z_1(A_3 - x) - Z_1(A_3 - y)],$$

$$\delta = \frac{1}{G} [Z_1(A_4 - x) - Z_1(A_4 - y)],$$

ou

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{1}{G} \int_0^x \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)(u-\delta)}} = A_1, \\ \frac{1}{G} \int_0^\beta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)(u-\delta)}} = A_2, \\ \frac{1}{G} \int_0^\gamma \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)(u-\delta)}} = A_3, \\ \frac{1}{G} \int_0^\delta \frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)(u-\delta)}} = A_4, \end{cases}$$

les équations (20) déterminent les périodes ω et ω' en fonction des intégrales A_1, A_2, A_3, A_4 .

En effet, on aura

$$(22) \quad \begin{cases} \omega = 2A_2 - 2A_1, \\ \omega' = 2A_3 - 2A_1, \end{cases}$$

et la relation linéaire entre ces intégrales

$$A_1 - A_2 - A_3 + A_4 = 0.$$

D'après la méthode même que nous avons suivie, il est évident que les chemins d'intégration des intégrales (21) sont tels qu'ils ne renferment aucun des points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Quant à la limite inférieure, nous avons admis la condition initiale $u = 0$ pour $z = 0$.

On déterminera les infinies x et y par les formules

$$(23) \quad \begin{cases} x + y = 2A_1, \\ Z_1(x) = Z_1(2A_1 - x), \end{cases}$$

dont la dernière se déduit de la condition initiale.

Pour vérifier que la fonction (16), dans laquelle les constantes sont déterminées par les équations (19), satisfait à l'équation différentielle (2), nous allons développer les fonctions $u^2, u^3, u^4, \left(\frac{du}{dz}\right)^2$, où

$$u = \Lambda [Z_1(z - x) - Z_1(z - y)],$$

suivant un théorème de M. Hermite.

D'après ce théorème, toute fonction $f(z)$ méromorphe aux périodes ω et ω' s'exprime linéairement au moyen de la fonction $Z_1(z)$ et de ses dérivées.

Supposons que la fonction $f(z)$ n'ait que deux pôles x et y , d'ordre 4 dans un parallélogramme de périodes, et qu'au voisinage de ces pôles

$$f(x + \varepsilon) = \frac{A_4}{\varepsilon^4} + \frac{A_3}{\varepsilon^3} + \frac{A_2}{\varepsilon^2} + \frac{A_1}{\varepsilon} + A_0 + \dots,$$

$$f(y + \varepsilon) = \frac{B_4}{\varepsilon^4} + \frac{B_3}{\varepsilon^3} + \frac{B_2}{\varepsilon^2} + \frac{B_1}{\varepsilon} + B_0 + \dots,$$

on aura, K étant une constante,

$$(23) \quad \begin{cases} f(z) = K + A_1 Z_1(z-x) - A_2 Z_1'(z-x) + \frac{A_3}{2} Z_1''(z-x) - \frac{A_4}{6} Z_1'''(z-x) \\ \quad + B_1 Z_1(z-y) - B_2 Z_1'(z-y) + \frac{B_3}{2} Z_1''(z-y) - \frac{B_4}{6} Z_1'''(z-y). \end{cases}$$

En posant dans cette équation

$$z = x + \varepsilon,$$

$$Z_1(z-x) = \frac{1}{\varepsilon} + b_1 \varepsilon + b_3 \varepsilon^3 + \dots,$$

$$Z_1'(z-x) = -\frac{1}{\varepsilon^2} + b_1 + 3b_3 \varepsilon^2 + \dots,$$

$$Z_1''(z-x) = \frac{2}{\varepsilon^3} + 6b_3 \varepsilon + \dots,$$

$$Z_1'''(z-x) = -\frac{6}{\varepsilon^4} + 6b_3 + \dots,$$

$$\begin{aligned} Z_1(z-y) &= Z_1(x-y) + \varepsilon Z_1'(x-y) + \dots \\ &= Z_1 + \varepsilon Z_1' + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et égalant les termes indépendants de ε , on aura

$$(24) \quad K = A_0 + A_2 b_1 + A_4 b_3 - B_1 Z_1 + B_2 Z_1' - \frac{B_3}{2} Z_1'' + \frac{B_4}{6} Z_1'''.$$

En développant

$$u = u(z) = A [Z_1(z-x) - Z_1(z-y)]$$

pour $z = x + \varepsilon$ et $z = y + \varepsilon$, et introduisant les quantités R, R', R'', R''' déterminées par les équations (18), on obtient

$$u(x + \varepsilon) = \frac{A}{\varepsilon} + R + R'\varepsilon + \frac{1}{2}R''\varepsilon^2 + \frac{1}{6}R'''\varepsilon^3 + \dots,$$

$$u(y + \varepsilon) = -\frac{A}{\varepsilon} + R - R'\varepsilon + \frac{1}{2}R''\varepsilon^2 - \frac{1}{6}R'''\varepsilon^3 + \dots,$$

desquelles on déduira, comme précédemment,

$$u^2(x + \varepsilon) = \frac{A^2}{\varepsilon^2} + \frac{2AR}{\varepsilon} + 2AR' + R^2 + \dots,$$

$$u^2(y + \varepsilon) = \frac{A^2}{\varepsilon^2} - \frac{2AR}{\varepsilon} + 2AR' + R^2 + \dots,$$

$$u^3(x + \varepsilon) = \frac{A^3}{\varepsilon^3} + \frac{3A^2R}{\varepsilon^2} + \frac{3A^2R' + 3AR^2}{\varepsilon} + \frac{3}{2}A^2R'' + 6ARR' + R^3 + \dots,$$

$$u^3(y + \varepsilon) = -\frac{A^3}{\varepsilon^3} + \frac{3A^2R}{\varepsilon^2} - \frac{3A^2R' + 3AR^2}{\varepsilon} + \frac{3}{2}A^2R'' + 6ARR' + R^3 + \dots,$$

$$u^4(x + \varepsilon) = \frac{A^4}{\varepsilon^4} + \frac{4A^3R}{\varepsilon^3} + \frac{4A^3R' + 6A^2R^2}{\varepsilon^2} + \frac{2A^3R'' + 12A^2RR' + 4AR^3}{\varepsilon} + \frac{2}{3}A^3R''' + 6A^2(RR'' + R'^2) + 12AR^2R' + R^4 + \dots,$$

$$u^4(y + \varepsilon) = \frac{A^4}{\varepsilon^4} - \frac{4A^3R}{\varepsilon^3} + \frac{4A^3R' + 6A^2R^2}{\varepsilon^2} - \frac{2A^3R'' + 12A^2RR' + 4AR^3}{\varepsilon} + \frac{2}{3}A^3R''' + 6A^2(RR'' + R'^2) + 12AR^2R' + R^4 + \dots,$$

$$u'^2(x + \varepsilon) = \frac{A^2}{\varepsilon^4} - \frac{2AR'}{\varepsilon^2} - \frac{2AR''}{\varepsilon} + R'^2 - AR''' + \dots,$$

$$u'^2(y + \varepsilon) = \frac{A^2}{\varepsilon^4} - \frac{2AR'}{\varepsilon^2} + \frac{2AR''}{\varepsilon} + R'^2 - AR''' + \dots$$

En appliquant maintenant les formules (23) et (24), on obtiendra

$$u^2 = K_2 + 2ARZ_1(z-x) - A^2Z'_1(z-x) \\ - 2ARZ_1(z-y) - A^2Z'_1(z-y),$$

$$u^3 = K_3 + (3A^2R' + 3AR^2)Z_1(z-x) - 3A^2RZ'_1(z-x) + \frac{A^3}{2}Z''_1(z-x) \\ - (3A^2R' + 3AR^2)Z_1(z-y) - 3A^2RZ'_1(z-y) - \frac{A^3}{2}Z''_1(z-y),$$

$$u^4 = K_4 + (2A^3R'' + 12A^2RR' + 4AR^3)Z_1(z-x) \\ - (2A^3R'' + 12A^2RR' + 4AR^3)Z_1(z-y) \\ - (4A^3R' + 6A^2R^2)Z'_1(z-x) + 2A^3RZ''_1(z-x) \\ - (4A^3R' + 6A^2R^2)Z'_1(z-y) - 2A^3RZ''_1(z-y) \\ - \frac{1}{6}A^4Z'''_1(z-x) \\ - \frac{1}{6}A^4Z'''_1(z-y),$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = K_0 - 2AR''Z_1(z-x) + 2AR'Z'_1(z-x) - \frac{A^2}{6}Z'''_1(z-x) \\ + 2AR''Z_1(z-y) + 2AR'Z'_1(z-y) - \frac{A^2}{6}Z'''_1(z-y)$$

et

$$K_2 = 2AR' + R^2 + A^2b_1 + 2ARZ_1 + A^2Z'_1$$

$$K_3 = \frac{3}{2}A^2R'' + 6ARR' + R^3 + 3A^2Rb_1 + (3A^2R' + 3AR^2)Z_1 \\ + 3A^2RZ'_1 + \frac{A^3}{2}Z''_1,$$

$$K_4 = \frac{2}{3}A^3R''' + 6A^2(RR'' + R'^2) + 12A^2RR' + R^4 + (4A^3R' + 6A^2R^2)b_1 \\ + A^4b_3 + (2A^3R'' + 12A^2RR' + 4AR^3)Z_1 + (4A^3R' + 6A^2R^2)Z'_1 \\ + 2A^3RZ''_1 + \frac{A^4}{6}Z'''_1,$$

$$K_0 = R'^2 - AR''' - 2AR'b_1 + A^2b_3 - 2AR''Z_1 - 2AR'Z'_1 + \frac{A^2}{6}Z'''_1.$$

En substituant ces valeurs dans les deux membres de l'équation différentielle et ayant égard aux équations (5) qui déterminent les relations entre les quantités R et les coefficients C, et à la première des équations (18), l'identité des deux membres est évidente. Remarquons

encore que, d'après la méthode ingénieuse de Riemann, on sait que le coefficient de la partie imaginaire de $\frac{\omega'}{z}$ a une valeur positive ⁽¹⁾.

De la même manière, on peut traiter l'équation différentielle

$$(25) \quad \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = C_0 + C_1 u + C_2 u^2 + C_3 u^3.$$

En posant

$$u = \sum \frac{A_r}{z - a_r}$$

ou

$$u = \sum \left[\frac{A_r}{(z - a_r)^2} + \frac{B_r}{z - a_r} \right],$$

on serait conduit à une absurdité, à moins que $B_i = 0$.

Supposons donc qu'on pourrait satisfaire à l'équation différentielle par

$$u = \sum \frac{A_r}{(z - a_r)^2}.$$

En suivant le même chemin que précédemment, on obtiendra

$$A_r = \text{const.} = A$$

et

$$u = -AZ'_1(z - x),$$

où x est un infini du second ordre dans un parallélogramme des périodes.

Les relations entre les inconnues et les coefficients sont maintenant

$$(27) \quad \begin{cases} C_3 = \frac{4}{A}, \\ C_2 = 12b_1, \\ C_1 = 12A(b_1^2 + 5b_3), \\ C_0 = 4A^2(35b_5 + 15b_1b_3 + b_1^3). \end{cases}$$

Au lieu de résoudre ces équations directement, nous déterminerons

⁽¹⁾ KOENIGSBERGER, *Ell. Funct.*, I, p. 299.

les quantités ω , ω' et x d'une manière plus simple. En écrivant l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G^2(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma),$$

on voit que $\frac{du}{dz} = 0$ pour $u = \alpha$, $u = \beta$ et $u = \gamma$. D'autre part, on déduit de

$$u = -\frac{4}{G^2} Z_1'(z - x),$$

que les valeurs pour lesquelles $\frac{du}{dz} = 0$ satisfont à l'équation

$$Z_1''(z - x) = 0.$$

En négligeant des multiples de périodes, on aura

$$(28) \quad \begin{cases} z = A'_1 = x + \frac{\omega}{2}, \\ z = A'_2 = x + \frac{\omega'}{2}, \\ z = A'_3 = x + \frac{\omega + \omega'}{2}, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \int_0^{\alpha} \frac{du}{\sqrt{(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)}} &= A'_1, \\ \frac{1}{G} \int_0^{\beta} \frac{du}{\sqrt{(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)}} &= A'_2, \\ \frac{1}{G} \int_0^{\gamma} \frac{du}{\sqrt{(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)}} &= A'_3, \end{aligned}$$

Des équations (28), on déduira

$$(29) \quad \omega = 2A'_3 - 2A'_2, \quad \omega' = 2A'_3 - 2A'_1,$$

tandis que la quantité x sera déterminée par la condition initiale $u = 0$ pour $z = 0$ ou par l'équation

$$(30) \quad x = A'_1 + A'_2 - A'_3.$$

On vérifiera, comme précédemment, que

$$u = -A Z_1'(z - x),$$

dans laquelle les constantes sont déterminées par les équations (27), satisfait à l'équation différentielle (25).

Revenons maintenant aux équations (19) et (27), et introduisons, pour les résoudre directement, trois fonctions définies par les équations

$$(31) \quad \begin{cases} Z_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right) &= Z_2(z), \\ Z_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{\pi i}{\omega} + Z(z), \\ Z_1\left(z + \frac{\omega + \omega'}{2}\right) &= -\frac{\pi i}{\omega} + Z_3(z). \end{cases}$$

Ces fonctions, développées d'après l'équation (15), donnent les séries suivantes :

$$(32) \quad \begin{cases} Z_2(z) = -\frac{\pi}{\omega} \operatorname{tang} \frac{\pi z}{\omega} - 4 \frac{\pi}{\omega} \sin \frac{2\pi z}{\omega} \sum_1^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 + 2q^{2n} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}}, \\ Z(z) = 4 \frac{\pi}{\omega} \sin \frac{2\pi z}{\omega} \sum_1^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 - 2q^{2n-1} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n-2}}, \\ Z_3(z) = -4 \frac{\pi}{\omega} \sin \frac{2\pi z}{\omega} \sum_1^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 + 2q^{2n-1} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n-2}}. \end{cases}$$

En ajoutant les équations (15) et (32), on obtient

$$(33) \quad Z_1(z) + Z_2(z) + Z(z) + Z_3(z) = 2Z_1(2z).$$

Pour trouver encore d'autres relations, introduisons les abréviations

$$\begin{aligned} S_1(z) &= Z_1(z) + Z_2(z) + Z(z) + Z_3(z), \\ S_2(z) &= Z_1(z) Z_2(z) + Z_1(z) Z(z) + Z_1(z) Z_3(z) \\ &\quad + Z_2(z) Z(z) + Z_2(z) Z_3(z) + Z(z) Z_3(z), \\ S_3(z) &= Z_1(z) Z_2(z) Z(z) + Z_1(z) Z_2(z) Z_3(z) \\ &\quad + Z_1(z) Z(z) Z_3(z) + Z_2(z) Z(z) Z_3(z), \\ S_4(z) &= Z_1(z) Z_2(z) Z(z) Z_3(z), \end{aligned}$$

et remarquons que, d'après les relations

$$\begin{aligned} Z_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right) &= Z_2(z), & Z_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{\pi i}{\omega} + Z(z), \\ Z_2\left(z + \frac{\omega}{2}\right) &= Z_1(z), & Z_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{\pi i}{\omega} + Z_3(z), \\ Z\left(z + \frac{\omega}{2}\right) &= Z_3(z), & Z\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{\pi i}{\omega} + Z_1(z), \\ Z_3\left(z + \frac{\omega}{2}\right) &= Z(z), & Z_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{\pi i}{\omega} + Z_2(z), \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} S_1\left(z + \frac{\omega}{2}\right) &= S_1(z), & S_1\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{4\pi i}{\omega} + S_1(z), \\ S_2\left(z + \frac{\omega}{2}\right) &= S_2(z), & S_2\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= -\frac{6\pi^2}{\omega^2} - \frac{3\pi i}{\omega} S_1(z) + S_2(z), \\ S_3\left(z + \frac{\omega}{2}\right) &= S_3(z), & S_3\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= 4\frac{\pi^3 i}{\omega^3} - 3\frac{\pi^2}{\omega^2} S_1(z) - \frac{2\pi i}{\omega} S_2(z) + S_3(z), \\ S_4\left(z + \frac{\omega}{2}\right) &= S_4(z), & S_4\left(z + \frac{\omega'}{2}\right) &= \frac{\pi^4}{\omega^4} + \frac{\pi^3 i}{\omega^2} S_1(z) - \frac{\pi^2}{\omega^2} S_2(z) - \frac{\pi i}{\omega} S_3(z) + S_4(z). \end{aligned}$$

Considérons maintenant les trois fonctions

$$(34) \quad \begin{cases} \varphi(z) = 8 S_2(z) - 3 S_1^2(z), \\ \psi(z) = 8 S_3(z) - 4 S_2(z) S_1(z) + S_1^3(z), \\ \chi(z) = 1152 S_4(z) - 288 S_3(z) S_1(z) + 240 S_2(z) S_1^2(z) \\ \quad - 224 S_2^2(z) - 45 S_1^4(z); \end{cases}$$

ces fonctions sont doublement périodiques et possèdent toutes les mêmes périodes $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega'}{2}$ et les mêmes infinis

$$m \frac{\omega}{2} + n \frac{\omega'}{2};$$

seulement les infinis de $\varphi(z)$ sont du second, ceux de $\psi(z)$ et $\chi(z)$ respectivement du troisième et du quatrième ordre.

En développant, suivant le théorème de M. Hermite, ces fonctions

au moyen de la fonction $Z_1(2z)$ et de ses dérivées, on aura

$$(35) \quad \begin{cases} \varphi(z) = L + 2A_1 Z_1(2z) - 4A_2 Z_1'(2z), \\ \psi(z) = M + 2B_1 Z_1(2z) - 4B_2 Z_1'(2z) + 4B_3 Z_1''(2z), \\ \chi(z) = N + 2C_1 Z_1(2z) - 4C_2 Z_1'(2z) + 4C_3 Z_1''(2z) - \frac{8}{3} C_4 Z_1'''(2z), \end{cases}$$

où A, B, C sont les coefficients des puissances négatives dans les séries

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{A_3}{\varepsilon^3} + \frac{A_1}{\varepsilon} + A_0 + \dots,$$

$$\psi(\varepsilon) = \frac{B_3}{\varepsilon^3} + \frac{B_2}{\varepsilon^2} + \frac{B_1}{\varepsilon} + B_0 + \dots,$$

$$\chi(\varepsilon) = \frac{C_4}{\varepsilon^4} + \frac{C_3}{\varepsilon^3} + \frac{C_2}{\varepsilon^2} + \frac{C_1}{\varepsilon} + C_0 + \dots,$$

et L, M, N des constantes qu'on déterminera en égalant les termes indépendants de ε après avoir développé les deux membres des équations (34) pour la valeur $z = \varepsilon$.

En posant

$$Z_1(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + b_1 \varepsilon + b_3 \varepsilon^3 + \dots,$$

$$Z_2(\varepsilon) = c_1 \varepsilon + c_3 \varepsilon^3 + \dots,$$

$$Z(\varepsilon) = d_1 \varepsilon + d_3 \varepsilon^3 + \dots,$$

$$Z_3(\varepsilon) = e_1 \varepsilon + e_3 \varepsilon^3 + \dots,$$

on pourra aisément déterminer les relations

$$(36) \quad \begin{cases} 3b_1 = c_1 + d_1 + e_1, \\ 15b_3 = c_3 + d_3 + e_3. \end{cases}$$

En effet, en développant les deux membres de l'équation (33) ou

$$2Z_1(2\varepsilon) - Z_1(\varepsilon) = Z_2(\varepsilon) + Z(\varepsilon) + Z_3(\varepsilon) = f(\varepsilon),$$

on obtient

$$3b_1 \varepsilon + 15b_3 \varepsilon^3 + \dots = f'(0)\varepsilon + f'''(0)\frac{\varepsilon^3}{6} + \dots,$$

d'où résultent les équations (36).

On a donc

$$S_1(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + 4b_1\varepsilon + 16b_3\varepsilon^3 + \dots,$$

$$S_2(\varepsilon) = 3b_1 + (c_1d_1 + c_1e_1 + d_1e_1 + 3b_1^2 + 15b_3)\varepsilon^2 + \dots;$$

par suite,

$$A_2 = -3, \quad A_1 = 0, \quad A_0 = 0$$

et

$$\varphi(z) = L + 12Z'_1(2z).$$

Pour déterminer L, on aura

$$[\varphi(z) - 12Z'_1(2z)]_{z=0} = A_0 - 12b_1 = -12b_1 = L,$$

d'où résulte la formule

$$(37) \quad \varphi(z) = 8S_2(z) - 3S_1^2(z) = -12b_1 + 12Z'_1(2z).$$

Développons les deux membres de cette formule et égalons les coefficients de z^2 ; alors on obtiendra une nouvelle relation entre les coefficients, dont nous aurons bientôt besoin. Cette relation est évidemment

$$(38) \quad c_1d_1 + c_1e_1 + d_1e_1 = 3(b_1^2 + 5b_3).$$

Avec cette formule, on obtiendra les développements

$$S_1(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + 4b_1\varepsilon + 16b_3\varepsilon^3 + \dots,$$

$$S_2(\varepsilon) = 3b_1 + (6b_1^2 + 30b_3)\varepsilon^2 + \dots,$$

$$S_3(\varepsilon) = (3b_1^2 + 15b_3)\varepsilon + \dots,$$

$$S_4(\varepsilon) = c_1d_1e_1\varepsilon^2 + \dots,$$

$$S_1^2(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} + 8b_1 + (16b_1^2 + 32b_3)\varepsilon^2 + \dots,$$

$$S_1^3(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^3} + \frac{12b_1}{\varepsilon} + (48b_1^2 + 48b_3)\varepsilon + \dots,$$

$$S_1^4(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^4} + \frac{16b_1}{\varepsilon^2} + (96b_1^2 + 64b_3) + \dots;$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} B_3 &= 1, & B_2 &= 0, & B_1 &= 0, & B_0 &= 0, \\ C_4 &= -45, & C_3 &= 0, & C_2 &= 0, & C_1 &= 0, & C_0 &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi(z) &= M + 4Z_1''(2z), \\ \chi(z) &= N + 120Z_1'''(2z). \end{aligned}$$

Pour déterminer les constantes M et N, on a

$$\begin{aligned} [\psi(z) - 4Z_1''(2z)]_{z=0} &= B_0 = M, \\ [\chi(z) - 120Z_1'''(2z)]_{z=0} &= C_0 - 720b_3 = N; \end{aligned}$$

donc enfin

$$(39) \quad \psi(z) = 8S_3(z) - 4S_2(z)S_1(z) + S_1^3(z) = 4Z_1''(2z),$$

$$(40) \quad \begin{cases} \chi(z) = 1152S_4(z) - 288S_3(z)S_1(z) + 240S_2(z)S_1^2(z) - 224S_2^2(z) - 45S_1^4(z) \\ \quad = -720b_3 + 120Z_1'''(2z). \end{cases}$$

Démontrons maintenant comment les équations (33), (37), (39) et (40) peuvent servir pour résoudre les équations (19).

En ajoutant les équations

$$8S_2(z) - 3S_1^2(z) = -12b_1 + 12Z_1'(2z)$$

et

$$3S_1^2(z) = 12Z_1^2(2z),$$

et divisant par 2, on obtiendra

$$(41) \quad 4S_2(z) = 6[Z_1^2(2z) + Z_1'(2z) - b_1].$$

De même, en ajoutant les équations

$$\begin{aligned} 8S_3(z) - 4S_2(z)S_1(z) + S_1^3(z) &= 4Z_1''(2z), \\ \frac{1}{2}S_1(z)[8S_2(z) - 3S_1^2(z)] &= 12Z_1(2z)[Z_1'(2z) - b_1], \\ \frac{1}{2}S_1^3(z) &= 4Z_1^3(2z), \end{aligned}$$

et divisant par 4, on aura

$$(42) \quad 2S_3(z) = Z_1''(2z) + 3Z_1(2z)[Z_1'(2z) - b_1] + Z_1^3(2z).$$

Enfin la somme des équations

$$\begin{aligned}
 1152 S_4(z) - 288 S_3(z) S_1(z) \\
 + 240 S_2(z) S_1^2(z) - 224 S_2^2(z) - 45 S_1^4(z) &= -720 b_3 + 120 Z_1'''(2z), \\
 36 S_1(z) [8 S_3(z) - 4 S_2(z) S_1(z) + S_1^3(z)] &= 288 Z_1(2z) Z_1'(2z), \\
 \frac{7}{2} [64 S_2^2(z) - 48 S_2(z) S_1^2(z) + 9 S_1^4(z)] &= 504 [Z_1'(2z) - b_1]^2, \\
 9 S_1^2(z) [8 S_2(z) - 3 S_1^2(z)] &= 432 [Z_1'(2z) - b_1] Z_1^2(2z), \\
 \frac{3}{2} S_1^4 &= 72 Z_1^4(2z),
 \end{aligned}$$

divisée par 72, donne l'équation

$$(43) \quad \begin{cases} 16 S_4(z) = \frac{5}{3} Z_1'''(2z) + 4 Z_1(2z) Z_1''(2z) \\ \quad + 7 [Z_1'(2z) - b_1]^2 + 6 Z_1^2(2z) [Z_1'(2z) - b_1] + Z_1^4(2z) - 10 b_3. \end{cases}$$

Les équations (19) peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned}
 C_4 &= \frac{1}{A^2}, \\
 C_3 &= \frac{2}{A} S_1\left(\frac{x-y}{2}\right), \\
 C_2 &= 4 S_2\left(\frac{x-y}{2}\right), \\
 C_1 &= 8 A S_3\left(\frac{x-y}{2}\right), \\
 C_0 &= 16 A^2 S_4\left(\frac{x-y}{2}\right),
 \end{aligned}$$

ou, en introduisant les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,

$$\begin{aligned}
 G^2 &= \frac{1}{A^2}, \\
 -G^2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) &= \frac{2}{A} S_1\left(\frac{x-y}{2}\right), \\
 G^2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) &= 4 S_2\left(\frac{x-y}{2}\right), \\
 -G^2(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) &= 8 A S_3\left(\frac{x-y}{2}\right), \\
 G^2\alpha\beta\gamma\delta &= 16 A^2 S_4\left(\frac{x-y}{2}\right).
 \end{aligned}$$

De ces équations, on déduira aisément

$$\alpha = \frac{2}{G} Z_1 \left(\frac{\gamma - x}{2} \right) = \frac{1}{G} [Z_1(A_1 - x) - Z_1(A_1 - \gamma)],$$

$$\beta = \frac{2}{G} Z_2 \left(\frac{\gamma - x}{2} \right) = \frac{1}{G} [Z_1(A_2 - x) - Z_1(A_2 - \gamma)],$$

$$\gamma = \frac{2}{G} Z_3 \left(\frac{\gamma - x}{2} \right) = \frac{1}{G} [Z_1(A_3 - x) - Z_1(A_3 - \gamma)],$$

$$\delta = \frac{2}{G} Z_3 \left(\frac{\gamma - x}{2} \right) = \frac{1}{G} [Z_1(A_4 - x) - Z_1(A_4 - \gamma)],$$

d'où résultent les équations (20).

De la même manière, les équations (27) se réduiront à

$$G^2 = \frac{4}{A},$$

$$- G^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4[Z'_2(o) + Z'(o) + Z'_3(o)],$$

$$G^2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 4A[Z'_2(o)Z'(o) + Z'_2(o)Z'_3(o) + Z'(o)Z'_3(o)],$$

$$- G^2\alpha\beta\gamma = 4A^2Z'_2(o)Z'(o)Z'_3(o).$$

La forme des seconds membres de la deuxième et de la troisième de ces équations se déduisent des équations (36) et (38), tandis que le second membre de la dernière équation se déduit de l'équation (43), en développant les deux membres de celle-ci et égalant les coefficients de x^2 .

Des équations précédentes, on conclura

$$\alpha = -\frac{4}{G^2} Z'_2(o) = -\frac{4}{G^2} Z'_1(A'_1 - x),$$

$$\beta = -\frac{4}{G^2} Z'(o) = -\frac{4}{G^2} Z'_1(A'_2 - x),$$

$$\gamma = -\frac{4}{G^2} Z'_3(o) = -\frac{4}{G^2} Z'_1(A'_1 - x),$$

d'où résultent les équations (28).

La méthode précédente montre comment l'hypothèse que nous avons faite sur la forme de l'intégrale conduit, d'une manière bien simple, aux fonctions Z et, par conséquent, aux fonctions θ de Jacobi. Ajoutons encore que ce n'est point le seul avantage de cette méthode, mais qu'elle s'appliquerait également à l'intégration de plusieurs autres équations différentielles d'un ordre plus élevé.

