ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ELLIOT

Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre et du second degré

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 9 (1892), p. 329-374

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__329_0>

SUR LES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE ET DU SECOND DEGRÉ,

PAR M. ELLIOT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

1. Soit l'équation

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 + 2dp + 2eq + f = 0, \tag{1}$$

où $a, b, \ldots, f$ désignent des fonctions quelconques des deux variables indépendantes x et y.

Cette équation a la propriété de conserver la même forme quand on fait un changement quelconque des variables indépendantes

$$x_1 = \varphi(x, y), \qquad y_1 = \psi(x, y),$$

et un changement de fonction

$$z = z_1 + t,$$

t désignant une fonction quelconque de x et y. Nous ne considérerons dans tout ce qui suit que des changements de fonction de cette nature.

Par le changement de variables, l'équation (1) se transforme en

$$a_1 p_1^2 + 2b_1 p_1 q_1 + c_1 q_1^2 + 2d_1 p_1 + 2e_1 q_1 + f_1 = 0. \tag{2}$$

Les nouveaux coefficients se déduisent des anciens par les formules

$$p = p_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + q_1 \frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad q = p_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q_1 \frac{\partial\psi}{\partial y}, \tag{3}$$

et ont pour valeurs

$$a_1 = a\frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2},$$
$$b_1 = a\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + b\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + c\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y},$$
$$c_1 = a\frac{\partial\psi^2}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + c\frac{\partial\psi^2}{\partial y^2},$$
$$d_1 = d\frac{\partial\varphi}{\partial x} + e\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$
$$e_1 = d\frac{\partial\psi}{\partial x} + e\frac{\partial\psi}{\partial y},$$
$$f_1 = f.$$

Par le changement de fonction, l'équation (2) se transforme en

$$a_2 p_2^2 + 2b_2 p_2 q_2 + c_2 q_2^2 + 2d_2 p_2 + 2e_2 q_2 + f_2 = 0.$$

Les formules de transformation sont

$$p_1 = p_2 + \frac{\partial t}{\partial x_1}, \qquad q_1 = q_2 + \frac{\partial t}{\partial y_1},$$

en supposant que l'on fasse ce changement de fonction dans l'équation (2), et que par suite t est une fonction quelconque de x_1 et y_1.

Les nouveaux coefficients ont les valeurs suivantes

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l} a_2 = a_1, \qquad b_2 = b_1, \qquad c_2 = c_1, \\ d_2 = a_1\dfrac{\partial t}{\partial x_1} + b_1\dfrac{\partial t}{\partial y_1} + d_1, \qquad e_2 = b_1\dfrac{\partial t}{\partial x_1} + c_1\dfrac{\partial t}{\partial y_1} + e_1, \\ f_2 = a_1\dfrac{\partial t^2}{\partial x_1^2} + 2b_1\dfrac{\partial t}{\partial x_1}\dfrac{\partial t}{\partial y_1} + c_1\dfrac{\partial t^2}{\partial y_1^2} + 2d_1\dfrac{\partial t}{\partial x_1} + 2e_1\dfrac{\partial t}{\partial y_1} + f_1. \end{array}\right.$$

Nous aurons à utiliser, pour la suite de ce travail, certaines fonctions des coefficients qui présentent le caractère d'invariants par rapport aux transformations que nous venons de considérer. Commençons par chercher ces invariants.

2. Supposons d'abord que, dans l'équation proposée, les termes du second degré en p et q forment un carré parfait, c'est-à-dire que $b^2 - ac = 0$. Les formules relatives au changement de variables

donnent, en désignant par δ le déterminant fonctionnel de la transformation,

$$\delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

$$a_1 c_1 - b_1^2 = \delta^2(ac - b^2).$$

D'ailleurs les coefficients a_1, b_1, c_1 ne sont point altérés par un changement de fonction. Il en résulte que les équations telles que (1), où les termes du second degré forment un carré parfait, constituent une classe distincte indépendante des changements de la fonction et des variables.

Nous obtiendrons une autre classe d'équations en exprimant que l'équation (1) se décompose en deux équations linéaires. Cela a lieu quand le déterminant

$$J = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

est identiquement nul. Pour vérifier que la condition est indépendante d'un changement de variables, nous remarquerons que, en vertu de ce qui précède, on a déjà

$$a_1 c_1 - b_1^2 = \delta^2(ac - b^2).$$

On vérifiera de même que

$$2b_1d_1e_1 - a_1e_1^2 - c_1d_1^2 = \delta^2(2bde - ae^2 - cd^2);$$

d'où l'on conclut

$$J_1 = \delta^2 J.$$

Relativement au changement de fonction, servons-nous des formules (4). On en tire

$$\begin{aligned} &2b_2d_2e_2 - a_2e_2^2 - c_2d_2^2 \\ &\quad = (b_1^2 - a_1c_1)\left(a_1\frac{\partial t^2}{\partial x_1^2} + 2b_1\frac{\partial t}{\partial x_1}\frac{\partial t}{\partial y_1} + c_1\frac{\partial t^2}{\partial y_1^2} + 2d_1\frac{\partial t}{\partial x_1} + 2e_1\frac{\partial t}{\partial y_1}\right) \\ &\qquad + 2b_1d_1e_1 - a_1e_1^2 - c_1d_1^2. \end{aligned}$$

En ajoutant aux deux membres les expressions identiques

$$f_2(a_2c_2 - b_2^2) = f_2(a_1c_1 - b_1^2),$$

on a

$$\begin{aligned} J_2 = \quad & (a_1c_1 - b_1^2)\left(a_1\frac{\partial t^2}{\partial x_1^2} + 2b_1\frac{\partial t}{\partial x_1}\frac{\partial t}{\partial y_1} + c_1\frac{\partial t^2}{\partial y_2^1} + 2d_1\frac{\partial t}{\partial x_1} + 2e_1\frac{\partial t}{\partial y_1} + f_1\right) \\ & + (b_1^2 - a_1c_1)\left(a_1\frac{\partial t^2}{\partial x_1^2} + 2b_1\frac{\partial t}{\partial x_1}\frac{\partial t}{\partial y_1} + c_1\frac{\partial t^2}{\partial y_1^2} + 2d_1\frac{\partial t}{\partial x_1} + 2e_1\frac{\partial t}{\partial y_1}\right) \\ & + 2b_1d_1e_1 - a_1e_1^2 - c_1d_1^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$J_2 = J_1.$$

Nous avons ainsi une seconde classe d'équations indépendantes des changements des variables et de fonction, qui ont la propriété de se décomposer en deux équations linéaires.

3. Pour en obtenir une troisième, considérons les équations que l'on rencontre dans la recherche des lignes géodésiques des surfaces et qui n'ont pas de termes du premier degré en p et q. Cherchons, s'il est possible, à faire disparaître ces deux termes du premier degré dans l'équation (1). Ce ne sera pas par un changement de variables; car les deux fonctions φ et ψ devraient satisfaire aux deux équations

$$d\frac{\partial\varphi}{\partial x} + e\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,$$

$$d\frac{\partial\psi}{\partial x} + e\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

Le déterminant δ devrait donc être identiquement nul, et les deux fonctions φ et ψ dépendant alors l'une de l'autre, les deux variables nouvelles ne seraient pas indépendantes.

On reconnaît aussi très aisément qu'on n'y arrive pas non plus en combinant un changement de variables avec un changement de fonction, à moins que le changement de fonction seul ne fasse disparaître les deux termes dont il s'agit. En supposant que l'on parte de l'équation (1) et que t soit une fonction de x et y, on voit par les formules (4) que l'on doit pouvoir déterminer la seule fonction t par les équations

$$a\frac{\partial t}{\partial x}+b\frac{\partial t}{\partial y}+d=0,$$
$$b\frac{\partial t}{\partial x}+c\frac{\partial t}{\partial y}+e=0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{be-cd}{ac-b^2},\qquad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{bd-ae}{ac-b^2}.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{H}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{be-cd}{ac-b^2}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{bd-ae}{ac-b^2},$$

on devra donc avoir identiquement

$$\mathrm{H}=0.$$

Il est essentiel de faire voir que cette condition est indépendante d'un changement de variables et de la fonction.

Posons, pour abréger,

$$m=\frac{be-cd}{ac-b^2},\qquad n=\frac{bd-ae}{ac-b^2}.$$

Désignons par les mêmes lettres, affectées de l'indice 1, les quantités analogues relatives aux coefficients de l'équation transformée par un changement de variables. On vérifie aisément que l'on a

$$m_1=\frac{1}{\delta}\left(m\frac{\partial\psi}{\partial y}-n\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),\qquad n_1=\frac{1}{\delta}\left(n\frac{\partial\varphi}{\partial x}-m\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right).$$

Calculons l'expression $\frac{\partial m_1}{\partial y_1}-\frac{\partial n_1}{\partial x_1}$. Pour calculer $\frac{\partial n_1}{\partial x_1}$ par exemple, on prendra les dérivées successivement par rapport à x et y, et on les multipliera respectivement par les dérivées partielles de x et y par rapport à x_1, données en renversant les formules (3), c'est-à-dire

$$\delta\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\delta\frac{\partial}{\partial y_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}.$$

On aura ainsi

$$\delta^3\left(\frac{\partial m_1}{\partial y_1}-\frac{\partial n_1}{\partial x_1}\right)= \left[\delta\left(\frac{\partial m}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}-\frac{\partial n}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}+m\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-n\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)-\left(m\frac{\partial \psi}{\partial y}-n\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial \delta}{\partial y}\right]\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$-\left[\delta\left(\frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial n}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+m\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-n\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)-\left(m\frac{\partial \psi}{\partial y}-n\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial \delta}{\partial x}\right]\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$-\left[\delta\left(\frac{\partial n}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial m}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+n\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-m\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)-\left(n\frac{\partial \varphi}{\partial x}-m\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \delta}{\partial x}\right]\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$+\left[\delta\left(\frac{\partial n}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial m}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+n\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-m\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-\left(n\frac{\partial \varphi}{\partial x}-m\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \delta}{\partial y}\right]\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

On constate que dans le second membre les coefficients de $\frac{\partial m}{\partial x}$ et de $\frac{\partial n}{\partial y}$ sont nuls, que ceux de $\frac{\partial m}{\partial y}$ et $\frac{\partial n}{\partial x}$ sont respectivement $+\delta^2$ et $-\delta^2$; enfin que les coefficients de m et de n sont nuls. Par exemple, le coefficient de m, en faisant abstraction des termes en $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ qui se détruisent, est

$$\delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial \delta}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right),$$

c'est-à-dire zéro. Ainsi donc le changement de variables nous donne

$$\frac{\partial m_1}{\partial y_1}-\frac{\partial n_1}{\partial x_1}=\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial m}{\partial y}-\frac{\partial n}{\partial x}\right),$$

ou bien

$$H_1=\frac{1}{\delta}H.$$

Relativement au changement de fonction, on a

$$m_2=\frac{b_2e_2-c_2d_2}{a_2c_2-b_2^2}$$
$$=\frac{b_1\left(b_1\frac{\partial t}{\partial x_1}+c_1\frac{\partial t}{\partial y_1}+e_1\right)-c_1\left(a_1\frac{\partial t}{\partial x_1}+b_1\frac{\partial t}{\partial y_1}+d_1\right)}{a_1c_1-b_1^2}=m_1-\frac{\partial t}{\partial x_1}.$$

On verra de même que

$$n_2=n_1-\frac{\partial t}{\partial y_1}.$$

Donc

$$H_2 = \frac{\partial m_2}{\partial y_1} - \frac{\partial n_2}{\partial x_1} = \frac{\partial m_1}{\partial y_1} - \frac{\partial n_1}{\partial x_1} = H_1.$$

Les équations auxquelles donne lieu la recherche des lignes géodésiques forment donc encore une classe à part, indépendante du changement de variables et de la fonction.

Réduction de l'équation générale à une forme canonique.

4. Laissant de côté toutes les classes particulières qui viennent d'être signalées, cherchons maintenant à simplifier l'équation générale. On peut profiter des deux fonctions arbitraires qui entrent dans le changement de variables pour faire disparaître deux termes. Proposons-nous de faire disparaître les coefficients des termes carrés par rapport aux dérivées partielles. Il faudra que les deux fonctions φ et ψ satisfassent à l'équation unique

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = 0,$$

qui se décompose en deux équations linéaires et homogènes. Nous les désignerons par les grandes lettres correspondantes Φ et Ψ, et nous remarquerons que ces solutions doivent appartenir à deux déterminations différentes du rapport $\frac{p}{q}$; car autrement Φ et Ψ seraient des fonctions d'une même fonction déterminée de x et y : elles seraient donc fonctions l'une de l'autre et ne pourraient être prises pour nouvelles variables indépendantes. Nous écartons donc le cas spécial où $b^2 - ac$ serait nul, et pour lequel la réduction actuelle ne serait pas possible.

Supposons qu'on ait intégré les deux équations linéaires

$$cq + (b - \sqrt{b^2 - ac})p = 0,$$
$$cq + (b + \sqrt{b^2 - ac})p = 0.$$

On prendra pour Φ une solution de la première, pour Ψ une solution de la seconde, et l'équation (1) se trouvera ramenée, par le changement de variables

$$X = \Phi(x, y), \qquad Y = \Psi(x, y),$$

à la forme

$$2B_1P_1Q_1 + 2D_1P_1 + 2E_1Q_1 + F_1 = 0. \tag{5}$$

Le changement de variables comporte, comme on le voit, deux fonctions arbitraires. Il est clair que si, ayant ramené l'équation à la forme réduite (5), on effectue un nouveau changement de variables défini par les formules

$$X' = \mathcal{F}(X), \qquad Y' = \mathcal{G}(Y),$$

l'équation conservera sa forme, et la même chose aura lieu, quel que soit le nombre des termes qu'on a fait disparaître. Toutes les équations réduites qui ne différeraient entre elles que par une transformation particulière, comme la précédente, ne doivent pas être considérées comme distinctes.

Supposons que les intégrales des deux équations

$$\frac{dx}{b - \sqrt{b^2 - ac}} = \frac{dy}{c},$$
$$\frac{dx}{b + \sqrt{b^2 - ac}} = \frac{dy}{c}$$

soient

$$\Phi(x, y) = \text{const.},$$
$$\Psi(x, y) = \text{const.};$$

nous pourrons prendre le changement de variables

$$X = \Phi(x, y), \qquad Y = \Psi(x, y).$$

Si, au lieu de ces valeurs, nous prenions, comme cela est permis, pour X et Y des fonctions arbitraires de Φ et de Ψ, cela reviendrait au changement de variables spécial dont il vient d'être question.

5. Effectuons maintenant, dans l'équation (5), le changement de fonction

$$z = Z + T,$$

d'où l'on déduit, en désignant par P et Q les dérivées partielles quand les variables indépendantes sont X, Y et Z, la fonction

$$P_1 = P + \frac{\partial T}{\partial X}, \qquad Q_1 = Q + \frac{\partial T}{\partial Y},$$

et déterminons T de façon que le coefficient de Q, dans l'équation nouvelle, soit nul, ce qui donne

$$\frac{\partial T}{\partial X} = -\frac{E_1}{B_1}.$$

L'équation transformée est

$$PQ = MP + N,$$

M et N ayant les valeurs

$$M = -\frac{\partial T}{\partial Y} - \frac{D_1}{B_1},$$
$$N = -\frac{\partial T}{\partial X}\frac{\partial T}{\partial Y} - \frac{D_1}{B_1}\frac{\partial T}{\partial X} - \frac{E_1}{B_1}\frac{\partial T}{\partial Y} - \frac{F_1}{2B_1}.$$

En remplaçant $\frac{\partial T}{\partial X}$, le coefficient N prend une valeur bien déterminée

$$N = \frac{2E_1D_1 - B_1F_1}{2B_1^2}.$$

Le coefficient M n'est, au contraire, déterminé qu'à une fonction près de la nouvelle variable Y, puisque la fonction T peut être augmentée arbitrairement d'une telle fonction.

Invariabilité de la réduction.

6. Supposons que, au lieu d'effectuer les réductions précédentes sur l'équation (1), on ait d'abord soumis celle-ci à un changement quelconque de variables et de fonction

(6) $$x' = \varphi(x, y), \qquad y' = \psi(x, y), \qquad z = z' + t.$$

On opère alors sur l'équation transformée

$$a'p'^2 + 2b'p'q' + \ldots + f' = 0.$$

Nous avons vu que la recherche des variables canoniques revient à l'intégration de l'équation

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = 0.$$

Celle des variables canoniques de la seconde équation revient à l'intégration de l'équation

$$a'p'^2 + 2b'p'q' + c'q'^2 = 0,$$

qu'on peut regarder comme transformée de la première par la substitution

$$(7) \qquad x' = \varphi(x, y), \qquad y' = \psi(x, y).$$

Si donc on désigne par

$$\begin{aligned} X &= \Phi(x, y), & X' &= \Phi'(x', y'), \\ Y &= \Psi(x, y), & Y' &= \Psi'(x', y') \end{aligned}$$

les variables canoniques dans les deux cas, la fonction $\Phi'(x', y')$ pourra être considérée comme provenant de $\Phi(x, y)$, et la fonction $\Psi'(x', y')$ comme provenant de $\Psi(x, y)$ par la substitution (7), en faisant abstraction des transformations spéciales qu'on est toujours libre d'effectuer à un moment quelconque de la réduction.

Soient

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial x} & \frac{\partial\Psi}{\partial y} \end{vmatrix}, \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi'}{\partial x'} & \frac{\partial\Phi'}{\partial y'} \\ \frac{\partial\Psi'}{\partial x'} & \frac{\partial\Psi'}{\partial y'} \end{vmatrix}.$$

Le coefficient N, dans la première réduction, peut s'écrire, en multipliant par B_1 les deux termes de la fraction

$$N = \frac{2B_1E_1D_1 - B_1^2F_1}{2B_1^3}.$$

C'est la valeur que prend le rapport des invariants

$$\frac{J_1}{2(B_1^2 - A_1C_1)^{\frac{3}{2}}},$$

quand on suppose $A_1 = 0$, $C_1 = 0$. Si l'on cherche l'expression de ce rapport en fonction des variables x et y, on trouvera

$$\frac{J}{2\Delta(b^2 - ac)^{\frac{3}{2}}},$$

en se rappelant que $J_1 = \Delta^2 J$ et $B_1^2 - A_1C_1 = \Delta^2(b^2 - ac)$.

De même, l'expression de N' en fonction de x' et y' est

$$\frac{J'}{2\Delta'(b'^2 - a'c')^{\frac{3}{2}}}.$$

On l'obtiendra en fonction des variables x et y, en remarquant que, si l'on désigne par δ le déterminant fonctionnel de la substitution (7), on a

$$J' = \delta^2 J, \qquad b'^2 - a'c' = \delta^2(b^2 - ac).$$

On trouve ainsi l'expression

$$\frac{J}{2\delta\Delta'(b^2 - ac)^{\frac{3}{2}}},$$

c'est-à-dire la même que pour N en vertu de $\Delta = \Delta'\delta$.

On a maintenant l'expression de N en X et Y, en remettant partout ces deux variables à la place de $\Phi(x, y)$ et de $\Psi(x, y)$. Relativement à la fonction N', on pourra d'abord passer des variables x et y à x' et y', en remplaçant Φ et Ψ par Φ' et Ψ', puis on aura à mettre partout X' et Y' au lieu de ces dernières fonctions. Donc, enfin, les deux coefficients N et N' sont composés de la même façon, l'un en X et Y, l'autre en X' et Y'.

Pour ce qui est relatif aux coefficients M et M', rappelons qu'ils ne sont pas complètement déterminés et qu'on peut ajouter au premier une fonction quelconque de Y, et de même au second une fonction quelconque de Y'. Pour montrer qu'à cela près ils sont composés de la même façon, l'un en X, Y, l'autre en X', Y', il suffit de faire voir que la dérivée de M par rapport à X et la dérivée de M' par rapport à X' sont composées de la même façon, et, d'après le raisonnement qui vient d'être fait, il suffit d'établir que ces deux dérivées, exprimées au moyen des variables x et y, sont identiques. Or on a

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -\frac{\partial^2 T}{\partial X\,\partial Y} - \frac{\partial\left(\frac{D_1}{B_1}\right)}{\partial X} = \frac{\partial\left(\frac{E_1}{B_1}\right)}{\partial Y} - \frac{\partial\left(\frac{D_1}{B_1}\right)}{\partial X}.$$

On reconnaît, dans le second membre, l'invariant H_1 changé de signe, quand on y suppose $A_1 = 0$, $C_1 = 0$. Donc ce second membre exprimé en x et y sera $-\frac{H}{\Delta}$. De même, l'expression de $\frac{\partial M'}{\partial X'}$, au moyen des variables x' et y', est $-\frac{H'}{\Delta'}\cdot$ Transformant cette dernière expression en fonction des variables x et y, on trouvera, à cause de $H'=\frac{1}{\delta}H$,

$$\frac{\partial M'}{\partial X'}=-\frac{H}{\delta\Delta'}=-\frac{H}{\Delta}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Les formules qui viennent d'être établies

$$N=\frac{J}{2\Delta(b^2-ac)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\partial M}{\partial X}=-\frac{H}{\Delta}$$

permettent de calculer effectivement les deux coefficients de l'équation canonique, au moyen des variables primitives x et y. Il suffira d'y remplacer ensuite ces variables en fonction des variables canoniques, en intégrant l'équation

$$ap^2+2bpq+cq^2=0.$$

Le calcul fait de cette façon présente cependant une difficulté relative au signe que l'on doit prendre pour $(b^2-ac)^{\frac{3}{2}}$ dans le calcul de N. Cette indétermination tient à ce que la méthode ne contient pas de traces du choix des deux racines de l'équation du second degré qu'on a résolue pour obtenir les variables canoniques X et Y.

Reprenons les formules

$$X=\Phi(x,y), \qquad Y=\Psi(x,y),$$

où nous avons déjà supposé (n° 4) que

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}=\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{c}, \qquad \frac{\frac{\partial\Psi}{\partial y}}{\frac{\partial\Psi}{\partial x}}=\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{c}.$$

On aura immédiatement

$$B_1=\frac{2}{c}(ac-b^2)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

$$D_1=\left(d+e\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{c}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

$$E_1=\left(d+e\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{c}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

$$F_1=f.$$

L'expression de $N = \frac{2E_1D_1 - B_1F_1}{2B_1^2}$ sera donnée sans ambiguïté par

$$N = \frac{-cJ}{4(ac-b^2)^2 \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x}},$$

dont il est aisé de constater l'identité avec la valeur écrite précédemment, au signe près.

Cette formule serait en défaut et se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$ si c était nul, puisqu'alors une des fonctions $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ serait nulle. On peut évidemment la remplacer par celle-ci

$$N = \frac{-aJ}{4(ac-b^2)^2 \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial y}},$$

puisque l'on a

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial y}}{\frac{\partial\Psi}{\partial x}} = \frac{a}{c}.$$

Si cette dernière se trouvait également en défaut, c'est que a et c seraient nuls tous les deux; mais alors il n'y aurait plus de changement de variables à effectuer.

Réduction dans le cas des équations géodésiques.

7. Ce mode de réduction est parfaitement applicable quand l'équation appartient à la catégorie des équations géodésiques. On en sera averti par le calcul de l'invariant H, qui doit être identiquement nul. On fera disparaître, comme dans le cas général, les termes en P^2 et Q^2 par un changement de variables, et l'équation sera

$$2B_1P_1Q_1 + 2D_1P_1 + 2E_1Q_1 + F_1 = 0.$$

On fera ensuite le changement de fonction

$$z = Z + T,$$

qui permettra ici de faire disparaître les deux termes du premier degré.

La fonction T est actuellement connue à une constante près, puisque ses deux dérivées doivent satisfaire à

$$B_1 \frac{\partial T}{\partial X} + E_1 = 0, \qquad B_1 \frac{\partial T}{\partial Y} + D_1 = 0,$$

et l'équation canonique sera

$$PQ = \frac{2 E_1 D_1 - B_1 F_1}{2 B_1^2}.$$

On trouve, dans le second membre, l'expression que nous avons déjà écrite, au moyen du rapport de deux invariants. La transformation est donc parfaitement déterminée, sauf toujours à effectuer une transformation telle que

$$X' = \mathcal{F}(X), \qquad Y' = \mathcal{G}(Y).$$

Remarque. — Toute équation de la forme (1) qui est à coefficients constants, ou qui provient d'une telle équation par un changement quelconque des variables et de la fonction, appartient nécessairement à la catégorie des équations géodésiques, l'invariant H étant identiquement nul. Le changement de variables est alors évidemment linéaire, et le déterminant fonctionnel Δ se réduit à une constante. Les invariants J et $b^2 - ac$ sont eux-mêmes des constantes. Il en résulte que la forme canonique de telles équations sera $PQ = \text{const}$.

Recherche de certains cas d'intégrabilité.

8. Étant donnée une fonction z de x et y définie par une équation telle que

$$F(x, y, z, C) = 0, \tag{8}$$

qui contient une constante C, si l'on forme les équations qui fournissent les valeurs des dérivées premières, on aura un système de trois équations entre lesquelles on pourra éliminer z et C.

Il est clair que le résultat de l'élimination n'est pas altéré si l'on remplace z par $z + C_1$, en désignant par C_1 une nouvelle constante. L'équation $F(x, y, z + C_1, C) = 0$ définira donc une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles obtenue par l'élimination.

Quel que soit le degré de l'équation obtenue, il est évident que ce degré ne sera pas altéré par un changement de variable quelconque et un changement de fonction tel que $z = z_1 + t$, que nous avons employé jusqu'à présent. Nous allons indiquer quelques équations telles que (8) qui donnent naissance à des équations aux dérivées partielles du second degré, et pour lesquelles on connaîtra par conséquent une intégrale complète. Nous pourrons d'ailleurs faire un changement de fonction et de variables dans la relation (8) pour la simplifier. Nous savons que cette opération préalable n'aura aucune influence sur les coefficients de l'équation canonique correspondante.

Considérons, par exemple, la relation

$$e^z = w(u + \mathrm{C})^m(v + \mathrm{C})^n,$$

où m et n sont deux nombres constants, et u, v, w trois fonctions quelconques de x et y. On peut, par un changement de fonction, ramener la fonction w à être l'unité; on pourra ensuite prendre les deux autres fonctions que nous supposons distinctes comme variables indépendantes. Notre relation prendra la forme

$$e^z = (x + \mathrm{C})^m(y + \mathrm{C})^n.$$

Prenant les dérivées partielles et remplaçant e^z, on aura

$$p(x + \mathrm{C}) = m, \qquad q(y + \mathrm{C}) = n.$$

L'élimination de C donne l'équation

$$(x - y)pq + np - mq = 0.$$

Nous verrons plus loin qu'elle est un cas particulier d'équations admettant une intégrale du premier degré en p et q. (Ici l'intégrale $p + q =$ const. est évidente sur les équations des caractéristiques.)

Si l'on veut ramener l'équation à la forme canonique, on voit qu'il n'y a pas de changement de variables à opérer. On peut prendre $\mathrm{X} = x$, $\mathrm{Y} = y$ et l'on aura par un changement de fonction la forme canonique

$$\mathrm{PQ} = \frac{m - n}{\mathrm{X} - \mathrm{Y}}\mathrm{P} - \frac{mn}{(\mathrm{X} - \mathrm{Y})^2}.$$

9. Soit l'équation

$$e^z = u + \mathrm{C}v + \mathrm{C}^2 w.$$

On la ramènera par un changement de variables et de fonction à

$$e^z = x + \mathrm{C}y + \mathrm{C}^2,$$

qui donne lieu à l'équation aux dérivées partielles

$$xp^2 + ypq + q^2 - p = 0.$$

On a ici

$$\frac{be - cd}{ac - b^2} = -\frac{2}{y^2 - 4x}, \qquad \frac{bd - ae}{ac - b^2} = \frac{y}{y^2 - 4x}.$$

L'invariant H est nul; on a donc des équations appartenant à la catégorie des géodésiques. En intégrant la différentielle

$$dz = -\frac{2\,dx}{y^2 - 4x} + \frac{y\,dy}{y^2 - 4x},$$

on voit que l'on fait disparaître les termes du premier degré par le changement de fonction

$$z = \mathrm{Z} + \tfrac{1}{2}\log(y^2 - 4x).$$

Pour effectuer le changement de variables, on intègre l'équation

$$xp^2 + ypq + q^2 = 0,$$

qui donne

$$\frac{q}{p} = -\frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x}}{2}.$$

L'intégrale générale des deux équations

$$\frac{dx}{y \pm \sqrt{y^2 - 4x}} = \frac{dy}{2}$$

s'obtient sans difficulté sous la forme

$$y \pm \sqrt{y^2 - 4x} = \text{const.}$$

Nous ferons donc le changement de variables

$$\mathrm{X} = y - \sqrt{y^2 - 4x}, \qquad \mathrm{Y} = y + \sqrt{y^2 - 4x},$$

d'où

$$y = \tfrac{1}{2}(X + Y), \qquad x = \tfrac{1}{4}XY.$$

L'équation canonique est

$$PQ + \frac{1}{(Y - X)^2} = 0.$$

Elle admet l'intégrale complète

$$e^{z+C_1} = \frac{(X + C)(Y + C)}{2(X - Y)}.$$

La surface répondant à cette équation aux dérivées partielles est, comme on sait, un cas particulier de celles qui sont applicables sur une surface de révolution.

10. Prenons encore l'équation

$$e^{C(z+w)} = u + Cv,$$

qui donne naissance à une équation aux dérivées partielles du second degré. On peut, par un changement de variables et de fonction, la ramener à

$$e^{Cz} = x + Cy,$$

qui donne lieu à l'équation aux dérivées partielles

$$xpq + yq^2 - p = 0.$$

Elle admet l'intégrale $\frac{q}{p} = \text{const.}$ Mais proposons-nous de la ramener à la forme canonique. L'équation $xpq + yq^2 = 0$ se décompose en

$$q = 0, \qquad xp + yq = 0,$$

dont les intégrales sont $\varphi(x)$ et $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$. On peut prendre, pour définir le changement de variables,

$$X = x, \qquad Y = \frac{y}{x},$$

d'où

$$x = X, \qquad y = XY.$$

On a ici

$$J = -\tfrac{1}{4}y, \qquad N = -\frac{cJ}{4(ac-b^2)^2 \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}} = -\frac{y}{x^2} = -\frac{Y}{X},$$

$$H = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2y}{x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{H}{\Delta} = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{X}, \qquad \frac{\partial M}{\partial X} = \frac{1}{X}, \qquad M = \log X.$$

L'équation canonique est donc

$$PQ = P\log X - \frac{Y}{X}.$$

Elle admet l'intégrale complète

$$Z = C_1 - Y + Y\log X + \frac{1}{C}\log(X + CXY).$$

11. Considérons encore la relation

$$w(z-u)(z-v)^m = \text{const.},$$

où u, v, w sont trois fonctions quelconques de x et y, et m un nombre quelconque.

L'équation aux dérivées partielles correspondante est

$$\frac{p\dfrac{\partial(u-v)}{\partial y} - q\dfrac{\partial(u-v)}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{p}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{q}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{1}{w}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)}$$
$$+ m\,\frac{p\dfrac{\partial(u-v)}{\partial y} - q\dfrac{\partial(u-v)}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{p}{w}\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{q}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{1}{w}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)} = v - u.$$

C'est une équation du second degré, dans laquelle les termes en p^2 et q^2 disparaissent si l'on a à la fois

$$\frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{m+1}{u-v}\,\frac{\partial(u-v)}{\partial y} + \frac{1}{w}\,\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{m+1}{u-v}\,\frac{\partial(u-v)}{\partial x} + \frac{1}{w}\,\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varpi(u-v)^{m+1} = \text{const.},$$

à moins que ϖ ne dépende que de x ou de y, auquel cas le produit précédent, au lieu d'être constant, doit être simplement une fonction de l'autre variable.

Si l'on veut ramener l'équation à la forme canonique, on pourra d'abord faire le changement de fonction $z = Z + u$, puis prendre les deux fonctions qui figurent encore dans l'équation comme variables nouvelles. Il suffira donc de considérer l'équation

$$yz(z-x)^m = \text{const.}$$

L'équation aux dérivées partielles correspondante est

$$xp^2 - (m+1)ypq - xp + myq = 0.$$

L'intégration de

$$xp^2 - (m+1)ypq = 0$$

donne le changement de variables

$$X = y, \qquad Y = x^{m+1}y,$$

d'où l'on tire

$$y = X, \qquad x = \sqrt[m+1]{\frac{Y}{X}};$$

on aura, en outre,

$$J = \tfrac{1}{4} mxy^2, \qquad \Delta = -(m+1)x^m y,$$

$$N = \frac{-aJ}{4(ac-b^2)^2 \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}} = -\frac{m}{(m+1)^4} x^{1-m} y^{-2} = -\frac{m}{(m+1)^4} Y^{\frac{1-m}{m+1}} X^{-\frac{m+3}{m+1}},$$

$$\frac{be-cd}{ac-b^2} = m, \qquad \frac{bd-ae}{ac-b^2} = \frac{(m-1)x}{(m+1)^2 y},$$

$$-\frac{H}{\Delta} = -\frac{m-1}{(m+1)^3}\frac{1}{x^m y^2} = -\frac{m-1}{(m+1)^3} Y^{-\frac{m}{m+1}} X^{-\frac{m+2}{m+1}},$$

$$M = \frac{m-1}{(m+1)^2} Y^{-\frac{m}{m+1}} X^{-\frac{1}{m+1}}.$$

L'équation canonique est donc

$$PQ = \frac{m-1}{(m+1)^2}\frac{P}{\sqrt[m+1]{XY^m}} - \frac{m}{(m+1)^4}\frac{1}{\sqrt[m+1]{Y^{m-1}X^{m+3}}}.$$

Si l'on fait enfin le changement de variables

$$X' = -\frac{m}{2(1-m^2)} X^{-\frac{2}{m+1}}, \qquad Y' = \frac{m-1}{2(m+1)} Y^{\frac{2}{m+1}},$$

on pourra donner à l'équation canonique la forme plus simple

$$P'Q' = \frac{P'}{\sqrt[m+1]{XY}} + 1,$$

ou, en introduisant les variables X', Y',

$$P'Q' = \frac{m-1}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{X'}{Y'}} P' + 1.$$

L'invariant H s'annule pour $m = 1$. Les équations appartenant à la catégorie des équations géodésiques que l'on obtient ainsi se ramènent d'ailleurs à l'équation $PQ = \text{const.}$

12. Prenons enfin l'équation

$$(z-u)^\alpha (z-v)^\beta (z-w)^\gamma = \text{const.},$$

u, v, w étant trois fonctions de x et y, et α, β, γ trois constantes données. Cette équation donne lieu à une équation aux dérivées partielles du second degré, que l'on peut obtenir rapidement de la façon suivante. En prenant les dérivées partielles par rapport à x et y, on obtient

$$\alpha \frac{p - \dfrac{\partial u}{\partial x}}{z-u} + \beta \frac{p - \dfrac{\partial v}{\partial x}}{z-v} + \gamma \frac{p - \dfrac{\partial w}{\partial x}}{z-w} = 0,$$

$$\alpha \frac{q - \dfrac{\partial u}{\partial y}}{z-u} + \beta \frac{q - \dfrac{\partial v}{\partial y}}{z-v} + \gamma \frac{q - \dfrac{\partial w}{\partial y}}{z-w} = 0,$$

entre lesquelles il faut éliminer z. Désignons par A, B, C les quantités proportionnelles à $\frac{1}{z-u}$, $\frac{1}{z-v}$, $\frac{1}{z-w}$, que l'on tire de ces deux équations. On aura

$$A = \beta\gamma \left[p \frac{\partial(v-w)}{\partial y} - q \frac{\partial(v-w)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} \right],$$

les valeurs de B et C se déduisant de celle de A par permutation.

En désignant par ρ une quantité auxiliaire, on aura

$$A(z-u) = B(z-v) = C(z-w) = \rho,$$

qui donnent, par l'élimination de z et ρ, l'équation cherchée

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{A} & u & 1 \\ \frac{1}{B} & v & 1 \\ \frac{1}{C} & w & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le déterminant, on écrira l'équation sous cette forme

$$(10) \qquad \sum \frac{\alpha(v-w)}{p\dfrac{\partial(v-w)}{\partial y} - q\dfrac{\partial(v-w)}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial x}} = 0,$$

le signe $\sum$ indiquant qu'il faut écrire, à la suite du terme écrit, deux autres qui s'en déduisent par permutation des lettres u, v, w et α, β, γ.

On voit bien que l'équation est du second degré. Si l'on veut obtenir l'équation canonique correspondante, on fera un changement de fonction et de variables qui permettra de supposer

$$u = 0, \qquad v = x, \qquad w = y.$$

Nous poserons aussi, ce qui est évidemment permis,

$$\alpha = 1, \qquad \beta = m, \qquad \gamma = n.$$

L'équation générale se réduit à

$$nxp^2 + [(n+1)x - (m+1)y]pq - myq^2 - nxp + myq = 0.$$

Pour faire le changement de variables, il faut intégrer l'équation

$$nxp^2 + [(n+1)x - (m+1)y]pq - myq^2 = 0.$$

Cette équation s'intègre d'une façon particulièrement simple dans le cas où $\alpha + \beta + \gamma = 0$, ou, si l'on veut, dans le cas de $n = -(m+1)$. Elle se décompose alors dans les deux équations linéaires

$$xp + yq = 0, \qquad (m+1)p + mq = 0.$$

On peut prendre alors, pour le changement de variables,

$$X = \frac{y}{x}, \qquad Y = mx - (m+1)y.$$

On a maintenant

$$J = \tfrac{1}{4} m(m+1)xy(x-y),$$

$$b^2 - ac = \tfrac{1}{4}[mx - (m+1)y]^2,$$

$$N = \frac{-cJ}{4(ac-b^2)^2 \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}} = -\frac{m(m+1)x^3y(x-y)}{[(m+1)y - mx]^5},$$

et, en passant aux variables canoniques X, Y,

$$N = \frac{m(m+1)XY(1-X)}{[(m+1)X-m]^5}.$$

On a ensuite

$$\frac{be-cd}{b^2-ac} = \frac{m(m+2)xy - m(m+1)y^2}{[mx-(m+1)y]^2}, \qquad \frac{bd-ae}{b^2-ac} = \frac{(m^2-1)xy - m(m+1)x^2}{[mx-(m+1)y]^2},$$

$$H = \frac{(m^2-1)y - m(m+2)x}{[mx-(m+1)y]^2},$$

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -\frac{H}{\Delta} = \frac{x^2[(m^2-1)y - m(m+2)x]}{[mx-(m+1)y]^3} = \frac{(m^2-1)X - m(m+2)}{[m-(m+1)X]^3},$$

$$M = -\frac{m(2m+1) + 2(1-m^2)X}{2(m+1)[(m+1)X-m]^2}.$$

L'équation canonique est donc

$$PQ = -\frac{m(2m+1)+2(1-m^2)X}{2(m+1)[(m+1)X-m]^2}P + \frac{m(m+1)XY(1-X)}{[(m+1)X-m]^5}.$$

Le coefficient de P ne dépend que de la variable X ; le terme indépendant est le produit d'une fonction de X par la variable Y. On peut ici faire un changement de la variable X, tel que ce dernier terme se réduise à $\pm Y$. Mais le coefficient de P prend alors une valeur compliquée qui dépend des racines d'une équation du quatrième degré. Le calcul se simplifie beaucoup si l'on suppose que deux des trois exposants α, β, γ, dont la somme est nulle, sont égaux entre eux. Cela revient, avec les notations adoptées, aux hypothèses $m = -\frac{1}{2}$ ou bien $m = -2$. L'équation canonique prend alors une forme très simple qui est la même dans ces deux cas. Par exemple, pour $m = -\frac{1}{2}$, si l'on fait le changement de variables

$$Y' = Y, \qquad X' = \frac{4X^2}{(X+1)^4},$$

on obtiendra l'équation canonique

$$P'Q' = -3\sqrt{X'}P' - Y'.$$

13. Si, dans l'intégrale

$$z(z-x)^m(z-y)^{-m-1} = \text{const.},$$

on effectue le changement de variables obtenu précédemment

$$X = \frac{y}{x}, \qquad Y = mx - (m+1)y,$$

on aura la relation

$$z\left[z - \frac{Y}{m-(m+1)X}\right]^m \left[z - \frac{XY}{m-(m+1)X}\right]^{-m-1} = \text{const.},$$

qui donnera lieu à une équation où les termes carrés, par rapport aux dérivées partielles, auront des coefficients nuls. Il en sera encore de même, comme nous l'avons vu, si l'on prend pour définir le changement les formules

$$\frac{y}{x} = \varphi(X), \qquad mx - (m+1)y = \psi(Y), \tag{11}$$

contenant deux fonctions arbitraires φ et ψ.

Cette remarque permet d'intégrer un système d'équations simultanées aux dérivées partielles qu'on obtient de la façon suivante. Reportons-nous à l'équation (10), et exprimons que dans cette équation les termes en p^2 et en q^2 ont des coefficients nuls. On aura, en posant

$$v - w = \lambda, \qquad w - u = \mu, \qquad u - v = \nu,$$

le système

$$\tag{12} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\lambda}{\frac{\partial\lambda}{\partial X}} + m\,\frac{\mu}{\frac{\partial\mu}{\partial X}} - (m+1)\,\frac{\nu}{\frac{\partial\nu}{\partial X}} = 0,\\ &\frac{\lambda}{\frac{\partial\lambda}{\partial Y}} + m\,\frac{\mu}{\frac{\partial\mu}{\partial Y}} - (m+1)\,\frac{\nu}{\frac{\partial\nu}{\partial Y}} = 0,\\ &\lambda + \mu + \nu = 0. \end{aligned} \right.$$

Or on tire des formules (11)

$$x = \frac{\psi(Y)}{m - (m+1)\varphi(X)}, \qquad y = \frac{\varphi(X)\psi(Y)}{m - (m+1)\varphi(X)}.$$

Le système de valeurs o, x, y sera remplacé, après le changement de variables, par

$$u = 0, \qquad v = \frac{\psi(Y)}{m - (m+1)\varphi(X)}, \qquad w = \frac{\varphi(X)\psi(Y)}{m - (m+1)\varphi(X)}.$$

On aura, avec deux fonctions arbitraires, les valeurs des fonctions λ, μ, ν, qui satisfont au système (12) en prenant les différences de ces quantités,

$$\lambda = \frac{\psi(Y)[1 - \varphi(X)]}{m - (m+1)\varphi(X)}, \quad \mu = \frac{\varphi(X)\psi(Y)}{m - (m+1)\varphi(X)}, \quad \nu = \frac{-\psi(Y)}{m - (m+1)\varphi(X)},$$

résultat qu'il est facile de vérifier directement.

14. Il est clair qu'on pourra de même intégrer le système plus général

$$\begin{aligned}
&\alpha \frac{\lambda}{\frac{\partial\lambda}{\partial X}} + \beta \frac{\mu}{\frac{\partial\mu}{\partial X}} + \gamma \frac{\nu}{\frac{\partial\nu}{\partial X}} = 0,\\
&\alpha \frac{\lambda}{\frac{\partial\lambda}{\partial Y}} + \beta \frac{\mu}{\frac{\partial\mu}{\partial Y}} + \gamma \frac{\nu}{\frac{\partial\nu}{\partial Y}} = 0,\\
&\lambda + \mu + \nu = 0,
\end{aligned}$$

où l'on ne suppose plus que la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est nulle, si l'on sait trouver le changement de variables qui fait disparaître les carrés des dérivées partielles dans l'équation trouvée plus haut

$$nxp^2 + [(n+1)x - (m+1)y]pq - myq^2 - nxp + myq = 0.$$

Les résultats sont alors moins simples; mais le problème peut se résoudre par des quadratures. On a, en effet, à intégrer l'équation linéaire

$$2nxp - \left[(m+1)y - (n+1)x \pm \sqrt{(m+1)^2y^2 + (2mn - 2m - 2n - 2)xy + (n+1)^2x^2}\right]q = 0,$$

c'est-à-dire l'équation homogène

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n+1-(m+1)\frac{y}{x}\mp\sqrt{(m+1)^2\frac{y^2}{x^2}+(2mn-2m-2n-2)\frac{y}{x}+(n+1)^2}}{2n},$$

En posant, d'après la méthode ordinaire,

$$\frac{y}{x}=t,\qquad (m+1)^2t^2+2(mn-m-n-1)t+(n+1)^2=[(m+1)t+\theta]^2,$$

on arrive à l'équation

$$\frac{dx}{x}=\frac{(m+1)\theta^2-2(mn-m-n-1)\theta+(m+1)(n+1)^2}{(\theta-n-1)(\theta+2m+n+1)[mn-m-n-1-(m+1)\theta]}d\theta,$$

ou encore

$$\frac{dx}{x}=-\frac{\frac{n+1}{m+n+1}}{\theta-n-1}-\frac{\frac{m+n}{m+n+1}}{\theta+2m+n+1}-\frac{\frac{n(m+1)}{m+n+1}}{mn-m-n-1-(m+1)\theta},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{x^{m+n+1}(\theta-n-1)^{n+1}(\theta+2m+n+1)^{m+n}}{[(m+1)\theta-mn+m+n+1]^n}=\text{const.}$$

En remplaçant θ par sa valeur en $\frac{y}{x}$, et faisant pour abréger

$$R=\sqrt{(m+1)^2\frac{y^2}{x^2}+2(mn-m-n-1)\frac{y}{x}+(n+1)^2},$$

le changement de variables est défini par les deux équations

$$\frac{x^{m+n+1}\left[R-(m+1)\frac{y}{x}-n-1\right]^{n+1}\left[R-(m+1)\frac{y}{x}+2m+n+1\right]^{m+n}}{\left[(m+1)R-(m+1)^2\frac{y}{x}-mn+m+n+1\right]^n}=X,$$

$$\frac{x^{m+n+1}\left[-R-(m+1)\frac{y}{x}-n-1\right]^{n+1}\left[-R-(m+1)\frac{y}{x}+2m+n+1\right]^{m+n}}{\left[-(m+1)R-(m+1)^2\frac{y}{x}-mn+m+n+1\right]^n}=Y.$$

En divisant les deux équations l'une par l'autre, on voit que $\frac{y}{x}$ est défini en fonction de $\frac{Y}{X}$ par une équation qui est algébrique si m et n sont commensurables. On achèvera de déterminer les anciennes variables en fonction des nouvelles au moyen de l'une des équations précédentes, ou mieux avec l'équation obtenue en les multipliant entre elles, ce qui donne

$$4(m+n+1)^{m+n+1}\frac{m^m}{(-n)^n}x^{2(m+n+1)}\left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{m+n} = XY.$$

Un cas particulier simple est celui où la somme de deux des trois exposants 1, m, n est nulle. Une des trois parenthèses se réduit à une constante dans les expressions de X et Y. Bornons-nous à l'hypothèse $m=-1$, $n=1$. L'intégrale z définie par

$$\frac{z(z-y)}{z-x} = \text{const.}$$

satisfait alors à une équation du second degré en z. On a dans ce cas

$$R = 2\sqrt{1-\frac{y}{x}},$$

et si l'on change les variables X, Y en $4X^2$, $4Y^2$, on trouvera pour le changement de variables

$$y = XY, \qquad x = \tfrac{1}{4}(X+Y)^2.$$

La relation

$$z[z-\tfrac{1}{4}(X+Y)^2]^{-1}(z-XY) = \text{const.}$$

donnera donc naissance à une équation aux dérivées partielles, où les termes carrés auront des coefficients nuls. Par suite, en désignant par φ et ψ deux fonctions arbitraires, les valeurs

$$\lambda = \tfrac{1}{4}[\varphi(X)+\psi(Y)]^2 - \varphi(X)\psi(Y), \quad \mu = \varphi(X)\psi(Y), \quad \nu = -\tfrac{1}{4}[\varphi(X)+\psi(Y)]^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lambda = [\varphi(X)-\psi(Y)]^2, \qquad \mu = 4\varphi(X)\psi(Y), \qquad \nu = -[\varphi(X)+\psi(Y)]^2$$

seront les solutions du système d'équations simultanées

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial\lambda}{\partial X}} - \frac{\mu}{\frac{\partial\mu}{\partial X}} + \frac{\nu}{\frac{\partial\nu}{\partial X}} = 0,$$

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial\lambda}{\partial Y}} - \frac{\mu}{\frac{\partial\mu}{\partial Y}} + \frac{\nu}{\frac{\partial\nu}{\partial Y}} = 0,$$

$$\lambda + \mu + \nu = 0,$$

comme on peut le vérifier facilement.

15. Si dans l'équation (10) on suppose que u, v, w sont des fonctions linéaires

$$u = a_1 x + a_2 y + a_3,$$
$$v = b_1 x + b_2 y + b_3,$$
$$w = c_1 x + c_2 y + c_3,$$

on obtient l'équation

$$(13) \qquad \sum \frac{\alpha[(b_1 - c_1)x + (b_2 - c_2)y + b_3 - c_3]}{(b_2 - c_2)p - (b_1 - c_1)q + b_1 c_2 - b_2 c_1} = 0.$$

On voit que tous les coefficients de l'équation rendue entière par rapport à p et q sont des fonctions linéaires de x et y. On peut remplacer l'équation (13) par une autre qui permet de reconnaître plus facilement les équations dont une intégrale complète est de la forme

$$(z - u)^\alpha (z - v)^\beta (z - w)^\gamma = \text{const.}$$

La forme de l'équation (13) montre que ces équations pourront être représentées par

$$(14) \qquad \frac{\alpha(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3)}{\lambda_2 p - \lambda_1 q + \rho_1} + \frac{\beta(\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3)}{\mu_2 p - \mu_1 q + \rho_2} + \frac{\gamma(\nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3)}{\nu_2 p - \nu_1 q + \rho_3} = 0,$$

où les exposants α, β, γ ou plutôt leurs rapports sont mis en évidence. Mais les constantes λ, μ, ν, ρ doivent satisfaire à certaines conditions que nous allons chercher, en identifiant cette dernière équation avec (13). On aura

$$\begin{array}{lll} b_1 - c_1 = \lambda_1, & b_2 - c_2 = \lambda_2, & b_3 - c_3 = \lambda_3, \\ c_1 - a_1 = \mu_1, & c_2 - a_2 = \mu_2, & c_3 - a_3 = \mu_3, \\ a_1 - b_1 = \nu_1, & a_2 - b_2 = \nu_2, & a_3 - b_3 = \nu_3, \end{array}$$

$$\begin{aligned} b_1 c_2 - b_2 c_1 &= \rho_1, \\ c_1 a_2 - c_2 a_1 &= \rho_2, \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 &= \rho_3. \end{aligned}$$

Il faut trouver les conditions que doivent remplir λ, μ, ... pour que ces douze équations soient satisfaites par des valeurs convenables des neuf quantités a, b, c.

Le premier groupe de conditions montre que l'on doit avoir

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 &= 0, \\ \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 &= 0, \\ \lambda_3 + \mu_3 + \nu_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

On vérifie immédiatement que, en vertu de ces relations, les trois expressions

$$\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2, \quad \nu_1\lambda_2 - \lambda_1\nu_2, \quad \lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2$$

sont identiques; nous désignerons par D leur valeur commune.

Tirons des premières équations

$$\begin{array}{ll} b_1 = a_1 - \nu_1, & b_2 = a_2 - \nu_2, \\ c_1 = a_1 + \mu_1, & c_2 = a_2 + \mu_2, \end{array}$$

et substituons dans les trois dernières. On aura

$$\begin{aligned} \mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2 + a_1(\mu_2 + \nu_2) - a_2(\mu_1 + \nu_1) &= \rho_1, \\ -a_1\mu_2 + a_2\mu_1 &= \rho_2, \\ -a_1\nu_2 + a_2\nu_1 &= \rho_3, \end{aligned}$$

et en ajoutant ces trois équations

$$(16) \qquad \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \mathrm{D}.$$

Les conditions (15) et (16) sont d'ailleurs suffisantes, comme on le voit en calculant a, b, c. On trouvera sans difficulté, en tenant compte des équations de condition

$$a_1 = \frac{\rho_2\nu_1 - \rho_3\mu_1}{D}, \qquad a_2 = \frac{\rho_2\nu_2 - \rho_3\mu_2}{D},$$
$$b_1 = \frac{\rho_3\lambda_1 - \rho_1\nu_1}{D}, \qquad b_2 = \frac{\rho_3\lambda_2 - \rho_1\nu_2}{D},$$
$$c_1 = \frac{\rho_1\mu_1 - \rho_2\lambda_1}{D}, \qquad c_2 = \frac{\rho_1\mu_2 - \rho_2\lambda_2}{D}.$$

Quant à a_3, b_3, c_3, on voit que a_3 peut être pris arbitrairement; on peut par exemple le supposer nul, et déterminer b_3 et c_3 par les relations $b_3 = -\nu_3$, $c_3 = \mu_3$. Cette indétermination tient à ce qu'il est indifférent dans la question de remplacer z par $z +$ const.

Équations admettant une intégrale du premier degré.

16. Écrivons maintenant l'équation canonique avec de petites lettres

$$pq = ap + b,$$

et cherchons à déterminer les fonctions a et b de façon que cette équation admette l'intégrale du premier degré

$$\alpha p + \beta q + \gamma \text{ const.},$$

α, β, γ étant des fonctions de x et y. Si l'on suppose que l'on fasse passer tous les termes de l'équation donnée dans le premier membre, et si l'on désigne par f et φ les deux premiers membres des équations précédentes, on sait que l'on doit avoir, pour toutes les valeurs qui satisfont à la première équation,

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0,$$

ce qui donne ici

$$\begin{aligned}(q-a)\left(p\frac{\partial \alpha}{\partial x} + q\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) + \alpha\left(p\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x}\right)&\\ + p\left(p\frac{\partial \alpha}{\partial y} + q\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial y}\right) + \beta\left(p\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Si l'on remplace dans cette équation q par la valeur $a + \frac{b}{p}$, l'équation obtenue devra être identiquement nulle en x, y, p. Or le terme en q^2 donne un terme en $\frac{1}{p^2}$ qui ne peut se réduire avec aucun autre; on aura donc $\frac{\partial\beta}{\partial x} = 0$. On aura de même $\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$, en égalant à zéro le coefficient du terme en p^2. En opérant un changement de variables tel que

$$x' = \mathfrak{F}(x), \qquad y' = \mathcal{G}(y),$$

on peut supposer que les fonctions α et β, si aucune d'elles n'est nulle, ont été ramenées à être l'unité. La condition précédente se réduit à

$$\frac{b}{p}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + p\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) = 0;$$

donc

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0,$$

ce qui donne

$$\gamma = \mathrm{Y}, \qquad b = f(y - x), \qquad a = \varphi(y - x) - \mathrm{Y},$$

Y étant une fonction de y. Nous avons vu déjà qu'un changement de fonction permet de faire abstraction de la fonction Y dans a. D'ailleurs, si on la conserve, l'équation devra admettre l'intégrale

$$p + q + \mathrm{Y} = \text{const.}$$

Remplaçant q par sa valeur dans l'équation proposée, on a

$$p^2 + [\varphi(y - x) - \mathrm{C}]p + f(y - x) = 0,$$

et l'on obtient ainsi

$$dz = \frac{\mathrm{C}}{2}(dx + dy) + \tfrac{1}{2}\varphi(y - x)(dy - dx) \mp \sqrt{(\varphi - \mathrm{C})^2 - 4f}\,(dy - dx) - \mathrm{Y}\,dy.$$

Le second membre est visiblement une différentielle exacte, et l'on aura ainsi une intégrale complète.

Parmi les changements de variables qu'on peut faire subir à l'équation

$$pq - \varphi(y - x)p - f(y - x) = 0,$$

on peut remarquer le suivant : $x' = e^x$, $y' = e^y$, qui transforme l'équation en celle-ci

$$p'q' - \frac{p'}{y'}\varphi\left(\log\frac{y'}{x'}\right) - \frac{1}{x'y'}f\left(\log\frac{y'}{x'}\right) = 0,$$

que l'on peut aussi écrire

$$p'q' - \frac{1}{x'}\Phi\left(\frac{y'}{x'}\right)p' - \frac{1}{x'^2}\mathrm{F}\left(\frac{y'}{x'}\right) = 0.$$

Si l'on suppose $\beta = 0$, on verra que α est une fonction de x que nous pouvons regarder comme étant réduite à l'unité. On trouvera alors

$$\gamma = \mathrm{Y}, \qquad b = \mathrm{Y}_1, \qquad a = -x\mathrm{Y}',$$

en négligeant dans a une fonction de y additive. On saura donc trouver une intégrale du premier degré pour l'équation

$$pq = xf(y)p + \varphi(y).$$

L'hypothèse $\alpha = 0$ donne $\gamma = \mathrm{Y}$, $b = \mathrm{X}$, $a = \mathrm{X}_1 - \mathrm{Y}$, et, comme on peut négliger la fonction Y dans a, l'équation ne contient plus y et admet l'intégrale évidente $q = \text{const.}$

Recherche de quelques intégrales du second degré.

17. Considérons une intégrale de la forme

$$\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma p + \delta q + \varepsilon = \text{const.},$$

α, β, ..., ε étant des fonctions de x et y. Il est inutile de mettre un terme en pq; car, en se servant de l'équation proposée, ce terme ne ferait que modifier ceux du premier degré. La condition déjà employée donne ici

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &(q-a)\left(p^2\frac{\partial\alpha}{\partial x} + q^2\frac{\partial\beta}{\partial x} + p\frac{\partial\gamma}{\partial x} + q\frac{\partial\delta}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right) + (2\alpha p + \gamma)\left(p\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x}\right) \\ &\quad + p\left(p^2\frac{\partial\alpha}{\partial y} + q^2\frac{\partial\beta}{\partial y} + p\frac{\partial\gamma}{\partial y} + q\frac{\partial\delta}{\partial y} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right) + (2\beta q + \delta)\left(p\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) = 0.\end{aligned}\right.$$

En remplaçant q par $a + \frac{b}{p}$, et égalant à zéro les coefficients de p^3

et $\frac{1}{p^3}$, on trouve encore $\frac{\partial\beta}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$, et l'on peut supposer que $\alpha = 1$, $\beta = 1$, si aucune d'elles n'est nulle. On trouve alors des équations simultanées en nombre égal à celui des fonctions à déterminer; mais la recherche des intégrales paraît difficile dans le cas général.

Si l'on particularise l'intégrale en supposant que quelques-uns des coefficients α, β, ... sont nuls, on peut remarquer que l'hypothèse $\gamma = 0$, α et β étant supposés différents de zéro, conduit à des équations appartenant à la catégorie des géodésiques. Car, ayant fait $\alpha = 1$, $\beta = 1$, il n'y a qu'un seul terme en p^2 qui donne la condition $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$. a étant une fonction de y, nous savons que l'équation proposée peut être réduite à $pq = b$.

Cherchons s'il peut exister des intégrales de la forme

$$\alpha p^2 + \gamma p + \varepsilon = \text{const.}$$

La condition (17) donne

$$\frac{b}{p}\left(p^2 \frac{\partial\alpha}{\partial x} + p\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right) + (2\alpha p + \gamma)\left(p\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x}\right)$$
$$+ p\left(p^2\frac{\partial\alpha}{\partial y} + p\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right) = 0.$$

Les coefficients des termes en $\frac{1}{p}$ et en p^3 donnent $\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$. On peut par un changement de variables ramener la fonction α à être l'unité, mais non la fonction $\varepsilon = Y$. En égalant à zéro dans l'équation précédente les différentes puissances de p, on aura

$$b\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \gamma\frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$

$$\gamma\frac{\partial a}{\partial x} + 2\frac{\partial b}{\partial x} + Y' = 0,$$

$$2\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0.$$

La première équation donne $\gamma b = Y_1$, en désignant par Y_1 une nouvelle fonction de y. En remplaçant γ par sa valeur, on obtient les deux équations

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{2b\dfrac{\partial b}{\partial x}}{Y_1} - b\frac{Y'}{Y_1},$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{Y_1'}{2b} + \frac{Y_1\dfrac{\partial b}{\partial y}}{2b^2}.$$

En éliminant $\dfrac{\partial a}{\partial x}$, on aura, pour déterminer la fonction b, l'équation

$$\frac{4b^3}{Y_1}\frac{\partial b}{\partial x} + Y_1\frac{\partial b}{\partial y} = Y_1' b - 2\frac{Y'}{Y_1}b^3.$$

Les équations des caractéristiques

$$\frac{dx}{\dfrac{4b^3}{Y_1}} = \frac{dy}{Y_1} = \frac{db}{Y_1' b - 2\dfrac{Y'}{Y_1}b^3}$$

permettent de trouver deux intégrales sous forme finie. Les deux derniers rapports donnent entre b et y une équation de Bernoulli dont l'intégrale est

$$b^2 = \frac{Y_1^2}{4Y + C}.$$

Les deux premiers rapports, quand on remplace b par sa valeur en y, donnent la quadrature

$$dx = \frac{4Y_1\,dy}{(4Y + C)^{\frac{3}{2}}}.$$

On pourra donc, pour des fonctions déterminées Y et Y_1, trouver l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles qui donne b.

Si l'on suppose que Y_1 est la dérivée de Y, les intégrales seront

$$b^2 = \frac{Y'^2}{4Y + C}, \qquad x + C_1 + \frac{2}{(4Y + C)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

et la fonction b sera définie par l'équation

$$x + \frac{2b}{Y'} = F\left(\frac{Y'^2}{b^2} - 4Y\right).$$

18. On peut se proposer de trouver les intégrales de la forme

$$\beta q^2 + \delta q + \varepsilon = \text{const.}$$

Si l'on remplace q par $a + \dfrac{b}{p}$, on voit que cela revient à trouver les intégrales de la forme

$$\frac{\alpha}{p^2} + \frac{\gamma}{p} + \varepsilon = \text{const.}$$

L'équation (17) où l'on a éliminé q donne

$$\frac{b}{p}\left(\frac{1}{p^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{1}{p}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right) - \left(\frac{2\alpha}{p^3} + \frac{\gamma}{p^2}\right)\left(p\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x}\right)$$
$$+ p\left(\frac{1}{p^2}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{1}{p}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right) = 0.$$

Le terme du premier degré en p et celui qui est indépendant de p donnent $\dfrac{\partial\gamma}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y} = 0$. On peut, par un changement de variables, supposer $\gamma = 1$. Soit alors $\varepsilon = X$. On aura en outre les conditions

$$b\frac{\partial\alpha}{\partial x} - 2\alpha\frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$

$$-2\alpha\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$

$$bX' - \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0.$$

La première donne $\alpha = \dfrac{b^2}{Y'^2}$, Y' désignant la dérivée d'une fonction Y de y. En substituant cette valeur de α, on obtient les deux équations

$$2\frac{b^2}{Y'^2}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$

$$bX' - \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{2b\dfrac{\partial b}{\partial y}}{Y'^2} - \frac{2b^2 Y''}{Y'^3} = 0.$$

L'élimination de $\dfrac{\partial a}{\partial x}$ donne pour déterminer b l'équation

$$Y'^3\frac{\partial b}{\partial x} + 4Y'b^3\frac{\partial b}{\partial y} = 4Y''b^4 - 2X'Y'^3b^3.$$

Les équations des caractéristiques

$$\frac{dx}{Y'^3} = \frac{dy}{4Y'b^3} = \frac{db}{4Y''b^4 - 2X'Y'^3b^3}$$

ne permettent pas en général de trouver d'intégrales. Mais, si l'on suppose que $X' = 0$, c'est-à-dire que l'on cherche des intégrales de la forme $\frac{\alpha}{p^2} + \frac{\gamma}{p} = \text{const.}$, les deux derniers rapports donnent l'intégrale $b = CY'$, et les deux premiers l'intégrale

$$4C^3(x + C_1) = Y.$$

La fonction b satisfera donc à l'équation

$$\frac{YY'^3}{4b^3} - x = F\left(\frac{Y'}{b}\right).$$

Cas où les termes du second degré forment un carré parfait.

19. Nous avons vu que la réduction effectuée sur l'équation générale supposait $b^2 - ac$ différent de zéro. Lorsque $b^2 - ac = 0$, l'équation peut s'écrire

$$(ap + bq)^2 + 2dp + 2eq + f = 0.$$

Faisons un changement de variables $X = \Phi(x, y)$, $Y = \Psi(x, y)$, ce qui donne

$$p = P\frac{\partial\Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

$$q = P\frac{\partial\Phi}{\partial y} + Q\frac{\partial\Psi}{\partial y}.$$

On peut faire en sorte que les nouveaux termes du second degré ne contiennent plus que le carré de P, en prenant pour Ψ une solution de l'équation

$$a\frac{\partial\Psi}{\partial x} + b\frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0.$$

On pourra ensuite faire disparaître le terme en P, en prenant pour Φ une solution de l'équation

$$d\frac{\partial\Phi}{\partial x} + e\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0.$$

L'équation prend alors la forme réduite

$$P^2 - \lambda Q - \mu = 0.$$

On voit maintenant qu'un changement de fonction ne permet plus de simplifier cette équation. Mais, si l'on suppose qu'avant d'effectuer le changement de variables on ait posé $z = Z + T$, où T est une solution particulière de l'équation proposée, on fera disparaître le terme indépendant des dérivées partielles, et les changements de variables ne le feront pas apparaître. Il est donc possible de réduire l'équation générale à la forme $P^2 - \lambda Q = 0$.

On ne peut plus regarder cette équation comme canonique. La fonction λ dépendra de la solution particulière qu'on a choisie pour faire disparaître le dernier terme; le changement de variables, qui fait intervenir les termes du premier degré, dépendra lui-même du choix de l'intégrale particulière, et comme on se trouve dans l'impossibilité d'avoir l'expression explicite des intégrales d'une équation aux dérivées partielles, les équations qui se déduisent d'une équation donnée, même très simple, de la forme $p^2 - \lambda q = 0$, pourront avoir la même forme avec des valeurs de λ tout à fait différentes.

Nous pouvons nous rendre compte de ce fait, en prenant une équation déterminée de la forme $p^2 - \lambda q = 0$ et en cherchant les transformées de la même forme qu'on peut en déduire par un changement de variables et de fonction. Posons $z = z_1 + t$, t satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial t^2}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

on aura, en supprimant les indices des nouvelles dérivées partielles, l'équation

$$p^2 + 2\frac{\partial t}{\partial x} p - \lambda q = 0.$$

Faisons maintenant le changement de variables $x_1 = \varphi(x, y)$, $y_1 = \psi(x, y)$. Si l'on veut que l'équation conserve la même forme, il faut évidemment que $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ soit nul, ou que ψ soit une fonction Y de y. Il faudra ensuite

$$2\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \tag{18}$$

pour que le terme en p_1 de la nouvelle équation disparaisse. Moyennant ces conditions, l'équation sera

$$p_1^2 - \frac{\lambda Y'}{\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2}} q_1 = 0;$$

mais on voit que la fonction φ dépend de l'intégration de l'équation (18), où figure $\frac{\partial t}{\partial x}$ dont on n'a pas l'expression explicite.

Nous nous bornerons à chercher toutes les équations de la forme $p^2 - \lambda q = 0$, qui peuvent être ramenées, par un changement des variables et de la fonction, à l'équation à coefficients constants $p^2 - q = 0$.

20. L'équation $p^2 - q = 0$ admet évidemment l'intégrale

$$z = Cx + C^2 y.$$

Si l'on fait un changement de variables et de fonction, l'équation transformée admettra toujours une intégrale de la même forme par rapport à la constante C

$$z = u + Cv + C^2 w, \tag{19}$$

et réciproquement, comme on peut toujours ramener cette seconde intégrale à la première, on voit que toute équation qui admet une intégrale de la forme (19) pourra être transformée, par un changement de variables et de fonction, en l'équation $p^2 - q = 0$.

Pour résoudre la question, nous allons former l'équation aux dérivées partielles qui correspond à l'équation (19) et chercher directement ce que doivent être les fonctions u, v, w, pour que cette équation ait la forme $p^2 - \lambda q = 0$.

On forme facilement l'équation aux dérivées partielles en question, qui résulte de l'élimination de C entre les deux premières dérivées de l'équation (19). Elle est

$$\begin{aligned}&\left(q\frac{\partial w}{\partial x} - p\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ &\quad = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(q\frac{\partial v}{\partial x} - p\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

Pour qu'elle ait la forme $p^2 - \lambda q = 0$, il faut d'abord que $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, ou $w = \mathrm{Y}$. L'équation précédente se réduit à

$$\mathrm{Y}'p^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - 2\mathrm{Y}'\frac{\partial u}{\partial x}\right)p - \frac{\partial v^2}{\partial x^2}q + \mathrm{Y}'\frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

On aura donc, pour déterminer les fonctions u et v, les deux équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\mathrm{Y}'}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{Y}'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

La seconde équation donne, en tenant compte de la première,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4\mathrm{Y}'}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Éliminant la fonction u, et désignant pour un instant par p, q, r, s, t les dérivées partielles de la fonction v, on aura pour déterminer v, après suppression de la solution $p = 0$, qui ne donne aucun résultat, l'équation du second ordre

$$\mathrm{Y}'t - \mathrm{Y}''q = 0,$$

qui donne $q = \mathrm{XY}'$, X étant une fonction arbitraire de x, et par suite

$$v = \mathrm{XY} + \mathrm{X}_1.$$

L'équation est donc

$$(20) \qquad p^2 - \frac{(\mathrm{X}'\mathrm{Y} + \mathrm{X}_1')^2}{\mathrm{Y}'}q = 0.$$

On aura u au moyen des relations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{X}}{2}(\mathrm{X}'\mathrm{Y} + \mathrm{X}_1'), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \tfrac{1}{4}\mathrm{X}^2\mathrm{Y}',$$

ce qui donne, à une constante près,

$$u = \tfrac{1}{4}\mathrm{X}^2\mathrm{Y} + \tfrac{1}{2}\int \mathrm{XX}_1'\,dx.$$

Connaissant les valeurs de u, v, w en fonction de x et y, nous voyons que les changements de fonction et de variables définis par les formules suivantes

$$z = z_1 + \tfrac{1}{4}\mathrm{X}^2\mathrm{Y} + \tfrac{1}{2}\int \mathrm{XX}_1'\,dx, \qquad x_1 = \mathrm{XY} + \mathrm{X}_1, \qquad y_1 = \mathrm{Y}$$

changent l'intégrale (19) en $z_1 = Cx_1 + C_2 y_1$. L'équation (20) est celle que nous voulions obtenir. Elle se transforme, au moyen des formules précédentes, en l'équation $p_1^2 - q_1 = 0$.

21. Proposons-nous d'étudier de la même façon les équations aux dérivées partielles qui admettent une intégrale de la forme

$$z = \frac{u + Cv}{u_1 + Cv_1}.$$

C étant une constante arbitraire, et u, v, u_1, v_1 des fonctions de x et y. En faisant $C = 0$ et $C = \infty$, on voit que $\frac{u}{u_1}$ et $\frac{v}{v_1}$ doivent être deux solutions particulières.

Désignons actuellement par u et v ces deux solutions, et par θ une fonction quelconque de x et y. On pourra écrire l'intégrale sous cette forme

$$z = \frac{\theta u + Cv}{\theta + C}.$$

En éliminant C entre les deux équations qui fournissent les dérivées du premier ordre, on trouve l'équation aux dérivées partielles suivante

$$-(u - v)\left(p\frac{\partial\theta}{\partial y} - q\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + Dp + Eq + F = 0,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
D = {} & (u - v)\frac{\partial\theta}{\partial y}\left[\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial(u+v)}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial(u+v)}{\partial y}\right] \\
& + \theta\frac{\partial(u-v)}{\partial y}\left[\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial(u-v)}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial(u-v)}{\partial y}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E = {} & (u - v)\frac{\partial\theta}{\partial x}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial(u+v)}{\partial y} - \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial(u+v)}{\partial x}\right] \\
& + \theta\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial(u-v)}{\partial y} - \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F = {} & (u - v)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
& + \theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial(u-v)}{\partial x} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial(u-v)}{\partial y}\right].
\end{aligned}$$

Cherchons ce que doivent être les fonctions u, v, w pour que l'équation prenne la forme $p^2 - \lambda q = 0$. On voit d'abord que θ doit être une fonction de y que nous désignerons par Y. L'équation devient

$$-(u-v)Y'p^2 + \left[(u-v)Y'\frac{\partial(u+v)}{\partial x} + Y\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\frac{\partial(u-v)}{\partial y}\right]p$$
$$-Y\left[\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\right]^2 q - (u-v)Y'\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + Y\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

On aura donc, pour déterminer u et v, les deux équations

$$(u-v)Y'\frac{\partial(u+v)}{\partial x} + Y\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\frac{\partial(u-v)}{\partial y} = 0.$$
$$(u-v)Y'\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - Y\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

Introduisons, au lieu de u et v, les deux fonctions $u - v = \alpha$, $u + v = \beta$, et remarquons que l'on a identiquement

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(u-v)}{\partial x}\frac{\partial(u+v)}{\partial y} - \frac{\partial(u+v)}{\partial x}\frac{\partial(u-v)}{\partial y}\right].$$

α et β seront alors déterminés par les deux équations

$$Y'\alpha\frac{\partial\beta}{\partial x} + Y\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0,$$
$$Y'\alpha\left(\frac{\partial\beta^2}{\partial x^2} - \frac{\partial\alpha^2}{\partial x^2}\right) - 2Y\frac{\partial\alpha}{\partial x}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) = 0,$$

qui donnent

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = -\frac{Y}{Y'}\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}}{\alpha}, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{Y}{Y'}\frac{\frac{\partial\alpha^2}{\partial y^2}}{\alpha} - \frac{1}{2}\frac{Y'}{Y}\alpha.$$

Éliminant la fonction β et désignant par p, q, r, s, t les dérivées partielles de la fonction α, cette fonction devra satisfaire à l'équation

$$(21) \qquad -\frac{Y}{Y'}\alpha t + \frac{1}{2}\frac{Y}{Y'}q^2 + \frac{1}{2}\frac{Y'}{Y}\alpha^2 + \frac{YY'' - Y'^2}{Y'^2}\alpha q = 0,$$

en supprimant la solution $p=0$, qui donnerait pour α et β et, par suite, pour u et v de simples fonctions de y, en sorte que z ne contiendrait pas x.

Pour intégrer l'équation (21), commençons par un cas particulier, la fonction Y étant déterminée de façon à faire disparaître le terme en αq. Il suffira de prendre $Y=e^y$; l'équation à intégrer se réduit alors à

$$q^2+\alpha^2-2\alpha t=0. \tag{22}$$

La méthode des caractéristiques, appliquée à cette équation, fournit facilement l'intégrale intermédiaire

$$q^2-\alpha^2=X\alpha,$$

X étant une fonction arbitraire de x. Cette dernière équation s'intègre immédiatement par des quadratures. En l'écrivant

$$\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial y}}{\sqrt{\left(\alpha+\frac{X}{2}\right)^2-\frac{X^2}{4}}}=1,$$

on obtient l'intégrale

$$\alpha=\tfrac{1}{4}X(e^{y+X_1}+e^{-(y+X_1)}-2),$$

où X_1 désigne une nouvelle fonction arbitraire de x. Ainsi, dans le cas particulier examiné, l'équation que nous cherchions est

$$p^2+\frac{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2}{\alpha}q=0,$$

α étant défini par l'expression précédente.

On remarquera ensuite que si dans l'équation (21) on fait le changement de variables $x_1=x$, $y_1=\log Y$, on obtient pour transformée l'équation

$$q_1^2 + \alpha^2 - 2\alpha t_1 = 0,$$

qui est précisément l'équation (22). L'intégrale cherchée est donc

$$\alpha = \frac{1}{4}\mathrm{X}\left(\mathrm{Y}e^{\mathrm{X}_1} + \frac{1}{\mathrm{Y}}e^{-\mathrm{X}_1} - 2\right) = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}e^{-\mathrm{X}_1}(\mathrm{Y}e^{\mathrm{X}_1} - 1)^2.$$

Si l'on pose $e^{\mathrm{X}_1} = \mathrm{U}$, on aura

$$\alpha = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{YU}}(\mathrm{YU} - 1)^2.$$

Il en résulte

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{YU} - 1}{\mathrm{YU}^2}[(\mathrm{U}^2\mathrm{X}' + \mathrm{XUU}')\mathrm{Y} + \mathrm{XU}' - \mathrm{UX}'],$$

d'où

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Y}'}\frac{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2}{\alpha} = \frac{1}{\mathrm{Y}'}\left(\frac{u^2\mathrm{X}' + \mathrm{XUU}'}{2\mathrm{U}^{\frac{3}{2}}\mathrm{X}^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Y} + \frac{\mathrm{XU}' - \mathrm{UX}'}{2\mathrm{U}^{\frac{3}{2}}\mathrm{X}^{\frac{1}{2}}}\right)^2.$$

Si nous comparons cette expression, où U, X sont des fonctions arbitraires de x et Y une fonction arbitraire de y, avec celle qui a été obtenue dans le numéro précédent $\frac{(\mathrm{X}'\mathrm{Y} + \mathrm{X}'_1)^2}{\mathrm{Y}'}$, nous voyons qu'il n'y a aucune différence entre elles.

On peut s'en rendre compte *a priori*. On remarque qu'un changement de fonction et de variables ne change pas la forme sous laquelle entre la constante dans les intégrales

$$z = \frac{u + \mathrm{C}v}{u_1 + \mathrm{C}v_1}, \tag{23}$$

$$z = u + \mathrm{C}v + \mathrm{C}^2w. \tag{24}$$

Si une équation telle que $p^2 - \lambda q = 0$ admet l'une ou l'autre de ces deux intégrales, elle admettra une intégrale de même forme, après qu'on lui aura fait subir un changement quelconque de fonction et de variables, et, en particulier, après un changement tel qu'elle reprenne la forme $p^2 - \mu q = 0$. Pour justifier l'identité des résultats précédents, il suffit donc de montrer que l'équation particulière $p^2 - q = 0$, qui admet, comme nous l'avons vu, une intégrale de la forme (24), admet aussi une intégrale de la forme (23). Remarquons maintenant que, par un changement de fonction, on peut toujours faire disparaître la constante du numérateur de l'expression (23); or, si dans la fraction $\frac{u}{u_1 + C v_1}$ on fait $u = -4y$, $u_1 = x^2$, $v_1 = 4$, on trouve effectivement une intégrale avec une constante arbitraire de l'équation $p^2 - q = 0$.

Intégrales du premier degré.

22. Cherchons s'il est possible de déterminer la fonction λ de façon que l'équation $p^2 - \lambda q = 0$ admette une intégrale de la forme

$$\alpha p + \beta q = \text{const.},$$

α et β étant des fonctions convenablement choisies de x et y. La condition déjà employée plusieurs fois donne ici

$$2p\left(p\frac{\partial\alpha}{\partial x} + q\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) + \alpha q\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \lambda\left(p\frac{\partial\alpha}{\partial y} + q\frac{\partial\beta}{\partial y}\right) + \beta q\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0,$$

ou, en remplaçant q par $\frac{p^2}{\lambda}$,

$$-\lambda\frac{\partial\alpha}{\partial y}p + \left(2\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\beta}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)p^2 + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\beta}{\partial x}p^3 = 0.$$

L'équation devant être maintenant identique en p, on aura $\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial\beta}{\partial x} = 0$; α étant une fonction de x, et β une fonction de y, on peut les supposer réduites toutes deux à l'unité, si aucune d'elles n'est supposée nulle, par un changement de variables tel que $x' = \mathfrak{F}(x)$, $y' = \mathfrak{G}(y)$, qui ne change pas la forme de l'équation proposée. Dans ces conditions, la nouvelle fonction λ doit satisfaire à l'équation $\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0$, et l'on aura $\lambda = F(y - x)$.

Il serait intéressant d'obtenir les équations qui admettent une intégrale du premier degré de la forme

$$\alpha p + \beta q + \gamma = \text{const.}$$

La forme du premier membre n'étant pas altérée par un changement de fonction et de variables, les équations de la forme $p^2 - \lambda q = 0$ qui jouissent de cette propriété seraient toutes des transformées de l'une d'elles; mais la question conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre qui ne semble pas pouvoir s'intégrer. La condition à remplir est alors

$$-\lambda\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \left(2\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \lambda\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)p + \left(2\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\beta}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)p^2 + \frac{2}{\lambda}\frac{\partial\beta}{\partial x}p^3 = 0.$$

Il faut donc que l'on ait $\frac{\partial\beta}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0$. La fonction β peut encore être réduite à l'unité par un changement de variables, mais non la fonction γ que nous désignerons par X. Les deux fonctions α et λ sont alors déterminées par les deux équations

$$2X' - \lambda\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0,$$

$$2\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0.$$

Substituant, dans la seconde équation, la valeur de λ tirée de la première, on obtient, en désignant par p, q, r, s, t les dérivées partielles de la fonction α, l'équation

$$t + \alpha s - 2pq - \frac{X''}{X'}q\alpha = 0.$$

La nature de la fonction X n'apporte pas de difficulté à l'intégration; car si l'on fait, dans l'équation précédente, le changement de fonction et de variables défini par les relations

$$x_1 = X, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = \alpha X',$$

l'équation se transforme en celle-ci

$$t_1 + z_1 s_1 - 2 p_1 q_1 = 0. \tag{25}$$

On trouve facilement les intégrales de cette équation qui sont la somme ou le produit d'une fonction de x_1 par une fonction de y_1. Mais on voit aisément que, dans ces deux cas, la valeur de la fonction λ est le produit d'une fonction de x_1 par une fonction de y_1. Les équations correspondantes ont alors la forme

$$\frac{p^2}{[f(x)]^2} - \frac{q}{\varphi(y)} = 0,$$

qui dérivent d'une façon évidente d'une équation de même forme à coefficients constants.

Il en résulte que l'équation $p^2 - q = 0$ a une intégrale du premier degré, et c'est d'ailleurs ce qui résultait de la recherche de l'intégrale quand $\gamma = 0$; nous avons trouvé pour λ une fonction de $y - x$ qui peut, comme cas particulier, se réduire à l'unité. Toutes les équations étudiées dans les deux numéros précédents et qui sont les transformées de $p^2 - q = 0$ admettront donc aussi des intégrales du premier degré; on peut constater, en effet, qu'elles correspondent à une intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles (25).

Faisons dans cette équation $z_1 = \frac{1}{z_2}$; elle se transforme en celle-ci

$$2 q_2^2 - t_2 z_2 - s_2 = 0.$$

Les équations des caractéristiques mettent en évidence une combinaison intégrable, et l'on en conclut la solution

$$z_2 = f(x) - \frac{y}{2x + C},$$

où $f(x)$ est une fonction quelconque de x, et C une constante arbitraire. La fonction $\alpha = \frac{z_1}{X'}$ sera alors

$$\alpha = \frac{2x + C}{X'[(2x + c) f(x) - y]}.$$

La fonction λ, qui est le quotient de $2X'$ par $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$, aura la forme $(X_1 y + X_2)^2$. Si l'on rétablit le changement de variable $y' = \varphi(y)$ qui a permis de supposer $\beta = 1$ dans l'intégrale $\alpha p + \beta q + \gamma = \text{const.}$, on retombera sur la forme générale trouvée pour λ, quand l'équation se ramène à une autre de même forme à coefficients constants.