

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. FOUSSEREAU

Sur la fréquence des nombres premiers

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 9 (1892), p. 31-34

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__31_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA

FRÉQUENCE DES NOMBRES PREMIERS,

PAR M. G. FOUSSEREAU,

PROFESSEUR AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND.



Définition. — On appelle *fréquence* des entiers jouissant d'une certaine propriété, entre deux entiers A et A' , le quotient $\frac{M}{A' - A}$ du nombre M d'entiers supérieurs à A et inférieurs à $A' + 1$, qui jouissent de la propriété proposée, par la différence $A' - A$ des limites considérées.

Supposons que, A restant constant, A' croisse indéfiniment. Si le quotient $\frac{M}{A' - A}$ tend vers une limite déterminée, nous appellerons cette limite *fréquence moyenne* à partir de A .

LEMME. — Soient $m, n, \dots, p, q$ des nombres premiers tous différents. Considérons la suite des nombres entiers depuis 1 jusqu'au produit $mn \dots pq$. On sait que le nombre de nombres premiers avec ce produit compris dans cette suite a pour valeur

$$(m-1)(n-1) \dots (p-1)(q-1).$$

Si B est un entier quelconque,

$$B + mn \dots pq$$

est ou non premier avec $mn \dots pq$, suivant que B est lui-même premier ou non avec ce produit.

Les nombres premiers avec $mn \dots pq$ se reproduisent donc périodi-

quement dans la série naturelle des nombres entiers, la période étant $mn \dots pq$.

La fréquence des nombres premiers avec $mn \dots pq$, entre 0 et $A = Kmn \dots pq$, ou encore entre $A_1 = K_1 mn \dots pq$ et $A_2 = K_2 mn \dots pq$, a donc pour valeur

$$\frac{(m-1)(n-1) \dots (p-1)(q-1)}{mn \dots pq} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right),$$

K, K_1 et K_2 étant des coefficients entiers quelconques.

En particulier, représentons par Q le produit de tous les nombres premiers depuis 2 jusqu'à un certain nombre premier q . La fréquence des nombres compris entre $A_1 = K_1 Q$ et $A_2 = K_2 Q$, qui ne sont divisibles par aucun nombre premier jusqu'à q inclusivement, a pour valeur

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Corollaire. — Si l'on suppose $K \geq 1$, tous les nombres premiers entre A_1 et A_2 font partie des non-multiples considérés. Donc, si l'on désigne par F_{KQ} la fréquence des nombres premiers entre Q et $A = KQ$, K étant au moins égal à 2, on aura

$$(1) \quad F_{KQ} \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q}\right) = \lambda.$$

THÉORÈME. — *La fréquence des nombres premiers compris entre Q et $A = KQ$ tend vers zéro, lorsqu'on fait croître indéfiniment le dernier facteur premier q contenu dans le produit Q . Il en est de même de la fréquence moyenne des nombres premiers à partir de Q .*

Il suffit, pour établir la première partie de la proposition, de démontrer que le second membre de l'inégalité (1) tend vers zéro si l'on fait croître q indéfiniment.

D'après un théorème dû à Euler, si l'on pose

$$\Pi_\alpha = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{3^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{5^\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q^\alpha}\right) \dots,$$

2, 3, 5, ..., q , ... représentant la série indéfinie des nombres premiers

et α un exposant supérieur à l'unité, et

$$S_{\alpha} = \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{m^{\alpha}} + \dots,$$

1, 2, 3, ..., m , ... représentant la série indéfinie des nombres entiers, on a la relation

$$\Pi_{\alpha} = \frac{1}{S_{\alpha}}.$$

Or S_{α} tend vers l'infini, à mesure que α décroît en se rapprochant de l'unité.

En effet, cette somme peut s'écrire

$$S_{\alpha} = \frac{1}{1^{\alpha}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha}} \right) + \left(\frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} \right) + \left(\frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}} + \frac{1}{8^{\alpha}} \right) + \dots \\ + \left[\frac{1}{(2^{p-1} + 2)^{\alpha}} + \frac{1}{(2^{p-1} + 3)^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{(2^p)^{\alpha}} \right] + \dots$$

La somme des termes du dernier crochet T est plus grande que le dernier terme multiplié par le nombre des termes

$$T > \frac{1}{2^{p\alpha}} \times 2^{p-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{p(\alpha-1)}}.$$

On a donc

$$S_{\alpha} > 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^2)^{(\alpha-1)}} + \frac{1}{(2^3)^{(\alpha-1)}} + \dots \right];$$

en sommant la progression géométrique,

$$S_{\alpha} > 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{2^{\alpha-1} - 1}$$

Quand α tend vers 1, le second membre croît indéfiniment. Il en est donc de même du premier S_{α} .

Donc Π_{α} tend vers zéro quand α se rapproche indéfiniment de l'unité.

Or le produit

$$\Pi = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{q} \right) \dots$$

a ses facteurs respectivement plus petits que ceux du produit Π_{α} , quel que soit $\alpha > 1$.

Donc le produit II est plus petit que toute quantité positive donnée; il est nul, ce qui établit la première partie du théorème.

Soient B un entier compris entre $(K-1)Q$, et KQ et F_B la fréquence des nombres premiers entre Q et B. Si tous les nombres premiers compris entre $(K-1)Q$ et KQ étaient au plus égaux à B, F_B aurait pour valeur

$$F_{KQ} \frac{(K-1)Q}{B-Q}.$$

On a donc

$$F_B \leq F_{KQ} \frac{(K-1)Q}{B-Q} \leq F_{KQ} \frac{K-1}{K-2}.$$

Quelle que soit la loi suivant laquelle on fait croître B indéfiniment, le rapport $\frac{K-1}{K-2}$ tend vers l'unité. La limite Φ_Q de F_B , c'est-à-dire la fréquence moyenne à partir de Q, a donc la même valeur que la limite de F_{KQ} pour K indéfiniment croissant. Mais si, à son tour, le dernier facteur premier q entrant dans Q croît indéfiniment, F_{KQ} tend vers zéro. Il en est donc de même de Φ_Q .

