PAUL PAINLEVÉ

Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 9 (1892), p. 283-308
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__283_0>

MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

(SUITE),

PAR M. PAUL PAINLEVÉ,

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

CHAPITRE VI.

INTÉGRALES ALGÉBRIQUES DES ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

1. Une fois reconnu que l'intégrale d'une équation

$$F[y, y', (x)] = 0 \tag{1}$$

ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, nous avons indiqué, à la fin du Chapitre IV, quelles conditions doivent être encore remplies pour que l'intégrale ne prenne, dans tout le plan, qu'un nombre fini de valeurs. Il faut que l'équation à points critiques fixes

$$h\left[r, \frac{dr}{dx}, (x)\right] = 0, \tag{2}$$

à laquelle on ramène l'équation (1), ait pour intégrale une fonction à ν valeurs. Étudions quelles simplifications apporte, dans ce nouveau problème, l'hypothèse que $y(x)$ est une fonction algébrique.

Il est nécessaire et suffisant, pour cela, que l'intégrale de (2) soit algébrique. Si le genre ϖ de (2) est supérieur à l'unité, l'équation (2) s'intègre algébriquement : il suffit donc que les coefficients de (2), par suite de (1), soient algébriqnes, en x.

Si $\varpi = 1$, on transforme l'équation (2) en la suivante

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \mathrm{H}(x)\,dx; \tag{3}$$

$\int \mathrm{H}(x)\,dx$ doit être une intégrale abélienne de première espèce d'une certaine courbe algébrique. Il faut, de plus, que cette intégrale se ramène aux intégrales elliptiques de module k^2.

Quand $\varpi = 0$, on substitue à l'équation (2) une équation de Riccati

$$t' = \mathrm{M}t^2 + \mathrm{N}t + \mathrm{P}. \tag{4}$$

Il faut et il suffit que l'intégrale de cette équation soit algébrique. Par des procédés analogues à ceux qu'on emploie dans la théorie des équations différentielles linéaires [1], on détermine s'il en est ainsi (et l'équation s'intègre alors algébriquement), ou l'on ramène l'équation à une quadrature

$$\frac{t'}{t} = \mathrm{K}(x).$$

Nous voyons ainsi que *la question de reconnaître si l'intégrale d'une équation* (1), *qui ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, est algébrique, se résout algébriquement ou se ramène au problème de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques ou logarithmiques.*

Quand on se donne le nombre N de valeurs que la fonction algébrique $y(x)$ peut acquérir dans tout le plan, la question se résout complètement dans le cas de $\varpi = 0$.

On sait décider, en effet, si l'intégrale de l'équation

$$\frac{t'}{t} = \mathrm{K}(x)$$

est une fonction algébrique à ν valeurs.

Pour que le cas de $\varpi = 1$, le problème n'est guère simplifié. Écrivons l'équation (2) en exprimant la fonction algébrique $\mathrm{H}(x)$ à l'aide des

---

(1) *Voir*, par exemple, à ce sujet, diverses Notes que j'ai publiées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (juin, juillet 1887, janvier 1888).

coordonnées (x, ξ) de la courbe algébrique dont elle définit une intégrale abélienne,

$$H(x) = R(x, \xi),$$

avec la condition

$$f(x, \xi) = 0;$$

on a

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = R(x, \xi)\,dx.$$

Si l'intégrale de cette équation $t(x)$ est algébrique, on sait que l'intégrale t_1 de l'équation

$$\frac{dt_1}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-k^2t_1^2)}} = r\,R(x, \xi)\,dx,$$

pour une certaine valeur de l'entier r, est une fonction rationnelle de (x, ξ). Si l'on se donne une limite du nombre des valeurs de t, on se donne, par le fait même, une limite du nombre r, et le problème se trouve ramené ainsi à reconnaître si l'intégrale d'une certaine équation

$$\frac{dt_1}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-k^2t_1^2)}} = R_1(x, \xi)\,dx$$

a son intégrale rationnelle en (x, ξ).

En résumé, *on sait reconnaître si l'intégrale de l'équation* (1) *est une fonction algébrique $y(x)$ à N valeurs, ou l'on ramène l'équation* (1) *à la suivante*

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = R(x, \xi)\,dx \qquad [\text{avec } f(x, \xi) = 0],$$

et l'intégrale de cette équation doit être rationnelle en (x, ξ).

En particulier, quand le genre p de (1) est nul, notamment quand l'équation (1) est résolue par rapport à y', le problème que nous venons d'énoncer se résout toujours algébriquement.

2. Plaçons-nous maintenant dans le cas où l'on ne se donnerait ni n, ni N, autrement dit, cherchons à traiter, sous sa forme la plus générale, la question de savoir si l'intégrale de l'équation (1) est algébrique. Dans ces conditions, y ne joue plus nécessairement le rôle de fonction

par rapport à x; on peut permuter les deux variables et effectuer dans (1) une transformation algébrique quelconque portant sur ces variables, par exemple, la transformation homographique la plus générale

$$x = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a''x_1 + b''y_1 + c''}, \qquad y = \frac{a'x_1 + b'y_1 + c'}{a''x_1 + b''y_1 + c''}.$$

Admettons qu'on ait fait subir effectivement à x et y cette transformation. L'équation (1), irréductible, a alors pour premier membre un polynôme en y, y' et x. L'intégrale de (1), si elle est algébrique, s'écrira

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + \ldots + Ly^n = 0,$$

ou encore

$$y^n + R_{(n-1)}(y_0, y'_0, x_0, x)y^{n-1} + \ldots + R_0(y_0, y'_0, x_0, x) = 0.$$

La fonction $y(x)$ est une fonction algébrique à n valeurs, sans points critiques fixes; les R_i désignent des fonctions rationnelles de y_0, y'_0, x_0, x. On déduit de là (comme on l'a fait au Chapitre I) que l'intégrale de (1) se laisse mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$\rho(y, y', x) = \gamma,$$

ρ étant rationnel en y, y', x; on peut choisir deux telles *constantes intégrales* γ et γ_1, liées par la relation

$$H(\gamma, \gamma_1) = 0, \tag{5}$$

de telle façon que toutes les autres s'expriment rationnellement en γ, γ_1. Quand le genre ϖ de la relation (5) est supérieur à l'unité, l'équation (1) s'intègre algébriquement.

Quand $\varpi = 1$, l'intégrale vérifie une relation telle que

$$J(y, y', x) = \lambda_1(x)J_1 + \lambda_2(x)J_2 + \ldots + \lambda_p J_p = K(x) + C; \tag{6}$$

les λ_i désignent des fonctions rationnelles de x, J une des p intégrales de première espèce attachées à la courbe en y, y'

$$F[y, y', (x)] = 0.$$

Les λ_i et $\frac{d\lambda_i}{dx}$ satisfont, comme nous l'avons dit, à un système d'équations linéaires et homogènes dont l'intégrale dépend au plus de $(p-1)$

constantes arbitraires. On sait déterminer algébriquement toutes les intégrales rationnelles d'un pareil système. Nous savons donc calculer algébriquement toutes les intégrales J, qui répondent à la condition (6), et l'équation (1) se trouve alors intégrée, en posant

$$J(y, y', x) = \int_{y_0}^{y} Q[y, y', (x)]\, dy,$$

par la quadrature

$$\int Q\, dy + y' Q\, dx = \text{const.};$$

y' dans cette différentielle totale désigne la fonction de x, y définie par (1).

On peut dire encore que la substitution

$$\gamma = \rho(y, y', x),$$
$$\gamma_1 = \rho_1(y, y', x)$$

transforme l'intégrale

$$\int \frac{d\gamma}{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-k^2\gamma^2)}},$$

en une intégrale de première espèce $\int P\, dx + Q\, dy$ de la surface

$$F(y, y', x) = 0,$$

et la recherche de ces intégrales, comme l'a montré M. Picard, s'effectue algébriquement. L'intégrale générale de l'équation (1) est alors donnée par la quadrature

$$\int P\, dx + Q\, dy = \text{const.}$$

Remarquons que, quand ϖ est supérieur à 1, pour une équation (1) de degré donné en y, y', x, le degré n de la relation algébrique entre y et x ne peut dépasser une certaine limite qu'indique l'égalité

$$n = \frac{p-1}{\varpi - 1}.$$

Quand $\varpi = 1$, au contraire, n peut dépasser tout entier donné.

Nous arrivons ainsi aux conclusions suivantes : *On reconnaît algébriquement si l'intégrale de* (1) *est une fonction algébrique correspondant à une valeur du nombre* ϖ *différente de* 0, *ou bien on intègre l'équation* (1) *par une quadrature de différentielle totale*

$$\int P\,dx + Q\,dy = \text{const.};$$

la différentielle totale $(P\,dx + Q\,dy)$ *se calcule d'ailleurs algébriquement.*

Si l'intégrale $y(x)$ est algébrique, la différentielle $P\,dx + Q\,dy$ doit être une différentielle totale de première espèce attachée à la surface $F = 0$, dont les périodes se réduisent à deux.

Le cas de $\varpi = 0$ échappe complètement à la méthode. C'est le seul cas qui puisse se présenter quand le genre p de la relation

$$F(y, y', x) = 0,$$

entre y et y', est nul. On peut alors, en posant

$$y = \varphi(t, x),$$
$$y' = \psi(t, x),$$

ramener l'équation à la forme

$$\frac{dt}{dx} = R(t, x). \tag{7}$$

R, φ, ψ sont rationnels en t et en x, puisque F est un polynôme en y, y', x. Plus généralement, l'équation se ramènera à la forme (7) si les coordonnées y, y', x de la surface $F = 0$ s'expriment rationnellement à l'aide de deux paramètres t et u. Nous allons traiter quelques problèmes particuliers relatifs à ces équations (7) pour lesquelles la méthode précédente est toujours en défaut.

3. Soit donc une équation

$$y' = R(y, x) = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)}, \tag{8}$$

où P et Q sont deux polynômes en x, y, de degré q. Si son intégrale est algébrique, elle peut s'écrire

$$\frac{M(y, x)}{N(y, x)} = A, \tag{9}$$

A désignant une constante, M et N deux polynômes en y, x, de degré m.

Dans l'étude que nous avons faite au Chap. V des équations telles que (8), y devait être regardée comme la fonction, x comme la variable. La transformation la plus générale qui conservait à l'équation sa forme et à y son nombre de valeurs était la suivante

$$y = \frac{hy_1 + h_1}{ky_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1).$$

Les points singuliers ou critiques de l'équation différentielle correspondaient à toutes les valeurs de (y, x) rendant y' infinie ou indéterminée. Dans les questions qui nous occupent maintenant, y et x jouent un rôle symétrique et nous pouvons effectuer sur l'équation (8) une transformation rationnelle quelconque en x_1, y_1, par exemple une transformation de Cremona, sans que l'équation (8) perde sa forme et sans que son intégrale cesse d'être algébrique. Il nous est loisible notamment, comme nous l'avons déjà remarqué, d'opérer sur x, y la transformation homographique la plus générale

$$x = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a''x_1 + b''y_1 + c''}, \qquad y = \frac{a'x_1 + b'y_1 + c'}{a''x_1 + b''y_1 + c''}.$$

Dans ces conditions, les points singuliers *intrinsèques* de l'équation (1) sont les points (x_i, y_i) ou M_i, où P et Q s'annulent à la fois; il y aura des points singuliers à l'infini si l'équation transformée de (8) par l'une des transformations

$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{y_1}{z},$$

ou

$$x = \frac{x_1}{z}, \qquad y = \frac{1}{z},$$

admet des points singuliers dont le z soit nul. On peut toujours supposer qu'aucun des points singuliers n'est à l'infini. Leur nombre est alors égal à $q^2 - q + 1$ [1].

Si l'on effectue une transformation homographique, les points singuliers de l'équation transformée et de la primitive se correspondent.

---

[1] *Voir* le Mémoire déjà cité de M. Darboux, *Sur les équations différentielles du premier ordre* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1878).

Il suffirait d'ailleurs, pour éviter toute difficulté relative aux points à l'infini, d'employer la notation homogène de Clebsch et d'écrire l'équation (8) sous la forme

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ S & T & U \end{vmatrix} = 0,$$

S, T, U étant des polynômes homogènes de degré $q-1$ en x, y, z.

Ceci posé, revenons à l'intégrale (9) de l'équation (8). A chaque valeur de A correspond une courbe C de degré m. Par un point x, y du plan des x, y passe une courbe C et une seule, à moins que ce point ne soit un des points M_i. D'après cela, les points communs à deux courbes C quelconques, ainsi que les points multiples de ces courbes, font partie des points M_i; deux courbes C quelconques ont d'ailleurs m^2 points communs (en tenant compte de leur degré de multiplicité).

La méthode de Briot et Bouquet permet d'autre part d'étudier dans le voisinage de x_i les intégrales y qui deviennent égales à y_i pour $x = x_i$. En premier lieu, x_i doit être un point algébrique de ces intégrales. De plus, parmi les points M_i, un au moins doit être commun à toutes les courbes C. Considérons seulement les points M'_i qui jouissent de cette propriété, c'est-à-dire les *nœuds* de l'équation (8) d'après la terminologie de M. Poincaré. Les autres points M_i sont des *cols*.

Les intégrales $y(x)$ égales à y_i pour $x=x_i$ se divisent en un certain nombre δ de classes; une intégrale de chaque classe est de la forme

$$y = a_0 x^{\frac{p}{q}} + a_1 x^{\frac{p+1}{q}} + \ldots,$$

a_0, a_1, ... dépendant d'une constante, p et q étant des entiers. Une branche au moins de chaque classe fait partie d'une quelconque des courbes C, et l'on a ainsi une limite inférieure de l'ordre de multiplicité du point (x_i, y_i) des courbes C. Mais λ branches de la même espèce peuvent appartenir à la même courbe C. Si donc μ désigne l'ordre de multiplicité d'une seule branche, la somme $\Sigma\lambda\mu$ étendue aux δ classes donne l'ordre de multiplicité du point M_i des courbes C. Il est facile également de calculer en fonction des nombres λ (qu'on ne saurait en général déterminer *a priori*) l'ordre de multiplicité α_i de l'intersection de deux courbes C en M_i. On doit avoir

$$(\alpha) \qquad \Sigma\alpha_i = m^2.$$

Cette égalité permet de résoudre la question suivante : *Reconnaître si l'intégrale d'une équation* (1) *est une courbe algébrique dont les points multiples n'admettent pas plus de* β *branches distinctes* (β *est donné*).

On sait calculer, en effet, une limite supérieure de m^2.

Une égalité analogue permet de reconnaître si l'équation (1) admet *plus d'une* intégrale particulière dont les points multiples aient au plus β branches distinctes. Il suffit de considérer tous les points M_i par lesquels passe plus d'une branche de courbe C, et de raisonner sur ces points comme nous venons de le faire sur les points M'_i. Un cas intéressant est celui où il n'existe aucun point M'_i, c'est-à-dire aucun point commun à toutes les branches de courbes. La question se résout alors sans connaître β ; la somme $\Sigma\alpha_i$ et, par suite, m^2 ne sauraient dépasser une certaine limite.

Par exemple, considérons l'équation

$$y' = \frac{2x^3 + x^2 - y^2}{2x^2 y}.$$

Cette équation n'admet qu'un point $M_i (x = 0, y = 0)$, et, en ce point, la méthode de Briot et Bouquet nous montre qu'il ne passe que deux intégrales

$$y = +x + \ldots,$$
$$y = -x + \ldots.$$

L'équation ne saurait donc admettre que deux intégrales algébriques qui ont un point d'intersection unique, d'ordre de multiplicité égal à 1. Ces intégrales, si elles existent, sont donc des droites ; on vérifie, en effet, que $y = +x$, $y = -x$ sont deux intégrales de l'équation dont l'intégrale générale s'écrit

$$y^2 = x^2 + C e^{\frac{1}{x}}.$$

Revenons maintenant à l'étude des équations (8), dont l'intégrale générale est algébrique. Nous pouvons établir d'autres relations entre le degré des courbes C et les ordres de multiplicité de leurs points multiples.

Calculons, en effet, la classe d'une courbe C en nous servant de la première formule de Plücker

$$c = m(m-1) - 2d - 3r.$$

Il nous faut tenir compte de l'ordre de multiplicité des points M'_i : nous obtenons ainsi la valeur de c en fonction des λ.

D'autre part, considérons l'équation

$$y'_0 = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{10}$$

Le nombre des points d'intersection de la courbe (10) avec une courbe C, abstraction faite des points M'_i, représente le nombre de tangentes parallèles à la direction y'_0, qu'on peut mener à une courbe C. Ce nombre coïncide avec la classe c de la courbe C; il n'en différerait, en effet, que si la droite de l'infini était tangente à toutes les courbes C, et nous avons fait subir à x, y la transformation homographique la plus générale, qui rend la droite de l'infini quelconque par rapport aux courbes C.

Soit donc q le degré en x, y des deux polynômes P, Q ou, si l'on veut, de la courbe (10). Toutes les courbes (10) passent par les points M'_i, et nous savons calculer l'ordre de multiplicité en un point M'_i de l'intersection de chaque branche de courbe C avec la courbe (10); nous connaissons donc, en fonction des λ, l'ordre de multiplicité γ_i de l'intersection en un point M'_i d'une courbe C avec la courbe (10). Nous avons

$$qm - \Sigma\gamma_i = c, \tag{b}$$

la somme $\Sigma\gamma_i$ s'étendant à tous les points M'_i. Nous obtenons ainsi une nouvelle relation entre les nombres λ et m.

De même, en calculant le nombre des points d'inflexion d'une part d'après les formules de Plücker, d'autre part d'après l'équation différentielle, on obtient une nouvelle relation, analogue à la précédente, entre m et les λ.

Il convient de joindre à ces trois égalités, l'inégalité

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - d \geqq 0, \tag{c}$$

d désignant toujours le nombre de points doubles équivalent aux points multiples M'_i. Cette condition est nécessaire, mais non suffisante pour que les courbes C soient indécomposables.

4. Ces égalités permettent, dans des cas très étendus, de résoudre le problème suivant : *Reconnaître si l'intégrale générale d'une équation* (8) *est algébrique et de genre donné*. Nous appelons *genre de l'intégrale* le genre des courbes C. Quand ce genre p est donné, l'inégalité (c) se transforme en l'égalité

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - 2d = p.$$

I. Supposons d'abord que tous les points M'_i soient des points d'intersection simples de deux branches d'intégrales. Nous donnerons à ces points, avec M. Autonne, le nom de *points dicritiques* (1). Ces points peuvent, d'ailleurs, être des points d'intersection multiples des courbes $P = 0$, $Q = 0$.

L'égalité (a) nous donne

$$(a) \qquad m^2 = \Sigma\lambda_i^2,$$

et, si k_i désigne l'ordre de multiplicité le moins élevé du point M'_i sur les deux courbes $P = 0$, $Q = 0$, l'égalité (b) s'écrit

$$(b) \qquad m(m-1) - \Sigma\lambda_i(\lambda_i - 1) = qm - \Sigma k_i\lambda_i,$$

ou bien, en tenant compte de (a),

$$\Sigma(k_i + 1)\lambda_i = (q+1)m.$$

Joignons à ces égalités la suivante

$$(m-1)(m-2) - \Sigma\lambda_i(\lambda_i - 1) = 2p,$$

ou, en tenant compte de (a),

$$(d) \qquad \Sigma\lambda_i - 3m = 2(p-1).$$

(1) *Voir* les deux Mémoires de M. Autonne sur les équations différentielles du premier ordre (*Journal de l'École Polytechnique*, 1891; *Annales de la Faculté des Sciences de Lyon*, 1892).

Il vient, en éliminant m entre (b) et (d),

$$(e) \qquad \Sigma(q-2-3k_i)\lambda_i = 2(p-1)(q+1).$$

Si tous les k_i sont inférieurs à $\frac{q-2}{3}$, tous les coefficients des λ_i sont positifs; p est nécessairement plus grand que 1, et l'égalité (e) nous fournit une limite supérieure de $\Sigma\lambda_i$, par suite de m.

Si tous les k_i sont supérieurs à $\frac{q-2}{3}$, p est nécessairement nul, et l'égalité (e) nous fournit une limite supérieure de m.

Si, notamment, tous les k_i sont égaux, trois cas sont possibles :

1° $3k_i = q-2-l\,(l>0)$; on a alors

$$l\Sigma\lambda_i = 2(p-1)(q+1)$$

et

$$m = \frac{2(q+1-l)}{3l}(p-1).$$

2° $3k_i = q-2$; dans ce cas, le genre p est nécessairement égal à 1, et les égalités précédentes ne limitent plus le degré m.

3° $3k_i = q-2+l\,(l>0)$; p est nécessairement nul, et l'on a

$$\Sigma\lambda_i = \frac{2(q+1)}{l} \qquad \text{et} \qquad m = \frac{2(q+l+1)}{3l}.$$

Dans ce dernier cas, les égalités employées suffisent à résoudre le problème : *Reconnaître si l'intégrale générale de l'équation* (8) *est algébrique.*

Il convient de signaler *le cas où tous les points seraient des points d'intersection simples des courbes* $P=0$, $Q=0$, c'est-à-dire où tous les k_i seraient égaux à 1. L'égalité (e) deviendrait alors

$$(q-5)\Sigma\lambda_i = 2(p-1)(q+1)$$

et, par suite,

$$m = \frac{4(p-1)}{(q-5)}.$$

Si q est plus grand que 5, p est nécessairement plus grand que 1; *si* $q=5$, p est égal à l'unité et m n'est plus déterminé; *si q est plus petit* *que* 5, p est nul, et m est égal à 4 (si $q=4$), à 2 (si $q=3$), à 1 (si $q=1$).

II. Un autre cas très général, que nous allons traiter maintenant, est celui *où tous les nœuds* M′ *sont des points simples d'intersection des courbes* $P=0$, $Q=0$.

Soit $x_i=0$, $y_i=0$ un des points M'_i; dans le voisinage de ce point, on a

$$y'=\frac{\alpha x+\beta y+\ldots}{\alpha' x+\beta' y+\ldots},$$

avec la condition

$$\alpha\beta'-\beta\alpha'=1,$$

puisque les courbes $P=0$, $Q=0$ ne sont pas tangentes. La méthode de Briot et Bouquet conduit à poser

$$y=x(a+t),$$

a satisfaisant à l'égalité

$$\alpha+(\beta-\alpha')a-\beta' a^2=0.$$

La valeur de a n'est indéterminée que si α, β' et $(\beta-\alpha')$ sont nuls : le point M'_i est alors un point dicritique, et, dans le voisinage de ce point, y se laisse développer ainsi :

$$y=cx+c_1x^2+c_2x^3+\ldots,$$

c désignant une constante arbitraire, dont dépendent c_1, c_2, ... Ce cas écarté, toutes les branches de courbes intégrales sont tangentes à deux directions $y=a_1x$, $y=a_2x$, qu'on peut prendre comme axes des x et des y, ce qui revient à annuler α et β'; l'équation (8) s'écrit alors

$$y'=\frac{\beta y+\gamma x^2+\ldots}{\alpha' x+\gamma' x^2+\ldots}.$$

Pour que le point soit un nœud algébrique, il faut que $\frac{\beta}{\alpha'}$ soit un nombre réel, positif et commensurable $\frac{\mu}{\nu}$, qu'on peut toujours supposer plus grand que 1; sinon on permuterait x et y. Toutes les courbes intégrales sont tangentes à l'axe des x et leur équation s'écrit

$$y=cx^{\frac{\mu}{\nu}}+c_1x^{\frac{\mu+1}{\nu}}+c_2x^{\frac{\mu+2}{\nu}}+\ldots.$$

c désignant une constante arbitraire dont dépendent c_1, c_2, ... Une branche *isolée* est tangente à l'axe des y, ainsi qu'il résulte immédiatement de la discussion de Briot et Bouquet. Le cas exceptionnel où a_1 et a_2 sont confondus ne saurait se présenter quand l'intégrale est algébrique : en effet, si nous prenons la droite $y = a_1 x$ comme axe des x, α et $(\beta - \alpha')$ sont nuls, et l'équation (8) devient

$$y' = \frac{y + \gamma x^2 + \ldots}{x + ky + \ldots}.$$

Mais l'origine est un point transcendant des intégrales de cette équation quand k n'est pas nul; si $k = 0$, le nœud est dicritique.

En définitive, par chaque nœud $x_i = 0$, $y_i = 0$ passe une famille, et une seule, de courbes C dépendant d'une constante arbitraire; chaque branche d'intégrale se laisse développer ainsi

$$y = ax + cx^{\frac{\mu}{\nu}} + c_1 x^{\frac{\mu+1}{\nu}} + c_2 x^{\frac{\mu+2}{\nu}} + \ldots = \varphi\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right),$$

a désignant un nombre et c une constante arbitraire; toutefois, si le nœud est dicritique, le développement est de la forme

$$y = cx + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \ldots = \varphi(x).$$

Le nombre des points d'intersection confondus en M'_i de deux branches quelconques d'intégrales est dans tous les cas égal à $\mu\nu$. On s'en rend compte rapidement ainsi : posons $x = \xi^\nu$; à chaque branche de courbes C ou $y = \varphi\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)$ correspondent ν branches γ distinctes $y = \varphi(\alpha\xi)$, α étant une des racines $\nu^{\text{ièmes}}$ de l'unité. A deux courbes C, soient C et C', correspondent ν branches γ et ν branches γ', et ces branches ont au point M'_i un contact d'ordre μ; les courbes γ ont donc, avec les courbes γ', $\mu\nu^2$ points d'intersection confondus en M'_i. D'autre part, les points d'intersection de γ et de γ' se partagent en groupes de ν points tels que ξ^ν ait la même valeur pour ces ν points. Il suit de là que les deux branches C et C' ont $\frac{\mu\nu^2}{\nu}$ ou $\mu\nu$ points communs confondus en M'_i. Quand le nœud est dicritique, $\mu = 1$, $\nu = 1$ et $\mu\nu = 1$.

Si par le point M_i passent λ branches de courbe C appartenant à la même intégrale algébrique, chacune des λ branches de l'intégrale coupe une des branches d'une autre intégrale en $\mu\nu$ points confondus en M'_i. Le nombre total des intersections confondues en M'_i est donc $\lambda^2\mu\nu$; l'égalité (a) s'écrit donc

$$(a) \qquad m^2 = \sum \lambda^2\mu\nu,$$

la somme étant étendue à tous les nœuds.

Calculons maintenant l'abaissement de la classe. Soit

$$(u) \qquad f(x, y) = 0$$

l'équation des courbes C mise sous forme entière; le point M'_i étant l'origine, les termes de degré le moins élevé sont de degré $\lambda_i\nu_i$, et dans l'équation

$$(v) \qquad f'_x + hf'_y = 0$$

les termes de degré le moins élevé sont de degré $(\lambda\nu - 1)$. Si nous posons $x = \xi^\nu$, les $\lambda\nu$ branches distinctes définies par (u) et les $(\lambda\nu - 1)$ branches distinctes définies par (v) ont deux à deux un contact d'ordre μ en M'_i; elles ont donc $\lambda\nu(\lambda\nu - 1)\mu$ points communs confondus en M'_i. Il suit de là, comme plus haut, qu'une courbe C et sa polaire (v) ont $\lambda\mu(\lambda\nu - 1)$ intersections confondues en M'_i, résultat qui se déduit d'ailleurs de formules connues.

La classe des courbes C est donc donnée par l'égalité

$$c = m(m-1) - \sum \lambda\mu(\lambda\nu - 1).$$

D'autre part, une courbe C et la courbe

$$(10) \qquad y'_0 = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

ont, en dehors des points M'_i, $\left(qm - \sum \lambda\nu\right)$ points d'intersection. L'égalité (b) est donc ici

$$m(m-1) - \sum \lambda\mu(\lambda\nu - 1) = qm - \sum \lambda\nu,$$

ou encore, en tenant compte de (a),

$$(b) \qquad \sum \lambda(\mu + \nu) = (q+1)m.$$

Calculons enfin le genre : pour chaque branche d'intégrale

$$y = \varphi\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right),$$

le point M'_i (au point de vue du genre) équivaut à $\frac{(\mu-1)(\nu-1)}{2}$ points doubles; la multiplicité de M'_i est donc égale au nombre $\frac{\lambda(\mu-1)(\nu-1)}{2}$ augmenté de $\frac{\lambda(\lambda-1)\mu\nu}{2}$, nombre des intersections confondues en M'_i qu'ont entre elles les λ branches de C. Il vient donc

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{\sum \lambda^2 \mu\nu}{2} + \sum \frac{\lambda}{2}(\mu+\nu-1),$$

formule d'ailleurs connue. Si l'on tient compte de (a), on a

$$p = 1 + \sum \frac{\lambda}{2}(\mu+\nu-1) - \frac{3m}{2},$$

et, si l'on tient compte de (b),

$$(d)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= 1 + \sum \frac{\lambda}{2}\left[\mu+\nu-1-\frac{3(\mu+\nu)}{q+1}\right] \\ &= 1 + \sum \frac{\lambda}{2}\left[(\mu+\nu)\left(1-\frac{3}{q+1}\right)-1\right]. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité, déjà donnée par M. Poincaré [1], *permet de reconnaître si l'intégrale générale est algébrique et de genre donné chaque fois que q est plus grand que* 5.

---

[1] M. Poincaré est parvenu à cette formule par des considérations différentes où interviennent les valeurs *remarquables* de la constante pour lesquelles l'intégrale algébrique, supposée irréductible, se décompose. (*Voir* les *Comptes rendus*, avril 1891 et les *Rendiconti del circolo math. di Palermo*, avril 1891.) J'ai indiqué la méthode générale que j'ai appliquée dans ce paragaphe dans une Note des *Comptes rendus* (mai 1890). Le dernier paragraphe de cette Note renferme une méthode différente pour reconnaître dans tous les cas si l'intégrale est algébrique et de genre donné, mais cette méthode est inexacte et repose sur une évaluation évidemment erronée du genre. Le paragraphe est à supprimer.

Plus généralement, il suffit que les coefficients des λ dans (d) soient tous de même signe.

Le genre p est nécessairement plus grand que 1 si q est supérieur à 4. Toutefois, pour $q = 5$, si tous les nœuds sont dicritiques, p est égal à 1.

Quand tous les nœuds sont dicritiques, $\mu = 1$, $\nu = 1$, on retombe sur des résultats déjà signalés.

5. Si importants que soient les cas particuliers que nous venons de traiter, on ne saurait pourtant considérer comme résolu d'une manière générale le problème que nous nous sommes posé : reconnaître si l'intégrale d'une équation (8) est algébrique et de genre donné. Quand les courbes $P = 0$, $Q = 0$ ont des points communs confondus, les égalités (a), (b), (d) ne déterminent plus nécessairement une limite de m. Il n'est pas d'ailleurs possible de transformer, à l'aide d'une substitution de Cremona, une équation (8) quelconque en une équation pour laquelle tous les points singuliers soient simples. Quoi qu'il en soit, les égalités qui nous occupent suffisent à résoudre la question posée dans des cas très nombreux, différents de ceux que nous avons considérés jusqu'ici. Par exemple, si l'équation n'admet qu'un nœud et si ce nœud est un point ordinaire de chaque branche d'intégrale, mais un point de contact d'ordre μ de deux branches quelconques, les égalités (a) et (d) s'écrivent

$$m^2 = \lambda^2 \mu,$$
$$(m-1)(m-2) - \lambda(\lambda - 1)\mu = 2p,$$

et, par suite,

$$m(\sqrt{\mu} - 3) = 2(p-1).$$

On voit que μ doit être le carré d'un nombre entier. Le genre p est nul ou plus grand que 1, suivant qu'on a $\mu < 9$ ou $\mu > 9$. Dans la première hypothèse, m est égal à $2 (\mu = 4)$ ou à $1 (\mu = 1)$; dans la seconde, m est au plus égal à $2(p-1)$. Enfin, si $\mu = 9$, on a $p = 1$, et m n'est plus limité.

Il convient de remarquer que, dans toutes les applications précédentes, les égalités employées ne déterminent *jamais* de limite supérieure de m *pour* $p = 1$. Nous verrons tout à l'heure la raison de cette singularité.

6. Il peut arriver que les mêmes égalités suffisent à *reconnaître si l'intégrale générale d'une équation* (8) *est algébrique, sans aucune condition donnée*.

Nous avons déjà rencontré un exemple de ce fait : *quand tous les nœuds sont dicritiques et quand de plus ces points sont des points multiples d'ordre plus grand que* $\frac{q-2}{3}$ *des deux courbes* $P = 0$, $Q = 0$, le genre p est nécessairement nul, et l'on connaît une limite supérieure de m. En particulier, quand les nœuds, tous dicritiques, sont des points simples de $P = 0$, $Q = 0$, pour $q < 5$, m est déterminé par l'égalité $m = \frac{4}{5-q}$.

Comme exemple assez différent, nous signalerons le cas *où les nœuds sont en nombre inférieur à* 9 *et tous dicritiques*. D'une manière précise, ces points peuvent être des points d'intersection multiples de $P = 0$, $Q = 0$, mais sont des points d'intersection simple de deux branches d'intégrales (sauf peut-être de branches isolées).

Nous avons alors l'égalité

$$m^2 = \sum \lambda^2.$$

De plus, par 9 points (parmi lesquels les nœuds) nous pouvons faire passer une cubique; il vient donc

$$3m = \sum \lambda_i + k \qquad (k \geqq 0).$$

D'autre part, l'égalité (d) donne ici

$$\sum \lambda_i - 3m = 2(p-1),$$

d'où

$$k = 2(1-p).$$

Nous voyons que p est égal à 0 ou à 1 et k égal à 2 (pour $p = 0$) ou à 0 (pour $p = 1$).

D'après cela :

1° *Si le nombre* N *des nœuds est égal à* 9, *p est nul ou égal à l'unité;*

2° *Si le nombre* N *est inférieur à* $9 (N = 9 - \alpha)$, *p est nécessairement nul.*

En effet, en prenant α des 9 points sur une des courbes intégrales, on voit que k est au moins égal à α; k n'étant pas nul est égal à α, p est nul, α est égal à 1 ou à 2. Ceci suppose toutefois que la cubique auxiliaire n'ait pas une partie commune avec la courbe intégrale : le fait ne peut se présenter que quand les courbes intégrales sont au plus du troisième degré. On trouve ainsi que l'intégrale étant supposée algébrique, le nombre N doit être égal à 8, 7, 6, 4 ou 1. Si $N = 6$, les intégrales sont des cubiques ayant un point double commun; si $N = 4$, ce sont des coniques; si $N = 1$, des droites.

Plaçons-nous successivement dans les deux hypothèses $N = 8$, $N = 7$. Des deux égalités

$$(a) \qquad 9m^2 = \sum \lambda_i^2,$$

$$(d) \qquad 3m = 2 + \sum \lambda_i,$$

on déduit

$$9 \sum \lambda_i^2 - \left(2 + \sum \lambda_i\right)^2 = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire, si $N = 8$,

$$(e) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{8}{9}\left[\lambda_1 - \frac{1}{8}\left(2 + \sum_2^8 \lambda_i\right)\right]^2 + \frac{7}{8}\left[\lambda_2 - \frac{1}{7}\left(2 + \sum_3^8 \lambda_i\right)\right]^2 + \frac{6}{7}\left[\lambda_3 - \frac{1}{6}\left(2 + \sum_4^8 \lambda_i\right)\right]^2 \\ &\qquad + \ldots + \frac{2}{3}\left[\lambda_7 - \frac{1}{2}(2 + \lambda_8)\right]^2 + \frac{1}{2}(\lambda_8 - 2)^2 - 4 = 0 \end{aligned} \right.$$

Elle montre que $(\lambda_8 - 2)^2$ est inférieur ou égal à 8, c'est-à-dire que λ_8 est au plus égal à 5. Comme λ_8 est un quelconque des nombres λ_i, on voit qu'aucun des λ ne saurait dépasser 4. Il en résulte, d'après (d), que m est inférieur à 12.

Si $N = 7$, l'égalité (e), où l'on fait $\lambda_8 = 0$, montre que $(\lambda_7 - 1)^2$ est au plus égal à 3, c'est-à-dire qu'aucun des λ ne saurait dépasser 2; m est donc inférieur à 6.

Une discussion facile, où l'on tient compte des égalités (a), (d) et $p = 0$, permet d'énumérer tous les cas possibles et d'énoncer le théorème suivant :

Lorsque les nœuds d'une équation $y' = \frac{P}{Q}$ *(à points singuliers simples ou confondus) sont tous dicritiques et que leur nombre* N *est inférieur à* 9, *l'intégrale de cette équation ne saurait être algébrique que si* N *est égal à* 8, 7, 6, 4 *ou* 1. *Le genre de cette intégrale est toujours nul; son degré est au plus égal à* 11 *si* $N = 8$, *à* 5 *si* $N = 7$; *il est égal à* 3 *si* $N = 6$, *à* 2 *si* $N = 4$, *à* 1 *si* $N = 1$.

Parmi les N nœuds, N_4 sont des points quadruples (à tangentes simples) des courbes intégrales, N_3 sont des points triples, N_2 sont des points doubles, N_1 des points simples. Les nombres m, N_1, N_2, N_3, N_4 sont susceptibles de recevoir les valeurs suivantes :

		N nœuds.			
	Degré.	Points quadruples.	Points triples.	Points doubles.	Points simples.
$N = 8\ldots$	$m = 11$	$N_4 = 7$	$N_3 = 1$	$N_2 = 0$	$N_1 = 0$
	10	4	4	0	0
	9	2	5	1	0
	8	1	4	3	0
	8	0	7	0	1
	7	1	1	6	0
	7	0	4	3	1
	6	0	2	4	2
	5	0	1	3	4
	4	0	1	0	7
$N = 7\ldots$	5	0	0	6	1
	4	0	0	3	4
$N = 6\ldots$	3	0	0	1	5
$N = 4\ldots$	2	0	0	0	4
$N = 1\ldots$	1	0	0	0	1

Il convient de remarquer que dans ces exemples, où notre méthode suffit à reconnaître si l'intégrale générale est algébrique, *le genre de cette intégrale est nul.* On se rend compte qu'il doit en être ainsi de la manière suivante :

Les relations dont nous disposons se composent d'un système (α) de trois égalités [les égalités (a), (b) et une troisième égalité relative aux points d'inflexion] et d'une inégalité (c)

$$(c) \qquad (m-1)(m-2)-2d \geqq 0,$$

inégalité qui peut s'écrire encore

$$(d) \qquad (m-1)(m-2)-2d = 2p,$$

p désignant un nombre nul ou positif, mais indéterminé quand on ne se donne pas le genre.

Admettons que l'intégrale de (8) soit algébrique; à cette intégrale correspond un système d'entiers m, λ_i qui vérifient les relations (α) et l'inégalité (c). Quand on remplace l'équation *irréductible*

$$(9) \qquad \frac{M(y, x)}{N(y, x)} = \chi(y, x) = A$$

par la suivante

$$(9)' \qquad g(\chi) = g(A),$$

g étant rationnel en χ et de degré μ, à la courbe $(9)'$ correspond un nouveau système d'entiers m', λ'_i, à savoir $\lambda'_i = \mu\lambda_i$ et $m' = \mu m$, qui vérifient encore évidemment les relations (α). Il reste à savoir si l'inégalité (c) subsiste, autrement dit, si le genre de la courbe $(9)'$, calculé comme pour une courbe irréductible, est nul ou positif. Nous avons, pour la courbe (9),

$$(m-1)(m-2)-2d = 2p, \qquad (p \geqq 0).$$

La courbe $(9)'$ est de degré $m\mu$, et le nombre de ses points doubles est, comme on le voit aisément, $\mu d + \frac{m^2\mu(\mu-1)}{2}$. Le genre p' de $(9)'$ est donc donné par l'égalité

$$2p' = (\mu m-1)(\mu m-2) - 2\mu d - m^2\mu(\mu-1)$$

ou encore

$$p'-1 = \mu(p-1).$$

Ceci nous montre que, si p est plus grand que 1, p' *a fortiori* est plus grand que 1; si $p = 1$, p' est égal à 1 quel que soit μ; enfin, si $p = 0$, p' est négatif dès que μ est plus grand que 1.

D'après cela, si le genre de l'intégrale n'est pas nul, les relations (α) et l'inégalité (c) sont vérifiées pour des valeurs de μ, par suite, pour des valeurs des entiers m et λ_i aussi grandes qu'on veut. *Les relations dont nous disposons ne sauraient donc suffire à déterminer une limite du degré de l'intégrale supposée algébrique que dans le cas où le genre de cette intégrale serait nul.* Si donc les relations (α) et (c) en m et λ_i admettent un nombre fini de solutions positives, on est certain ou que l'intégrale n'est pas algébrique, ou que son genre est nul.

De plus, si l'on se donne le genre p de l'intégrale, mais que p soit égal à 1, les relations (α) et l'égalité (d)

$$(d) \qquad (m-1)(m-2) - 2d = 2$$

sont vérifiées, quand l'intégrale est algébrique, par des systèmes d'entiers m et λ_i aussi grands qu'on veut. *Les égalités* (α) *et* (d) *ne sauraient donc jamais déterminer une limite du degré de l'intégrale quand elle est algébrique et de genre* 1.

Il est clair d'après cela que pour déterminer en général une limite du degré de l'intégrale supposée algébrique, il est indispensable d'introduire des conditions exprimant que la relation (9) est indécomposable pour A quelconque. Mais je ne développerai pas ici ces considérations [1].

J'ajoute que les relations (α) et (d) permettent dans certains cas de *reconnaître si l'équation admet plus d'une intégrale particulière algébrique dont le genre est ou non donné.* Comme ces intégrales peuvent passer par un ou plusieurs cols, les sommes Σ qui figurent dans ces égalités doivent être étendues non seulement aux nœuds, mais aussi à un certain nombre de branches passant par les cols. On forme ainsi un

---

[1] *Voir* à ce sujet les travaux déjà cités de M. Poincaré sur l'intégration algébrique des équations du premier ordre et du premier degré. Voir également plusieurs Notes de M. Autonne sur la même matière (*Comptes rendus*, mars, novembre 1891, février 1892), et les Notes que j'ai publiées sur les intégrales algébriques ou à n valeurs des équations du premier ordre (*Comptes rendus*, mai 1891, janvier et février 1892).

nombre fini de systèmes (α), (d), qui limitent parfois le degré des intégrales.

Enfin, les deux dernières relations (α) et la relation (d) peuvent servir à *reconnaître s'il existe une intégrale particulière algébrique dont le genre est ou non donné*.

Il est clair d'ailleurs, que la recherche des intégrales particulières algébriques est un problème plus compliqué que la recherche des cas où l'intégrale générale de l'équateur est algébrique. Il existe toutefois une classe d'intégrales algébriques qu'on peut toujours déterminer sûrement : ce sont *les intégrales rationnelles*. C'est la détermination de ces intégrales que nous allons effectuer pour terminer ces applications.

7. Bien des questions se ramènent à la recherche des intégrales rationnelles des équations différentielles. Étant donnée une équation différentielle d'ordre quelconque, on peut trouver les polynômes qui vérifient cette équation en déterminant une limite supérieure de leur degré. Plus généralement, si l'on connaît le nombre des racines distinctes de l'équation $y_0 = R(x)$ pour une certaine valeur de y_0 [par exemple le nombre des pôles distincts de $R(x)$], on peut calculer les intégrales rationnelles $y = R(x)$ en déterminant une limite supérieure du degré des deux termes de $R(x)$. C'est ce qui se présente dans le cas des équations linéaires, dans le cas des équations du premier ordre telles que pour une certaine valeur y_0 de y toutes les valeurs de y' soient nulles quel que soit x (y_0 n'étant pas, quel que soit x, un point critique de y'). Mais ce sont là des circonstances exceptionnelles. La méthode que je vais indiquer ici permet de résoudre *sûrement* la question pour des équations de la forme

$$(8) \qquad y' = \frac{P(y, x)}{Q(y, x)},$$

où P et Q sont deux polynômes en y, x.

Si (x_0, y_0) vérifient la relation

$$(11) \qquad Q(x_0, y_0) = 0,$$

x_0 est un point critique de l'intégrale y qui prend pour $x = x_0$ la valeur y_0; à moins toutefois que (x_0, y_0) ne satisfasse aussi à la relation $P = 0$.

D'après cela, la courbe

$$y = R(x) \tag{12}$$

ne peut rencontrer la courbe (11) qu'en des points qui lui soient communs avec la courbe $P = 0$. Pour éviter toute discussion relative aux valeurs infinies de y, effectuons sur x et y la transformation suivante

$$y = \frac{ay_1 + bx_1 + c}{a'y_1 + b'x_1 + c'}, \qquad x = \frac{\alpha x_1 + \beta}{\alpha' x_1 + \beta'},$$

$a, b, \ldots, \alpha, \ldots$ étant des constantes. La courbe (12) a pour équation

$$y_1 = \frac{A_n(x_1)}{B_n(x_1)}, \tag{12'}$$

A_n et B_n étant de degré n en x_1, et les courbes (12′) et

$$Q_1(y_1, x_1) = 0 \tag{11'}$$

n'ont pas de points communs dont l'y soit infini. Il serait d'ailleurs bien facile de traiter le problème sans se servir de cette transformation.

Dans ces conditions, les courbes (11′) et (12′) ne peuvent admettre comme points communs que des points communs aux courbes

$$P_1 = 0, \qquad Q_1 = 0,$$

situés à distance finie, et peut-être des points qui correspondent à $x_1 = \infty$. Examinons d'abord ces derniers : pour $x_1 = \infty$, l'ordonnée y_1 de (12′) tend vers une valeur finie a. Si (11′) et (12′) ont un point commun à l'infini dans la direction de x, il faut que (11′) admette une asymptote parallèle à Ox_1. Ce point est un point simple d'intersection à moins que cette asymptote ne coïncide avec la droite $y_1 = a$. Mais on connaît les valeurs limites de l'ordonnée y_1 de (11)′ pour $x_1 = \infty$; soit $y_1 = b$ une de ces valeurs. On sait, en formant l'équation en $\xi = \frac{1}{x_1}$, développer les intégrales holomorphes égales à b pour $\xi = 0$ autour du point $\xi = 0$, et, par suite, trouver l'ordre maximum de multiplicité δ de l'intersection au point $y_1 = b$, $x_1 = \infty$ des deux courbes (11′) et (12′).

La même discussion s'effectue plus facilement en chacun des points (x_0, y_0) communs aux courbes

$$P_1 = 0, \qquad Q_1 = 0.$$

On sait reconnaître si l'équation (8′)

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{P_1(y_1, x_1)}{Q_1(y_1, x_1)}$$

admet des intégrales holomorphes prenant pour x_0 la valeur y_0, et déterminer, pour ces intégrales, le développement de $(y - y_0)$ suivant les puissances de $(x - x_0)$. On en déduit l'ordre maximum de multiplicité δ_0 du point (x_0, y_0) considéré comme point de rencontre de (11′) et (12′). En faisant ce calcul pour tous les points (x_0, y_0), on obtient une limite supérieure $\mu = \delta + \Sigma\delta_0$ du nombre de points de rencontre (distincts ou confondus) des courbes (11′) et (12′). Soit q le degré de $Q_1(y_1, x_1)$; on doit avoir

$$\mu \geqq q(n+1),$$

d'où l'on déduit une limite de x. Les intégrales $R(x)$ se calculent dès lors algébriquement. La méthode n'est en défaut que si l'équation (8) est une équation de Riccati, mais la question se traite alors directement.

Il est facile d'étendre la méthode aux équations hyperelliptiques en y', y :

$$y' = A(y, x) + B(y, x)\sqrt{R(y, x)},$$

en faisant jouer aux valeurs (y, x), qui annulent $R(y, x)$, le rôle des valeurs (y_1, x_1) qui rendent, dans l'équation (8′), y'_1 infinie. La méthode n'est en défaut que si toutes les fonctions $y(x)$ définies par $R = 0$ sont des intégrales singulières.

Le même procédé permet de calculer toutes les intégrales rationnelles des équations

$$(13) \qquad y'^r = R(y, x),$$

à moins toutefois que l'intégrale générale n'ait que des points critiques fixes, auquel cas l'équation s'intègre algébriquement, ou se ramène soit à une équation de Riccati, soit à une quadrature

$$y' = \mathrm{J}(x)\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)}.$$

Cette équation est la seule équation de la forme (13) dont on ne puisse calculer algébriquement les intégrales rationnelles. Mais je ne veux pas insister sur ces extensions faciles.

J'arrêterai ici cette étude des équations du premier ordre et du premier degré. Dans un travail ultérieur, je montrerai comment les principes développés dans ce Mémoire permettent, moyennant quelques considérations nouvelles, de pousser plus loin la recherche des équations dont l'intégrale générale est algébrique ou ne prend dans le plan qu'un nombre limité de valeurs.