ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. FABRY

Sur les courbes algébriques à torsion constante

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 9 (1892), p. 177-196
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__177_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES

COURBES ALGÉBRIQUES A TORSION CONSTANTE,

PAR M. E. FABRY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

Dans une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 25 janvier 1892), j'ai signalé une courbe algébrique réelle à torsion constante. Je me propose de généraliser la méthode qui m'a conduit à ce résultat, et de rechercher parmi les courbes en nombre illimité auxquelles elle peut conduire quelles sont les plus simples.

Une courbe à torsion constante, rapportée à trois axes rectangulaires, est représentée par les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= t\int \frac{l\,dk - k\,dl}{h^2+k^2+l^2},\\ y &= t\int \frac{h\,dl - l\,dh}{h^2+k^2+l^2},\\ z &= t\int \frac{k\,dh - h\,dk}{h^2+k^2+l^2}, \end{aligned}\right.$$

où h, k, l sont trois fonctions arbitraires d'une même variable.

Nous prendrons ici pour h, k, l trois fonctions linéaires des sinus et cosinus des multiples d'un même angle θ, et nous déterminerons les coefficients de façon : 1° que $h^2+k^2+l^2$ soit constant; 2° que dans les trois expressions, telles que $l\frac{dk}{d\theta} - k\frac{dl}{d\theta}$, exprimées en fonctions linéaires des sinus et cosinus des multiples de θ, les termes constants disparaissent. Les expressions (1) de x, y, z auront alors les mêmes formes que h, k, l, et la courbe sera algébrique si les multiples de θ qui y entrent ont des rapports commensurables.

Nous remarquerons d'abord, pour simplifier la question, que h, k, l sont proportionnels aux cosinus des angles de la binormale avec les axes; et si, considérant h, k, l comme les coordonnées d'un point, on leur fait subir une substitution correspondant à une transformation d'axes rectangulaires fixes, l'origine restant la même, $h^2 + k^2 + l^2$ ne change pas, et les dérivées de h, k, l et, par suite, x, y, z subissent la même substitution; on obtient donc la même courbe rapportée à de nouveaux axes. On peut, du reste, facilement vérifier ce résultat en effectuant la substitution dans les formules (1).

En particulier, nous pourrons remplacer h et k par $h \sin\alpha + k \cos\alpha$ et $h \cos\alpha - k \sin\alpha$. On peut encore multiplier h, k, l par une même constante, ou changer le signe de l'une des fonctions h sans changer la courbe (1). Enfin, remarquons que si l'une des fonctions h se réduit à une constante, $k^2 + l^2$ étant constant, un simple changement de variable montrera que la courbe obtenue est une hélice (ce n'est plus une courbe algébrique).

Posons

$$(2)\qquad \begin{cases} h = a + b\cos\lambda\theta + c\sin\lambda\theta + d\cos\mu\theta + e\sin\mu\theta, \\ k = a' + b'\cos\lambda'\theta + c'\sin\lambda'\theta + d'\cos\mu'\theta + e'\sin\mu'\theta, \\ l = a'' + b''\cos\lambda''\theta + c''\sin\lambda''\theta + d''\cos\mu''\theta + e''\sin\mu''\theta, \end{cases}$$

où l'on peut supposer

$$\mu > \lambda > 0, \qquad \mu' > \lambda' > 0, \qquad \mu'' > \lambda'' > 0$$

et

$$\mu \geqq \mu' \geqq \mu''.$$

Les coefficients d, e ne peuvent pas s'annuler en même temps, car autrement c'est λ qui remplacerait μ avec la condition $b = c = 0$. Il en sera de même pour d', e' et d'', e''.

Nous allons exprimer que les coefficients vérifient les deux conditions déjà énoncées, et nous chercherons les systèmes de valeurs réelles.

On peut toujours, en remplaçant θ par $\theta + \alpha$, déterminer α de façon à faire disparaître le terme $e \sin\mu\theta$ sans changer la forme des autres. Soit donc $e = 0$, $d \gtrless 0$.

Si $\mu > \mu'$, dans l'expression Σh^2, l'angle $2\mu\theta$ étant le plus grand, le

terme $\frac{d^2}{2}\cos 2\mu\theta$ ne pourrait se réduire avec aucun autre, et Σh^2 ne pourrait être constant que si $d = 0$. Il faut donc que $\mu = \mu'$.

Si $\mu = \mu' = \mu''$, il faudrait $\lambda = \lambda' = \lambda''$, car autrement si λ, par exemple, diffère de λ' et de λ'', on peut toujours supposer $e = 0$, et le terme constant dans $k\frac{dh}{d\theta} - h\frac{dk}{d\theta}$ est $-\mu\, de'$: il faut donc $e' = 0$; on aura de même $e'' = 0$, mais alors dans Σh^2 le terme en $\cos 2\mu\theta$ ne pouvant se réduire avec aucun autre donnerait

$$d^2 + d'^2 + d''^2 = 0,$$

ce qui est impossible.

Mais, si $\mu = \mu' = \mu''$ et $\lambda = \lambda' = \lambda''$, on peut combiner les fonctions k, l par une rotation d'axes, de façon à annuler le coefficient de $\sin\mu\theta$; on a alors $e = e' = 0$, et en combinant h et k on peut avoir $d = e = 0$, ce qui est contraire à nos hypothèses. On a donc nécessairement $\mu = \mu' > \mu''$ et $\lambda = \lambda'$, car autrement on aurait encore $e = 0$, $\mu\, de' = 0$, d'où $e' = 0$ et $d^2 + d'^2 = 0$.

Nous pouvons, en outre, supposer $e'' = 0$ en remplaçant θ par $\theta + \alpha$; on fera ensuite disparaître le coefficient e par une rotation d'axes entre h et k, ce qui ne change pas la forme des autres termes puisque $\lambda = \lambda'$. Les termes en $2\mu\theta$ dans Σh^2 donnent alors

$$e'd' = 0, \qquad d^2 + d'^2 - e'^2 = 0;$$

d'où

$$d' = 0, \qquad d^2 = e'^2,$$

et l'on peut supposer $d = e' = 1$ sans changer la généralité des solutions. Les équations (2) se ramènent alors à la forme suivante :

$$(3) \qquad \begin{cases} h = a + b\cos\lambda\theta + c\sin\lambda\theta + \cos\mu\theta, \\ k = a' + b'\cos\lambda\theta + c'\sin\lambda\theta + \sin\mu\theta, \\ l = a'' + b''\cos\lambda''\theta + c''\sin\lambda''\theta + d\cos\mu''\theta. \end{cases}$$

L'angle le plus grand qui reste dans Σh^2 est alors $(\mu + \lambda)\theta$ ou $2\mu''\theta$; si les termes en $2\mu''\theta$ ne se réduisaient avec aucun autre, on en déduirait $d = 0$; si ceux en $(\mu + \lambda)\theta$ ne se réduisaient pas, on aurait

$$b - c' = b' + c = 0,$$

et le terme constant de $k\frac{dh}{d\theta} - h\frac{dk}{d\theta}$, qui est $(bc' - cb')\lambda + \mu$, donnerait

$$(b^2 + c^2)\lambda + \mu = 0;$$

λ et μ étant positifs, il n'y aurait que des solutions imaginaires. Il faut donc que

$$\mu'' = \frac{\mu + \lambda}{2},$$

et λ'' ne peut pas être égal à λ, car autrement la seconde condition que doivent remplir h, k, l donnerait

$$\begin{aligned}(bc' - cb')\lambda + \mu &= 0,\\ (b'c'' - c'b'')\lambda &= 0,\\ (b''c - c''b)\lambda &= 0,\end{aligned}$$

ce qui n'est possible que si $b'' = c'' = 0$.

De même, si les termes en $(\mu'' + \lambda'')\theta$ ne se réduisaient pas dans Σh^2, on en déduirait

$$b''d = c''d = 0.$$

Donc, si b'' et c'' ne sont pas tous deux nuls, il faut que $\lambda'' + \frac{\mu + \lambda}{2}$ soit égal à l'une des quantités μ, 2λ, ou $\mu - \lambda$, c'est-à-dire que

$$\lambda'' = \frac{\mu - \lambda}{2}, \qquad \frac{3\lambda - \mu}{2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mu - 3\lambda}{2}.$$

De plus, les termes en $2\mu''\theta = (\mu + \lambda)\theta$ ne peuvent se réduire avec aucun autre dans Σh^2, et l'on en déduit

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} b' &= -c,\\ d^2 &= 2(c' - b),\\ bc' + c^2 + \frac{\mu}{\lambda} &= 0,\end{aligned}\right.$$

cette dernière équation étant donnée par la seconde condition entre h et k.

Nous allons maintenant examiner séparément les trois cas suivants,

qui sont les seuls possibles :

1° $$b'' = c'' = 0,$$

2° $$\lambda'' = \pm \frac{3\lambda - \mu}{2} > 0,$$

3° $$\lambda'' = \frac{\mu - \lambda}{2}.$$

Dans le premier cas, on a toujours

$$a = a' = 0,$$

car, si $\mu \gtrless 2\lambda$, les termes en $\mu\theta$ dans Σh^2 ne peuvent pas se réduire, et il en résulte

$$a = a' = 0.$$

Si $\mu = 2\lambda$, $\mu'' = \frac{3}{2}\lambda$, en exprimant que Σh^2 est constant, on a, outre les équations (4), où $\mu = 2\lambda$,

$$\begin{aligned} &4a + b^2 - c'^2 = 0, \\ &2a' + bc + b'c' = 0, \\ &b + c' + 2ab + 2a'b' = 0, \\ &b' - c + 2ac + 2a'c' = 0, \end{aligned}$$

et l'on en déduit

$$\begin{aligned} &a(b^2 + c^2) + a'c(c' - b) = 0, \\ &ac(c' - b) + a'(c^2 + c'^2) = 0, \end{aligned}$$

et, si a et a' n'étaient pas nuls, il en résulterait que

$$(c^2 + bc')^2 = 0$$

et la dernière équation (4) donnerait $\mu = 0$. On a donc, dans ce cas,

$$a = a' = 0.$$

Si $\mu \gtrless 3\lambda$, le terme en $\cos\mu''\theta$ dans Σh^2 ne peut pas se réduire et $a'' = 0$. On a alors les relations

$$\begin{aligned} &b' = c = 0, \qquad b = -c', \\ &d^2 = 4c', \qquad c' = +\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, les formules (3) deviennent

$$\textit{Solution I}\ldots\ldots\begin{cases} h = -\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\cos\lambda\theta + \cos\mu\theta, \\ k = +\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\sin\lambda\theta + \sin\mu\theta, \\ l = 2\sqrt{\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}}\cos\frac{\lambda+\mu}{2}\theta. \end{cases}$$

On obtient la courbe déjà signalée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* il suffit d'un simple changement de variable et d'axes de coordonnées pour ramener les équations à la même forme.

Si $\mu = 3\lambda$, $\mu'' = 2\lambda$, on a, outre les équations (4),

$$2b' + bc + b'c' = 0,$$
$$2(b + c') + b^2 - c'^2 + 4a''d = 0.$$

On en déduit

$$b'(2 - b + c') = 0.$$

Mais si $b - c' = 2$, on aurait $d^2 = -4$, solution imaginaire; il faut donc

$$b' = c = 0 \qquad \text{et} \qquad bc' = -3,$$
$$d^2 = 2(c' - b), \qquad 4a''d = (c' + b)(c' - b - 2).$$

Les quatre coefficients b, c', a'', d qui restent dans les équations (3) dépendent d'un seul paramètre. Si l'on suppose d arbitraire, on a

$$c' = \frac{d^2}{4} \pm \sqrt{\frac{d^4}{16} - 3},$$
$$b = -\frac{d^2}{4} \pm \sqrt{\frac{d^4}{16} - 3},$$

et l'on obtient une deuxième solution réelle

$$\textit{Solution II}\ldots\ldots\ldots\begin{cases} h = b\cos\theta + \cos 3\theta, \\ k = c'\sin\theta + \sin 3\theta, \\ l = a'' + d\cos 2\theta. \end{cases}$$

On peut toujours supposer $d > 0$, et il faut $d^2 > 4\sqrt{3}$; à chaque valeur de d correspondent deux systèmes de valeurs de b, c', a''; mais, si l'on

change le signe du radical, c' et b se changent en $-b$ et $-c'$, a'' change de signe, et si l'on change θ en $\frac{\pi}{2}-\theta$, h, k, l sont remplacés par $-k$, $-h$, $-l$, et l'on retrouve la même courbe; il suffit donc de prendre les valeurs

$$c' = \frac{d^2}{4} + \sqrt{\frac{d^4}{16} - 3},$$

$$b = -\frac{d^2}{4} + \sqrt{\frac{d^4}{16} - 3},$$

$$a'' = \frac{d^2 - 4}{4d}\sqrt{\frac{d^4}{16} - 3},$$

et à chaque valeur de d supérieure à $2\sqrt[4]{3}$ correspond une seule courbe.

Dans le deuxième cas, $\lambda'' = \pm\frac{3\lambda - \mu}{2} > 0$; il faut que dans Σh^2 les termes en $2\lambda''\theta$ puissent se réduire avec d'autres, car autrement l'on aurait $b'' = c'' = 0$, et l'on serait ramené au premier cas. Il faut donc que

$$2\lambda'' = \mu, \quad \lambda, \quad \mu - \lambda, \quad \mu'' \quad \text{ou} \quad \mu'' - \lambda''$$

et, en tenant compte des valeurs de μ'' et λ'', il en résulte que

$$\mu = 2\lambda, \quad 4\lambda, \quad 5\lambda, \quad 7\lambda, \quad \tfrac{3}{2}\lambda \quad \text{ou} \quad \tfrac{5}{3}\lambda.$$

Mais, si $\mu = 2\lambda$,

$$\lambda'' = \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu - \lambda}{2};$$

ce cas peut être considéré comme rentrant dans le troisième : nous l'étudierons plus loin.

Si $\mu = 4\lambda$, $\mu'' = \frac{5}{2}\lambda$, $\lambda'' = \frac{\lambda}{2}$, les termes en $\mu\theta$ et $\mu''\theta$ entrant isolément dans Σh^2, on a

$$a = a' = a'' = 0,$$

et ceux en $2\lambda''\theta$ restent alors seuls; donc

$$b'' = c'' = 0.$$

On est ramené au premier cas.

Si $\mu = 5\lambda$, on a $\lambda = \lambda''$, ce qui est impossible, et il ne reste que

trois valeurs possibles

$$\mu = 7\lambda, \qquad \tfrac{3}{2}\lambda \qquad \text{ou} \qquad \tfrac{5}{3}\lambda.$$

Dans ces trois cas, l'angle $\lambda\theta$ ne peut être égal à aucun autre de ceux qui entrent dans Σh^2 et l'on a

$$ab + a'b' = 0,$$
$$ac + a'c' = 0$$

et comme, d'après les équations (4),

$$bc' - cb' = -\frac{\mu}{\lambda} < 0,$$

il faut que

$$a = a' = 0.$$

Si $\mu = \frac{3}{2}\lambda$, $\mu'' = \frac{5}{4}\lambda$, $\lambda'' = \frac{3}{4}\lambda$, les termes en $2\lambda''\theta$ ne peuvent plus se réduire et $b'' = c'' = 0$.

Donc $\mu = 7\lambda$ ou $\frac{5}{3}\lambda$, et dans ces deux cas $\mu'' = 2\lambda''$; le terme en $\sin 2\lambda''\theta$ donne

$$b''c'' = 0.$$

Si l'on suppose $b'' = 0$,

$$l = a'' + c''\sin\lambda''\theta + d\cos 2\lambda''\theta.$$

Si l'on change θ en $\theta + \frac{\pi}{2\lambda''}$, on aura

$$l' = a'' + c''\cos\lambda''\theta - d\cos 2\lambda''\theta$$

et l'on peut, par une rotation d'axes, ramener h et k à conserver la même forme (3). On peut donc toujours supposer

$$c'' = 0, \qquad b'' \gtrless 0.$$

Examinons d'abord le cas où $\mu = 7\lambda$, $\mu'' = 2\lambda'' = 4\lambda$: on a alors les équations

$$a = a' = c'' = 0, \qquad b' = c = 0,$$

$$b^2 - c'^2 + 4a''b'' + 2b''d = 0,$$
$$4a''d + b''^2 = 0,$$
$$b''d + b + c' = 0,$$
$$d^2 = 2(c' - b),$$
$$bc' + 7 = 0;$$

en éliminant a'' et b'', on a

$$(b+c')\left[b-c'-2+\frac{(b+c')^2}{d^4}\right]=0;$$

or $b+c'=-b''d \gtrless 0$, et en éliminant b et c' on a

$$d^6+\tfrac{7}{2}d^4+56=0,$$

équation qui n'a que des solutions imaginaires.

Dans le cas où $\mu=\frac{5}{3}\lambda$, $\mu''=2\lambda''=\frac{4}{3}\lambda$, on a les équations

$$a=a'=c''=0, \qquad b'=c=0,$$

$$\begin{gathered} b+c'+2a''b''+b''d=0, \\ 4a''d+b''^2=0, \\ 2b''d+b^2-c'^2=0, \\ d^2=2(c'-b), \\ bc'+\tfrac{5}{3}=0; \end{gathered}$$

en éliminant a'' et b'', on a

$$(b+c')\left[2+c'-b-\frac{(c'+b)^2}{64}d^2\right]=0;$$

or $b+c' \gtrless 0$, car autrement l'on aurait $b''d=0$, et, en éliminant b et c', on a

$$\left(\frac{d}{2}\right)^6-\frac{29}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^2-8=0.$$

Cette équation donne, pour d^2, une seule valeur positive, et l'on peut supposer $d>0$; on a ensuite

$$\begin{gathered} c'-b=\frac{d^2}{2}, \\ c'+b=\pm\frac{4}{d}\sqrt{2(d^2+4)}; \end{gathered}$$

b'' et a'' sont ensuite donnés par des équations du premier degré. Mais, si l'on change le signe de $c'+b$, on voit que c' et b se changent en $-b$ et $-c'$; b'' change de signe, et il suffit de remplacer $\lambda''\theta$ par $\pi-\lambda''\theta$ pour retrouver les mêmes formules (3), h et k étant permutés. Nous

obtenons ainsi une troisième solution

$$\textit{Solution III}\ldots\ldots\ldots \begin{cases} h = b\cos 3\theta + \cos 5\theta, \\ k = c'\sin 3\theta + \sin 5\theta, \\ l = a'' + b''\cos 2\theta + d\cos 4\theta, \end{cases}$$

où

$$b = -\frac{d^2}{4} + \frac{2}{d}\sqrt{2d^2+8},$$

$$c' = +\frac{d^2}{4} + \frac{2}{d}\sqrt{2d^2+8},$$

$$b'' = +\sqrt{2d^2+8},$$

$$a'' = -\frac{d^2+4}{2d}$$

et

$$\left(\frac{d}{2}\right)^6 - \frac{29}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^2 - 8 = 0, \qquad d > 0.$$

Les coefficients ont des valeurs complètement déterminées, et l'on n'obtient ainsi qu'une seule courbe réelle.

Examinons enfin le dernier cas où $\lambda'' = \frac{\mu - \lambda}{2}$, $\mu'' = \frac{\mu + \lambda}{2}$, on doit supposer $\mu \gtrless 3\lambda$, car autrement $\lambda'' = \lambda$; il en résulte que le terme $2a''d\cos\mu''\theta$ dans Σh^2 ne peut pas se réduire et

$$a'' = 0.$$

Si $\mu \gtrless 2\lambda$ les termes en $2\lambda\theta$ et $(\mu - \lambda)\theta$ donneraient

$$b'' = c'' = 0;$$

il faut donc

$$\mu = 2\lambda, \qquad \lambda'' = \frac{\lambda}{2}, \qquad \mu'' = \tfrac{3}{2}\lambda.$$

On a alors entre les coefficients les relations

$$a'' = 0, \qquad b' = -c,$$

$$2a + b''d + \frac{b^2 - c'^2}{2} = 0, \qquad 2a' + c''d - \frac{cd^2}{2} = 0,$$

$$b''c'' + 2ac + 2a'c' - c''d - 2c = 0,$$

$$\frac{b''^2 - c''^2}{2} + 2ab - 2a'c + b''d + b + c' = 0,$$

$$d^2 = 2(c' - b), \qquad c^2 + bc' + 2 = 0.$$

Ces formules contiennent deux paramètres arbitraires. Pour les mettre en évidence, posons

$$c'' - cd = (d^2 + 4)\frac{p}{2}, \qquad b'' - bd + d = (d^2 + 4)\frac{q}{2};$$

on déduit alors des équations précédentes, en éliminant a, a' et b'', c'',

$$p^2 - q^2 = b, \qquad pq - pd = \frac{c}{2}, \qquad c^2 + 2 + b^2 + \frac{bd^2}{2} = 0,$$

d'où

$$d^2\left(\frac{b}{2} + 4p^2\right) - 8p^2qd + 2 + b^2 + 4p^2q^2 = 0.$$

On peut choisir arbitrairement p et b, alors

$$q = \pm\sqrt{p^2 - b}$$

et d aura deux valeurs réelles pourvu que $b < 0$ et que p^2 ne soit pas compris entre les deux expressions positives

$$\frac{-(b^2 + 4) \pm \sqrt{6b^2 + 16}}{2b}.$$

Les valeurs de c, c', b'', c'', puis a et a' sont ensuite données par des équations du premier degré. On a ainsi une nouvelle courbe réelle.

$$\textit{Solution IV}\ldots \begin{cases} h = a + b\cos 2\theta + c\sin 2\theta + \cos 4\theta, \\ k = a' - c\cos 2\theta + c'\sin 2\theta + \sin 4\theta, \\ l = b''\cos\theta + c''\sin\theta + d\cos 3\theta; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c &= 2p(q - d), \\ c' &= b + \frac{d^2}{2}, \\ b'' &= (d^2 + 4)\frac{q}{2} + d(b - 1), \\ c'' &= (2 - \tfrac{3}{2}d^2)p + 2pqd, \\ 2a &= \frac{d^4}{8} - d^2\left(\frac{b}{2} - 1\right) - (d^2 + 4)\frac{qd}{2}, \\ 2a' &= pd\left(\frac{d^2}{2} - 2 - qd\right), \end{aligned}$$

$$q = \pm\sqrt{p^2 - b}, \qquad d^2\left(\frac{b}{2} + 4p^2\right) - 8p^2qd + 2 + (p^2 + q^2)^2 = 0.$$

Si l'on change p en $-p$ sans changer b, q, d, c, c'' et a' changent de signe, et il suffit de remplacer θ par $-\theta$ pour retrouver la même courbe. On peut donc supposer $p > 0$, et de même $q > 0$, car, si l'on change q en $-q$, en changeant le signe du radical de d, on a un résultat analogue.

Pour chaque système de valeurs de $p > 0$, $b < 0$, tels que d soit réel, on a donc deux courbes; mais il est facile de voir qu'elles ne sont pas toutes distinctes, car si l'on change θ en $\theta + \frac{\pi}{3}$, en combinant h et k pour leur conserver la même forme, on retrouve la même courbe p et b ayant changé de valeurs. Pour obtenir les courbes distinctes données par les formules (IV), posons

$$p = \rho \cos\omega, \qquad q - \frac{d}{2} = \rho \sin\omega$$

et

$$d = \rho\alpha,$$

on en déduit

$$b = \rho^2\left(\cos 2\omega - \alpha \sin\omega - \frac{\alpha^2}{4}\right),$$

$$2\alpha \sin 3\omega = 1 + \alpha^2 - \frac{\alpha^4}{16} + \frac{2}{\rho^4}.$$

Si l'on donne ρ et α, que l'on peut supposer positifs, pourvu que $\sin 3\omega$ soit compris entre -1 et $+1$, on aura, pour ω, six valeurs distinctes.

Si l'on exprime tous les coefficients en fonction de ρ, α, ω, les formules (IV) deviennent

$$h = -\tfrac{1}{4}\rho^4\alpha^2\cos 2\omega - \rho^2\alpha[\sin\omega + \sin(2\theta + \omega)] + \rho^2\cos(2\theta - 2\omega) - \frac{\rho^2\alpha^2}{4}\cos 2\theta + \cos 4\theta,$$

$$k = -\tfrac{1}{4}\rho^4\alpha^2\sin 2\omega - \rho^2\alpha[\cos\omega - \cos(2\theta + \omega)] + \rho^2\sin(2\theta - 2\omega) + \frac{\rho^2\alpha^2}{4}\sin 2\theta + \sin 4\theta,$$

$$l = \rho^3\alpha\cos(\theta - 2\omega) + \rho\left(2 - \frac{\rho^2\alpha^2}{2}\right)\sin(\theta + \omega) + \rho\alpha\cos 3\theta.$$

Si l'on change ω en $\omega + \frac{2\pi}{3}$ et θ en $\theta + \frac{\pi}{3}$, en remplaçant h et k par $h\cos\frac{2\pi}{3} - k\sin\frac{2\pi}{3}$ et $h\sin\frac{2\pi}{3} + k\cos\frac{2\pi}{3}$, on retrouve les mêmes formules, l étant seulement changé de signe.

De même, si l'on change ω et θ en $\frac{\pi}{3} - \omega$ et $-\frac{\pi}{3} - \theta$, en combinant h et k par une rotation égale à $\frac{\pi}{3}$, on retrouve la même courbe; à des valeurs déterminées de ρ et α correspond donc une seule courbe, et l'on peut supposer ω compris entre $-\frac{\pi}{6}$ et $+\frac{\pi}{6}$.

On devra prendre

$$\alpha > 2\sqrt{2} - 2,$$

et ρ doit vérifier les conditions

$$(\alpha^2 - 4)^2 - 8(\alpha + 2)^2 < \frac{32}{\rho^4} < (\alpha^2 - 4)^2 - 8(\alpha - 2)^2.$$

En substituant les valeurs de h, k, l dans les équations (1), on obtient les équations des quatre courbes suivantes :

$$\text{urbe I...}\quad \begin{cases} x = \dfrac{t\sqrt{A}}{A-1}\sin p\theta - \dfrac{t\sqrt{A}\,p}{(A+1)^2}\left[\dfrac{A}{q-p}\sin(q-p)\theta - \dfrac{1}{q+p}\sin(q+p)\theta\right], \\ y = \dfrac{t\sqrt{A}}{1-A}\cos p\theta - \dfrac{t\sqrt{A}\,p}{(A+1)^2}\left[\dfrac{A}{q-p}\cos(q-p)\theta + \dfrac{1}{q+p}\cos(q+p)\theta\right] \\ z = \dfrac{tA}{(A+1)^2}\,\dfrac{2p}{q}\sin q\theta, \end{cases}$$

où

$$A = +\sqrt{\frac{q+2p}{q-2p}} \qquad \text{et} \qquad q > 2p.$$

Les premiers paramètres λ et μ ont été remplacés par $\frac{q}{2} - p$ et $\frac{q}{2} + p$; cette courbe renferme un seul paramètre arbitraire $\frac{q}{p}$ qui doit être commensurable pour que la courbe soit algébrique.

$$\text{Courbe II...}\quad \begin{cases} x = \dfrac{t}{\lambda^2 + 4\lambda - 3}\,\dfrac{2\sqrt{\lambda}}{(\lambda+1)^2}\left(A\sin\theta + B\sin 3\theta + \dfrac{2\lambda}{5}\sin 5\theta\right), \\ y = \dfrac{t}{\lambda^2 + 4\lambda - 3}\,\dfrac{2\sqrt{\lambda}}{(\lambda+1)^2}\left(-A'\cos\theta + B'\cos 3\theta - \dfrac{2\lambda}{5}\cos 5\theta\right), \\ z = \dfrac{t}{\lambda^2 + 4\lambda - 3}\,\dfrac{2\lambda}{(\lambda+1)^2}\left(-4\sqrt{\lambda^2 - 3}\sin 2\theta + \lambda\sin 4\theta\right); \end{cases}$$

$$A = (\lambda+3)(\lambda+1)^2 + \lambda(\lambda+5)\sqrt{\lambda^2-3},$$
$$A' = (\lambda+3)(\lambda+1)^2 - \lambda(\lambda+5)\sqrt{\lambda^2-3},$$
$$B = -\frac{2\lambda^2}{3} + \left(\frac{\lambda}{3}-1\right)\sqrt{\lambda^2-3},$$
$$B' = -\frac{2\lambda^2}{3} - \left(\frac{\lambda}{3}-1\right)\sqrt{\lambda^2-3},$$

où

$$\lambda = \frac{d^2}{4} > \sqrt{3}.$$

Dans le cas limite $\lambda = \sqrt{3}$, on retrouve la courbe I, où $\frac{q}{p}$ a la valeur 4,

$$\text{Courbe III...}\begin{cases} x = \dfrac{\iota\sqrt{\lambda}}{(\lambda+3)^2}\left[A\sin\theta + B\sin 3\theta + C\sin 5\theta + D\sin 7\theta + \dfrac{\lambda}{9(\lambda+1)}\sin 9\theta\right], \\ y = \dfrac{\iota\sqrt{\lambda}}{(\lambda+3)^2}\left[-A'\cos\theta + B'\cos 3\theta - C'\cos 5\theta + D'\cos 7\theta - \dfrac{\lambda}{9(\lambda+1)}\cos 9\theta\right], \\ z = \dfrac{\iota}{(\lambda+3)^2}\left[-8\sqrt{\dfrac{2\lambda}{\lambda+1}}\sin 2\theta + \dfrac{\lambda^2}{4(\lambda+1)}\sin 8\theta\right]; \end{cases}$$

$$A = (\lambda+2)(3\lambda-2) + (14+5\lambda)\sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda+1}},$$
$$A' = (\lambda+2)(3\lambda-2) - (14+5\lambda)\sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda+1}},$$
$$B = -\lambda + \frac{\lambda-6}{3\lambda}\sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda+1}},$$
$$B' = -\lambda - \frac{\lambda-6}{3\lambda}\sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda+1}},$$
$$C = -\frac{1}{5} + \frac{\lambda}{5}\sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda+1}},$$
$$C' = -\frac{1}{5} - \frac{\lambda}{5}\sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda+1}},$$
$$D = -\frac{\lambda^2}{7} + \frac{1}{7}\sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda+1}},$$
$$D' = -\frac{\lambda^2}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda+1}}.$$

$\lambda = \frac{d^2}{4}$ représente la racine positive de l'équation

$$\lambda^3 - \frac{29}{3}\lambda - 8 = 0.$$

Courbe IV.

$$\left\{\begin{aligned}
x = {} & \frac{t}{(\rho^2+1)^2\left(1+\frac{d^2}{4}\right)^2}\Bigg[\frac{d}{14}\sin 7\theta + \left(A - \frac{d^3}{40}\right)\sin 5\theta - B\cos 5\theta \\
& + (C\cos 2\omega - D\sin\omega)\sin 3\theta + (E\sin 2\omega - F\cos\omega)\cos 3\theta \\
& + (H + L\cos 2\omega + M\sin\omega)\sin\theta \\
& + (K\cos 3\omega + L\sin 2\omega + M\cos\omega)\cos\theta\Bigg], \\
y = {} & \frac{t}{(\rho^2+1)^2\left(1+\frac{d^2}{4}\right)^2}\Bigg[-\frac{d}{14}\cos 7\theta - \left(A + \frac{d^3}{40}\right)\cos 5\theta - B\sin 5\theta \\
& + (C\sin 2\omega - D\cos\omega)\sin 3\theta - (E\cos 2\omega - F\sin\omega)\cos 3\theta \\
& + (-H + L\cos 2\omega + M\sin\omega)\cos\theta \\
& + (K\cos 3\omega - L\sin 2\omega - M\cos\omega)\sin\theta\Bigg], \\
z = {} & \frac{t}{(\rho^2+1)^2\left(1+\frac{d^2}{4}\right)^2}\Bigg[\frac{d^2}{12}\sin 6\theta + \frac{\rho^2 d^2}{4}\sin(4\theta - 2\omega) - \rho d\cos(4\theta + \omega) \\
& + \rho^2\left(\frac{d^4}{16} + d^2 - 3 + \frac{\rho^2 d^2}{4}\right)\sin(2\theta + 2\omega) \\
& - \frac{\rho d}{4}\left(\rho^4 - \frac{d^4}{16} + 4\rho^2 - d^2 - 10\right)\cos(2\theta - \omega)\Bigg];
\end{aligned}\right.$$

$$A = \frac{\rho^2 d}{5}\cos 2\omega + \frac{\rho}{5}\left(3 - \frac{d^2}{4}\right)\sin\omega,$$

$$B = \frac{\rho^2 d}{5}\sin 2\omega + \frac{\rho}{5}\left(3 - \frac{d^2}{4}\right)\cos\omega,$$

$$C + E = \frac{\rho^2 d}{3}\left(7 + \rho^2 + \frac{d^2}{4}\right),$$

$$C - E = -\frac{\rho^2 d^3}{6},$$

$$D + F = \frac{\rho}{3}\left(\rho^4 - \frac{\rho^2 d^2}{2} - \frac{d^4}{16} - \frac{d^2}{2} + 2\rho^2 - 8\right),$$

$$D - F = \frac{\rho d^2}{6}\left(3 + \frac{d^2}{4}\right),$$

$$H = \frac{1}{2d}\left(1 + \frac{d^2}{4}\right)^2\left(3\rho^4 - \rho^2 d^2 + \frac{d^4}{16} + d^2 + 6\right),$$

$$K = \rho^3\left(\frac{d^4}{16} + d^2 + 3\right),$$

$$L = \frac{\rho^2 d}{2}\left(7 + \frac{1-\rho^2}{4}d^2\right),$$

$$M = \frac{\rho d^2}{8}\left(\rho^4 + \frac{\rho^2 d^2}{2} - \frac{d^4}{16} + 6\rho^2 - \frac{3}{2}d^2 - 12\right),$$

où

$$\sin 3\omega = \frac{1}{2\rho^3 d}\left(\rho^4 + \rho^2 d^2 - \frac{d^4}{16} + 2\right),$$

ω étant compris entre $-\frac{\pi}{6}$ et $+\frac{\pi}{6}$ et ρ et d pouvant prendre tous les systèmes de valeurs positives qui rendent ω réel.

On peut remarquer que, dans le cas limite où $\rho = 0$, on a $d^2 = 4\sqrt{2}$, et l'on retrouve la courbe I, où $q = 6p$.

Courbes imaginaires. — La discussion précédente montre que la même méthode donnerait un assez grand nombre de solutions imaginaires. Les calculs seraient beaucoup moins simples, car dans les formules (2) on ne peut pas toujours annuler les coefficients comme dans le cas des variables réelles; pour qu'un changement de variable permette d'annuler e, par exemple, il faut supposer $e^2 + d^2 \gtrless 0$. Nous allons examiner seulement le cas le plus simple où les fonctions h, k, l ne contiennent chacune qu'un seul angle, c'est-à-dire où, dans les formules (2), de, $d'e'$, $d''e''$ sont nuls. Il est facile de voir qu'il faut alors que

$$\lambda = \lambda' = 2\lambda'' \qquad \text{et} \qquad a'' = 0,$$

et si $b''^2 + c''^2$ n'est pas nul, on peut supposer $c'' = 0$; on arrive alors aux deux solutions suivantes :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} h = a + \cos 2\theta, \\ k = a' - i\cos 2\theta, \\ l = 2i\sqrt{a - a'i}\cos\theta, \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} h = a + \cos 2\theta + i\sin 2\theta, \\ k = a' + i\cos 2\theta - \sin 2\theta, \\ l = i\sqrt{2(a + a'i)}\,(\cos\theta + i\sin\theta). \end{cases}$$

Mais la seconde se ramène à la première en posant

$$e^{\theta i} = \cos\theta',$$

d'où

$$e^{2\theta i} = \frac{1 + \cos 2\theta'}{2}.$$

Les équations (I) donnent

$$x = \frac{2t}{\sqrt{a - a'i(a + a'i - 2)}}\left[\frac{\cos 3\theta}{6} + \left(\frac{3}{2} - a'i\right)\cos\theta\right],$$

$$y = \frac{-2ti}{\sqrt{a - a'i(a + a'i - 2)}}\left[\frac{\cos 3\theta}{6} + \left(\frac{3}{2} - a\right)\cos\theta\right],$$

$$z = \frac{ti}{a + a'i - 2}\cos 2\theta$$

et

$$s = \frac{2t}{\sqrt{2 - a - a'i}}\cos\theta.$$

On retrouve ainsi la cubique gauche rectifiable déjà connue.

Si l'on pose

$$p = \frac{2t}{a + a'i - 2},$$

$$n = 2 - a - a'i,$$

$$m = \sqrt{a - a'i}$$

et

$$\cos\theta = u,$$

les équations prennent la forme obtenue par M. Lyon [*Annales de l'enseignement superieur de Grenoble*, équations (10), p. 395]. On peut remarquer que, si l'on remplace la variable u par um, il ne reste, outre le facteur d'homogénéité m^2p, qu'un seul paramètre $\frac{n}{m^2}$, et un simple changement de variable montre que cette cubique est identique à la courbe (6) page 360 du même Mémoire.

La méthode de M. Lyon peut du reste conduire facilement aux courbes réelles que nous avons obtenues. Cette méthode consiste à poser

$$u = \frac{A}{B} = \frac{k - hi}{l},$$

$$u_1 = -\frac{C}{B} = \frac{k + hi}{l}.$$

Les courbes à torsion constante sont alors données par les équations (p. 361 et 372)

$$x + yi = \tau \int \frac{du}{1 + uu_1} = \tau \int \frac{AB' - BA'}{AC - B^2} dt,$$

$$x - yi = \tau \int \frac{du_1}{1 + uu_1} = \tau \int \frac{BC' - CB'}{AC - B^2} dt,$$

$$z = \tau i \int \frac{u_1 du - u du_1}{1 + uu_1} = \frac{\tau i}{2} \int \frac{CA' - AC'}{AC - B^2} dt,$$

où, pour les courbes réelles, u et u_1 sont deux fonctions imaginaires conjuguées d'une même variable, et pour les courbes algébriques unicursales A, B, C sont trois polynômes entiers en t. Mais il faut remarquer que les parties réelles de la courbe peuvent correspondre à des valeurs imaginaires de la variable, et u et u_1 étant deux fractions rationnelles en t peuvent être imaginaires conjugués sans que les coefficients le soient.

Par exemple, pour la courbe réelle (I), on aura

$$u = \frac{k - ht}{l} = \frac{e^{+\mu\theta i} - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\, e^{-\lambda\theta i}}{2i\sqrt[4]{\frac{\mu}{\lambda}} \cos\frac{\lambda + \mu}{2}\theta},$$

$$u_1 = \frac{k + ht}{l} = \frac{e^{-\mu\theta i} - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\, e^{\lambda\theta i}}{-2i\sqrt[4]{\frac{\mu}{\lambda}} \cos\frac{\lambda + \mu}{2}\theta},$$

et si l'on pose

$$\mu = \frac{q}{2} + p, \qquad \lambda = \frac{q}{2} - p$$

et

$$e^{\theta i} = t,$$

on a

$$u = \frac{t^{q-p} - t^p \sqrt{\dfrac{q+2p}{q-2p}}}{i \sqrt[4]{\dfrac{q+2p}{q-2p}} (t^q + 1)},$$

$$u_1 = \frac{t^p - t^{q-p} \sqrt{\dfrac{q+2p}{q-2p}}}{-i \sqrt[4]{\dfrac{q+2p}{q-2p}} (t^q + 1)},$$

et l'on devra poser, dans les formules de M. Lyon,

$$A = i \sqrt{\frac{q+2p}{q-2p}}\, t^p - i t^{q+p},$$

$$C = i \sqrt{\frac{q+2p}{q-2p}}\, t^{q-p} - i t^{-p},$$

$$B = \sqrt[4]{\frac{q+2p}{q-2p}} (t^q + 1).$$

On voit que, pour obtenir les points réels de la courbe, il faut donner à t des valeurs imaginaires de module 1, et la valeur conjuguée de u s'obtient en changeant t en $\frac{1}{t}$ et i en $-i$: on retrouve ainsi u_1.

Les trois autres courbes réelles que nous avons obtenues peuvent évidemment se déterminer par la même méthode; par exemple, pour la courbe (II), on aura

$$u = \frac{e^{3\theta i} + e^{\theta i} \sqrt{\dfrac{d^4}{16} - 3} - \dfrac{d^2}{4} e^{-\theta i}}{i(a'' + d \cos 2\theta)},$$

$$u_1 = \frac{e^{-3\theta i} + e^{-\theta i} \sqrt{\dfrac{d^4}{16} - 3} - \dfrac{d^2}{4} e^{\theta i}}{i(a'' + d \cos 2\theta)},$$

et en posant $e^{\theta i} = t$ on aura les trois polynômes

$$B = t^3 \frac{d^2 - 1}{4d} \sqrt{\frac{d^4}{16} - 3} + \frac{t + t^5}{2} d,$$

$$Ai = t^6 + t^5 \sqrt{\frac{d^4}{16} - 3} - t^2 \frac{d^2}{4},$$

$$Ci = -t^4 \frac{d^4}{4} + t^2 \sqrt{\frac{d^4}{16} - 3} + 1.$$

Pour ramener les points réels de la courbe à correspondre à des valeurs réelles d'une nouvelle variable, il suffit de poser $t = \frac{\theta + i}{\theta - i}$; on obtient alors, pour u et u_1, des fractions rationnelles de la variable réelle θ, dont les coefficients sont imaginaires conjugués.