ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL PAINLEVÉ

Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 8 (1891), p. 9-58

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__9_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE,

PAR M. PAUL PAINLEVÉ [1],

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

INTRODUCTION.

Les théorèmes bien connus de MM. Briot et Bouquet permettent d'étudier, dans le voisinage d'un point x_0, les intégrales d'une équation différentielle du premier ordre

$$y' = f(x, y),$$

qui deviennent égales à y_0 pour $x = x_0$. Si $f(x, y)$ est holomorphe dans le voisinage de x_0, y_0, il existe une seule intégrale satisfaisant à la condition $y(x_0) = y_0$, et on sait la développer en série de Taylor. Quand les valeurs (x_0, y_0) forment un couple de valeurs singulières de $f(x, y)$, on sait encore discuter, dans le voisinage de x_0, la forme des intégrales, qui peuvent être alors en nombre infini. MM. E. Picard et H. Poincaré ont même indiqué des développements en séries de ces intégrales dans le voisinage de x_0.

---

[1] Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (grand prix des Sciences mathématiques, 1890).

Mais qu'arrive-t-il lorsqu'on fait varier x d'une façon quelconque dans le plan des x et qu'on suit les variations correspondantes d'une intégrale particulière y? La fonction y est-elle indéterminée en certains points x_0? acquiert-elle un nombre limité ou illimité de valeurs? C'est là une question à laquelle ne répondent pas les théorèmes que nous venons de rappeler.

Dans le cas particulier où x ne figure pas explicitement dans l'équation

$$F(y, y') = 0,$$

supposée algébrique en y, y', MM. Briot et Bouquet ont résolu le problème suivant :

Reconnaître si l'intégrale générale de l'équation est une fonction de x qui n'admet dans le plan qu'un nombre donné n de déterminations.

Ce problème, devenu classique, a été le point de départ d'un très grand nombre de travaux.

Mais, quand x figure explicitement dans l'équation

$$F[y, y', (x)] = 0, \tag{1}$$

algébrique en y, y', la question analogue apparaît comme beaucoup plus compliquée, et elle était demeurée intacte jusque dans ces dernières années.

C'est M. Fuchs [1] qui, le premier, a cherché les conditions pour que l'intégrale d'une équation (1) soit uniforme. Il s'est même placé à un point de vue plus général que je vais indiquer.

Quand on considère les intégrales d'une équation différentielle d'ordre quelconque, parmi les points critiques x_i de ces intégrales (j'entends les points où plusieurs valeurs de y se permutent), il en est qui varient avec les constantes d'intégration et que j'appelle *points critiques mobiles;* d'autres, au contraire, qui restent *fixes*. Ces deux espèces de points jouent un rôle très différent, comme la suite de ce Mémoire le montrera.

M. Fuchs a indiqué les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale de (1) n'ait que des points critiques fixes x_i. Ces con-

---

[1] Fuchs, *Sitzungsberichte der Academie der Wissenschaften zu Berlin*, juin 1884.

ditions une fois remplies, si l'on veut que l'intégrale générale soit uniforme, il reste à exprimer que ces points x_i, qui sont connus, ne sont pas des points critiques des intégrales.

M. H. Poincaré (¹), reprenant la question, est arrivé à ces conclusions inattendues :

Quand les points critiques de l'équation (1) *sont fixes, cette équation s'intègre algébriquement, ou par une quadrature, ou se ramène à une équation de Riccati.*

Les trois cas se distinguent de la manière suivante. Donnons à x une valeur quelconque dans l'équation (1). Cette équation, algébrique et irréductible en y, y',

$$F[y, y', (x)] = 0,$$

a un certain genre p qui ne varie pas avec x. C'est ce nombre p que nous appelons, par définition, *genre de l'équation différentielle*. Si p est plus grand que 1, les équations de M. Fuchs s'intègrent algébriquement; si $p = 1$, elles s'intègrent par quadrature; si p est nul, elles se ramènent à une équation de Riccati.

La raison de ce fait est qu'il existe alors, entre les valeurs (y, y') et (y_0, y'_0) de l'intégrale et de sa dérivée aux points x et x_0, une correspondance birationnelle qui transforme l'une dans l'autre des deux courbes algébriques

$$F[y, y', (x)] = 0, \qquad F[y_0, y'_0, (x)] = 0.$$

Plus récemment, M. Picard (²) s'est servi d'un théorème analogue pour intégrer des classes très étendues d'équations d'ordre supérieur.

Je me propose de généraliser dans ce travail, à la fois la question résolue par M. Poincaré et la méthode qui l'a conduit à cette solution.

Joignons dans le plan des x par des coupures L tous les points critiques fixes x_i des intégrales de (1), en choisissant ces coupures de

---

(¹) H. Poincaré, *Sur un théorème de M. Fuchs* (*Acta mathematica*, t. VII).

(²) E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques*, 1889).

telle façon que le point x, assujetti à ne pas les franchir, puisse atteindre un point quelconque du plan, mais ne décrive jamais un contour fermé autour d'un ou plusieurs points x_i.

Soit alors y_0 la valeur en x_0 d'une intégrale particulière $y(x)$; faisons varier x (sans franchir les coupures L) et suivons les variations correspondantes de y, en partant de x_0 avec la valeur y_0 de y.

Il peut arriver, dans ces conditions, que y acquière un nombre limité ou illimité de valeurs en un même point x. Si c'est le premier cas qui se trouve réalisé (quel que soit y_0), nous convenons de dire que *l'intégrale générale de* (1) *ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles*.

Deux problèmes se posent maintenant d'eux-mêmes :

1° *Étudier les propriétés de l'intégrale de* (1) *quand elle est supposée de cette nature;*

2° *Reconnaître si l'intégrale d'une équation donnée* (1) *ne prend qu'un nombre limité de valeurs autour des points critiques mobiles.*

Ce sont ces deux problèmes dont nous nous occupons ici. Il est indispensable, pour les traiter, de s'appuyer sur certaines propriétés caractéristiques des équations du premier ordre, qui demandent à être démontrées rigoureusement. Ces propriétés se résument ainsi :

I. *Une intégrale $y(x)$ d'une équation* (1) *ne saurait devenir indéterminée qu'en certains points particuliers ξ_i du plan des x, faciles à déterminer sur l'équation différentielle.*

II. *Ces points ξ_i mis à part, une intégrale qui ne prend dans le voisinage de la ligne λ (d'un côté de cette ligne) que n valeurs ne peut admettre cette ligne λ pour ligne singulière.*

III. *Quand l'intégrale générale d'une équation* (1) *ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, il existe entre $y(x)$ et $y_0(x_0)$ une relation algébrique*

$$\Phi[y, y_0, (x), (x_0)] = 0.$$

Cette relation est de degré mn par rapport à y et à y_0 respectivement, si m désigne le degré en y' de l'équation (1).

Ces propositions restent vraies quand on admet seulement que y' est une fonction analytique de y à m déterminations, $y' = f(x, y)$, qui, pour toute valeur de x, n'admet pas dans le plan des y de ligne singulière. La proposition III nous montre alors que, si l'intégrale de l'équation est de l'espèce étudiée, y' est nécessairement une fonction algébrique de y. Nous nous bornerons donc à considérer dans ce Mémoire des équations de la forme

$$F[y, y', (x)] = 0,$$

algébriques et irréductibles en y, y', dont les coefficients dépendent de x d'une façon quelconque.

Le théorème III, qui est fondamental, est évident quand on suppose que l'intégrale y est une fonction algébrique de x; si, en effet, l'intégrale de (1) se laisse définir par une relation algébrique

$$G(y, x) = 0,$$

d'un certain degré en y et x, en exprimant qu'il en est ainsi, on forme un certain nombre de relations algébriques entre les coefficients de G. Ces coefficients dépendent donc algébriquement d'un d'entre eux, par suite de y_0. Cette remarque s'applique aussi bien aux équations différentielles d'ordre supérieur.

Mais, ce cas particulier excepté, les propriétés que nous venons d'énumérer exigent une démonstration, en dépit de leur apparente évidence qui les a fait parfois étendre aux équations d'ordre supérieur pour lesquelles elles ne subsistent à aucun titre. L'intégrale générale des équations du second ordre ou du troisième ordre les plus simples, quand elle est uniforme ou à n valeurs, peut présenter des points singuliers essentiels ou des lignes singulières, variables avec la constante d'intégration, et qu'aucune particularité de l'équation différentielle ne met en évidence. Cette intégrale n'est pas nécessairement une fonction algébrique des constantes y_0, y'_0, y''_0, ...; ces constantes y peuvent figurer d'une façon transcendante [1].

Une fois admises pour les équations du premier ordre

$$F[y', y, (x)] = 0 \tag{1}$$

---

[1] Voir à ce sujet le Mémoire déjà cité de M. E. Picard.

ces propositions générales, il est aisé de donner à l'intégrale de (1) plusieurs formes intéressantes. Tout d'abord, on peut l'écrire

$$(2)\qquad y^n + R_{n-1}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]y^{n-1} + \ldots + R_0[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = 0,$$

les R désignant des fonctions rationnelles de y_0, y'_0, qui dépendent de x d'une façon quelconque. Il est clair qu'on a aussi

$$(3)\qquad y_0^n + R_{n-1}[y, y', (x), (x_0)]y_0^{n-1} + \ldots + R_0[y, y', (x), (x_0)] = 0,$$

et ceci nous montre que l'intégrale de (1) se laisse définir par l'équation

$$R_i[y, y', (x), (x_0)] = R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x_0)] = C_i,$$

c'est-à-dire par une équation telle que

$$(4)\qquad \rho[y, y', (x)] = \text{const.} = \gamma,$$

ρ désignant une fonction rationnelle de y, y', et y' la fonction de (y, x) que détermine l'équation (1).

Plus généralement, l'intégrale vérifie une infinité de relations de la forme

$$(5)\qquad R[y, y', (x)] = A(x, C),$$

où A est une fonction de x dont les points critiques sont indépendants de la constante C. Nous donnons aux constantes γ le nom de *constantes intégrales*, aux fonctions A le nom de *fonctions intégrales*. Deux constantes intégrales γ, γ_1 sont liées par une relation algébrique

$$g(\gamma, \gamma_1) = 0.$$

Deux fonctions intégrales A, A_1 sont liées par une relation

$$H[A, A_1, (x)] = 0,$$

algébrique en A, A_1. Nous montrons qu'on peut toujours choisir deux fonctions (ou, si l'on veut, deux constantes) intégrales

$$r = a, \qquad r_1 = a_1,$$

liées par l'équation

$$h[r, r_1, (x)] = 0,$$

de telle façon que toute autre fonction intégrale $R = A$ s'exprime rationnellement à l'aide de r, r_1,

$$R = \varphi[r, r_1, (x)], \qquad A = \varphi[a, a_1, (x)].$$

Cette relation $h = 0$, dont les modules sont indépendants de x, n'est déterminée qu'à une transformation birationnelle près; nous l'appelons *relation entre les fonctions* (*ou constantes*) *intégrales*.

Par exemple, il suffit de prendre pour r et r_1 les deux constantes intégrales

$$\rho = \lambda_0(x_0)\, R_0[y, y', (x), (x_0)] + \ldots + \lambda_{n-1}(x_0)\, R_{n-1}[y, y', (x), (x_0)]$$

et

$$\frac{d\rho}{dx_0} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i(x_0) \frac{dR_i}{dx_0}[y, y', (x), (x_0)] + \frac{d\lambda_i(x_0)}{dx_0} R_i[y, y', (x), (x_0)],$$

liées par la relation

$$h\left[\rho, \frac{d\rho}{dx_0}, (x_0)\right] = 0,$$

où x_0 est une constante quelconque, soit zéro.

On peut aussi bien prendre pour r et r_1 les deux fonctions intégrales

$$r[y, y', (x)] = r^0(x, C), \qquad r'[y, y', (x)] = r'^0(x, C),$$

définies par les égalités

$$r^0 = \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i(x) \quad R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x)], \qquad r = r^0[y, y', (x), (x)],$$

$$r'^0 = \frac{dr^0}{dx} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i(x) \frac{dR_i}{dx}[y_0, y'_0, (x_0), (x)] + \frac{d\lambda_i}{dx} R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$

$$r' = r'_0[y, y', (x), (x)];$$

la fonction $r^0(x)$, ou la fonction r (quand on y remplace y par une intégrale de (1), vérifie l'équation

$$h\left[r^0, \frac{dr^0}{dx}, (x)\right] = 0 \qquad \text{ou} \qquad h\left[r, \frac{dr}{dx}, (x)\right] = 0,$$

équation différentielle en r dont les points critiques sont fixes. (Dans ces égalités, les λ_i sont des fonctions de x_0 ou de x qu'on laisse quelconques.)

De ce qui précède résulte encore ce théorème que l'intégrale de l'équation (1) vérifie une relation

$$(6) \qquad G[y, \gamma, (x)] = 0$$

de degré m en γ : dans cette égalité, γ désigne une constante ou, si l'on veut, une fonction de x et d'une constante dont les points critiques sont fixes dans le plan des x.

Quand le genre ϖ de la relation $h = 0$ est nul, les fonctions et constantes intégrales s'expriment rationnellement à l'aide d'une d'entre elles; il existe alors des relations

$$(6) \qquad G[y, \gamma, (x)] = 0,$$

de degré m en γ, et de degré n en y; γ est une constante, ou, si l'on veut, une fonction de x qui satisfait à une équation de Riccati arbitraire

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Autrement dit, l'intégrale y peut s'écrire

$$(7) \qquad y^n + R_{(n-1)}[C, (x)]y^{n-1} + \ldots + R_0[C, (x)] = 0,$$

C désignant une constante, et les R_i des fractions rationnelles en C de degré m.

Quand $\varpi = 1$, l'intégrale est de la forme

$$(8) \qquad \begin{cases} y^n + r_{n-1}[C, (x)]y^{n-1} + \ldots + r_0[C, (x)] \\ \quad + \sqrt{(1 - C^2)(1 - k^2C^2)}\,\{\rho_{n-1}[C, (x)]y^{n-1} + \ldots + \rho_0[C, (x)]\} = 0 \end{cases}$$

(k désignant un certain nombre), et il existe des relations

$$G[y, \gamma, (x)] = 0,$$

de degré m en γ, de degré $2n$ en y, où γ représente une fonction de x qui vérifie la relation

$$\frac{d\gamma}{dx} = N(x)\sqrt{(1 - \gamma^2)(1 - k^2\gamma^2)};$$

dans cette dernière égalité, $N(x)$ peut être choisi arbitrairement. Si l'on fait $N = 0$, $\gamma = C$.

Ces théorèmes sont connus depuis longtemps dans bien des cas particuliers. M. Fuchs, par exemple, a montré par une autre méthode que l'intégrale de (1), *quand elle est algébrique*, peut se mettre sous la forme

$$\rho[y, y', (x)] = \gamma.$$

De même, quand la variable x ne figure pas explicitement dans (1), la forme de l'intégrale

$$\begin{aligned} y^n + \mathrm{R}_{(n-1)}[y_0, y'_0, (x)]\, y^{n-1} + \ldots + \mathrm{R}_0[y_0, y'_0, (x)] = 0 \\ \equiv y^n + \mathrm{R}_{n-1}(x + \mathrm{C})\, y^{n+1} + \ldots + \mathrm{R}_0(x + \mathrm{C}) \end{aligned}$$

correspond au théorème d'addition des fonctions simplement ou doublement périodiques.

Quand l'équation a ses points critiques fixes, l'équation (2) se réduit à

$$y = \mathrm{R}[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$

et la relation $h = 0$, où l'on fait $r = \mathrm{R}$, $r' = \frac{d\mathrm{R}}{dx}$, à l'équation (1). On retrouve ainsi le résultat qui est le point de départ de la méthode de M. Poincaré, à savoir que les équations

$$y' = \frac{d\mathrm{R}}{dx}[y_0, y'_0, (x_0), (x)], \qquad y = \mathrm{R}[y_0\, y'_0, (x_0), (x)]$$

définissent une correspondance birationnelle entre les deux courbes

$$\mathrm{F}[y, y', (x)] = 0, \qquad \mathrm{F}[y_0, y'_0, (x_0)] = 0.$$

Dans le cas le plus général, les égalités

$$\gamma = \rho[y, y', (x)], \qquad \gamma_1 = \rho_1[y, y', (x)]$$

définissent une correspondance rationnelle entre la courbe

$$\mathrm{F}[y, y', (x)] = 0$$

et la courbe

$$h(\gamma, \gamma_1) = 0,$$

que représente la relation entre les constantes intégrales.

Remarquons de même que, si $\varpi = 0$, il existe une correspondance birationnelle entre la courbe

$$\mathrm{F}[y, y', (x)] = 0 \tag{1}$$

et les courbes

$$\mathrm{G}[y, \gamma, (x)] = 0, \tag{6}$$

correspondance que définissent les égalités

$$\gamma = \rho[y, y', (x)],$$

$$\gamma' = -\frac{1}{\dfrac{\partial G}{\partial y}}\left[\frac{\partial G}{\partial \gamma}\gamma' + \frac{\partial G}{\partial x}\right],$$

avec la relation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P.$$

Dans tous les autres cas, il existe entre (1) et (6) une correspondance rationnelle, qui est seulement birationnelle quand γ est une constante.

On voit comment les transformations rationnelles des courbes algébriques s'introduisent d'elles-mêmes dans l'étude qui nous occupe. Leurs propriétés doivent jouer dans ce qui va suivre un rôle essentiel, et c'est au développement de ces propriétés qu'est consacré le second Chapitre de ce Mémoire.

Les résultats que nous obtenons peuvent se résumer ainsi :

Soient

$$(\alpha) \qquad f(y, z) = 0,$$

$$(\beta) \qquad F(y_1, z_1) = 0$$

les équations de deux courbes de degré m et m_1 respectivement, et

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} y = \varphi(y_1, z_1), \\ z = \psi(y_1, z_1) \end{cases}$$

deux fonctions rationnelles de (y_1, z_1) qui permettent de passer de (α) à (β).

Si le genre p de (α) est nul, on peut toujours passer de (α) à (β) par une infinité de substitutions (γ) qui dépendent d'une fonction rationnelle arbitraire du point analytique (y_1, z_1) de (β).

Quand $p = 1$, on ne peut en général passer rationnellement de (α) à (β). Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'une intégrale abélienne de première espèce de la courbe (β) se ramène aux intégrales elliptiques de module égal au module de (α). Une telle transformation, quand elle existe, dépend toujours d'une constante et au moins d'un entier arbitraires, mais ne dépend jamais d'un second paramètre continu.

Quand p est plus grand que 1, *il n'existe qu'un nombre fini de substitutions* (γ) *transformant* (α) *en* (β), *et toutes ces substitutions se calculent algébriquement.*

Ces théorèmes se laissent démontrer par des procédés analogues à ceux qu'emploient MM. E. Picard et H. Poincaré dans l'étude des transformations birationnelles des courbes et des surfaces. Le point fondamental de ces raisonnements, c'est que la transformation (γ) fait correspondre aux *courbes adjointes* de degré $(m-3)$ de (α) certaines des courbes adjointes de degré (m_1-3) de (β).

Il résulte de ce simple fait que le genre p de (α) est au plus égal au genre p_1 de (β). Quand la substitution (γ) est birationnelle, on sait que $p=p_1$; nous montrons que la *réciproque est vraie quand p est plus grand que* 1. Ce théorème a déjà été établi par H. Weber à l'aide d'autres considérations (¹).

Plus généralement, si μ désigne l'*ordre* de la transformation, c'est-à-dire le nombre des points de (β) qui correspondent à un point de (α), on a

$$\mu = \frac{p_1-1}{p-1}.$$

Enfin, si la courbe (β) est d'espèce hyperelliptique, il en est de même de la courbe (α).

Ces propositions supposent les deux courbes (α) et (β) données. Mais la question qui nous intéresse surtout consiste à *déterminer toutes les courbes* (α) *distinctes qui correspondent rationnellement à une courbe* (β) *donnée.* J'entends par courbes *distinctes* deux courbes qui n'ont pas les mêmes *modules*, et par suite ne se correspondent pas birationnellement. En nous servant de l'équation de degré $(p+1)$ à laquelle Clebsch ramène toute courbe de genre p, nous montrons qu'*on peut calculer algébriquement un type de toutes les classes de courbes* (*de genre* $p>1$) *qui se transforment rationnellement, d'après les formules* (γ), *en la courbe* (β) *donnée. Ces types* (*ou ces classes*) *sont en nombre limité.* Les courbes (α), qui correspondent à la courbe (β) donnée, ne sauraient dépendre de modules arbitraires.

(¹) H. Weber, *Zur Transformation der algebraischen Functionen* (*Journal de Crelle*, t. 76).

La question de *reconnaître si la courbe* (β) *est la transformée rationnelle d'une courbe de genre* 1 revient à déterminer *si une intégrale abélienne de première espèce attachée à la courbe* (β) *n'a que deux périodes.*

L'application de ces théorèmes à l'étude des équations différentielles est immédiate. Soit

$$F[y, y', (x)] = 0 \tag{1}$$

une équation dont l'intégrale prend n valeurs autour des points critiques mobiles.

Il existe alors, avons-nous dit, une correspondance rationnelle entre la courbe (1) et une certaine courbe

$$H(c, c_1) = 0$$

que définit la relation entre les constantes intégrales, et cette correspondance

$$\begin{aligned} c &= R\,[y, y', (x)], \\ c_1 &= R_1[y, y', (x)] \end{aligned}$$

détermine l'intégrale générale de (1).

Nous sommes en état de décider s'il existe une telle courbe H *de genre* ϖ *supérieur à* 1. De là ce théorème :

On sait reconnaître algébriquement si l'intégrale de l'équation (1) *donnée ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, la valeur correspondante de* ϖ *étant supposée plus grande que* 1. *S'il en est ainsi, l'intégrale s'obtient elle-même algébriquement.*

On doit avoir, dans ce cas,

$$n = \frac{p-1}{\varpi - 1},$$

si p est le genre de l'équation (1). Ceci nous montre que, pour une équation (1) de degré donné en y et y', le nombre n ne peut dépasser une certaine limite quand ϖ est supérieur à 1.

Traitons maintenant la même question en supposant $\varpi = 1$.

Il existe alors une intégrale abélienne de première espèce de la courbe (1)

$$J[y, y', (x)] = \sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i(x) \int \frac{P_i[y, y', (x')]}{F'_{y'}}\,dy,$$

qui satisfait, si $y(x)$ est une intégrale quelconque de (1), à l'égalité

$$J[y, y', (x)] = h(x) + C$$

(C est une constante), ou encore à l'égalité

$$\frac{dJ}{dx} = k(x).$$

Si l'on exprime que cette dernière relation est équivalente à l'équation (1), on forme un certain nombre de relations linéaires et homogènes par rapport aux $\lambda_i, \frac{d\lambda_i}{dx}$. Quand ces relations sont compatibles, tous les λ_i sont donnés le plus souvent par une quadrature logarithmique. Il peut arriver toutefois que leur détermination dépende d'*une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre $p-1$ au plus. Les λ_i une fois calculés, l'équation s'intègre par une quadrature*

$$J = \int k(x)\,dx + C.$$

Un cas important, où les λ_i se déterminent algébriquement, est celui où les modules de l'équation (1) ne dépendent pas de x.

Ajoutons que, les conditions précédentes se trouvant réalisées, l'intégrale de (1) n'est pas nécessairement de la forme voulue. Il faut, de plus, que l'une des intégrales J ainsi trouvées n'ait que deux périodes. Quand $\varpi = 1$, le nombre n peut dépasser toute limite, pour un degré donné de l'équation (1) en y, y'.

Le nombre ϖ ne saurait être supérieur à p. Il convient de remarquer que, *si $p = \varpi$ $(p > 1)$, l'intégrale a ses points critiques fixes*, car la correspondance entre F et H est birationnelle. *Ce théorème subsiste pour $p = 1$.*

Seul le cas où ϖ est nul échappe complètement à la méthode. Elle ne saurait donc rien nous apprendre sur les équations (1) résolues par rapport à y' ou de genre 0. Mais, *quel que soit le nombre ϖ*, nous pouvons résoudre la question suivante :

Déterminer si l'intégrale générale de l'équation (1) est une fonction qui ne prend dans le plan des x qu'un nombre donné n de valeurs autour des points critiques mobiles.

Nous montrons d'abord qu'on sait trouver une limite supérieure N du degré auquel figure y_0 dans la fonction

$$r = a_0(x)\,R_0[y_0, y'_0, (x_0), x] + a_1(x)\,R_1[y_0, y'_0, (x_0), (x)] + \ldots + a_{n-1}(x)\,R_{(n-1)}[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$

supposée entière et de degré $(m-1)$ en y'_0. Pour cela, nous identifions le premier membre de l'équation

$$\Phi[y, y_0, (x)] = 0$$

de degré mn en y et en y_0 respectivement avec le produit

$$\chi(z_1)\chi(z_2)\ldots\chi(z_m),$$

en posant

$$\chi(z_j) = \sum_{i=1}^{i=n} y^i\, R_i[y_0, z_j, (x)];$$

z_j désigne l'une des m valeurs de y'_0 pour y_0, x_0. Une fois N calculé, on connaît une limite supérieure du degré en R_i, r, $\frac{dr}{dx}$ des relations

$$\text{(A)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\psi_i[R_i, r, (x)] = 0,\\ &h\left[r, \frac{dr}{dx}, (x)\right] = 0.\end{aligned}\right.$$

Exprimons que les fonctions R_i, r, déterminées par les équations (A), n'ont que des points critiques fixes et définissent l'intégrale de (1) quand on les porte dans l'équation

$$\chi(z) = 0.$$

Le système de conditions ainsi formé, entre les coefficients des h, ψ_i, est ou *incompatible ou déterminée;* car si n est le nombre des valeurs de y qui se permutent effectivement autour des points critiques mobiles, il ne saurait exister deux systèmes distincts de relations (A).

Une fois les relations A calculées (par des opérations purement algébriques), l'intégration de (1) est ramenée à celle de

$$h[r, r', (x)] = 0.$$

Quant aux R_i, ils s'expriment rationnellement à l'aide de r et de r'. Si nous appliquons à l'équation $h = 0$, dont les points critiques sont fixes, les résultats obtenus par M. Poincaré, nous voyons que *l'équation donnée s'intègre algébriquement quand ϖ est supérieur à* 1; *elle s'intègre par une quadrature si* $\varpi = 1$; *enfin elle se ramène à une équation de Riccati, si* $\varpi = 0$.

La méthode précédente fournit une démonstration directe du théorème que nous avions en vue. Mais les calculs auxquels elle donne lieu sont en général impraticables. La marche à suivre la plus commode consiste à distinguer les trois cas

$$\varpi > 1, \qquad \varpi = 1, \qquad \varpi = 0.$$

Le premier se traite aisément à l'aide de la théorie des transformations rationnelles.

Le second nous conduit à chercher si une intégrale abélienne de première espèce de (1), J, ne se ramène pas aux intégrales elliptiques par une transformation d'ordre n : problème classique qu'on sait traiter de bien des façons. Une fois J calculé, l'intégration s'achève par une quadrature.

Pour le troisième cas enfin ($\varpi = 0$), on se sert de la forme (6) de l'intégrale

$$G[y, \gamma, (x)] = 0, \tag{6}$$

où G est de degré m en γ, de degré n en y, et où γ vérifie l'équation

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + P. \tag{6'}$$

On assujettit les coefficients de (6) à trois relations choisies, de façon qu'une seule équation (6) corresponde à l'équation (1). Il suffit alors d'exprimer que les équations (6) et (6′) définissent l'intégrale de l'équation donnée, pour former un système de conditions qui est ou incompatible ou déterminé. S'il est déterminé, l'équation (1) se trouve ramenée par des opérations purement algébriques à une équation de Riccati.

Quand le genre p de (1) n'est pas nul, on peut abréger les calculs en tenant compte de ce fait que les courbes (6) et (1) se correspondent birationnellement. Quand $p = 0$, on ramène l'équation (1) à la forme

$$y' = R[y, (x)] = \frac{P[y, (x)]}{Q[y, (x)]}, \tag{1'}$$

qui est la plus commode pour nos recherches. Il s'agit alors de reconnaître si l'équation (1′) se laisse déduire d'une équation de Riccati

$$y' = My^2 + Ny + P,$$

par une transformation telle que

$$y = \frac{y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1 y}{b_{n-1}y^{n-1} + \ldots + 1}.$$

Quand la chose est possible, elle n'est possible que d'une seule manière, et M, N, P, a_{n-1}, ..., a_1, b_{n-1}, ... sont déterminés par des opérations linéaires.

On simplifie considérablement ces opérations en introduisant la transformation

$$(\alpha) \qquad y = \frac{hy_1 + h_1}{ky_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1),$$

h, h_1, k, k_1 étant des fonctions de x_1. Cette transformation (α) est la plus générale, qui conserve à la fois la forme de l'équation (1′) et le nombre des valeurs de y qui se permutent autour des points critiques mobiles.

Nous faisons de cette transformation une étude détaillée, analogue à celle qu'a faite M. Appell (1) de la transformation

$$y = hy_1 + h_1, \qquad x = \varphi(x_1).$$

Nous disons, par définition, que deux équations (1′) sont *de la même classe*, quand elles se laissent déduire l'une de l'autre par une substitution (α). Si λ désigne le degré de P en y, μ le degré Q, ν le plus grand des nombres λ et $\mu + 2$, nous appelons ce nombre ν *le degré du coefficient différentiel de* (1′). Ce nombre ν n'est pas altéré par une transformation (α), et, si l'équation (1′) est la plus générale de sa classe, $\lambda = \nu$, $\mu = \nu - 2$. Pour que deux équations (1′) soient de la même classe, il faut d'abord que les degrés ν et ν_1 de leurs coefficients diffé-

(1) APPELL, *Invariants de quelques équations différentielles* (*Journal de Mathématiques*; 1889).

rentiels soient égaux; ensuite, que les $(2\nu - 1)$ coefficients des deux équations satisfassent à $(2\nu - 5)$ relations. Ces relations expriment qu'il existe une fonction $x = \varphi(x_1)$ qui transforme l'un dans l'autre les $(2\nu - 4)$ invariants $J(x)$, $J_1(x_1)$ des deux équations, *invariants* relatifs au *groupe* des substitutions (α).

Pour mettre en évidence ces invariants, nous indiquons deux procédés généraux de réduction d'une équation $(1')$ à des formes *canoniques :* le premier, identique à celui qu'emploie M. Appell dans le Mémoire déjà cité, consiste à faire disparaître de l'équation $(1')$ le plus grand nombre possible de termes. Il conduit, par des quadratures, à des invariants qui dépendent de constantes arbitraires. Le second ramène algébriquement l'équation (1) à une forme telle qu'un nombre fini seulement d'équations réduites appartiennent à la même classe. Les nouveaux invariants ainsi introduits dépendent algébriquement des coefficients de $(1')$ et de leurs dérivées. Ils ont l'avantage de ne pas entraîner avec eux de quadratures et de constantes parasites. Les propriétés d'une équation $(1')$, invariantes dans la transformation (α), se traduisent par des relations différentielles dont l'ordre est moins élevé avec les seconds invariants qu'avec les premiers.

C'est ainsi, par exemple, que l'équation

$$y' = \frac{a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0}{b_1 y + b_0}$$

se laisse ramener à une des formes canoniques

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + J(X),$$

équation canonique de première espèce, et

$$\frac{dY}{dX} = K(X)(Y^2 + 3XY + 1),$$

équation canonique de seconde espèce. Les fonctions $J(X)$ et $X(x)$ d'une part, $K(X)$ et $X(x)$ d'autre part sont des invariants.

Il existe toutefois des équations $(1')$ qui ne sont pas susceptibles de se laisser ramener aux formes canoniques de seconde espèce. Ce sont les équations qui admettent un groupe continu de transformations (α). Nous établissons, au sujet de ces équations, ce théorème général :

Soit une équation du premier ordre quelconque

$$y' = f(x, y),$$

où f est une fonction analytique de (x, y). Quand une telle équation admet un groupe continu de substitutions (α), elle se ramène sans quadrature à l'une des formes

$$y' = ay + by^k$$

(k est un nombre constant quelconque) ou

$$y' = \varphi(x)\,\mathrm{R}(y),$$

et, par suite, elle s'intègre à l'aide de deux quadratures. Seule l'équation de Riccati fait exception à ce théorème.

Ces équations mises à part, les formes réduites de seconde espèce se prêtent, aussi bien que les premières, à mettre en évidence des cas d'intégration des équations $(1')$. Ce sont elles surtout qui nous servent à simplifier les calculs qu'exige le problème que nous nous sommes posé. Le principal avantage de ces formes canoniques réside dans cette remarque bien simple : quand la valeur $y = 0$ est racine multiple de Q d'ordre α, les coefficients $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_\alpha$ sont nuls dans l'équation

$$(\beta) \qquad y^n + (\mathrm{A}_{n-1}\gamma + \mathrm{B}_{n-1})y^{n-1} + \ldots + (\mathrm{A}_1\gamma + \mathrm{B}_1) + \gamma = 0,$$

qui définit l'intégrale de $(1')$ avec la condition

$$\gamma' = \mathrm{M}\gamma^2 + \mathrm{N}\gamma + \mathrm{P}.$$

De même, si Q admet une racine y infinie d'ordre β (c'est-à-dire si $\mu = \nu - 2 - \beta$), les coefficients $\mathrm{A}_{n-1}, \mathrm{A}_{n-2}, \ldots, \mathrm{A}_{(n-\alpha-1)}$ sont nuls. Par exemple, quand $y = 0$ est racine de $\mathrm{P} = 0$ d'ordre $(n-1)$, l'équation (β) se réduit à

$$y^n + \mathrm{B}_{n-1}y^{n-1} + \ldots + \mathrm{B}_1 y + \gamma = 0.$$

Si y' a deux infinis d'ordre $(n-1)$, soit $y = 0$, $y = \infty$, il vient

$$y^n + \gamma = 0;$$

l'équation est de la classe de celles qui se déduisent d'une équation de Riccati en γ par le changement de γ en y^n.

Nous appliquons ces remarques en particulier aux exemples $n = 2$, $n = 3$. Pour $n = 2$, on a

$$\nu = 4 \quad \text{ou} \quad \nu = 3;$$

pour $n = 3$, on a

$$\nu = 6,\ 5,\ 4 \text{ ou } 3.$$

Nos calculs mettent en évidence ce fait remarquable qu'on peut démontrer d'une façon générale : *Quand n n'est pas égal précisément à $\frac{\nu}{2}$ (n ne saurait être inférieur à $\frac{\nu}{2}$), on connaît toujours au moins une solution de l'équation de Riccati en γ*. Le problème se résout donc à l'aide de deux quadratures au plus. *Quand n est supérieur à $\nu - 1$, on connaît toujours au moins deux solutions de la même équation*. Le plus fréquemment, on obtient γ sans quadrature : nous apprenons d'ailleurs à distinguer les différents cas où l'on connaît une, deux ou trois intégrales particulières distinctes.

Ces propositions sont susceptibles d'être étendues aux équations (1) de genre p quelconque, ϖ étant toujours supposé nul. L'équation (6) dont nous nous servons se simplifie là encore, quand $y = 0$ ou $y = \infty$ sont des valeurs de y rendant y' infinie. De même, si l'équation donnée, de degré m en y', n'est pas de l'espèce la plus générale qui corresponde à la valeur de n (ce qui arrivera toujours pour n suffisamment grand), des intégrales particulières de (1) se mettront en évidence. Toutefois, les choses se présentent alors d'une façon plus compliquée, à cause de la double espèce des points critiques de l'équation, et je me borne pour le moment à ces indications sur ce sujet.

Dans tout ce qui précède, nous n'avons rien supposé sur la nature des points critiques fixes. Quelles simplifications entraîne l'hypothèse que l'*intégrale $y(x)$ est algébrique dans tout le plan?* Si l'on a reconnu que l'intégrale prend un nombre fini n de valeurs autour des points critiques mobiles, il faut, de plus, que l'intégrale de l'équation à points critiques fixes

$$h\left[r, \frac{dr}{dx}, (x)\right] = 0$$

ait son intégrale algébrique. Si ϖ est supérieur à 1, il suffit que les coefficients de h soient algébriques en x. Quand $\varpi = 1$, le problème revient à reconnaître si l'intégrale d'une équation

$$\frac{dt}{dx} = \mathrm{H}(x)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$$

est algébrique. Quand $\varpi = 0$, le problème se résout algébriquement ou l'équation se ramène à la quadrature

$$\frac{t'}{t} = \mathrm{H}(x),$$

ainsi qu'il ressort des propriétés de l'équation de Riccati.

Si l'on se donne le nombre N des déterminations de l'intégrale algébrique $y(x)$ dans le plan, la question, quand $\varpi = 0$, se résout algébriquement; quand $\varpi = 1$, elle revient encore à reconnaître si une intégrale abélienne de première espèce est la transformée rationnelle d'une intégrale elliptique.

En particulier, on reconnaît algébriquement si l'intégrale $y(x)$ d'une équation (1), de genre $p = 0$, est une fonction algébrique à N valeurs : l'intégrale s'obtient elle-même algébriquement.

Posons-nous maintenant la même question sans nous donner ni n ni N; autrement dit, cherchons à déterminer *si l'intégrale d'une équation* (1) *est algébrique*. En nous servant de la première méthode d'intégration (après avoir effectué sur x, y une transformation homographique), nous montrons qu'on reconnaît algébriquement s'il en est ainsi, dans l'hypothèse $\varpi > 1$; dans l'hypothèse $\varpi = 1$, on ramène l'équation à une équation de la forme

$$\varphi(y)\,dy = \psi(x)\,dx$$

dont l'intégrale doit être algébrique. Mais la méthode ne fournit aucun renseignement sur le cas de $\varpi = 0$. Par conséquent, les équations entières en y', y, x

$$\mathrm{F}(y', y, x) = 0,$$

et de genre 0 en (y', y), lui échappent toujours.

Nous traitons toutefois, au sujet de ces dernières équations, certaines questions particulières. Nous les ramenons d'abord à la forme

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{R}(y, x) = \frac{\mathrm{P}(y, x)}{\mathrm{Q}(y, x)},$$

où P et Q sont deux polynômes en y, x. Dans l'étude qui nous occupe maintenant, y et x jouent un rôle symétrique; on peut leur faire subir une transformation rationnelle quelconque, par exemple une transformation de Cremona. Les points singuliers intrinsèques de l'équation sont alors les points communs aux courbes $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$. Certaines propriétés de ces points suffisent parfois à décider si l'intégrale de l'équation est ou non algébrique; mais le genre de cette intégrale est alors nécessairement nul. Des procédés analogues permettent, dans bien des cas, de calculer les intégrales algébriques de genre donné et, dans tous les cas, les intégrales rationnelles particulières. Mais le problème qui consisterait à calculer les intégrales algébriques sans aucune donnée *a priori* ne semble pas près d'être résolu.

La conclusion générale à laquelle nous arrivons est identique à celle de M. Poincaré dans son étude des équations de M. Fuchs. Les intégrales générales à n valeurs des équations du premier ordre sont des transcendantes qui ne diffèrent pas de celles que définissent les quadratures ou les équations linéaires. C'est là une distinction essentielle entre les équations du premier ordre et celles du second. Pour trouver quelque analogie entre les deux espèces d'équations, il faut se borner à considérer les équations d'ordre supérieur dont l'intégrale y dépend algébriquement des constantes y_0, y'_0, ... Encore ne peut-on fixer (comme dans le cas du premier ordre) une limite supérieure du degré auquel figurent ces constantes dans la relation

$$\Phi[y, y_0, y'_0, \ldots, (x), (x_1)] = 0,$$

qui définit l'intégrale générale. Toutefois, la théorie des transformations rationnelles des surfaces permet d'étendre notre première méthode d'intégration à cette classe d'équations d'ordre supérieur; les résultats que nous obtenons ainsi et que nous énonçons succinctement au cours de ce Mémoire, et la méthode même qui nous y conduit, constituent une extension des travaux déjà cités de M. Picard relatifs aux équations du second ordre.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

1. Soit

$$F[y, y', (x)] = 0 \tag{1}$$

une équation différentielle du premier ordre, algébrique et irréductible en y, y', dont les coefficients $A(x)$ dépendent de x d'une façon quelconque, et

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

une des valeurs de y' qui satisfont à l'équation (1). L'intégrale $y(x)$ d'une telle équation possède certaines propriétés fondamentales que nous allons rappeler :

Si une intégrale $y(x)$ tend vers y_0 quand x tend vers x_0, $f(x_0, y_0)$ étant holomorphe, cette intégrale est elle-même holomorphe dans le voisinage de x_0 et développable par suite en série de Taylor dont on connaît les coefficients. Il n'existe pas d'autre intégrale prenant au point x_0 la valeur y_0, quand x tend vers x_0 sur un chemin de longueur finie.

Quand $f(x, y)$ n'est pas holomorphe en x_0, y_0, cette fonction peut être, ou non, uniforme dans le voisinage de x_0, y_0. Plaçons-nous d'abord dans le premier cas.

Nous admettons que x_0 n'est pas un point singulier X_i des coefficients A de (1).

Si la valeur de $f(x_0, y_0)$ est infinie, il existe toujours une dérivée de $\frac{1}{f}$ par rapport à y d'un certain ordre, $\dfrac{\partial^p\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial y^p}$ par exemple, qui ne s'annule pas pour (x_0, y_0) et le point x est un point critique algébrique de $y(x)$ autour duquel se permutent $(p+1)$ valeurs.

Quand x tendant vers x_0, y tend vers l'infini, on pose $y = \frac{1}{y_1}$, et la fonction y vérifie l'équation

$$\frac{dy_1}{dx} = -y_1^2 f\left(x, \frac{1}{y_1}\right) = f_1(x, y_1).$$

Si $f_1(x, 0)$ est holomorphe, x_0 est un pôle de $y(x)$; si $f_1(x, 0)$ est infinie, x_0 est un point critique algébrique de $y(x)$.

Ce qui précède s'étend au cas où le point x_0 est le point ∞ du plan de la variable complexe x. On pose alors $x = \frac{1}{x_1}$; l'intégrale $y\left(\frac{1}{x_1}\right)$ vérifie l'équation

$$\frac{dy}{dx_1} = -\frac{1}{x_1^2} f\left(\frac{1}{x_1}, y\right) = f_2(x_1, y),$$

et on étudie cette équation dans le voisinage de $x_1 = 0$.

Enfin, $f(x_0, y_0)$ peut être indéterminée, c'est-à-dire qu'au voisinage de x_0, y_0 la fonction f se présente sous la forme

$$\frac{P(x_0, y_0)}{Q(x_0, y_0)},$$

P et Q étant deux fonctions entières de x, y qui s'annulent pour $x = x_0$, $y = y_0$. Ceci ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières X'_i de x et Y'_i de y. Le point $x = X_i$ peut être un point transcendant singulier de $y(x)$. Les travaux de MM. Briot et Bouquet, E. Picard, H. Poincaré permettent d'étudier $y(x)$ dans le voisinage du point X_i.

Passons au cas où $f(x, y)$ n'est pas uniforme dans le voisinage de $x = x_0$, $y = y_0$.

Nous supposons encore que x_0 n'est pas un des points singuliers X_i des coefficients de l'équation (1). Dans ces conditions, un nombre fini d'intégrales y deviennent égales à y_0 en x_0 et admettent ce point x_0 comme point critique algébrique. Il n'y a d'exception que si la quantité

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

est nulle pour $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = f(x_0, y_0)$. En général, les trois relations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

ne sont compatibles que pour des valeurs exceptionnelles X''_i de x. Mais au cas même où ces trois relations sont vérifiées, quel que soit x, quand x et y satisfont à une certaine relation

$$g(x, y) = 0,$$

l'équation admet une intégrale singulière, et le point x est un point algébrique de $y(x)$, sauf pour certaines valeurs particulières X''_i de x, qui satisfont à une troisième condition distincte des relations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Je renvoie pour la démonstration de ces propriétés au Mémoire de MM. Briot et Bouquet (*Journal de l'École Polytechnique*, année 1856).

Nous voyons, en résumé, que si y tend vers y_0 quand x tend vers x_0, le point x_0 est un point algébrique de $y(x)$, et il n'existe qu'un nombre limité d'intégrales y prenant en x_0 la valeur y_0.

Il n'y a d'exception que si x_0 coïncide avec certains points singuliers ξ_i (ou X_i, X'_i, X''_i) du plan des x, points qu'on peut déterminer, *a priori*, quand on connaît l'équation (1). Ces points peuvent être des points singuliers transcendants de l'intégrale $y(x)$, et une infinité d'intégrales y peuvent prendre la valeur y_0.

Mais, dans cette discussion, nous avons admis que, x tendant vers x_0, y tendait vers y_0. Peut-il arriver que y ne tende vers aucune limite? Pour les valeurs singulières ξ_i de x_0, le cas se présente fréquemment, comme le montrent les exemples les plus simples. Ainsi l'intégrale générale $y = Ce^{\frac{1}{x}}$ de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}$$

admet le point $x = 0$ comme point singulier essentiel. Quand x_0 est un pôle ξ de $y' = f$ quel que soit y, on sait même que y est nécessairement indéterminée ou tend vers une des valeurs y_0 qui donnent à $f(x_0, y_0)$ la forme $\frac{0}{0}$. Si donc toutes les intégrales ne prennent pas la même valeur pour $x = \xi$, elles admettent nécessairement ce point comme point singulier transcendant (point essentiel qui peut être aussi critique).

La même chose peut-elle avoir lieu pour une valeur x_0 quelconque de x? Avant de répondre à cette question, voyons un peu ce qui se passe pour les équations d'ordre supérieur

$$F[y, y', y'', \ldots, y^{(p-1)}, y^{(p)}, (x)] = 0.$$

Les propositions que nous venons d'énoncer ont leurs analogues dans la théorie de ces équations, et permettent d'étudier, dans le voisinage de x_0, l'intégrale $y(x)$ qui, pour $x = x_0$, satisfait aux conditions

$$y = y_0, \qquad y' = y'_0, \qquad \ldots, \qquad y^{(p-1)} = y_0^{p-1}.$$

Mais il est facile de former des exemples de telles équations dont l'intégrale $y(x)$ devient indéterminée pour des valeurs x_0 quelconques. Soit l'équation

$$(yy'' - y')^2 + 4yy'^3 = 0;$$

son intégrale générale est

$$y = be^{\frac{1}{x-a}},$$

b et a désignant des constantes. On voit que, pour une valeur quelconque $x = a$, une infinité d'intégrales deviennent indéterminées.

Considérons de même la fonction modulaire

$$y = \varphi^8(x).$$

Cette fonction satisfait à une équation différentielle du troisième ordre algébrique, formée pour la première fois par Jacobi; l'intégrale de cette équation est une fonction uniforme qui admet un cercle entier de points singuliers, et ce cercle varie avec les constantes d'intégration.

Le même fait se produit quand on remplace la fonction modulaire par une fonction fuchsienne quelconque définie seulement à l'intérieur du cercle fondamental. Bien plus, parmi les fonctions fuchsiennes, il en est qui admettent des lignes singulières non analytiques. Ces lignes ont une tangente en chaque point, mais n'ont pas de cercle osculateur. L'intégrale de l'équation du troisième ordre correspondante admet donc de telles lignes singulières, variables avec les constantes d'intégration.

Ces difficultés, mises en lumière par les travaux récents de M. Picard [1] sur les équations d'ordre supérieur, se peuvent-elles rencontrer dans les équations du premier ordre? Il n'est pas évident que la réponse doive être négative, et il convient de le démontrer. Je renvoie pour cette démonstration à un Mémoire [2] *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, et je me borne à énoncer les propriétés suivantes, caractéristiques des équations du premier ordre, et qui servent de point de départ aux méthodes d'intégration que nous exposerons ensuite.

2. En premier lieu, si un point x_0 du plan des x est un point singulier non algébrique de l'intégrale $y(x)$, ce point coïncide nécessairement avec un des points particuliers ξ_i signalés plus haut. L'intégrale ne saurait donc présenter de point essentiel variable avec la constante d'intégration.

Soit maintenant une aire S quelconque du plan des x ne renfermant aucun de ces points ξ_i, et une aire Σ, de contour σ, intérieure à S. Toute intégrale $y(x)$, qui ne prend dans S qu'un nombre fini de valeurs, est continuable au delà de σ et ne présente dans Σ que des pôles ou des points critiques algébriques.

Distinguons maintenant, comme nous l'avons indiqué dans l'Introduction, parmi les points critiques d'une intégrale $y(x)$, ceux qui varient et ceux qui restent fixes quand la constante d'intégration varie. Les points critiques de seconde espèce sont certains points ξ'_i particuliers (qui font partie du groupe des ξ_i). Joignons-les, comme il a été dit, par des coupures, de façon qu'un point du plan des x, qui se meut sans franchir ces coupures, puisse atteindre un point quelconque x, mais ne décrive jamais un circuit fermé autour d'un ou plusieurs points ξ'_i.

---

(1) E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques*, 1889).

(2) *Annales de la Faculté de Toulouse* (janvier 1888, p. 39, 44). Je saisis cette occasion de rectifier une erreur historique qui s'est glissée dans l'Introduction de ce Mémoire (p. 2). Le théorème de M. Mittag-Leffler sur la décomposition en somme d'une fonction ayant dans le plan une infinité de pôles a été publié par son auteur dès l'année 1877, et est antérieur, par conséquent, aux travaux analogues, portant sur la décomposition en sommes ou en produits de fonctions affectées de coupures particulières.

Si, dans ces conditions, l'intégrale y n'acquiert que n valeurs, autrement dit si l'intégrale ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, elle ne saurait présenter ni lignes singulières, ni points essentiels (en dehors des ξ_i).

Quand les coefficients de l'équation (1)

$$F[y', y, (x)] = 0 \tag{1}$$

ne sont définis que dans une portion du plan des x, le même théorème vaut pour cette partie du plan.

Considérons maintenant l'intégrale générale de l'équation (1),

$$y = \varphi(y_0, x),$$

et admettons que cette intégrale générale ne prenne que n valeurs autour des points critiques mobiles. En s'aidant des propositions précédentes, on montre que y est une fonction analytique de y_0, qui, pour une valeur quelconque donnée à x, ne présente dans le plan des y_0 ni ligne singulière, ni point essentiel.

Il est facile, dès lors, de voir que y est une fonction algébrique de y_0. Pour rendre le raisonnement plus clair, admettons d'abord que les coefficients $A_i(x)$ de l'équation (1) soient des fonctions uniformes de x et que l'intégrale $y(x)$ ne prenne que n valeurs dans tout le plan des x.

Donnons à x_0 une valeur quelconque, et faisons varier y_0. Pour chaque couple (x_0, y_0), y' est susceptible de m valeurs, si m est le degré de F en y'. Soit y'_0 l'une de ces valeurs. L'intégrale $y(x)$ qui satisfait aux conditions

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y'(x_0) = y'_0$$

est déterminée sans ambiguïté par l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

$[f(x_0, y_0) = y'_0]$.

Soient, d'autre part, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les n valeurs que prend en x une des intégrales y. Ces n valeurs sont bien déterminées pour chaque intégrale particulière et, par suite, une fonction symétrique de ces n quantités, soit $z_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, n'admet qu'une valeur pour un système (y_0, y'_0) donné. Si l'on veut encore, z est une fonction uniforme du point analytique (y_0, y'_0) de la courbe

$$F_0[y_0, y'_0, (x_0)] = 0,$$

ou encore une fonction à m valeurs de y_0.

Cette remarque s'applique à toutes les fonctions symétriques, notamment aux suivantes :

$$\begin{gathered} z_2 = y_1 y_2 + y_1 y_3 + \ldots + y_{n-1} y_n, \\ z_3 = y_1 y_2 y_3 + \ldots + y_{n-2} y_{n-1} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n = y_1 y_2 y_3 \ldots y_n. \end{gathered}$$

Mais on a

$$y^n - z_1 y^{n-1} + \ldots \pm z_n = 0.$$

Donc y est une fonction de y_0 à mn valeurs. Inversement y_0 est une fonction de y à mn valeurs. Comme d'ailleurs la fonction $y(y_0)$ ne présente que des points singuliers algébriques, la relation entre y et y_0 est une relation algébrique de degré mn par rapport à y et y_0 respectivement

$$G[y, y_0, (x), (x_0)] = 0.$$

Le raisonnement s'étend sans peine au cas où les A_i sont des fonctions quelconques de x, et où y admet des points critiques fixes (en dehors des points critiques mobiles).

Pour le voir, joignons encore les points ξ'_i, ξ_i par des coupures, et faisons varier x dans le plan, en partant d'un point x_0 quelconque avec des valeurs déterminées, pour x_0, des A_i, de y_0 et de y'_0. Si nous ne franchissons aucune coupure, les coefficients de l'équation (1) sont des fonctions de x qui gardent une valeur unique; d'autre part, il existe une intégrale particulière $y(x)$ et une seule qui satisfait aux conditions

$$y(x_0) = y_0, \qquad \frac{dy}{dx}(x_0) = y'_0,$$

en même temps qu'à l'équation (1)

$$F(y, y', x) = 0,$$

où les coefficients A_i gardent cette valeur déterminée. Cette intégrale

$y(x)$, quand x varie dans les conditions indiquées, ne peut prendre en un point x que les n valeurs qui se permutent autour des points critiques mobiles $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Une fonction symétrique quelconque de ces quantités ne prend donc qu'une valeur (quand on laisse x constant) pour un système quelconque (y_0, y'_0). Autrement dit, $z_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ par exemple est une fonction uniforme du point analytique (y_0, y'_0) de la courbe

$$F[y_0, y'_0, (x_0)] = 0.$$

Ce point établi, le raisonnement s'achève comme ci-dessus.

Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que la relation

$$(1) \qquad F[y, y'_0, (x)] = 0$$

était algébrique en y et y'. La démonstration des propriétés énumérées exige seulement, comme on pourra s'en convaincre en se reportant au Mémoire déjà cité, que y' soit une fonction analytique de y à m branches qui, pour une valeur quelconque de x, ne présente pas dans le plan des y de ligne singulière.

Soit donc une telle équation (1). Son intégrale, si elle ne prend autour des points critiques mobiles que n valeurs, doit vérifier une équation

$$(3) \qquad G[y, y_0, (x), (x_0)] = 0$$

de degré mn en y et y_0, et dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x et de x_0. Si on élimine y_0 entre (3) et l'équation

$$\frac{\partial G}{\partial y} y' + \frac{\partial G}{\partial x} = 0,$$

le résultat est algébrique en y et y'. Nous sommes ainsi conduit à la conclusion suivante :

Désignons par $f[(x), y]$ une fonction de y à m déterminations qui ne présente pas de ligne singulière pour $x = x_0$ (x_0 étant quelconque). Quand l'équation

$$y' = f[(x), y]$$

a pour intégrale générale une fonction qui ne prend que n valeurs autour *des points critiques mobiles, f est nécessairement une fonction algebrique de y.*

Les seules équations que nous considérerons dans ce Mémoire seront donc des équations algébriques en y' et y, où x figurera d'une façon quelconque.

3. Études maintenant avec plus de détail la forme de l'intégrale générale de l'équation

$$(1) \qquad F[y, y', (x)] = 0$$

par rapport aux constantes.

Désignons par n le nombre des valeurs de $y, y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui se permutent effectivement autour des points critiques mobiles. Nous avons dit qu'une fonction symétrique quelconque z de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ était une fonction uniforme de (y_0, y'_0), et comme d'autre part z dépend algébriquement de y_0, on a

$$z = R[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$

R désignant une fraction rationnelle en y_0, y'_0, dont les coefficients dépendent de x_0 et de x d'une façon quelconque. Il en résulte que l'intégrale y peut s'écrire

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y^n + R_{n-1}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]y^{n-1} \\ \quad + R_{n-2}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]y^{n-2} + \ldots + R_0[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = 0. \end{array} \right.$$

Les constantes y_0, y'_0 sont assujetties à la condition

$$(5) \qquad F[y_0, y'_0, (x_0)] = 0;$$

x_0 est choisi arbitrairement, par exemple $x_0 = 0$. Inversement, quand l'intégrale de (1) vérifie une équation telle que (4), elle prend au plus n valeurs autour des points critiques mobiles.

Quand n est le nombre des branches de y qui se permutent effectivement autour des points critiques mobiles, l'intégrale ne peut se mettre sous une forme telle que (4), où n aurait une valeur inférieure. De plus, il n'existe pas deux équations (4) distinctes. Autrement dit, soit

$$(4') \qquad y^n + r_{n-1}[C, (x)]y^{n-1} + \ldots + r_0[C, (x)] = 0$$

une seconde relation que vérifie l'intégrale. Dans (4'), r_i désigne une fonction de x dont les points critiques ne dépendent pas de la constante C. Pour une intégrale quelconque y, on a

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = -\mathrm{R}_{n-1}[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = -r_{n-1}[\mathrm{C}_0, (x)],$$

et de même pour R_i et r_i, c'est-à-dire qu'en faisant correspondre convenablement C à y_0, y'_0, R_i doit coïncider avec r_i.

Il résulte de là que si on forme, en éliminant y_0, y'_0, les relations algébriques qui unissent $\mathrm{R}_i, \mathrm{R}_j$ d'une part, $\mathrm{R}_i, \dfrac{d\mathrm{R}_i}{dx}$ d'autre part, le système d'équations ainsi obtenues est *unique*.

Il est clair que ceci cesse d'être vrai quand n n'est pas le nombre des valeurs de y qui se permutent réellement autour des points critiques mobiles (mais un multiple de ce nombre).

Si nous éliminons y'_0 entre (4) et (5), le résultant est une équation de degré mn en y_0 et y respectivement

$$\mathrm{G}[y, y_0, (x), (x_0)] = 0.$$

Cette équation ne change pas quand on remplace à la fois y et x par y_0 et x_0, y_0 et x_0 par y et x. Elle est exactement de degré mn et irréductible si x et x_0 sont quelconques; autrement, l'intégrale satisferait à une relation

$$g[y, y_0, (x), (x_0)] = 0$$

de degré ν en y_0 et en y, ν étant inférieur à mn : ν doit être en tous cas un multiple de n, $\nu = m'n$, et pour chaque valeur de y_0, y prend $m'n$ valeurs distinctes. Mais l'équation irréductible (1) admet m racines y'_0 quand y_0 est donné, et à chaque groupe (y_0, y'_0) correspond (si y_0, x_0 sont quelconques) une intégrale distincte à n valeurs, donc mn valeurs distinctes de y correspondent à y_0 : m' ne peut être inférieur à m.

Il est clair d'ailleurs que de l'équation (4) on peut déduire une infinité d'équations de même forme, mais dont le degré en y est un multiple de n. A de telles équations les remarques précédentes ne s'appliqueraient pas.

Revenons à l'égalité (4) elle-même. Nous pouvons l'écrire aussi bien

$$(6) \qquad y_0^n + \mathrm{R}_{n-1}[y, y', (x)]y_0^{n-1} + \ldots + \mathrm{R}_0[y, y', (x)] = 0.$$

Sous cette forme, on voit que, quand on remplace dans $R_i[y, y', (x)]$ y par une intégrale particulière de (1) et y' par sa dérivée, R_i devient une constante, à savoir (au signe près) la somme des produits i à i des valeurs en x_0 de l'intégrale considérée.

L'intégrale de (1) se laisse donc définir par l'égalité

$$(7)\qquad R_i[y, y', (x)(x_0)] = R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x'_0)] = C_i,$$

C_i désignant une constante, et y' la fonction de y et x déterminée par l'équation

$$(1)\qquad F[y, y', (x)] = 0.$$

Une telle forme de l'intégrale a été indiquée depuis longtemps par M. Fuchs dans le cas où l'intégrale de (1) est algébrique. Mais je veux insister surtout sur les rapports des diverses relations (7) qui peuvent représenter l'intégrale.

Il est clair que de l'équation (7) on en peut tirer une infinité d'autres, en posant

$$r = \varphi(R_i),$$

φ étant rationnel en R. Plus généralement

$$r = \varphi(R_1, R_2, \ldots, R_n)$$

jouit de la même propriété.

Remarquons encore que l'équation (7), ayant lieu quel que soit x_0, peut se différentier par rapport à x_0 et donne

$$(8)\qquad \frac{dR_i}{dx_0}[y, y', (x), (x_0)] = \frac{dC_i}{dx_0} = C'_i.$$

Si nous posons

$$(9)\qquad \begin{cases} r = \varphi\left(R_1, R_2, \ldots, R_n, \dfrac{dR_1}{dx_0}, \dfrac{dR_2}{dx_0}, \ldots, \dfrac{dR_n}{dx_0}\right) \\ c = \varphi(C_1, C_2, \ldots, C_n, C'_1, \ldots, C'_n), \end{cases}$$

l'intégrale de (1) se laisse définir en égalant r à c.

Inversement, je dis que toute fonction $r(y, y', x)$, rationnelle en y, y', qui, égalée à une constante c, définit l'intégrale de (1), est de la forme (9). Il me suffit de prouver que la constante c s'exprime rationnellement en fonction des constantes $C_1, \ldots, C_n, C'_1, \ldots, C'_n$.

En effet, admettons que, pour les valeurs $C_1, C_2, \ldots, C'_1, \ldots, C'_n$, les égalités

$$\left.\begin{array}{llll} R_1 = C_1, & R_2 = C_2, & \ldots, & R_n = C_n \\ \dfrac{dR_1}{dx_0} = C'_1, & \dfrac{dR_2}{dx_0} = C'_2, & \ldots, & \dfrac{dR_n}{dx_0} = C'_n \end{array}\right\} F[y, y', (x)] = 0$$

soient compatibles quel que soit x. Elles ne peuvent définir qu'une seule intégrale particulière de (1). En effet, on a d'abord

$$y_0^n + C_{n-1} y_0^{n-1} + C_{n-2} y_0^{n-2} + \ldots + C_0 = 0$$

ce qui détermine les n valeurs de y en x_0; ensuite

$$n y_0^{n-1} y'_0 + (n+1) C_{n-1} y_0^{n-2} y'_0 + y_0^{n-1} C'_{n-1} + \ldots + C'_0 = 0,$$

ce qui détermine la valeur de y' en x_0 pour chaque valeur de x_0.

A un système de constantes C_i, C'_j compatibles correspond donc *une seule intégrale particulière*, par suite une seule valeur de c. On en conclut que r est de la forme (9).

Nous donnons à ces fonctions $c = r[y, y', (x)]$, rationnelles en y, y', qui égalées à une constante définissent l'intégrale, le nom de *constantes intégrales*. Soient deux constantes intégrales

$$(10) \qquad \left\{\begin{array}{l} c = r\,[y, y', (x)], \\ c_1 = r_1[y, y', (x)]; \end{array}\right.$$

ces deux constantes sont liées par une relation algébrique. Pour la former, il suffit d'éliminer y, y' entre les équations (1) et (10) : le résultant est indépendant de x. D'après la théorie des irrationnelles algébriques, on peut choisir dans le cas actuel ces deux constantes c, c_1 de façon qu'une constante intégrale quelconque s'exprime rationnellement en fonction de c, c_1.

Il suffit en effet pour cela que les C_i, C_j s'expriment rationnellement en fonction de c, c_1. Les quantités C_i, C'_j sont liées algébriquement à l'une d'entre elles : ce sont, si l'on veut, les coordonnées d'une courbe de l'espace à $2n$ dimensions. Or on peut faire toujours correspondre birationnellement à une telle courbe une courbe de l'espace à deux dimensions. Soit, par exemple, C_i une des constantes en fonction desquelles s'expriment toutes les autres; posons

$$\gamma = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_n C_n + \mu_1 C'_1 + \ldots + \mu_n C'_n,$$

les λ, μ désignant des nombres quelconques. A chaque valeur de C_i, correspondent k systèmes distincts des C, C′, et à ces k systèmes k valeurs distinctes de γ, si les λ, μ ne sont pas choisis d'une façon particulière. Il en résulte que les C, C′ s'expriment rationnellement en fonction de C_i et de γ, liés par une certaine relation

$$H(C_i, \gamma) = 0.$$

Il est donc toujours possible de choisir deux constantes intégrales c et c_1, de façon que toutes les autres s'expriment rationnellement en fonction de c, c_1. Ces deux constantes satisfont à une certaine équation

$$H(c, c_1) = 0 \tag{11}$$

que nous appelons relation entre les constantes intégrales.

Si $R[y, y', (x)] = C$ est une constante intégrale, on a

$$C = \varphi(c, c_1),$$
$$R = \varphi(r, r_1).$$

Si deux autres constantes intégrales γ, γ_1 jouissent de la même propriété, γ et γ_1 sont fonctions rationnelles de c, c_1, et réciproquement. Il existe donc une correspondance birationnelle entre la courbe (11) et la courbe

$$H'(\gamma, \gamma_1) = 0.$$

Inversement, quand ces deux courbes ont mêmes modules, γ et γ_1 peuvent remplacer C et C_1.

La relation entre les constantes intégrales n'est donc définie qu'à une transformation birationnelle près.

On voit qu'il existe une correspondance rationnelle

$$\left\{ \begin{aligned} c &= r\,[y, y', (x)], \\ c_1 &= r_1[y, y', (x)] \end{aligned} \right. \tag{12}$$

entre les points c, c_1 de la courbe (11) et les points y, y' de la courbe (1), et cette correspondance définit l'intégrale de (1).

Nous avons appelé genre de l'équation différentielle le genre de l'équation (1) où on laisse x constant. Ce genre p, comme nous le démontrerons dans le prochain Chapitre, est égal ou supérieur au genre ϖ de l'équation

$$H(c, c_1) = 0. \tag{11}$$

Si la substitution (12) est birationnelle, l'équation (1) a ses points critiques fixes. Réciproquement, si l'équation a ses points critiques fixes, on a

$$y = R[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$
$$y' = \frac{dR}{dx}[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$

avec

$$y_0 = R[y, y', (x), (x_0)],$$
$$y'_0 = \frac{dR}{dx_0}[y, y', (x), (x_0)];$$

la transformation est birationnelle, et l'on peut regarder l'équation

$$F[y_0, y'_0, (x_0)] = 0,$$

dont les modules ne dépendent pas de x_0, comme la relation entre les constantes intégrales.

Quand n est quelconque, la transformation rationnelle est d'ordre n, c'est-à-dire que n points y, y' de la courbe (1) correspondent à un point c, c_1 de (11).

On voit comment la théorie des transformations rationnelles des courbes algébriques intervient ici. Nous consacrerons le prochain Chapitre à leur étude. Auparavant, il convient d'ajouter quelques remarques au sujet du choix des constantes c, c_1.

Si nous posons

$$\rho = a_0 R_0 + a_1 R_1 + \ldots + a_{n-1} R_{n-1},$$
$$\gamma = a_0 C_0 + a_1 C_1 + \ldots + a_{n-1} C_{n-1},$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ étant des fonctions quelconques de x_0, je dis que nous pouvons prendre comme constantes c, c_1 les constantes γ, $\frac{d\gamma}{dx_0}$.

Nous avons, en effet,

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{dx_0} = a_0 C'_0 + a_1 C'_1 + \ldots + a_{n-1} C'_{n-1}$$
$$+ \frac{da_0}{dx_0} C_0 + \frac{da_1}{dx_0} C_1 + \ldots + \frac{da_{n-1}}{dx_0} C_{n-1}.$$

Pour une valeur x_0, nous pouvons, une fois les valeurs des a_i déterminées, nous donner encore celles des $\frac{da_i}{dx_0}$. Soient

$$C'_0, \quad C'_1, \quad \ldots, \quad C'_{(n-1)}, \quad C_0, \quad \ldots, \quad C_{(n-1)}$$

et

$$C'_{0,1}, \quad C'_{1,1}, \quad \ldots, \quad C'_{(n-1),1}, \quad C_{0,1}, \quad \ldots, \quad C_{(n-1),1}$$

deux systèmes distincts de valeurs C, C′ correspondant à une valeur de γ. Les $\frac{da_i}{dx_0}$ étant laissés quelconques, ces deux systèmes ne donnent pas (pour x_0) la même valeur à γ', à moins que les n différences

$$C_0 - C_{0,1}, \quad C_1 - C_{1,1}, \quad \ldots, \quad C_{(n-1)} - C_{(n-1),1}$$

ne soient nulles. Il résulte de là que les n constantes C s'expriment rationnellement à l'aide de γ, γ'. Mais il faut, de plus, qu'il en soit de même pour les C'_i : c'est ce qui a lieu effectivement, car on a

$$C_i = \varphi[\gamma, \gamma', (x_0)]$$

avec

$$h[\gamma, \gamma', (x_0)] = 0, \qquad \gamma' = \frac{d\gamma}{dx_0};$$

donc

$$C'_i = \frac{dC_i}{dx_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\gamma' + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma'}\frac{\partial\gamma'}{\partial x_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_0} = \psi[\gamma, \gamma', (x_0)],$$

si l'on tient compte de la relation

$$\frac{\partial h}{\partial\gamma}\gamma' + \frac{\partial h}{\partial\gamma'}\frac{d\gamma'}{dx_0} + \frac{\partial h}{\partial x_0} = 0.$$

Nous pouvons donc choisir comme constantes intégrales c, c_1 les constantes γ et γ'.

Si $C = R[y, y', (x)]$ est une constante intégrale, on a

$$C = \varphi[\gamma, \gamma', (x_0)],$$
$$R = \varphi\left[\rho, \frac{d\rho}{dx_0}, (x_0)\right].$$

La relation

$$h[\gamma, \gamma', (x_0)] = 0$$

est une relation entre les constantes intégrales quel que soit x_0; ses modules sont indépendants de x_0.

Il est facile d'ailleurs de s'en rendre compte ainsi; si l'on pose

$$r = a_0(x) R_0[y_0, y'_0, (x_0), (x)] + \ldots + a_{n-1}(x) R_{n-1}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]$$

et

$$\frac{dr}{dx} = r',$$

la relation

$$h[r, r', (x)] = 0$$

est l'équation différentielle qui lie r à x, équation qui a ses points critiques fixes et, par suite, ses modules constants.

De plus, comme on a

$$C_i = \varphi[\gamma, \gamma', (x_0)],$$

ou encore

$$R_i[y, y', (x), (x_0)] = \varphi\left[\rho, \frac{d\rho}{dx_0}, (x_0)\right],$$

on a aussi

$$R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = \varphi[r, r', (x)].$$

Enfin, r et r' peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de r_0, r'_0 qui coïncident, ainsi que ρ_0, ρ'_0, avec γ, γ', et sont liés par la relation

$$h(r_0, r'_0, x_0) = 0,$$

et réciproquement; donc

$$R_i[y_0, y'_0, (x_0), x] = \psi[r_0, r'_0, (x_0), (x)]$$

et, de même,

$$R_i[y, y', (x), (x_0)] = \psi[r, r', (x), (x_0)].$$

Ces résultats peuvent se résumer ainsi :

Si l'on pose

$$r[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = a_0(x) R_0[y_0, y'_0, (x_0), (x)] + \dots \\ + a_{n-1}(x) R_{n-1}[y_0, y'_0, (x_0), (x)],$$

r vérifie une équation différentielle

$$h[r, r', (x)] = 0,$$

dont les points critiques sont fixes. Si l'on pose de même

$$r^1 = r[y, y', (x), (x_0)],$$

la fonction r_1, quand on remplace y par une intégrale de (1), vérifie l'équation

$$h\left[r^1, \frac{dr^1}{dx}, (x)\right] = 0.$$

Toute constante intégrale $R[y, y', (x)] = C$ peut s'exprimer rationnellement en fonction de r^1 et de $\frac{dr^1}{dx}$:

$$R[y, y', (x)] = \varphi\left[\rho, \frac{d\rho}{dx_0}, (x_0)\right] = \psi\left[r^1, \frac{dr^1}{dx}, (x)\right],$$

$$C = \varphi\left[\gamma, \frac{d\gamma}{dx_0}, (x_0)\right] = \psi\left[r, \frac{dr}{dx}, (x)\right].$$

Remarquons que l'intégrale de (1) vérifie aussi bien la relation

$$r[y, y', (x), (x)] = r[y_0, y'_0, (x_0), (x)]$$

que la relation

$$r[y, y', (x), (x_0)] = r[y_0, y'_0, (x_0), (x_0)].$$

On voit ainsi que l'intégrale se laisse mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$R[y', y, (x)] = A(x, C),$$

A désignant une fonction de x dont les points critiques sont indépendants de la constante C qui y figure. On démontre, comme précédemment (*voir* p. 40), que toutes les *fonctions intégrales* $R = A(x, C)$ s'obtiennent par les formules

$$A(x, C) = \varphi[C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, C'_0, \ldots, C'_{n-1}, (x), (x_0)]$$

et

$$R[y, y', (x)] = \varphi[R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}, R'_0, \ldots, R'_{n-1}, (x), (x_0)].$$

On a, par suite,

$$R[y, y', (x)] = \psi\left[\rho, \frac{d\rho}{dx_0}, (x), (x_0)\right]$$

et aussi

$$R[y, y', (x)] = \psi_1\left[r^1, \frac{dr^1}{dx}, (x)\right], \qquad C = \psi_1\left[r, \frac{dr}{dx}, (x)\right].$$

D'une manière générale, *on peut choisir deux fonctions (ou constantes) intégrales*

$$R[y, y', (x)] = A(x, C), \qquad R_1[y, y', (x)] = B(x, C),$$

liées par une relation

$$k[A, B, (x)] = 0,$$

de telle façon que toutes les autres fonctions intégrales (notamment les constantes) s'expriment rationnellement à l'aide des deux premières. Il est loisible de faire

$$R = r^1, \qquad R_1 = \frac{dr^1}{dx},$$

ou encore

$$R = \rho, \qquad R_1 = \frac{d\rho}{dx_0}.$$

Toutes les relations $k = 0$ *ont leurs modules égaux et indépendants de* x.

On remarquera dans le raisonnement précédent l'importance de ce fait que y_0, y'_0, x_0 et y, y', x jouent un rôle symétrique.

Toute relation $K[A^1, B^1, (x)] = 0$ entre deux fonctions (ou constantes) intégrales quelconques se transforme rationnellement dans la relation $k = 0$, et son genre, comme nous le verrons, est au plus égal à ϖ.

4. Indiquons enfin une forme nouvelle de l'intégrale générale de (1).

Si l'on élimine y' entre les deux équations

$$R[y, y', (x)] = C$$

et

(1) $$F[y, y', (x)] = 0,$$

le résultant

(12) $$L[y, C, (x)] = 0$$

est de degré m en C. Son degré en y est un certain multiple de n. Il existe entre (1) et (12) une correspondance birationnelle

$$C = R[y, y', (x)],$$

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial L}{\partial x}}{\dfrac{\partial L}{\partial y}}.$$

Inversement, chaque fois qu'on a mis l'intégrale de (1) sous la forme

$$L[y, C, (x)] = 0,$$

C entrant dans L au degré m, C s'exprime rationnellement en y, y'; c'est, par suite, une constante intégrale.

En effet, nous avons [1]

$$\frac{\partial L}{\partial y} y' + \frac{\partial L}{\partial x} = 0;$$

pour chaque valeur de y, C prend m valeurs; les m valeurs de y' correspondantes sont distinctes quand y et x sont quelconques. Sinon l'équation en y', de degré m, serait décomposable. Donc à chaque couple y, y' correspond une seule valeur de C.

Si, au lieu d'une constante intégrale, on considère une fonction intégrale, on voit que l'intégrale de (1) satisfait à une infinité d'équations

(12') $$L_1[y, \gamma, (x)] = 0,$$

---

[1] Cette égalité nous montre que l'intégrale de (1) ne saurait vérifier une équation telle que (12), où C entrerait à un degré μ inférieur à m; car l'équation (1) serait alors de degré μ en y'.

de degré m au plus en γ, où γ désigne une fonction qui vérifie une relation différentielle

$$K[\gamma, \gamma', (x)] = 0$$

dont les points critiques sont fixes.

Mais inversement, quand l'intégrale est mise sous une telle forme, γ n'est pas nécessairement une fonction intégrale. Si cette condition est remplie,

$$\gamma = \rho[y, y', (x)],$$

et l'équation (12′) se transforme rationnellement en (1), mais la réciproque n'est pas vraie en général [1].

Il me reste à signaler le cas particulier où le genre ϖ de la relation entre les fonctions et constantes intégrales est nul.

Quand $\varpi = 0$, toutes les fonctions intégrales sont fonctions rationnelles d'une certaine d'entre elles. Soient, en effet, $A(x, C)$, $B(x, C)$ deux fonctions intégrales liées par la relation

$$K[A, B, (x)] = 0.$$

---

[1] Il peut arriver que l'intégrale de (1) vérifie une équation telle que (12′), où γ figure à un degré μ inférieur à m : par exemple, l'équation (12′),

$$\gamma^\nu = \gamma,$$

qui est de degré 1 en γ, m étant quelconque. On forme aussi aisément des équations dont l'intégrale se laisse mettre sous une forme telle (12′), sans que γ s'exprime rationnellement en y, y', et soit, par suite, une fonction intégrale. Soit l'équation

$$y'^2(1 + x^2) - 4y'yx + 4y(y - 1) = 0;$$

son intégrale générale $y = \dfrac{(2x + C)^2}{1 + C^2}$ vérifie la relation

$$(12') \qquad y - \gamma^2 = 0,$$

de degré $\mu = m = 2$ en γ, avec la condition

$$\gamma'(1 + x^2) - 2\gamma'\gamma x + \gamma^2 - 1 = 0,$$

ou encore

$$\gamma = \frac{2x + C}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

D'autre part, $\gamma = y^{\frac{1}{2}}$ ne s'exprime pas rationnellement, comme on le voit aussitôt, en fonction de y et de y'.

Le genre de K étant nul, on pose

$$A = \varphi[\gamma, (x)], \qquad B = \psi[\gamma, (x)],$$

avec

$$\gamma = \chi[A, B, (x)],$$

φ, ψ, χ étant rationnels respectivement en γ, A, B. Toutes les fonctions et constantes intégrales s'expriment rationnellement à l'aide de γ, notamment $\frac{d\gamma}{dx}$:

$$\frac{d\gamma}{dx} = \varphi[\gamma, (x)],$$

et, comme cette équation doit avoir ses points critiques fixes, elle se réduit, comme on sait, à une équation de Riccati. Cette fonction intégrale γ n'est déterminée qu'à une transformation près

$$\gamma = \frac{a\gamma_1 + b}{a_1\gamma_1 + b_1},$$

a, b, a_1, b_1 étant des fonctions de x.

En particulier, l'équation

$$h[r, r', (x)] = 0,$$

qui est une des équations K = 0, se ramène à une équation de Riccati. Les coefficients $R_i[y_0, y'_0, (x_0), x]$, dans l'équation

$$(13) \qquad y^n + R_1[y_0, y'_0, (x_0), (x)]\, y^{n-1} + \ldots + R_n[y_0, y'_0, (x_0), (x)] = 0,$$

sont fonctions rationnelles d'une constante C, qui entre au degré m. En effet,

$$C = r[y_0, y'_0, (x), (x_0)]$$

et, pour chaque valeur de y_0, prend au plus m valeurs distinctes. Elle n'en peut d'ailleurs prendre moins, sinon l'équation (13) serait de degré moindre que m en C, et l'équation (1) ne serait pas une équation irréductible de degré m en y'.

Donc, quand $\varpi = 0$, l'intégrale se laisse mettre sous la forme

$$l[y, C, (x)] = 0,$$

y entrant au degré n, C au degré m dans cette relation.

Plus généralement, l'intégrale peut se définir par une égalité

$$(14) \qquad l_1[y, \gamma, (x)] = 0,$$

de degré n en y, de degré m en γ, avec la condition

$$\gamma' = M\gamma^2 + N\gamma + \Phi.$$

Toutes les équations analogues à (14), de degré n en y, de degré m en γ,

$$(14') \qquad l'_1[y, \gamma_1, (x)] = 0,$$

avec la condition

$$\frac{d\gamma_1}{dx} = M_1\gamma_1^2 + N_1\gamma_1 + P_1,$$

se déduisent de (14) par le changement de γ en $\frac{a\gamma_1 + b}{a_1\gamma_1 + b_1}$. En effet, $\gamma_1 = \frac{\lambda C + \mu}{\lambda_1 C + \mu_1}$, et C, qui entre au degré m dans (14'), est une constante intégrale; donc γ_1 est une fonction intégrale et s'exprime rationnellement en γ; de même, γ s'exprime rationnellement en fonction des $R_i(x, \gamma_1)$, $\frac{dR_i}{dx}(x, \gamma_1) = \frac{\partial R_i}{\partial x} + \frac{\partial R_i}{\partial \gamma}\gamma'_1$; donc, enfin, γ s'exprime rationnellement en γ_1 :

$$\gamma = \frac{a\gamma_1 + b}{a_1\gamma_1 + b_1}.$$

Inversement, quand l'intégrale d'une équation (1) se laisse mettre sous une forme telle que (14), le nombre ϖ est nul (1); car les $R_i[y_0, y_0, (x_0), (x)]$, $\frac{dR_i}{dx}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]$ sont donnés rationnellement en fonction de γ, et la relation entre les fonctions intégrales définit une courbe unicursale.

---

(1) Cette proposition subsiste si l'équation (14) est d'un degré quelconque μ en γ. Les raisonnements employés montrent, de plus, qu'une telle équation se déduit d'une équation (14) de degré m en γ_1 par la transformation

$$\gamma_1 = \varphi[\gamma, (x)],$$

φ étant rationnel en γ. Si q désigne le degré de φ en γ, on a

$$\mu = qm.$$

Enfin il existe, entre (14) et (1), une correspondance birationnelle, car

$$\gamma = \rho[y, y', (x)], \qquad y' = -\frac{1}{\frac{\partial l_1}{\partial y}}\left[\frac{\partial l_1}{\partial \gamma}\gamma' + \frac{\partial l_1}{\partial x}\right],$$

et, comme γ' est rationnel en γ,

$$y' = \rho_1[\gamma, y, (x)].$$

Passons au cas où ϖ serait égal à 1. La relation entre les constantes ou les fonctions intégrales peut être ramenée à la forme

$$B^2 = (1 - A^2)(1 - k^2 A^2),$$

le module k^2 étant constant, et toutes les fonctions intégrales s'expriment rationnellement en A, B, notamment $\frac{dA}{dx}$,

$$\frac{dA}{dx} = M[A, (x)] + N[A, (x)]\sqrt{(1 - A^2)(1 - k^2 A^2)}.$$

Si N est nul, M doit être un polynôme du second degré, et, de plus, $B = \sqrt{(1 - A)(1 - k^2 A^2)}$ doit avoir aussi ses points critiques fixes, ce qui exige que $A = \pm 1$, $A = \pm k$ vérifient l'équation de Riccati

$$\frac{dA}{dx} = M[A, (x)].$$

On en conclut

$$M \equiv 0, \qquad A = C, \qquad B = \sqrt{(1 - C^2)(1 - k^2 C^2)}.$$

Si N n'est pas nul, les conditions de M. Fuchs montrent que

$$\frac{dA}{dx} = N(x)\sqrt{(1 - A^2)(1 - k^2 A^2)},$$
$$A = \operatorname{sn}[J(x) + C].$$

L'intégrale de (1) se laisse donc mettre sous la forme

$$(15) \quad \begin{cases} y^n + \{r_{n-1}[C, (x)] + c\rho_{n-1}[C, (x)]\}y^{n-1} + \ldots \\ \quad + r_0[C, (x)] + c\rho_0[C, (x)] \equiv A[y, C, (x)] + cB[y, C, (x)] = 0, \end{cases}$$

C étant une constante, avec la condition

$$c = \sqrt{(1 - C^2)(1 - k^2 C^2)}.$$

On peut lui donner aussi une forme identique où C désigne une fonction de x qui satisfait à une équation

$$\frac{dC}{dx} = N(x)\sqrt{(1-C^2)(1-k^2C^2)}.$$

De plus, si l'on élimine c, le résultant en y et C est de degré $2n$ en y, de degré m en C,

$$l[y, C, (x)] = 0. \tag{15'}$$

Il existe entre $l = 0$ et $F = 0$ une correspondance rationnelle

$$C = R[y, y', (x)], \qquad y' = -\frac{1}{\frac{\partial l}{\partial y}}\left(\frac{\partial l}{\partial C}C' + \frac{\partial l}{\partial x}\right).$$

Deux valeurs de y' correspondent à un système C et y, si C n'est pas une constante.

Toute équation analogue à (15), telle que l'équation (15') correspondante soit de degré m en C, se déduit de l'équation (15) par la transformation

$$C_1 = \frac{C\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)} + a\sqrt{(1-C^2)(1-k^2C^2)}}{1-k^2a^2C^2} \tag{16}$$

où a est une fonction de x.

En effet, soit une équation analogue à (15) en y, C_1, c_1, où C_1 satisfait à la relation

$$\frac{dC_1}{dx} = N_1(x)\sqrt{(1-C_1^2)(1-k_1^2C_1^2} = N_1(x)c_1.$$

En différentiant l'équation (15), on voit que y' est de la forme

$$\alpha[y, C_1, (x)] + c_2\beta[y, C_1(x)];$$

si l'on élimine c_1, y' est exprimé rationnellement en fonction de y, C_1,

$$y' = \rho[y, C_1, (x)].$$

Si l'on observe, d'autre part, qu'à chaque valeur de y correspondent (pour x quelconque) m valeurs de C_1 et m valeurs distinctes de y', on voit que C_1 est une fonction intégrale

$$C_1 = R[y, y', (x)].$$

Il en est de même, par suite, de c_1 :

$$c_1 = \frac{1}{N_1(x)} \frac{dC_1}{dx},$$

et C_1, c_1 s'expriment rationnellement en C, c. Pour les mêmes raisons, c et C s'expriment rationnellement en c_1, C_1. Il y a donc correspondance birationnelle entre (c, C) et (c_1, C_1); de là résulte l'égalité (16).

Ceci suppose toutefois $N_1(x) \neq 0$; si N_1 est nul, C_1 est une constante intégrale, par suite c_1, d'après l'équation

$$A_1[y, C_1(x)] + c_1 B_1[y, C_1, (x)] = 0,$$

et la proposition subsiste, à moins que les égalités $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ ne définissent toutes deux l'intégrale de (1); mais, dans ce cas, ϖ serait nul, ce qui est impossible puisque la relation entre C et c est de genre 1.

Ajoutons que, toutes les fois que l'intégrale de (1) vérifie une équation identique à l'équation (15), le genre ϖ est égal à l'unité [1]; car les $R_i[y_0, y'_0, (x_0), (x)]$, $\frac{dR_i}{dx}[y_0, y'_0, (x_0), (x)]$ s'expriment rationnellement en c et C, et réciproquement. Il y aurait toutefois exception dans le cas indiqué où, C étant une constante, $A = 0$ et $B = 0$ définiraient l'intégrale de (1). Le genre ϖ serait alors égal à zéro; le radical $\sqrt{(1 - C^2)(1 - k^2C^2)}$ ne figurerait qu'artificiellement.

Tout ce qui précède suppose absolument que n soit égal au nombre

---

(1) Cette remarque est encore vraie quand l'intégrale de (1) vérifie une équation de la forme (15), même si le degré μ en C de l'équation (15') n'est pas égal à m; ϖ est égal à 1, à moins que cette équation (15) puisse se déduire d'une équation (14) par la transformation

$$y = \varphi[C, (x)] + \sqrt{(1 - C^2)(1 - k^2C^2)}\,\psi[C, (x)],$$

où φ et ψ sont rationnels en C; ϖ est nul dans ce dernier cas.

des valeurs de y qui se permutent effectivement autour des points critiques mobiles de l'intégrale.

5. Avant de nous servir de ces généralités pour chercher à intégrer dans certains cas l'équation (1), j'ajouterai un mot sur la différence essentielle qui sépare les équations du premier ordre des équations d'ordre supérieur.

Étant donnée une équation du premier ordre, nous connaissons à l'avance les points du plan des x qui peuvent être des points singuliers transcendants de son intégrale. De plus, quand le point x_0 est un point critique algébrique de l'intégrale $y(x)$ égale à y_0 pour $x = x_0$, nous savons que (y_0, x_0) vérifient l'une des relations

$$P(y, x) = 0, \qquad Q(y, x) = 0$$

qui expriment que y' est infini ou mal déterminé.

Rien de pareil ne subsiste pour les équations d'ordre supérieur. Une intégrale quelconque, uniforme ou à n valeurs dans une certaine portion du plan, peut, nous l'avons dit, présenter dans ce domaine des points essentiels et des lignes singulières variables avec les constantes d'intégration. Ces points peuvent être également des points critiques de l'intégrale. C'est cette difficulté nouvelle qui distingue essentiellement la théorie des équations du premier ordre de la théorie des équations d'ordre supérieur.

Un exemple simple fait ressortir clairement cette différence. Si l'on veut reconnaître que l'intégrale d'une équation du premier ordre n'a que des points critiques fixes, il suffit d'exprimer que, pour aucune valeur de y, x étant quelconque, y' n'est infinie, que la même chose a lieu pour la transformée en $\frac{1}{y}$, enfin que les systèmes (y_0, x_0), pour lesquels deux valeurs de y' s'échangent, correspondent à un point ordinaire x_0 de l'intégrale y, égale à y_0 pour $x = x_0$. On retrouve ainsi les conditions de M. Fuchs. Si l'on veut de plus que l'intégrale soit uniforme, il faut ajouter la condition qu'aucun des points ξ_i ne soit critique.

Quand on sait que l'intégrale ne prend que n valeurs, s'il n'existe aucun point ξ_i qui puisse être un point d'indétermination de y, cette intégrale est nécessairement algébrique. Par exemple, soit une équation

$$F(y', y, x) = 0$$

algébrique et entière en y', y, x. Si le coefficient de la plus haute puissance de y' ne contient aucun facteur de la forme $(x - a)$ (a étant constant), et si de plus le degré en x du coefficient de y'^p surpasse d'au moins $2(p - q)$ unités le degré en x du coefficient de y'^q, toute intégrale à n valeurs est nécessairement algébrique.

Toutes les conditions correspondantes sont nécessaires pour que l'intégrale d'une équation d'ordre quelconque jouisse des propriétés analogues, mais elles ne sont pas suffisantes. Il faudrait encore exprimer que les points d'indétermination possibles des intégrales ne sont pas points critiques, ou sont points critiques algébriques, etc.; or ces points n'apparaissent pas sur l'équation.

Toutefois, les théorèmes que nous avons établis sur la forme de l'intégrale générale, quand elle ne prend autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini de valeurs, sont susceptibles d'une certaine extension.

Soit

$$F[y, y', y'', (x)] = 0$$

une équation du second ordre, algébrique en y, y', y'' (F est un polynôme en y, y', y'' de degré m en y''). En raisonnant comme nous l'avons fait, on voit que, si l'on définit l'intégrale y par l'équation

$$y^n + R_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + R_0 = 0,$$

les R_i sont des fonctions *uniformes* du point y_0, y'_0, y''_0 de la surface

$$F[y_0, y'_0, y''_0, (x_0)] = 0,$$

c'est-à-dire que y et y' sont des fonctions de y_0, y'_0 à mn valeurs, et réciproquement y_0, y'_0 sont des fonctions de y, y' à mn valeurs. Mais ces fonctions ne sont pas nécessairement algébriques.

En remarquant que l'intégrale s'écrit aussi

$$y_0''^{\,n} + R_{n-1}[y, y', y'', (x), (x_0)]y_0''^{\,n-1} + \ldots + R_0[y, y', y'', (x), (x_0)],$$

on voit que cette intégrale vérifie les relations

$$R_i[y, y', y'', (x), (x_0)] = \alpha_i = R_i\ [y_0, y'_0, y''_0, (x_0), (x_0)],$$

$$\frac{dR_i}{dx}[y, y', y'', (x), (x_0)] = \beta_i = \frac{dR_i}{dx}\ [y_0, y'_0, y''_0\ (x_0), (x_0)],$$

$$\frac{d^2R_i}{dx^2}[y, y', y'', (x), (x_0)] = \gamma_i = \frac{d^2R_i}{dx^2}[y_0, y'_0, y''_0, (x_0), (x_0)],$$

les α_i, β_i, γ_i désignant des constantes. Si l'on pose

$$r[y, y', y'', (x), (x_0)] = \Sigma\lambda_i(x_0)R_i = \Sigma\lambda_i(x_0)\alpha_i,$$

$$r' = \frac{dr}{dx_0}, \qquad r'' = \frac{d^2r}{dx_0^2},$$

en prenant pour les λ_i des fonctions de x_0 *quelconques*, toutes *les constantes intégrales*

$$\rho[y, y', y'', (x), (x_0)] = g$$

s'expriment *uniformément* à l'aide des

$$r = c,$$
$$r' = c',$$
$$r'' = c''.$$

Plus généralement, il en est de même pour les fonctions intégrales

$$R[y, y', y'', (x)] = G[(x), C, C'];$$

dans cette égalité, R est une fonction uniforme de y, y', y'', et G une fonction de x dont les points critiques ne dépendent pas des constantes C et C'. On a

$$R = \varphi[r, r', r'', (x)], \qquad G = \varphi[c, c', c'', (x)],$$

φ étant uniforme en r, r', r'' (ou en c, c', c''). Quant aux r, r', r'', ils sont liés dans tous les cas par une relation algébrique

$$h[r, r', r'', (x_0)] = 0,$$

qu'on peut écrire aussi bien, en faisant

$$\rho = \Sigma\lambda_i(x)R_i[y_0, y'_0, y''_0, (x_0), x],$$

$$h\left[\rho, \frac{d\rho}{dx}, \frac{d^2\rho}{dx^2}, (x)\right] = 0,$$

équation différentielle dont les points critiques sont fixes. On peut d'ailleurs remplacer la relation

$$h[c, c', c'', (x_0)] = 0$$

par une transformée birationnelle quelconque. L'intégrale de (1) vérifie les formules

$$c = r\,[y, y', y'', (x)],$$
$$c' = r'[y, y', y'', (x)],$$
$$c'' = r''[y, y', y'', (x)],$$

qui établissent une correspondance uniforme entre $h = 0$ et $F = 0$; mais cette correspondance peut être transcendante. Quand elle est rationnelle, l'analogie avec les équations du premier ordre est presque complète. Il convient toutefois de signaler une importante différence : la relation algébrique, de degré mn par rapport à y, entre y, y_0 y'_0, peut être d'un degré quelconque en y_0, y'_0; pour les équations du premier ordre, elle est au contraire de degré mn en y_0.

(*A suivre.*)