RIQUIER

Sur les principes de la théorie générale des fonctions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 8 (1891), p. 59-86
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__59_0>

SUR LES PRINCIPES

DE LA

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS,

PAR M. RIQUIER,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN.

Depuis un certain nombre d'années, quelques géomètres, jugeant défectueuses les méthodes couramment employées dans l'enseignement du Calcul infinitésimal, ont essayé de l'asseoir sur une base nouvelle, et de *faire reposer la théorie générale des fonctions sur les propriétés des séries entières*. Nous devons citer au premier rang MM. Weierstrass et Méray, qui, sans connaître les travaux l'un de l'autre, s'étaient rencontrés dans la même voie.

M. Weierstrass n'ayant publié aucun Ouvrage d'ensemble sur la théorie des fonctions et s'étant borné à la développer dans des leçons orales, nous ignorons de quelle façon et dans quelles limites l'éminent géomètre pense que l'on doive tirer parti de cette idée. Quant à la méthode de M. Méray, qui se trouve exposée succinctement, mais complètement, dans un Ouvrage publié en 1872 [1], elle nous a paru, et de beaucoup, supérieure aux méthodes courantes. Telle qu'elle est cependant, elle soulève, à notre avis, certaines objections et ne nous semble pas s'adapter, avec toute la commodité désirable, au but élevé poursuivi par son inventeur. Nous signalerons, par exemple, comme ne conduisant pas toujours à des résultats satisfaisants : 1° la forme donnée par M. Méray à la proposition concernant la nullité identique

---

[1] *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale.*

d'une série entière [1]; 2° l'exclusion absolue de toute considération de continuité, soit dans la théorie des fonctions proprement dites, soit dans celle des expressions calculables par cheminement; 3° l'hypothèse restreinte consistant à supposer, dans tous les cas, que chacune des n variables imaginaires

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'', \qquad \ldots$$

d'une fonction quelconque $f(x, y, \ldots)$ varie, indépendamment des autres, dans quelque portion ou *aire* donnée du plan qui sert à sa notation graphique, au lieu de supposer, plus généralement, que le point

$$(x', x'', y', y'', \ldots)$$

varie dans quelque portion donnée de l'espace à $2n$ dimensions; 4° la considération des *zones additionnelles*, constamment adjointes aux aires dont il s'agit [2].

Conduit par une pratique journalière de l'enseignement à adopter, dans ce qu'elles ont de plus essentiel, les idées de M. Méray, nous nous sommes efforcé de remédier aux quelques inconvénients que, à tort ou à raison, nous avons cru y apercevoir. Puisse l'inventeur de la méthode nouvelle ne pas nous taxer de présomption, et accueillir avec indulgence ce modeste travail, dont nous serions fier qu'il daignât accepter la dédicace.

Préliminaires.

1. Nous nous appuierons plus d'une fois, dans le cours de ce travail, sur certaines définitions ou propositions contenues dans un Mémoire antérieur [3]; mais nous nous dispenserons le plus souvent de les formuler une seconde fois, nous bornant en pareil cas à l'indication des passages utiles. Les chiffres suivis d'un astérisque renverront le

---

(1) *Nouveau précis*, p. 41.

(2) *Ibid.*, p. 45.

(3) *Sur les fonctions continues d'un nombre quelconque de variables, et sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques* (*Annales de l'École Normale*, septembre 1890).

lecteur aux divisions du Mémoire dont il s'agit, et les chiffres non suivis d'un astérisque à celles du présent Mémoire.

2. Nous nommerons *point à n coordonnées* tout système de valeurs particulières respectivement attribuées aux n variables *réelles* $x, y, \ldots$, et *espace à n dimensions* l'ensemble de tous les points à n coordonnées.

La *distance* des deux points

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots)$$

sera, par définition, la racine carrée non négative de la quantité

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \ldots.$$

Dans l'espace à n dimensions, on a souvent à considérer, à l'exclusion de tous les autres points, ceux dont les coordonnées satisfont à certaines conditions, d'une nature absolument quelconque d'ailleurs : leur ensemble constitue ce qu'on appelle une *portion de l'espace à n dimensions*.

Une portion d'espace est dite *limitée*, lorsque la distance du point $(0, 0, \ldots)$ à un point variable de la portion dont il s'agit ne cesse d'être inférieure à quelque quantité fixe.

Un point est dit *complètement extérieur* à une portion donnée de l'espace à n dimensions, lorsque sa distance à un point variable de cette dernière ne cesse d'être supérieure à quelque quantité *positive* fixe.

Enfin, une portion d'espace est dite *complète*, lorsque chacun des points qui n'en font pas partie lui est complètement extérieur [1].

---

[1] Par exemple, en désignant par R une constante positive, et par $x_0, y_0, \ldots$ des constantes quelconques, positives, négatives ou nulles, le fragment d'espace défini par la relation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \ldots \leqq R^2$$

est à la fois limité et complet. Si l'on supprime le signe d'égalité qui figure entre les deux membres, pour ne laisser subsister que le signe d'inégalité, on obtient un fragment limité, mais incomplet.

3. Relativement à un groupe

$$s, \quad t, \quad \ldots$$

d'indéterminées réelles en nombre quelconque p, nous nommerons *intervalle complexe* l'ensemble de tous les systèmes de valeurs dont les éléments $s, t, \ldots$ se trouvent respectivement compris dans p intervalles simples

$$s_0 \text{ à } S, \qquad t_0 \text{ à } T, \quad \ldots$$

(ou égaux à quelques-unes des valeurs extrêmes de ces intervalles).

Cela posé, si l'on désigne par

$$\varphi(s, t, \ldots), \quad \chi(s, t, \ldots), \quad \ldots$$

n fonctions réelles de $s, t, \ldots$, toutes continues (7*) dans un même intervalle complexe, l'ensemble des n formules

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi(s, t, \ldots), \\ y = \chi(s, t, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où les divers systèmes de valeurs attribuées à $s, t, \ldots$ n'excèdent pas l'intervalle en question, définit ce que nous nommerons un *arc continu à p variables*, ou, pour abréger, un *arc à p variables* dans l'espace à n dimensions. Si, pour les valeurs considérées de $s, t, \ldots$, le point $(x, y, \ldots)$ défini par les formules (1) demeure constamment dans quelque portion déterminée de l'espace à n dimensions, nous dirons que l'arc dont il s'agit se trouve entièrement situé dans cette dernière.

Nous nommerons *point de l'arc*, tantôt un système de valeurs de $s, t, \ldots$ compris dans les limites ci-dessus spécifiées, tantôt le système des valeurs correspondantes que les formules (1) assignent aux variables $x, y, \ldots$. En particulier, si, dans chacun des intervalles simples où $s, t, \ldots$ sont respectivement assujettis à varier, on convient de considérer l'une des deux valeurs extrêmes comme valeur initiale, et l'autre comme valeur finale, il faudra entendre par *extrémité initiale* (ou *finale*) de l'arc donné, tantôt le système formé par les valeurs initiales (ou finales) de $s, t, \ldots$, tantôt le système formé par les valeurs correspondantes de $x, y, \ldots$. Mais cette légère confusion de langage ne donnera lieu par la suite à aucune ambiguïté, et, dans chaque cas particulier, le lecteur apercevra bien facilement ce que nous aurons voulu dire.

4. Une portion de l'espace à n dimensions sera dite *continue* si, à deux points

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots),$$

y étant pris à volonté, on peut assigner quelque arc continu

$$\begin{aligned} x &= \varphi(s, t, \ldots), \\ y &= \chi(s, t, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

les admettant respectivement comme extrémités initiale et finale, et entièrement situé dans la portion d'espace dont il s'agit (3).

5. Étant donné dans l'espace à n dimensions un arc à p variables $s, t, \ldots$, si la suite (limitée)

$$(2) \qquad (s_1, t_1, \ldots), \quad (s_2, t_2, \ldots), \quad \ldots, \quad (s_g, t_g, \ldots)$$

est formée avec des systèmes de valeurs n'excédant pas l'intervalle complexe où le groupe des variables $s, t, \ldots$ est assujetti à se mouvoir, nous dirons qu'elle constitue un *chemin inscrit dans l'arc*.

Nous dirons encore que le chemin ci-dessus défini admet comme *régulateur* la quantité positive ρ, si, pour deux systèmes consécutifs quelconques

$$(s_k, t_k, \ldots), \quad (s_{k+1}, t_{k+1}, \ldots)$$

de la suite précédente, les différences $s_{k+1} - s_k$, $t_{k+1} - t_k$, ... sont toutes numériquement inférieures à ρ.

Enfin, nous nommerons *sommets* de notre chemin inscrit, tantôt les systèmes de valeurs compris dans la suite (2), tantôt les systèmes formés par les valeurs correspondantes de $x, y, \ldots$.

6. Nous nommerons *premier* et *secona élément* de l'imaginaire $a' + ia''$ les deux quantités réelles a', a''.

Si aux n variables

$$(3) \qquad x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'', \qquad \ldots$$

on attribue tous les systèmes possibles de valeurs imaginaires, les systèmes de valeurs réelles que prennent alors leurs éléments redonnent les divers points de l'espace indéfini à $2n$ dimensions. Il arrive d'ailleurs sans cesse que l'on ait à considérer exclusivement, dans telle ou telle question, les systèmes de valeurs des n variables (3) fournis par tel ou tel groupe de conditions subsistant entre leurs $2n$ éléments, ou, ce qui revient au même, les points situés dans telle ou telle portion de l'espace dont il s'agit.

Dans les questions qui comportent la considération de n variables imaginaires (3), et par suite de l'espace à $2n$ dimensions, on désigne un point quelconque de ce dernier, tantôt par ses *n coordonnées imaginaires*, c'est-à-dire par les n valeurs attribuées aux variables (3), tantôt par les $2n$ valeurs réelles attribuées à leurs éléments.

7. *Dans l'espace à $2n$ dimensions, à la considération duquel on est conduit par celle des n variables imaginaires x, y, ... (6), traçons un arc continu à p variables s, t, ... (3), et désignons par*

$$(4) \qquad \varepsilon_x, \quad \varepsilon_y, \quad \ldots$$

n constantes positives données, par

$$(s_1, t_1, \ldots), \quad (s_2, t_2, \ldots)$$

deux systèmes de valeurs arbitrairement choisis dans l'intervalle complexe où le groupe des variables s, t, ... est assujetti à se mouvoir, enfin par

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots)$$

les systèmes de valeurs qui correspondent aux précédents pour les n variables imaginaires x, y, ...

Cela posé, on peut assigner une constante positive β telle, que les différences

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad \ldots$$

présentent des modules respectivement inférieurs aux quantités (4), *dès* *que les différences*

$$s_2 - s_1, \quad t_2 - t_1, \quad \ldots$$

sont toutes numériquement inférieures à β.

Posons en effet

$$\begin{array}{lll} x = x' + ix'', & y = y' + iy'', & \ldots, \\ x_1 = x'_1 + ix''_1, & y_1 = y'_1 + iy''_1, & \ldots, \\ x_2 = x'_2 + ix''_2, & y_2 = y'_2 + iy''_2, & \ldots, \end{array}$$

et désignons par ε la plus petite des quantités (4). Les coordonnées réelles x', x'', y', y'', ... d'un point variable de l'arc étant des fonctions continues de s, t, ... dans l'intervalle complexe considéré, c'est-à-dire dans un espace évidemment limité et complet (2) par rapport au groupe de ces indéterminées, on peut (9*) assigner un nombre positif β tel, que les relations

$$\text{val. num.}(x'_2 - x'_1) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

$$\text{val. num.}(x''_2 - x''_1) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

$$\text{val. num.}(y'_2 - y'_1) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

$$\text{val. num.}(y''_2 - y''_1) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et par suite aussi les relations

$$\text{mod.}(x_2 - x_1) < \varepsilon,$$
$$\text{mod.}(y_2 - y_1) < \varepsilon,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

résultent nécessairement des inégalités

$$\text{val. num.}\ (s_2 - s_1) < \beta,$$
$$\text{val. num.}\ (t_2 - t_1) < \beta,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

8. Supposant connue la théorie des *variantes simples*, due à M. Méray (*Annales de l'École Normale*, novembre 1887), nous avons donné,

dans le Mémoire cité plus haut (1), la définition d'une *variante complexe* (4*). Nous nommerons en particulier *variante imaginaire* une quantité imaginaire variable

$$v_m = v'_m + i v''_m,$$

dont la valeur dépend d'un indice m, susceptible de prendre toutes les valeurs entières et positives.

Dans l'espace indéfini à $2n$ dimensions, à la considération duquel on est conduit par celle de n variables imaginaires $x, y, \ldots$ (6), une portion donnée sera dite *normale*, si les n coordonnées imaginaires de l'un quelconque de ses points peuvent être considérées comme les limites respectives de n variantes imaginaires $x_m, y_r, \ldots$, satisfaisant à la double condition que nous allons énoncer : 1° chacune d'entre elles, considérée isolément, diffère constamment de sa limite aussitôt que la valeur de son indice surpasse quelque entier convenablement choisi; 2° si l'on considère le point $(x_m, y_r, \ldots)$ et ceux qui s'en déduisent en y remplaçant telles ou telles des variantes $x_m, y_r, \ldots$ par leurs limites respectives, chacun d'entre eux reste constamment situé dans l'espace dont il s'agit, aussitôt que les indices $m, r, \ldots$, tous indépendants les uns des autres, surpassent respectivement certains entiers.

9. Les quelques exemples ci-après suffiront à éclaircir la définition du numéro précédent.

I. Si l'on désigne par $R_x, R_y, \ldots$ n constantes positives, et par x_0, $y_0, \ldots$ les n coordonnées imaginaires (6) d'un point fixe, l'espace défini par les relations simultanées

$$\text{mod.}(x - x_0) < R_x, \qquad \text{mod.}(y - y_0) < R_y, \qquad \ldots$$

est normal.

Effectivement, $\xi, \eta, \ldots$ désignant les coordonnées imaginaires de l'un quelconque de ses points, les relations

$$\begin{aligned}\text{mod.}(x - x_0) &\leqq \text{mod.}(x - \xi) + \text{mod.}(\xi - x_0),\\ \text{mod.}(y - y_0) &\leqq \text{mod.}(y - \eta) + \text{mod.}(\eta - y_0),\\ &\ldots\ldots\end{aligned}$$

font voir que le point $(x, y, \ldots)$ reste constamment situé dans l'espace donné, aussitôt que les modules des différences $x-\xi$, $y-\eta$, ... tombent respectivement au-dessous des quantités positives

$$R_x - \mathrm{mod}(\xi - x_0), \quad R_y - \mathrm{mod}(\eta - y_0), \quad \ldots.$$

Dès lors, il est facile de se convaincre que les variantes

$$(5) \qquad x_m = \xi + \frac{1}{m}, \qquad y_r = \eta + \frac{1}{r}, \qquad \ldots$$

satisfont bien à toutes les conditions requises.

II. L'espace défini par les relations simultanées

$$(6) \qquad \mathrm{mod}(x - x_0) \leqq R_x, \qquad \mathrm{mod}(y - y_0) \leqq R_y, \qquad \ldots,$$

où R_x, R_y, ..., x_0, y_0, ... ont la même signification que ci-dessus (I), est encore normal.

Effectivement, si pour un point $(\xi, \eta, \ldots)$, pris dans cet espace, les diverses relations (6) sont toutes vérifiées avec le signe d'inégalité, on prendra encore pour x_m, y_r, ... les variantes (5). Si quelques-unes sont vérifiées avec le signe d'égalité, si l'on a, par exemple, $\mathrm{mod}(\xi - x_0) = R_x$, on remplacera la première des variantes (5) par

$$x_m = \xi - \frac{1}{m}(\xi - x_0).$$

III. Si l'on pose, comme d'habitude,

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'', \qquad \ldots,$$

et que l'on désigne par x'_0, y'_0, ..., R des constantes réelles quelconques, la dernière essentiellement positive, l'espace défini par le système des relations

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{c} (x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + \ldots < R^2, \\ x'' = y'' = \ldots = 0 \end{array} \right.$$

est normal.

Soient en effet ξ', η', ... des valeurs particulières de x', y', ... vérifiant la première relation (7), et a, a_0, α les trois points ayant respectivement pour coordonnées réelles

$$\begin{array}{llllll} x', & 0, & y', & 0, & \ldots, \\ x'_0, & 0, & y'_0, & 0, & \ldots, \\ \xi', & 0, & \eta', & 0, & \ldots. \end{array}$$

En rapprochant la relation $a_0\alpha < \mathrm{R}$ de la relation $aa_0 \leqq a\alpha + a_0\alpha$, qui subsiste entre les distances mutuelles de ces trois points [1], on voit immédiatement que le point variable a reste constamment situé dans l'espace donné aussitôt que la distance $a\alpha$ reste inférieure à $\mathrm{R} - a_0\alpha$, et par suite aussitôt que les valeurs numériques de $x' - \xi'$, $y' - \eta'$, ... tombent toutes au-dessous de $\frac{\mathrm{R} - a_0\alpha}{\sqrt{n}}$. Il en résulte que les variantes

$$x_m = \xi' + \frac{1}{m}, \qquad y_r = \eta' + \frac{1}{r}, \qquad \ldots$$

satisfont encore à toutes les conditions exigées.

IV. Quant à la portion d'espace définie par les relations simultanées

$$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + \ldots \leqq \mathrm{R}^2, \qquad x'' = y'' = \ldots = 0,$$

où les mêmes notations ont été adoptées que dans l'exemple III, il serait facile de voir que tous ses points sans exception ne jouissent pas de la propriété constatée dans les divers exemples ci-dessus. Par exemple, si l'on suppose égal à 2 le nombre des variables imaginaires

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'',$$

et que l'on considère les relations

$$x'^2 + y'^2 \leqq \mathrm{R}^2, \qquad x'' = y'' = 0,$$

il faut, pour obtenir un espace normal, y faire abstraction des quatre points où x' et y' ont les valeurs suivantes :

$$x' = \mathrm{R}, \ y' = 0; \quad x' = -\mathrm{R}, \ y' = 0; \quad x' = 0, \ y' = \mathrm{R}; \quad x' = 0, \ y' = -\mathrm{R}.$$

---

[1] Il est facile de prouver en effet que, *dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions, la distance de deux points est comprise entre la somme et la différence de leurs distances à un même troisième (et peut parfois atteindre l'une ou l'autre de ces deux limites)*.

Fonctions olotropes.

10. Les propriétés des séries entières sur lesquelles il s'agit, comme nous l'avons expliqué, de faire reposer toute la théorie des fonctions ([1]), peuvent s'établir à l'aide des généralités relatives aux séries quelconques, en y adjoignant au besoin quelques propriétés élémentaires des polynômes entiers, de ceux notamment qui ne dépendent que d'une seule variable. Elles sont suffisamment connues pour que nous puissions nous dispenser même de les formuler : il importe cependant d'insister un peu sur la condition de nullité identique, au sujet de laquelle nous proposerons l'énoncé suivant :

Soient

$$f(x, y, \ldots) = \Sigma a_{p,q,\ldots} x^p y^q \ldots \tag{8}$$

la somme d'une série entière par rapport aux n variables imaginaires x, y, ...; u_m, v_r, ..., *n variantes imaginaires ayant toutes zéro pour limite, et remplissant en outre les deux conditions suivantes :* 1° *chacune d'entre elles, considérée isolément, demeure constamment différente de zéro, aussitôt que la valeur de son indice surpasse quelque entier convenablement choisi;* 2° *la quantité* $f(u_m, v_r, \ldots)$ *demeure constamment égale à zéro, aussitôt que les indices* m, r, ..., *tous indépendants les uns des autres, surpassent respectivement certains entiers.*

Cela étant, la série proposée a tous ses coefficients nuls.

I. Nous supposerons d'abord que le nombre des variables indépendantes se réduise à 1. En désignant par

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

la somme de notre série, on sait que le module de $f(x) - a_0$ reste inférieur à une quantité positive donnée, aussitôt que celui de x tombe au-dessous de quelque quantité positive convenablement

---

([1]) Nous signalerons comme les plus importantes celles qui se trouvent formulées aux pages 32, 36 et 80 du *Nouveau Précis* de M. Méray, puis la continuité (14*) et la condition de nullité identique.

choisie. La variante u_m étant infiniment petite pour m infini, la variante $f(u_m) - a_0$ l'est donc aussi, et, comme $f(u_m)$ finit par être constamment nul, il en résulte $a_0 = 0$.

Cela étant, si l'on pose

$$f_1(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots,$$

d'où

$$f(x) = x f_1(x),$$

la variante $f_1(u_m) - a_1$ est, comme tout à l'heure, infiniment petite pour m infini; d'ailleurs, le produit $u_m f_1(u_m) = f(u_m)$ finissant par être constamment nul, et le premier facteur u_m constamment différent de zéro, le second facteur $f_1(u_m)$ finit par être constamment nul, d'où l'on déduit encore $a_1 = 0$.

Posant alors

$$f_2(x) = a_2 + a_3 x + \ldots,$$

d'où

$$f(x) = x^2 f_2(x),$$

on démontrera de même que a_2 est nul, puis a_3, et ainsi de suite indéfiniment.

II. Il suffit maintenant de faire voir que, si la proposition est exacte pour une série entière dépendant de $n-1$ variables, elle l'est encore pour la série (8), dépendant des n variables $x, y, \ldots$. A cet effet, ordonnons-la par rapport à x, et mettons-la sous la forme

$$A_0(y, \ldots) + A_1(y, \ldots) x + A_2(y, \ldots) x^2 + \ldots,$$

où

$$(9) \qquad A_0(y, \ldots), \quad A_1(y, \ldots), \quad A_2(y, \ldots), \quad \ldots$$

désignent des séries entières dépendant des $n-1$ variables $y, \ldots$.

En ne considérant les indices $m, r, \ldots$ qu'à partir de valeurs suffisamment grandes, les variantes $u_m, v_r, \ldots$ sont constamment différentes de zéro, et la quantité $f(u_m, v_r, \ldots)$ constamment égale à zéro. Dans ces limites, si l'on attribue aux $n-1$ indices $r, \ldots$ un système déterminé de valeurs particulières, l'expression

$$A_0(v_r, \ldots) + A_1(v_r, \ldots) u_m + A_2(v_r, \ldots) u_m^2 + \ldots$$

s'évanouit quelle que soit la valeur attribuée à m, puisque ce dernier indice est indépendant des premiers, et l'on a par conséquent (I)

$$A_0(v_r, \ldots) = A_1(v_r, \ldots) = A_2(v_r, \ldots) = \ldots = 0.$$

Mais les indices r, ... étant à leur tour indépendants les uns des autres et les valeurs particulières que nous venons de leur attribuer étant arbitraires, il résulte de l'exactitude supposée du théorème dans le cas de $n-1$ variables que les coefficients des diverses séries (9) sont tous nuls, et par suite ceux de la proposée (8).

11. De là résulte immédiatement la conséquence suivante :

Soient $f(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$ les sommes de deux séries entières par rapport aux n variables imaginaires x, y, ...; u_m, v_r, ..., n variantes imaginaires ayant toutes zéro pour limite, et remplissant en outre les deux conditions suivantes : 1° chacune d'entre elles, considérée isolément, demeure constamment différente de zéro, aussitôt que la valeur de son indice surpasse quelque entier convenablement choisi; 2° la différence

$$f(u_m, v_r, \ldots) - \varphi(u_m, v_r, \ldots)$$

demeure constamment égale à zéro, aussitôt que les indices m, r, ..., tous indépendants les uns des autres, surpassent respectivement certains entiers.

Cela étant, les coefficients des termes semblables dans les deux séries sont respectivement égaux.

12. Nous pouvons maintenant énoncer la propriété générale qui doit, à notre avis, servir de base à la théorie des fonctions. Nous en indiquerons à la suite un certain nombre d'autres, presque toutes empruntées à M. Méray, et qui, si l'on suppose connue la théorie des séries entières, peuvent se déduire facilement de la propriété dont il s'agit. Ces indications seront parfois accompagnées de démonstrations, et nous aurons toujours soin, pour que la comparaison puisse être facilement établie, de renvoyer le lecteur aux passages correspondants de l'Ouvrage de M. Méray.

En désignant par x, y, ... des variables imaginaires en nombre quelconque, nous dirons qu'une fonction $f(x, y, \ldots)$, *considérée dans un espace normal* (8), y est *olotrope* (1), si à chaque point $(x, y, \ldots)$ de l'espace en question on peut faire correspondre quelque groupe de quantités positives δ_x, δ_y, ..., et quelque série entière en h, k, ..., jouissant conjointement des propriétés suivantes : 1° cette série admet comme rayons de convergence les quantités δ_x, δ_y, ...; 2° sa somme a pour valeur $f(x+h, y+k, \ldots)$, tant que les accroissements h, k, ... ont des modules respectivement inférieurs à δ_x, δ_y, ..., et que le point $(x+h, y+k, \ldots)$ tombe dans l'espace donné.

Les quantités δ_x, δ_y, ... se nommeront alors les *olomètres* de la fonction au point $(x, y, \ldots)$.

Une fonction de n variables imaginaires, olotrope dans toute l'étendue de l'espace à $2n$ dimensions, sera dite *indéfiniment olotrope*.

Il ne faut jamais perdre de vue que *notre définition d'une fonction olotrope implique essentiellement la nature normale de l'espace où on la considère*. Faute de cette restriction, la théorie des fonctions olotropes pécherait par la base : le lecteur devra donc la sous-entendre constamment dans toute la suite du présent paragraphe, alors même que nous ne la spécifierions pas d'une manière expresse.

13. Voici quelques exemples très simples de fonctions olotropes (2).

I. Une fonction entière est indéfiniment olotrope, et admet en chaque point des olomètres de grandeur indéfinie.

II. La fonction

$$f(x, y, \ldots) = \frac{1}{(x-x_0)^p (y-y_0)^q \ldots},$$

où x_0 y_0, ... désignent les coordonnées imaginaires d'un point fixe, et p, q, ... des entiers positifs, est olotrope dans la portion d'espace (évidemment normale) constituée par l'ensemble des points où aucune des différences $x-x_0$, $y-y_0$, ... ne s'évanouit, et elle admet comme olomètres au point $(x, y, \ldots)$ les modules de ces différences.

III. Lorsqu'une série entière en $x-x_0$, $y-y_0$, ... admet quelque système de rayons de convergence (et par suite une infinité), sa somme

(1) *Nouveau Précis*, p. 42 et 43.

(2) *Ibid.*, p. 44 et 45.

a une valeur bien déterminée en chaque point où les différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... présentent des modules respectivement inférieurs aux rayons de quelqu'un des systèmes; cette somme est donc une fonction de $x, y, \ldots$ dans l'espace (évidemment normal) formé par l'ensemble des points en question.

Cela posé, on prouve facilement : 1° que la somme de notre série est une fonction olotrope de $x, y, \ldots$ dans l'espace ainsi défini; 2° qu'en désignant par $x, y, \ldots$ les coordonnées imaginaires d'un point quelconque de ce dernier, et par $R_x, R_y, \ldots$ des rayons de convergence choisis de manière à rendre positives les différences

$$R_x - \operatorname{mod}(x - x_0), \quad R_y - \operatorname{mod}(y - y_0), \quad \ldots,$$

la fonction admet comme olomètres en $(x, y, \ldots)$ les différences dont il s'agit.

14 (1). *Si une fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans un espace donné, les coefficients du développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$ en une série entière par rapport à $h, k, \ldots$ sont des fonctions de $x, y, \ldots$ olotropes dans le même espace, et admettant en chaque point de cet espace les olomètres de la proposée.*

En premier lieu, chacun des coefficients dont parle l'énoncé a une valeur déterminée en tout point $(x, y, \ldots)$ de l'espace donné et peut dès lors y être considéré comme une fonction des mêmes variables indépendantes que la proposée. Désignons, en effet, par $(x, y, \ldots)$ un point déterminé quelconque de cet espace, par $h, k, \ldots$ des accroissements variables attribués aux valeurs initiales $x, y, \ldots$, et supposons qu'à partir de ces dernières la valeur de la fonction soit exprimable par un premier développement entier en $h, k, \ldots$ avec les olomètres $\delta_x, \delta_y, \ldots$, puis par un second développement de même nature avec les olomètres $\delta'_x, \delta'_y, \ldots$. Si l'on nomme alors $\delta''_x, \delta''_y, \ldots$ des quantités positives satisfaisant aux relations

$$\delta''_x \leqq \begin{cases} \delta_x, \\ \delta'_x \end{cases} \qquad \delta''_y \leqq \begin{cases} \delta_y, \\ \delta'_y \end{cases} \qquad \ldots,$$

(1) *Nouveau Précis*, p. 46.

les deux développements dont il s'agit ont des sommes égales tant que le point

$$(10)\qquad (x+h,\ y+k,\ \ldots),$$

sans sortir de l'espace proposé, donne lieu aux inégalités

$$\operatorname{mod} h < \delta''_x, \qquad \operatorname{mod} k < \delta''_y, \qquad \ldots.$$

Ils ont donc leurs coefficients semblables respectivement égaux, puisque cet espace est normal (8) (11).

En second lieu, si l'on désigne par $f_{p,q,\ldots}(x, y, \ldots)$ le coefficient de $h^p k^q \ldots$ dans le développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$, la quantité

$$(11)\qquad f_{p,q,\ldots}(x+h,\ y+k,\ \ldots)$$

est exprimable, dans les mêmes limites que cette dernière, à l'aide d'une série en $h, k, \ldots$. Effectivement, si le point (10) de l'espace considéré donne lieu aux relations

$$\operatorname{mod} h < \delta_x, \qquad \operatorname{mod} k < \delta_y, \qquad \ldots,$$

où $\delta_x, \delta_y, \ldots$ désignent les olomètres de la fonction proposée en $(x, y, \ldots)$, et si le point

$$(x+h+h',\ y+k+k',\ \ldots)$$

du même espace donne lieu aux relations

$$\operatorname{mod} h + \operatorname{mod} h' < \delta_x, \qquad \operatorname{mod} k + \operatorname{mod} k' < \delta_y, \qquad \ldots,$$

on peut, après avoir développé $f(x+h+h', y+k+k', \ldots)$ en une série entière par rapport aux sommes $h+h'$, $k+k'$, ..., transformer celle-ci en une série entière par rapport à toutes les quantités $h, k, \ldots, h', k', \ldots$. Or, dans cette nouvelle série ordonnée par rapport à h', k', ..., le coefficient de $h'^p k'^q \ldots$ constitue le développement cherché de l'expression (11).

15. Supposons actuellement qu'au lieu d'attribuer à toutes les variables sans distinction des accroissements à partir de valeurs initiales déterminées, on en attribue seulement à quelques-unes d'entre

elles. Partageons à cet effet les variables indépendantes en deux groupes

$$x, \quad \ldots,$$
$$y, \quad \ldots,$$

et, considérant une fonction $f(x, \ldots, y, \ldots)$, olotrope dans un espace donné, désignons par $(x, \ldots, y, \ldots)$ un point déterminé de cet espace, par $h, \ldots$ des accroissements attribués à $x, \ldots$; supposons enfin que,

$$\delta_x, \quad \ldots,$$
$$\delta'_x, \quad \ldots$$

désignant des constantes positives, la quantité

$$f(x+h, \ldots, y, \ldots)$$

soit exprimable à l'aide d'une première série entière en $h, \ldots,$ tant que le point

(12) $$(x+h, \ldots, y, \ldots),$$

sans sortir de l'espace considéré, donne lieu aux inégalités

$$\operatorname{mod} h < \delta_x, \qquad \ldots;$$

puis, qu'elle soit de même exprimable à l'aide d'une deuxième série entière, tant que le point (12), sans sortir de l'espace en question, donne lieu aux inégalités analogues

$$\operatorname{mod} h < \delta'_x, \qquad \ldots.$$

Si l'on nomme alors $\delta''_x, \ldots$ des quantités positives satisfaisant aux relations

$$\delta''_x \leqq \begin{cases} \delta_x, \\ \delta'_x \end{cases} \quad \ldots,$$

les deux développements dont il s'agit ont des sommes égales, tant que le point (12), sans sortir du même espace, donne lieu aux relations

$$\operatorname{mod} h < \delta''_x, \quad \ldots,$$

et il résulte encore des nos 8 et 11 que les coefficients de leurs termes semblables sont respectivement égaux.

En conséquence, *le développement unique de la quantité*

$$f(x+h, \ldots, y, \ldots)$$

peut s'obtenir en faisant $k = 0, \ldots$ *dans celui de la quantité*

$$f(x+h, \ldots, y+k, \ldots).$$

16. Si l'on désigne par $f(x, y, \ldots)$ une fonction olotrope dans un espace donné, le terme indépendant de $h, k, \ldots$ dans le développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$ est précisément $f(x, y, \ldots)$. Les coefficients des premières puissances de $h, k, \ldots$ se nomment les *dérivées premières* de $f(x, y, \ldots)$, *prises par rapport à* $x, y, \ldots$ respectivement.

En vertu du numéro précédent, le coefficient de la première puissance de h dans le développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$ est le même que dans celui de $f(x+h, y, \ldots)$. Pour obtenir la dérivée première de $f(x, y, \ldots)$ par rapport à x, on peut donc opérer comme si x était la seule variable, en considérant les autres comme momentanément réduites à des constantes, ce qui ramène toujours le calcul d'une dérivée première au cas d'une seule variable indépendante [1].

Comme les dérivées de $f(x, y, \ldots)$ sont olotropes dans le même espace que la proposée et avec les mêmes olomètres en chaque point (14), elles ont des dérivées jouissant de cette propriété; de même, pour celles-ci, leurs propres dérivées, et ainsi de suite indéfiniment. Ces dérivées de dérivées sont les *dérivées partielles de tous ordres de* $f(x, y, \ldots)$ [2].

On prouvera facilement :

1° Qu'*une dérivée d'ordre supérieur dépend uniquement des nombres exprimant combien de fois on a dérivé par rapport à chaque variable, dans quelque ordre que ces opérations partielles aient pu être exécutées* [3];

2° Que *la dérivée d'ordres partiels* $p, q, \ldots$ *de* $f(x, y, \ldots)$ *est égale au produit qu'on obtient en multipliant par le facteur numérique*

---

(1) *Nouveau Précis*, p. 47.
(2) *Ibid.*, p. 49.
(3) *Ibid.*, p. 49 et 50.

$1.2\ldots p.1.2\ldots q\ldots$ *le coefficient de* $h^p k^q\ldots$ *dans le développement de* $f(x+h, y+k, \ldots)$ (1).

17. *Toute fonction olotrope est continue* (14*).

Cette proposition résulte de la continuité des séries entières, combinée avec la définition du n° 12.

18. *Si dans un espace* (*normal*), *où la fonction* $f(x, y, \ldots)$ *des* n *variables imaginaires*

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'', \qquad \ldots$$

est supposée olotrope, on considère une portion limitée et complète E (*normale ou non*) (2), *les olomètres de* $f(x, y, \ldots)$ *en un point variable de la portion dont il s'agit restent toujours au moins égaux à certaines quantités positives fixes.*

I. *S'il existe dans la portion* E *quelque point où l'un au moins des olomètres tombe forcément au-dessous de la constante positive* ω, *on peut, suivant une loi bien déterminée, assigner dans cette portion un point tel que l'un au moins des olomètres y soit forcément* $\leqq \omega$.

L'espace E, étant limité, se trouve entièrement contenu dans quelque intervalle complexe $\mathfrak{J}_1$ (3). Divisons en deux parties égales chacun des $2n$ intervalles simples

$$x'_0 \text{ à } X', \quad x''_0 \text{ à } X'', \quad y'_0 \text{ à } Y', \quad y''_0 \text{ à } Y'', \quad \ldots$$

de l'association desquels ce dernier résulte, ordonnons les intervalles complexes partiels fournis par cette subdivision (6*, II), et appelons $\mathfrak{J}_2$ le premier d'entre eux contenant quelque point de E où l'un au moins des olomètres de $f(x, y, \ldots)$ tombe forcément au-dessous de ω. En opérant sur l'intervalle $\mathfrak{J}_2$ comme nous l'avons fait sur $\mathfrak{J}_1$, et ainsi de suite indéfiniment, nous obtiendrons une succession illimitée d'intervalles complexes

$$(13) \qquad \mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{J}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{J}_q, \quad \ldots,$$

jouissant de la triple propriété que nous allons énoncer :

1° Chacun d'eux fait entièrement partie du précédent;

---

(1) *Nouveau Précis*, p. 51.

2° Celui de rang q est formé d'intervalles simples ayant pour grandeurs respectives les valeurs numériques de

$$\frac{X'-x'_0}{2^{q-1}},\quad \frac{X''-x''_0}{2^{q-1}},\quad \frac{Y'-y'_0}{2^{q-1}},\quad \frac{Y''-y''_0}{2^{q-1}},\quad \ldots;$$

3° Chacun des intervalles (13) contient quelque point de E où l'un au moins des olomètres tombe forcément au-dessous de ω.

Cela posé, nous désignerons par $(u)_q$ la variante complexe (4*) ayant pour coordonnées réelles les valeurs extrêmes minima des $2n$ intervalles simples dont est formé $\mathfrak{J}_q$, et nous démontrerons successivement les points suivants :

1° *La variante complexe* $(u)_q$ *tend vers une limite* (υ), *située dans l'un quelconque des intervalles* (13); car la distance des deux points $(u)_q$, $(u)_{q+r}$, inférieure à

$$(14)\qquad \frac{1}{2^{q-1}}\sqrt{(X'-x'_0)^2+(X''-x''_0)^2+(Y'-y'_0)^2+(Y''-y''_0)^2+\ldots},$$

est infiniment petite pour q infini, et le point $(u)_{q+r}$ reste compris, quel que soit r, dans l'espace complet $\mathfrak{J}_q$ (4*) (5*).

2° *Le point* (υ) *fait nécessairement partie de l'espace* E.

Car, dans le cas contraire, l'intervalle $\mathfrak{J}_q$ contiendrait, en même temps que (υ), quelque point de l'espace dont il s'agit, et la distance de (υ) à un pareil point pourrait ainsi devenir inférieure à la quantité (14), par suite à toute quantité donnée. Or c'est là une conclusion absurde, puisque l'espace donné est complet, et que le point (υ), s'il n'y est pas compris, ne peut lui être que complètement extérieur (2).

3° *Les olomètres de* $f(x, y, \ldots)$ *au point* (υ) *ne peuvent être à la fois supérieurs à* ω.

Supposons, en effet, qu'ils le soient tous, désignons par $\xi, \eta, \ldots$ les coordonnées imaginaires du point (υ), par $\partial_\xi, \partial_\eta, \ldots$ les olomètres dont il s'agit, et par $x, y, \ldots$ les coordonnées imaginaires d'un point quelconque commun à E et à $\mathfrak{J}_q$. A partir d'une valeur de q suffisamment grande, les modules de $x-\xi$, $y-\eta$, ... tombent au-dessous de toute quantité donnée, parce qu'ils sont inférieurs à l'expression (14). Dès lors, les olomètres de la fonction en $x, y, \ldots$, au moins égaux aux différences

$$\delta_\xi - \operatorname{mod}(x-\xi),\quad \delta_\eta - \operatorname{mod}(y-\eta),\quad \ldots$$

(13, III), deviennent supérieurs à ω pour q suffisamment grand, ce qui est impossible, puisque le point $(x, y, \ldots)$ peut toujours être choisi de manière que l'un au moins des olomètres y tombe forcément au-dessous de cette quantité.

II. Adoptons pour un instant la conclusion contraire à celle de notre énoncé général, et admettons que, en désignant par ω une quantité positive de petitesse arbitraire, il existe quelque point de E où l'un au moins des olomètres tombe forcément au-dessous de ω. En désignant par m un entier positif arbitraire, et prenant $\omega = \frac{1}{m}$, il existe, d'après l'alinéa I, quelque variante complexe (4*)

$$(v)_m = (x_m, y_m, \ldots)$$

tombant constamment dans l'espace E, et telle que, au point $(v)_m$, l'un au moins des olomètres de $f(x, y, \ldots)$ soit forcément $\leq \frac{1}{m}$. La variante $(v)_m$ ne sortant jamais d'un espace limité, une variante

$$(w)_k = (v)_{m_k} = (x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots),$$

convenablement extraite de (v_m), sera convergente (6*), et l'un au moins des olomètres de $f(x, y, \ldots)$ y sera forcément inférieur ou au plus égal à la variante infiniment petite $\frac{1}{m_k}$; sa limite $(\Xi, \mathrm{H}, \ldots)$ sera d'ailleurs située dans l'espace E (5*). Or, si l'on nomme $\delta_\Xi, \delta_\mathrm{H}, \ldots$ les olomètres de la fonction en $(\Xi, \mathrm{H}, \ldots)$, celle-ci admettra en $(x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots)$ des olomètres au moins égaux à

$$\delta_\Xi - \operatorname{mod}(\Xi - x^{(k)}),\quad \delta_\mathrm{H} - \operatorname{mod}(\mathrm{H} - y^{(k)}),\quad \ldots,$$

c'est-à-dire à des quantités tendant vers les limites positives δ_Ξ, $\delta_\mathrm{H}, \ldots$ pour k infini, et finissant, contrairement à ce qui précède, par être toutes supérieures à la variante infiniment petite $\frac{1}{m_k}$.

19. *Étant donnés une fonction olotrope dans un espace (normal) quelconque, et un arc continu tracé dans cet espace, les olomètres de la fonction en un point variable de l'arc dont il s'agit restent toujours au moins égaux à certaines quantités positives fixes.*

I. *En désignant par*

$$z, \quad \ldots,$$
$$s, \quad t, \quad \ldots$$

deux groupes de variables réelles en nombres respectivement quelconques, si les fonctions réelles

$$(15) \qquad Z(s, t, \ldots), \quad \ldots,$$

en même nombre que les variables du premier groupe, sont toutes continues (7) dans un même espace $E_{s,t,\ldots}$, et si le point obtenu par l'association de leurs valeurs (15) ne sort jamais d'un espace $E_{z,\ldots}$ où la fonction réelle $f(z, \ldots)$ jouisse de cette propriété, la fonction*

$$f[Z(s, t, \ldots), \ldots]$$

est continue dans l'espace $E_{s,t,\ldots}$.

Soient en effet

$(s_0, t_0, \ldots)$ un point fixe de $E_{s,t,\ldots}$;
$z_0, \ldots$ les valeurs correspondantes des fonctions (15);
α un nombre positif choisi à volonté;
β un deuxième nombre positif tel que la différence

$$f(z, \ldots) - f(z_0, \ldots)$$

soit numériquement inférieure à α, toutes les fois que le point $(z, \ldots)$ de l'espace $E_{z,\ldots}$ satisfait aux relations

$$\text{val. num.}\,(z - z_0) < \beta, \qquad \ldots;$$

γ un dernier nombre positif tel que les différences

$$Z(s, t, \ldots) - Z(s_0, t_0, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

soient toutes numériquement inférieures à β, dès que le point $(s, t, \ldots)$

de l'espace $E_{s,t,\ldots}$ satisfait aux relations

$$(16) \qquad \text{val. num.}\,(s - s_0) < \gamma, \qquad \text{val. num.}\,(t - t_0) < \gamma, \qquad \ldots.$$

Cela posé, on voit immédiatement que la différence

$$f[Z(s, t, \ldots), \ldots] - f[Z(s_0, t_0, \ldots), \ldots]$$

est numériquement inférieure à α, dès que le point $(s, t, \ldots)$ de l'espace $E_{s,t,\ldots}$ satisfait aux inégalités (16).

II. Si l'on désigne par m un entier positif, et que l'on considère la fonction réelle et positive $\sqrt[m]{z}$ dans l'espace que définit la relation $z \geqq 0$, il suffit, pour que la différence de deux valeurs de la fonction soit numériquement inférieure à α, que la différence des valeurs de z soit numériquement inférieure à α^m.

A plus forte raison cette fonction est-elle continue dans l'espace dont il s'agit.

III. *Si, dans l'espace indéfini relatif au groupe des variables $z, \ldots$, on considère un arc continu dépendant du groupe des variables réelles s, $t, \ldots$ (3), la distance du point fixe $(z_0, \ldots)$ de cet espace à un point variable $(z, \ldots)$ de cet arc est une fonction continue de $s, t, \ldots$ dans l'intervalle complexe où ces dernières quantités sont assujetties à se mouvoir.*

Il suffit d'observer que la distance en question se déduit de l'expression

$$\sqrt{(z - z_0)^2 + \ldots}$$

en y remplaçant les variables $z, \ldots$ par leurs valeurs tirées des formules qui définissent l'arc, puis de combiner avec la continuité des fonctions entières les alinéas I et II du présent numéro.

IV. Comme un intervalle complexe jouit évidemment de la propriété d'être limité et complet (2), il résulte en particulier de l'alinéa III : 1° que la distance au point $(0, \ldots)$ d'un point variable $(z, \ldots)$ de l'arc reste constamment inférieure à quelque quantité fixe (10*); 2° que la distance du même point variable à un point fixe $(z_0, \ldots)$ non situé sur l'arc reste constamment supérieure à quelque quantité *positive* fixe (11*).

La proposition que nous avons en vue se présente alors comme une conséquence immédiate de celle du numéro précédent.

20 [1]. *Soient*

$f(x, y, \ldots)$ *une fonction olotrope admettant comme olomètres les constantes positives* $\delta_x, \delta_y, \ldots$ *dans une portion limitée (normale ou non) de l'espace où on la considère;*

$\delta'_x, \delta'_y, \ldots$ *des constantes positives respectivement inférieures aux précédentes;*

$$\sum f_{x, y, \ldots}^{(m, n, \ldots)}(x, y, \ldots) \frac{h^m}{1.2\ldots m} \frac{k^n}{1.2\ldots n} \cdots \tag{17}$$

le développement de la fonction proposée par la formule de Taylor à partir des valeurs initiales $x, y, \ldots$

Cela étant, on peut assigner une quantité positive au-dessous de laquelle tombe constamment le module du développement (17), *pour tous les systèmes de valeurs de* $x, y, \ldots$ *correspondant aux divers points de la portion limitée dont il s'agit, et pour toutes les valeurs de* $h, k, \ldots$ *de modules respectivement inférieurs ou égaux à* $\delta'_x, \delta'_y, \ldots$.

21 [2]. *Si du développement* (17) *on extrait une série partielle en prenant tels termes qu'on voudra, et les divisant par tel monôme entier en* $h, k, \ldots, h^p k^q \ldots$, *qu'ils pourraient avoir comme facteur commun, la somme des modules reste, dans les limites ci-dessus spécifiées* (20), *constamment inférieure à quelque quantité positive fixe.*

22 [3]. *Soient* $f(x, y, \ldots)$ *une fonction olotrope admettant les olomètres* $\delta_x, \delta_y, \ldots$ *dans une portion déterminée de l'espace où on la considère, et* $\delta'_x, \delta'_y, \ldots$ *des quantités positives respectivement inférieures à ceux-ci : si pour tous les systèmes de valeurs de* $x, y, \ldots$ *correspondant aux divers points de la portion dont il s'agit, et pour toutes les valeurs de* $h, k, \ldots$ *de modules inférieurs ou égaux à* $\delta'_x, \delta'_y, \ldots$, *le développement par la formule de Taylor de* $f(x+h, y+k, \ldots)$ *conserve un module constamment inférieur à la quantité positive* M, *la dérivée d'ordres par-*

---

(1) *Nouveau Précis*, p. 57 et 58.

(2) *Ibid.*, p. 65.

(3) *Ibid.*, p. 86.

tiels p, q, ... *de* $f(x, y, \ldots)$ *conserve, dans toute l'étendue de la portion considérée, un module constamment inférieur à*

$$M \frac{1.2\ldots p}{\delta_x'^p} \frac{1.2\ldots q}{\delta_y'^q} \cdots$$

23 ([1]). *Lorsque deux fonctions, olotropes dans un même espace, y sont identiquement égales, leurs dérivées semblables le sont aussi.*

Inversement, *deux fonctions, olotropes dans un même espace continu* (4), *y sont identiquement égales, si, en quelque point de cet espace, les valeurs de l'une d'entre elles et de ses diverses dérivées sont respectivement égales à celles de l'autre et de ses dérivées semblables.*

24. *Soient* $f(x, y, \ldots)$ *une fonction olotrope dans un espace continu, et*

$$\begin{array}{lllll} x_1, & x_2, & \ldots, & x_m, & \ldots, \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_r, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

des suites illimitées dans chacune desquelles les termes sont tous inégaux. Si, à partir de valeurs suffisamment grandes de m, r, ..., *le point* $(x_m, y_r, \ldots)$ *est constamment situé dans quelque portion limitée et complète* (2) *de l'espace dont il s'agit, et qu'en même temps la quantité* $f(x_m, y_r, \ldots)$ *soit constamment égale à zéro, la fonction* $f(x, y, \ldots)$ *est identiquement nulle dans l'espace donné.*

25. Soient

$$\begin{array}{lll} x, & y, & \ldots, \\ x', & y', & \ldots \end{array}$$

n variables imaginaires partagées en deux groupes ; E, E′ certaines portions des deux espaces indéfinis qui correspondent respectivement à ces deux groupes de variables, et

$$(E, E') \tag{18}$$

la portion de l'espace indéfini à $2n$ dimensions qui résulte de la considération simultanée des précédentes. Il est extrêmement facile de se

---

(1) *Nouveau Précis*, p. 61, 62 et 63.

convaincre : 1° que si chacun des espaces E, E' est normal, l'un par rapport au groupe $x, y, \ldots$, l'autre par rapport au groupe $x', y', \ldots$, l'espace (E, E') jouit de cette propriété par rapport à l'ensemble de toutes les variables; 2° que si chacun des espaces E, E' est continu, l'espace (E, E') ne peut manquer de l'être aussi.

Cela posé :

Si l'espace (18) *est composé avec deux espaces normaux, et si la fonction* $f(x, y, \ldots, x', y', \ldots)$, *olotrope dans l'espace en question, y est indépendante des valeurs attribuées aux variables* $x, y, \ldots$, *toute dérivée intéressant quelqu'une de ces dernières (avec ou sans les variables* x', y', ...) *s'y annule identiquement.*

Inversement, *en supposant l'espace* (18) *composé avec deux espaces normaux et continus, la fonction* $f(x, y, \ldots, x', y', \ldots)$, *olotrope dans l'espace en question, y est indépendante des valeurs attribuées aux variables* $x, y, \ldots$, *lorsque ses dérivées du premier ordre relatives à ces variables s'y annulent toutes identiquement* [1].

26. Nous avons vu à l'alinéa III du n° 13 qu'une série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, ... (admettant quelque système de rayons de convergence) définit une fonction olotrope de $x, y, \ldots$ dans l'espace formé par l'ensemble des points intérieurs à divers systèmes de circonférences respectivement décrites de $x_0, y_0, \ldots$ comme centres.

Réciproquement [2], *toute fonction olotrope dans un pareil espace y est exprimable à l'aide d'un seul et même développement entier en* $x - x_0$, $y - y_0, \ldots$, *qui coïncide, naturellement, avec celui de Taylor, effectué à partir des valeurs initiales* $x_0, y_0, \ldots$.

En particulier, *si une fonction* $f(x, y, \ldots)$ *est indéfiniment olotrope* (12), *le développement de* $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ *est applicable quels que soient et les valeurs initiales* $x_0, y_0, \ldots$ *et les accroissements* $h, k, \ldots$.

27 [3]. On appelle *composition* des fonctions l'opération qui con-

---

[1] En supposant que le nombre de variables imaginaires du groupe $x', y', \ldots$ se réduise à zéro, on retombe sur une proposition énoncée à la page 63 du *Nouveau Précis*.

[2] *Nouveau Précis*, p. 87 à 91.

[3] *Ibid.*, p. 98 et suiv.

siste à *substituer* aux variables $u, v, \ldots$ d'une fonction donnée $f(u, v, \ldots)$ autant de fonctions données

$$(19) \qquad U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

d'autres variables $x, y, \ldots$, ce qui engendre évidemment une nouvelle fonction de ces dernières,

$$F(x, y, \ldots) = f[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots].$$

Relativement à cette opération, les fonctions (19) sont dites *simples*, $f(u, v, \ldots)$ se nomme la fonction *composante*, et $F(x, y, \ldots)$ la fonction *composée*.

Cela posé, *si les fonctions simples* (19) *sont toutes olotropes dans un espace* $E_{x,y,\ldots}$; *si la composante* $f(u, v, \ldots)$ *jouit de la même propriété dans un espace* $E_{u,v,\ldots}$; *si enfin les valeurs des fonctions simples en chaque point du premier sont les coordonnées imaginaires de quelque point du second, la fonction composée* $F(x, y, \ldots)$ *est certainement olotrope dans le premier espace.*

En outre, le développement de la fonction composée à partir du point initial $(x_0, y_0, \ldots)$, arbitrairement choisi dans $E_{x,y,\ldots}$, peut s'obtenir en combinant le développement de la composante, effectué à partir des valeurs correspondantes u_0, v_0, ... des fonctions simples, avec ceux de

$$U(x, y, \ldots) - u_0, \quad V(x, y, \ldots) - v_0, \quad \ldots,$$

effectués à partir de $x_0, y_0, \ldots$: il suffit de remplacer respectivement par les derniers développements les différences

$$u - u_0, \quad v - v_0, \quad \ldots$$

qui figurent dans chaque terme du premier, d'appliquer à chaque résultat la règle de multiplication des séries, de former, sans omission ni répétition, une série procédant suivant les termes élémentaires des séries partielles ainsi obtenues et d'opérer finalement la réduction des termes semblables en $x - x_0, y - y_0, \ldots$.

28 [1]. *Désignons par*

$$(20) \qquad f_1(x, y, \ldots), \quad f_2(x, y, \ldots), \quad \ldots, \quad f_g(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

---

[1] *Nouveau Précis*, p. 109 et 110.

des fonctions toutes olotropes dans un même espace, et supposons que, pour chaque point particulier $(x_0, y_0, \ldots)$ *de l'espace en question, on puisse assigner :* 1° *un système d'olomètres* $\delta_x, \delta_y, \ldots$ *commun en ce point à toutes les fonctions de la suite* (20), *mais variable d'un point à l'autre;* 2° *un groupe de quantités positives*

$$\delta'_x < \delta_x, \qquad \delta'_y < \delta_y, \qquad \ldots,$$

et une série convergente à termes positifs

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_g + \ldots,$$

variables encore d'un point à l'autre, et tels que les développements par la formule de Taylor des quantités

$$\begin{array}{c} f_1(x_0 + h, y_0 + k, \ldots), \\ f_2(x_0 + h, y_0 + k, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_g(x_0 + h, y_0 + k, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

conservent des modules respectivement inférieurs à $M_1, M_2, \ldots, M_g, \ldots$ *pour toutes valeurs de* $h, k, \ldots$ *de modules respectivement inférieurs ou égaux à* $\delta'_x, \delta'_y, \ldots$.

Cela étant, la somme de la série

$$f_1(x, y, \ldots) + f_2(x, y, \ldots) + \ldots + f_g(x, y, \ldots) + \ldots,$$

absolument convergente dans toute l'étendue de l'espace donné, y est en outre une fonction olotrope de $x, y, \ldots$, *et les olomètres de cette dernière en* $(x_0, y_0, \ldots)$ *sont au moins égaux à* $\delta'_x, \delta'_y, \ldots$.

Cette somme $f(x, y, \ldots)$ se différentie d'ailleurs terme à terme, comme s'il s'agissait d'une série entière ou d'un simple polynôme.

Enfin, pour obtenir le développement, à partir des valeurs particulières $x_0, y_0, \ldots$, soit de la fonction $f(x, y, \ldots)$, soit de quelqu'une de ses dérivées, il suffit de considérer la série ayant pour termes les développements correspondants soit des fonctions (20), soit de leurs dérivées semblables, de la transformer en une autre (absolument convergente) procédant suivant les termes élémentaires des séries partielles, et d'opérer dans la série résultante la réduction des termes semblables en $x - x_0, y - y_0, \ldots$.

(*A suivre.*)