ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RIQUIER

Sur les principes de la théorie générale des fonctions (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 8 (1891), p. 141-172
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__141_0>

SUR LES PRINCIPES

DE LA

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS

(SUITE),

PAR M. RIQUIER,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN.

Expressions calculables par cheminement.

29. Outre les fonctions proprement dites, précédemment considérées ([1]), on rencontre sans cesse, dans l'Analyse moderne, certaines expressions, dites *calculables par cheminement*, dont l'importance est capitale. Nous proposerons à cet égard une théorie qui nous semble être à la fois rigoureuse et conforme à la nature du rôle analytique de ces expressions. En comparant notre manière de voir à celle de M. Méray ([2]), le lecteur pourra constater aisément et l'identité du point de départ, et les différences notables qui séparent ensuite les deux théories.

30. Une série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., admettant quelque système de rayons de convergence, définit, comme nous l'avons dit au n° 13, une fonction olotrope de x, y, ..., dans toute l'étendue de l'espace où la convergence subsiste. Donnons à ce développement la forme de Taylor; puis, désignant par x_1, y_1, ... des valeurs particulières comprises entre les limites de convergence, introduisons, dans ce développement et dans toutes ses dérivées, l'hypothèse numérique $x = x_1, y = y_1, \ldots$. Le calcul des sommes de ces divers développe-

---

([1]) *Voir* les numéros de février et mars 1891.

([2]) *Nouveau Précis*, p. 91 à 98.

ments, une fois effectué, nous permettra évidemment de construire celui de notre fonction à partir des nouvelles valeurs initiales x_1, y_1, ... : ce deuxième développement de Taylor, entier en $x - x_1$, $y - y_1$, ..., admettra certainement quelque système de rayons de convergence, et nous dirons, pour abréger, qu'il *se raccorde* avec le précédent.

Cela posé, considérons un *chemin brisé* ayant pour *sommets* successifs les points

$$(21) \qquad \begin{cases} (a)_0 = (x_0, y_0, \ldots), \\ (a)_1 = (x_1, y_1, \ldots), \\ (a)_2 = (x_2, y_2, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (a)_g = (x_g, y_g, \ldots), \\ (A) = (X, Y, \ldots). \end{cases}$$

Si, à partir de ces sommets successifs, on peut construire autant de développements dont chacun se raccorde avec le précédent, et dont le premier ne soit autre que le développement donné, le chemin brisé (21) sera dit *praticable* relativement à celui-ci. Ainsi, il faudra d'abord que le développement donné admette des rayons de convergence respectivement supérieurs aux modules des différences $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, ..., ce qui permettra de construire, à partir des valeurs initiales x_1, y_1, ..., un deuxième développement se raccordant avec le premier; il faudra ensuite que ce nouveau développement admette des rayons de convergence supérieurs aux modules des différences $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, ..., ce qui permettra de construire, à partir des valeurs initiales x_2, y_2, ..., un troisième développement se raccordant avec le second; et ainsi de suite jusqu'au développement construit à partir de x_g, y_g, ..., qui doit admettre des rayons de convergence supérieurs aux modules des différences $X - x_g$, $Y - y_g$, ..., afin qu'un dernier développement puisse être finalement construit à partir de X, Y, ...

Nous nommerons, avec M. Méray, série ou développement *fondamental* la série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., choisie comme base des calculs précédents, et nous affecterons de la même qualification les premières valeurs x_0, y_0, ... des variables indépendantes, ainsi que le point $(a)_0$ dont elles sont les coordonnées imaginaires.

Nous aurons plus d'une fois à exprimer que deux chemins brisés de même extrémité, praticables par rapport à un développement fondamental donné, conduisent au même développement final : en désignant par

$$(a)_0\,(a)_1\,(a)_2\,\ldots\,(a)_g\,(\mathrm{A}),$$
$$(a)_0\,(a')_1\,(a')_2\,\ldots\,(a')_{g'}\,(\mathrm{A})$$

les deux chemins brisés dont il s'agit, nous exprimerons cette équivalence à l'aide de la notation

$$\Psi\,[(a)_0\,(a)_1\,(a)_2\,\ldots\,(a)_g\,(\mathrm{A})] = \Psi\,[(a)_0\,(a)_1\,(a)\,\ldots\,(a')_{g'}\,(\mathrm{A})].$$

31. *Si, par rapport à un développement fondamental donné, deux chemins brisés de même extrémité,*

$$(a)_0\,(a)_1\,(a)_2\,\ldots\,(a)_g\,(\mathrm{A}), \tag{22}$$
$$(a)_0\,(a')_1\,(a')_2\,\ldots\,(a')_{g'}\,(\mathrm{A}), \tag{23}$$

sont praticables et équivalents; si de plus, le chemin brisé

$$(a)_0\,(a)_1\,(a)_2\,\ldots\,(a)_g\,(\mathrm{A})\,(\alpha)_1\,\ldots\,(\alpha)_k,$$

obtenu par un certain allongement de (22), *est praticable: le chemin brisé*

$$(a)_0\,(a')_1\,(a')_2\,\ldots\,(a')_{g'}\,(\mathrm{A})\,(\alpha)_1\,\ldots\,(\alpha)_k,$$

obtenu par le même allongement de (23), *est praticable comme le précédent, et conduit au même développement final.*

32. Étant donné un développement fondamental, entier par rapport aux n différences $x - x_0$ $y - y_0$, ..., nous dirons qu'un arc continu, tracé dans l'espace à $2n$ dimensions (3) (6), part du point fondamental (30), lorsqu'aux valeurs initiales s_0, t_0, ... des indéterminées réelles s, t, ..., dont il dépend, correspondront, pour x, y, ..., les coordonnées imaginaires x_0, y_0, ... du point dont il s'agit.

Si, à partir de $(s_0, t_0, \ldots)$, on inscrit dans l'arc donné un chemin quelconque

$$(s_0, t_0, \ldots),\quad (s_1, t_1, \ldots),\quad \ldots \tag{24}$$

(5), la suite formée avec les systèmes de valeurs de $x, y, \ldots$, qui correspondent à ses divers sommets, constitue, dans l'espace à $2n$

dimensions, un chemin brisé (30)

$$(x_0, y_0, \ldots), \quad (x_1, y_1, \ldots), \quad \ldots, \tag{25}$$

ayant son origine au point fondamental. Nous dirons de même, en pareil cas, que le chemin inscrit (24) a son origine au point fondamental, et qu'il est *praticable* ou non par rapport au développement donné, suivant que le chemin (25) jouit ou non de cette propriété (30).

Cela posé, *si l'on peut assigner une constante positive* ρ *jouissant de la propriété que les divers chemins de régulateur* ρ (5), *inscrits dans l'arc en question à partir du point fondamental, soient tous praticables, les coefficients du développement final auquel on est conduit à l'extrémité d'un semblable chemin dépendent uniquement des valeurs de* s, t, ... *qui en fournissent le dernier sommet.*

Nous démontrerons comme il suit cette proposition capitale :

I. *Considérons un développement fondamental admettant les rayons de convergence* R_x, R_y, ..., *et un chemin brisé* (30)

$$\begin{aligned}
(a)_0 &= (x_0, y_0, \ldots),\\
(a)_1 &= (x_0 + h_1, y_0 + k_1, \ldots) = (x_1, y_1, \ldots),\\
(a)_2 &= (x_1 + h_2, y_1 + k_2, \ldots) = (x_2, y_2, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(a)_p &= (x_{p-1} + h_p, y_{p-1} + k_p, \ldots) = (x_p, y_p, \ldots),
\end{aligned}$$

ayant son origine au point fondamental $(x_0, y_0, \ldots)$: *si les accroissements successivement attribués aux variables vérifient les relations*

$$\left\{\begin{array}{l}
\operatorname{mod} h_1 + \operatorname{mod} h_2 + \ldots + \operatorname{mod} h_p < R_x,\\
\operatorname{mod} k_1 + \operatorname{mod} k_2 + \ldots + \operatorname{mod} k_p < R_y,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}\right. \tag{26}$$

les deux chemins

$$(a)_0 (a)_1 (a)_2 \ldots (a)_p,$$
$$(a)_0 (a)_p$$

sont praticables et conduisent au même développement final.

On sait (13, III) que la somme du développement fondamental définit une fonction $f(x, y, \ldots)$, olotrope à l'intérieur des cercles de rayons R_x, R_y, ... décrits des points $x_0, y_0, \ldots$ comme centres. Cela étant, si l'on désigne par q un entier quelconque de la suite $1, 2, \ldots, p$, les relations (26) donnent immédiatement

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod}(x_q - x_0) = \operatorname{mod}(h_1 + h_2 + \ldots + h_q) < R_x,\\
&\operatorname{mod}(y_q - y_0) = \operatorname{mod}(k_1 + k_2 + \ldots + k_q) < R_y,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

dès lors, les points $(a)_0$, $(a)_1$, $(a)_2$, ..., $(a)_p$ sont tous situés dans un espace où la fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope, et la quantité

$$f(x_{q-1} + h, y_{q-1} + k, \ldots)$$

est développable en une série entière par rapport à h, k, ..., tant que les modules de ces accroissements sont respectivement inférieurs aux différences

$$\begin{aligned}
&R_x - \operatorname{mod}(x_{q-1} - x_0) = R_x - \operatorname{mod}(h_1 + \ldots + h_{q-1}),\\
&R_y - \operatorname{mod}(y_{q-1} - y_0) = R_y - \operatorname{mod}(k_1 + \ldots + k_{q-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

(13, III). Comme on a précisément, en vertu de (26),

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod}(h_1 + h_2 + \ldots + h_{q-1}) + \operatorname{mod} h_q < R_x,\\
&\operatorname{mod}(k_1 - k_2 + \ldots + k_{q-1}) + \operatorname{mod} k_q < R_y,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les valeurs

$$x_q = x_{q-1} + h_q, \qquad y_q = y_{q-1} + k_q, \qquad \ldots$$

se trouvent certainement dans les limites où $f(x, y, \ldots)$ est développable par la formule de Taylor à partir des valeurs $x_{q-1}, y_{q-1}, \ldots$.

Cela posé, si l'on considère le développement de $f(x, y, \ldots)$ à partir des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$, l'hypothèse numérique $x = x_1$, $y = y_1, \ldots$, introduite dans ce développement et dans toutes ses dérivées, fournira, à des facteurs numériques près, les coefficients du développement de $f(x, y, \ldots)$ à partir de $x_1, y_1, \ldots$ et permettra de construire le développement dont il s'agit. Ce deuxième développement une fois connu, on en déduira, par le même mécanisme, le développement de $f(x, y, \ldots)$ à partir du troisième sommet $(x_2, y_2, \ldots)$, et ainsi de suite jusqu'au sommet final $(x_p, y_p, \ldots)$. Le chemin

$$(a)_0\,(a)_1\,(a)_2\ldots(a)_p$$

est donc praticable et équivalent au chemin direct $(a)_0\,(a)_p$.

II. *Tout chemin brisé* (30) *praticable par rapport à un développement donné, et ayant tous ses sommets dans les limites de convergence du développement dont il s'agit, équivaut au chemin direct formé avec les deux sommets extrêmes.*

1° Le point ci-dessus énoncé est exact, lorsque le nombre des sommets est égal à 3.

En désignant par $f(x, y, \ldots)$ la somme de notre développement fondamental, entier en $x - x_0, y - y_0, \ldots$, et par

$$\begin{aligned}(a)_0 &= (x_0, y_0, \ldots),\\ (a)_1 &= (x_1, y_1, \ldots),\\ (\mathrm{A}) &= (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots),\end{aligned}$$

les trois sommets de notre chemin brisé, on observera tout d'abord que le développement auquel on est conduit en $(a)_1$ coïncide avec celui de $f(x, y, \ldots)$ effectué à partir des valeurs $x_1, y_1, \ldots$.

Si l'on considère maintenant les différences

$$\operatorname{mod} x_1 - \operatorname{mod}\mathrm{X},\quad \operatorname{mod} y_1 - \operatorname{mod}\mathrm{Y},\quad \ldots,$$

un certain nombre d'entre elles,

$$\operatorname{mod} x_1 - \operatorname{mod}\mathrm{X},\quad \ldots,$$

sont $\geqq 0$, tandis que les autres,

$$\operatorname{mod} y_1 - \operatorname{mod}\mathrm{Y},\quad \ldots,$$

sont $\leqq 0$. Cela étant, les deux arcs continus

$$(27)\qquad \begin{cases} x = x_1 + (X - x_1)s, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y = y_1, \\ \dots\dots; \end{cases}$$

$$(28)\qquad \begin{cases} x = X, \\ \dots\dots, \\ y = y_1 + (Y - y_1)t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

dépendant chacun d'une indéterminée assujettie à varier de o à 1, sont entièrement situés dans les limites de convergence de la série proposée. Effectivement, le premier de ces arcs commençant en $(x_1, y_1, \ldots)$, le second se terminant en $(X, Y, \ldots)$, et les points $(x_1, y_1, \ldots)$, $(X, Y, \ldots)$ se trouvant compris l'un et l'autre dans les limites en question, il suffit de faire voir que les différences

$$\operatorname{mod} x_1 - \operatorname{mod} x, \quad \ldots$$

sont $\geqq 0$ sur toute l'étendue du premier arc, et que les différences

$$\operatorname{mod} Y - \operatorname{mod} y, \quad \ldots$$

jouissent de la même propriété sur toute l'étendue du second. Or, si l'on tient compte des inégalités

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod} x_1 \geqq \operatorname{mod} X, \quad \ldots, \\ &\operatorname{mod} y_1 \leqq \operatorname{mod} Y, \quad \ldots, \end{aligned}$$

les relations évidentes

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod} x_1 - (1-s)\operatorname{mod} x_1 - s\operatorname{mod} x_1 = 0, \quad \ldots, \\ &\operatorname{mod} Y - (1-t)\operatorname{mod} Y - t\operatorname{mod} Y = 0, \quad \ldots \end{aligned}$$

donnent successivement, les premières

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod} x_1 - (1-s)\operatorname{mod} x_1 - s\operatorname{mod} X \geqq 0, \quad \ldots, \\ &\operatorname{mod} x_1 - \operatorname{mod}[(1-s)x_1 + sX] \geqq 0, \quad \ldots, \\ &\operatorname{mod} x_1 - \operatorname{mod}[x_1 + (X - x_1)s] \geqq 0, \quad \ldots, \end{aligned}$$

les dernières

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod} Y-(1-t) \operatorname{mod} y_1-t \operatorname{mod} Y \gtreqless 0, \quad \ldots,\\
&\operatorname{mod} Y-\operatorname{mod}[(1-t) y_1+t Y] \gtreqless 0, \quad \ldots,\\
&\operatorname{mod} Y-\operatorname{mod}[y_1+(Y-y_1) t] \gtreqless 0, \quad \ldots .
\end{aligned}$$

Cela posé, il résulte du n° 19 que la fonction $f(x, y, \ldots)$ admet sur toute l'étendue de ces deux arcs des olomètres au moins égaux à certaines constantes positives δ_x, δ_y, ... Formons alors, avec o et 1 comme termes extrêmes, deux suites croissantes

$$\begin{array}{llllll}
0, & s', & s'', & \ldots, & s^{(h)}, & 1, \\
0, & t', & t'', & \ldots, & t^{(k)}, & 1
\end{array}$$

telles que, pour chacun des deux chemins inscrits qui leur correspondent respectivement sur les arcs (27) et (28), les différences formées avec les coordonnées imaginaires semblables de deux sommets consécutifs quelconques présentent des modules respectivement inférieurs à δ_x, δ_y, ... (7). Puis, considérant les deux chemins brisés qui, dans l'espace à $2n$ dimensions, correspondent respectivement à ces deux chemins inscrits ([1]), observons que le sommet final du premier coïncide avec le sommet initial du second, que le chemin brisé résultant de leur juxtaposition bout à bout a son sommet initial en $(x_1, y_1, \ldots)$, son sommet final en $(X, Y, \ldots)$, et que, si l'on prend pour développement fondamental celui de $f(x, y, \ldots)$ effectué à partir des valeurs $x_1, y_1, \ldots$, le parcours total de ce dernier chemin fait retomber de toute nécessité sur le développement de $f(x, y, \ldots)$, effectué à partir des valeurs X, Y, ... Assurons-nous enfin, chose extrêmement aisée, que, sur le chemin brisé dont il s'agit, la somme des modules des accroissements successivement attribués à chaque variable est égale à l'une ou à l'autre des quantités

$$\operatorname{mod}(X-x_1), \quad \operatorname{mod}(Y-y_1), \quad \ldots,$$

suivant qu'il s'agit de l'une ou de l'autre des variables x, y, ... Comme, en vertu de notre hypothèse, le point $(X, Y, \ldots)$ est situé dans les limites de convergence du développement qui correspond au

([1]) Voir le début du présent numéro.

sommet initial $(x_1, y_1, \ldots)$, on pourra passer directement de celui-ci au sommet final $(X, Y, \ldots)$ (I).

En conséquence, le développement auquel conduit, en

$$(A) = (X, Y, \ldots),$$

le chemin donné $(a)_0 (a)_1 (A)$ coïncide avec le développement de $f(x, y, \ldots)$, effectué à partir des valeurs X, Y, ... Il équivaut donc au chemin direct $(a)_0 (A)$.

2° Le point énoncé au début du présent alinéa est exact, quel que soit le nombre des sommets de notre chemin brisé.

Si l'on désigne, en effet, par $(a)_0$, $(a)_1$, $(a)_2$, ..., $(a)_g$, (A) les sommets successifs du chemin dont il s'agit, on a, en vertu de 1°,

$$\Psi[(a)_0 (a)_1 (a)_2] = \Psi[(a)_0 (a)_2]$$

(30), d'où l'on déduit (31)

$$\Psi[(a)_0 (a)_1 (a)_2 (a)_3] = \Psi[(a)_0 (a)_2 (a)_3].$$

Une nouvelle application de 1° donne alors

$$\Psi[(a)_0 (a)_2 (a)_3] = \Psi[(a)_0 (a)_3],$$

d'où, par comparaison avec la relation qui précède,

$$\Psi[(a)_0 (a)_1 (a)_2 (a)_3] = \Psi[(a)_0 (a)_3].$$

En continuant ce raisonnement de proche en proche, on tombera finalement sur la relation

$$\Psi[(a)_0 (a)_1 (a)_2 \ldots (a)_g (A)] = \Psi[(a)_0 (A)].$$

III. *La proposition formulée par notre énoncé général est exacte, si l'arc dépend d'une seule variable s.*

1° En désignant par s_0 et S les valeurs initiale et finale de la variable dont il s'agit, tout chemin inscrit

$$s_0 s_1 s_2 \ldots,$$

partant du point fondamental, se compose d'une suite limitée de fragments alternativement *directs* et *inverses,* c'est-à-dire tels, que les différences formées en retranchant chaque valeur de s de la suivante aient toutes le signe de $S - s_0$, s'il s'agit d'un fragment de rang impair, et le signe contraire, s'il s'agit d'un fragment de rang pair.

2° Deux chemins inscrits de régulateur ρ, composés l'un et l'autre d'un simple fragment direct, et dont l'extrémité finale correspond, pour tous deux, à une même valeur de s, conduisent au même développement final.

Soient

$$s_0 s'_1 s'_2 \ldots s'_{g'} S^{(1)}, \tag{29}$$

$$s_0 s''_1 s''_2 \ldots s''_{g''} S^{(1)} \tag{30}$$

les deux chemins dont il s'agit. Si, entre les valeurs extrêmes s_0, $S^{(1)}$, des deux suites précédentes, on range par ordre de grandeur les valeurs $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{g'}, s''_1, s''_2, \ldots, s''_{g''}$, on obtient un troisième chemin inscrit

$$s_0 \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{g'+g''} S^{(1)} \tag{31}$$

équivalent, comme nous allons le voir, à chacun des proposés.

Parcourons, en effet, la suite (31), jusqu'à ce que nous y trouvions le terme s'_1, et soit, pour fixer les idées,

$$s_0 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \tag{32}$$

(où $\sigma_4 = s'_1$) la portion de suite ainsi obtenue. Deux termes quelconques de cette suite partielle présentant une différence numériquement inférieure à ρ, il résulte de notre hypothèse que le chemin (32) est praticable et a tous ses sommets situés dans les limites de convergence du développement initial. Dès lors, en vertu de l'alinéa II, la portion $s_0 s'_1$ du chemin (29) équivaut à la portion du chemin (31), qui commence et finit aux mêmes valeurs de s, et l'on verra de proche en proche qu'il en est de même des portions successives

$$s'_1 s'_2, \quad s'_2 s'_3, \quad \ldots, \quad s'_{g'} S^{(1)}.$$

Le chemin (31) est donc équivalent à (29) et, en vertu d'un raisonnement semblable, à (30); ces derniers sont donc équivalents entre eux, ce qu'il s'agissait de prouver.

3° Un chemin inscrit de régulateur ρ, composé de k fragments alternativement directs et inverses, équivaut à tout chemin direct de même régulateur dont l'extrémité finale correspond à la même valeur de s.

Supposons d'abord $k = 2$, et soit

$$(33) \qquad s_0 \ldots S^{(1)} \ldots S^{(2)}$$

le chemin inscrit dont il s'agit. La valeur $S^{(2)}$ étant comprise dans l'intervalle de s_0 à $S^{(1)}$, on peut (2°), sans altérer les coefficients du développement final, intercaler à la place voulue la valeur $S^{(2)}$ dans la portion directe du chemin (33), et considérer celui-ci comme composé des trois fragments

$$s_0 \ldots S^{(2)} \ldots S^{(1)} \ldots S^{(2)},$$

les deux premiers directs, le troisième inverse. A ce dernier, on peut en outre substituer un fragment formé avec les mêmes valeurs de s que le second, mais dans l'ordre inverse; car les deux fragments que l'on remplace ainsi l'un par l'autre constituent deux chemins directs, et par suite équivalents (2°), relativement à l'arc partiel qui commence à $S^{(1)}$ et finit à $S^{(2)}$. Désignant alors par

$$S^{(2)}, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_g, \quad S^{(1)}$$

les valeurs successives de s qui constituent le deuxième fragment, il est aisé de se convaincre que les deux chemins inscrits

$$\begin{gathered} s_0 \ldots S^{(2)} s_1 s_2 \ldots s_{g-1} s_g S^{(1)} s_g s_{g-1} \ldots s_2 s_1 S^{(2)}, \\ s_0 \ldots S^{(2)} \end{gathered}$$

sont équivalents : car l'application alternative de l'alinéa précédent (II) et du n° 31 nous donne

$$\begin{aligned} \Psi[s_0 \ldots S^{(2)} s_1 s_2 \ldots s_{g-1} s_g S^{(1)} s_g] &= \Psi[s_0 \ldots S^{(2)} s_1 s_2 \ldots s_{g-1} s_g], \\ \Psi[s_0 \ldots S^{(2)} s_1 s_2 \ldots s_{g-1} s_g S^{(1)} s_g s_{g-1}] &= \Psi[s_0 \ldots S^{(2)} s_1 s_2 \ldots s_{g-1} s_g s_{g-1}] \\ &= \Psi[s_0 \ldots S^{(2)} s_1 s_2 \ldots s_{g-1}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \end{aligned}$$

et nous conduit ainsi de proche en proche à l'équivalence dont il s'agit. Le chemin (33) équivaut donc à quelque chemin direct de régulateur ρ allant de s_0 en $S^{(2)}$, et, par suite (2°), à tout chemin direct remplissant cette double condition.

Il nous suffit maintenant de faire voir que, si le point en question (3°) est vrai pour un chemin composé de $k-1$ fragments, il l'est encore pour un chemin composé de k fragments, par exemple

$$s_0 \ldots S^{(1)} \ldots S^{(2)} \ldots \text{etc.} \ldots S^{(k-1)} \ldots S^{(k)}.$$

Désignons, à cet effet, par

$$s_0 \ldots S^{(k-1)},$$
$$s_0 \ldots S^{(k)}$$

deux chemins directs, de régulateur ρ, allant respectivement de s_0 à $S^{(k-1)}$ et de s_0 à $S^{(k)}$. On a, d'une part, en vertu de ce qui est admis,

$$\Psi[s_0 \ldots S^{(1)} \ldots S^{(2)} \ldots \text{etc.} \ldots S^{(k-1)}] = \Psi[s_0 \ldots S^{(k-1)}],$$

d'où (31)

$$\Psi[s_0 \ldots . S^{(1)} \ldots S_2 \ldots \text{etc.} \ldots S^{(k-1)} \ldots S^{(k)}] = \Psi[s_0 \ldots S^{(k-1)} \ldots S^{(k)}];$$

en se reportant, d'autre part, soit à 2°, soit au cas déjà examiné dans 3°, suivant que le dernier fragment $S^{(k-1)} \ldots S^{(k)}$ est direct ou inverse, on a la relation

$$\Psi[s_0 \ldots S^{(k-1)} \ldots S^{(k)}] = \Psi[s_0 \ldots S^{(k)}],$$

qu'il suffit de comparer avec la précédente pour en déduire le point que nous avons en vue.

IV. *Les hypothèses étant les mêmes que dans notre énoncé général, un chemin inscrit de régulateur ρ qui contient le fragment*

$$(34) \qquad \left\{\begin{array}{l} (\sigma, t_1, \ldots), \\ (\sigma, t_2, \ldots), \\ (\mathfrak{s}, t_3, \ldots) \end{array}\right.$$

équivaut au chemin inscrit (de même régulateur) que l'on déduit du premier en remplaçant σ par $\mathfrak{s}$ dans le sommet intermédiaire du fragment (34).

Effectivement, le troisième chemin inscrit que l'on déduit du premier en y remplaçant le fragment (34) par

$$(35) \qquad \left\{\begin{array}{l} (\sigma, t_1, \ldots), \\ (\sigma, t_2, \ldots), \\ (\mathfrak{s}, t_2, \ldots), \\ (\mathfrak{s}, t_3, \ldots), \end{array}\right.$$

est nécessairement praticable, puisqu'il admet, comme les précédents, le régulateur ρ. D'un autre côté, le second et le troisième sommet du fragment (35) sont compris dans les limites de convergence du développement correspondant au premier; le troisième et le quatrième, dans les limites de convergence du développement correspondant au second. On peut donc, en vertu de l'alinéa II, supprimer à volonté soit le second, soit le troisième sommet du fragment (35), ce qui fait retomber, soit sur le fragment

$$\begin{cases} (\sigma, t_1, \ldots), \\ (\mathfrak{s}, t_2, \ldots), \\ (\mathfrak{s}, t_3, \ldots), \end{cases}$$

soit sur le fragment (34).

V. *Notre proposition est exacte dans le cas général où l'arc donné dépend de p variables s, t, ...*

Si l'on a égard à l'alinéa III, il suffit évidemment de faire voir qu'en la supposant exacte pour un arc à $p-1$ variables, elle l'est nécessairement encore pour l'arc donné.

A cet effet, désignons par $(s_0, t_0, \ldots)$ le point initial de l'arc, et par $(\sigma, \tau, \ldots)$ un système de valeurs arbitrairement choisies dans les intervalles respectifs où les p variables $s, t, \ldots$ sont assujetties à se mouvoir. Si l'on considère l'arc à $p-1$ variables, obtenu en attribuant à s la valeur fixe s_0 et en faisant mouvoir les autres variables $t, \ldots$ dans ceux des intervalles précédents qui leur correspondent, tous les chemins inscrits de régulateur ρ ayant leur origine en $(t_0, \ldots)$ sont praticables, et, dès lors, en vertu de ce qui est admis, conduisent en $(\tau, \ldots)$ à un seul et même développement final. Si, prenant ensuite ce dernier comme développement fondamental, on considère l'arc à une seule variable obtenu en attribuant à $t, \ldots$ les valeurs fixes $\tau, \ldots$ et en faisant mouvoir s dans l'intervalle qui lui correspond, tous les chemins inscrits de régulateur ρ ayant leur origine en s_0 sont encore praticables, et dès lors (III) conduisent, en σ, à un seul et même développement final. Or, comme nous allons le faire voir, le parcours d'un chemin quelconque de régulateur ρ, inscrit dans l'arc donné de $(s_0, t_0, \ldots)$ à $(\sigma, \tau, \ldots)$, fait nécessairement retomber sur le développement dont il s'agit.

Effectivement, soit

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{l}(s_0,\ t_0,\ \ldots)\\(s_1,\ t_1,\ \ldots)\\(s_2,\ t_2,\ \ldots)\\(s_3,\ t_3,\ \ldots)\\(\sigma,\ \tau,\ \ldots)\end{array}\right.$$

un semblable chemin. Le chemin inscrit

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(s_0,\ t_0,\ \ldots)\\(s_0,\ t_1,\ \ldots)\\(s_0,\ t_2,\ \ldots)\\(s_0,\ t_3,\ \ldots)\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}(s_0,\ \tau,\ \ldots)\\(s_1,\ \tau,\ \ldots)\\(s_2,\ \tau,\ \ldots)\\(s_3,\ \tau,\ \ldots)\\(\sigma,\ \tau,\ \ldots),\end{array}\right.\end{array}\right.$$

déduit du précédent à l'aide d'un mécanisme facile à apercevoir, admet aussi le régulateur ρ, et l'on voit sans peine qu'il lui est équivalent : car on peut, en vertu de l'alinéa IV, remplacer s_0 par s_1 dans la cinquième ligne du Tableau (37), puis faire successivement la même substitution dans la quatrième, la troisième et la seconde ligne. Considérant alors le tableau résultant, on pourra de même remplacer s_1 par s_2 dans sa sixième, sa cinquième, sa quatrième et enfin sa troisième ligne. En continuant ainsi et réunissant en un seul les derniers sommets du tableau final, qui coïncident avec $(\sigma, \tau, \ldots)$, on retombera sur le tableau (36).

Il suffit maintenant d'observer que le chemin (37) se compose de deux fragments consécutifs respectivement inscrits dans l'arc à $p-1$ variables et dans l'arc à une variable dont nous avons parlé ci-dessus, le premier de $(t_0, \ldots)$ à $(\tau, \ldots)$, le second de s_0 à σ.

33. Lorsque les hypothèses formulées par l'énoncé du numéro précédent se trouvent réalisées, nous dirons que l'arc donné est *praticable*,

avec le *régulateur* ρ, par rapport au développement fondamental. A tout point de cet arc, c'est-à-dire *à tout système de valeurs des indéterminées réelles dont il dépend*, on peut alors faire correspondre un développement déterminé, en s'astreignant à ne considérer que les chemins inscrits de régulateur ρ parmi ceux qui vont de l'origine de l'arc au point considéré ; le parcours d'un semblable chemin se nomme, pour abréger, le *parcours de l'arc*, effectué de l'origine au point dont il s'agit. D'ailleurs, la proposition formulée à l'alinéa II du numéro précédent permet de supprimer parfois tels ou tels sommets du chemin inscrit, ce qui abrège évidemment l'opération.

34. En supposant, comme de raison, que le développement fondamental admette quelque système de rayons de convergence, tout arc continu, tracé à partir du point fondamental dans des limites suffisamment restreintes, est praticable. Considérons, en effet, un arc compris dans les limites de convergence du développement fondamental; désignons par $f(x, y, \ldots)$ la somme de ce dernier, par $\delta_x, \delta_y, \ldots$ les olomètres de $f(x, y, \ldots)$ sur l'arc dont il s'agit (19), enfin par ρ une quantité positive telle que, sur tout chemin inscrit de régulateur ρ, les différences formées avec les coordonnées imaginaires semblables de deux sommets consécutifs quelconques présentent des modules respectivement inférieurs à $\delta_x, \delta_y, \ldots$ (7) : cela posé, on voit immédiatement que l'arc donné est praticable avec le régulateur ρ (33).

D'un autre côté, deux arcs continus, praticables par rapport à un même développement fondamental et respectivement terminés en deux points de mêmes coordonnées imaginaires, peuvent conduire, soit au même développement final (comme cela aurait lieu, par exemple, si les deux arcs étaient entièrement situés dans les limites de convergence du développement fondamental), soit, au contraire, à deux développements distincts.

Nous dirons, en conséquence, qu'un développement fondamental donné (admettant quelque système de rayons de convergence) définit, non pas une fonction, mais une *pseudo-fonction* (1) de $x, y, \ldots$; nous dirons encore que cette dernière est *calculable* suivant tel ou tel che-

(1) Le terme de *pseudo-fonction* est emprunté à M. Méray.

min, brisé ou continu, lorsque le chemin dont il s'agit sera praticable par rapport au développement donné (30) (33).

35. *Si l'on substitue à un développement fondamental quelconque sa dérivée d'ordres partiels* p, q, ..., *tout chemin brisé praticable* (30) *relativement aux anciennes données l'est encore relativement aux nouvelles, et les développements successifs obtenus dans le second cas sont les dérivées d'ordres* p, q, ... *de ceux que l'on obtient dans le premier.*

Il en résulte que *la pseudo-fonction définie par les nouvelles données est calculable* (34), *avec le même régulateur, sur tout arc continu où la première est supposée l'être, et que le développement de la seconde en un point quelconque de cet arc* (33) *est la dérivée d'ordres* p, q, ... *du développement correspondant de la première.*

Cette deuxième pseudo-fonction se nomme la *dérivée d'ordres partiels* p, q, ... de la proposée. En tout point d'un arc praticable, les valeurs d'une pseudo-fonction donnée et de ses diverses dérivées sont, aux facteurs numériques connus près, les coefficients du développement correspondant de la pseudo-fonction donnée.

Il est clair que, si deux arcs praticables de même extrémité conduisent, pour une pseudo-fonction donnée, à un même développement final, ces deux arcs jouissent de la même propriété relativement à une dérivée quelconque.

36. Si l'on désigne par

$$f(u, v, \ldots) \tag{38}$$

la somme d'un développement entier en $u - u_0$, $v - v_0$, ..., et par

$$U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots \tag{39}$$

les sommes de développements entiers en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., ayant respectivement u_0, v_0, ... pour termes constants, on sait (27) que, pour des valeurs de x, y, ... suffisamment voisines de x_0, y_0, ..., l'expression

$$F(x, y, \ldots) = f[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots] \tag{40}$$

peut elle-même être mise sous forme d'un développement entier en

$x - x_0, y - y_0, \ldots$. Ces divers développements, considérés conjointement avec le point fondamental $(u_0, v_0, \ldots)$ s'il s'agit du premier, ou avec le point fondamental $(x_0, y_0, \ldots)$ s'il s'agit des suivants, définissent autant de pseudo-fonctions, auxquelles nous attribuerons les dénominations respectives de pseudo-fonction *composante*, pseudo-fonctions *simples*, pseudo-fonction *composée*.

Avant d'énoncer la proposition générale relative aux pseudo-fonctions composées, il importe d'observer que la valeur variable acquise par une pseudo-fonction donnée de $x, y, \ldots$ aux divers points d'un arc continu praticable, a pour éléments (6) deux fonctions continues (7*) des indéterminées réelles $s, t, \ldots$ dont l'arc dépend. Effectivement, si l'on désigne par $\sigma, \tau, \ldots$ des valeurs particulières attribuées à $s, t, \ldots$, et par $\xi, \eta, \ldots$ les coordonnées imaginaires du point correspondant de l'arc donné, la valeur de notre pseudo-fonction, pour des valeurs de $s, t, \ldots$ suffisamment voisines de $\sigma, \tau, \ldots$, s'obtiendra en substituant aux $2n$ éléments de $x - \xi, y - \eta, \ldots$, dans un certain développement $G(x, y, \ldots)$, entier par rapport à ces différences, $2n$ fonctions continues de $s, t, \ldots$. Dès lors, pour des valeurs numériquement assez petites de $s - \sigma, t - \tau, \ldots$, les modules de $x - \xi, y - \eta, \ldots$ tomberont au-dessous de toute quantité donnée, par conséquent aussi celui de la différence $G(x, y, \ldots) - G(\xi, \eta, \ldots)$, et, à plus forte raison, les valeurs numériques des deux éléments de cette dernière.

D'après cela, *si, dans l'espace indéfini relatif aux variables imaginaires $x, y, \ldots$ (6), on trace, à partir du point fondamental $(x_0, y_0, \ldots)$, un arc continu praticable pour les diverses pseudo-fonctions simples (39), le point ayant pour coordonnées imaginaires les valeurs correspondantes de celles-ci décrit, dans l'espace indéfini relatif aux variables imaginaires $u, v, \ldots$, un arc continu dépendant des mêmes indéterminées réelles que le premier.*

37. Cela posé, *si les diverses pseudo-fonctions simples* (39) *sont toutes calculables sur un même arc continu* (*a*), *et si la composante* (38) *jouit de la même propriété sur l'arc correspondant* (A) *décrit par le point*

$$[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots]$$

(36), *la pseudo-fonction composée* (40) *est calculable sur l'arc* (*a*), *et son* *développement en un point quelconque de celui-ci s'obtient en combinant les développements correspondants* (33) *des pseudo-fonctions simples et composante à l'aide du mécanisme décrit au n°* 27.

Pour abréger, nous ne ferons guère qu'énoncer successivement les divers points à démontrer.

I. *Lorsqu'une pseudo-fonction de x, y, ... est calculable sur un arc donné, on peut assigner certaines constantes positives δ_x, δ_y, ..., que son développement en un point variable de l'arc* (33) *ne cesse d'admettre comme rayons de convergence.*

Le fait en question se démontre par des raisonnements tout à fait analogues à ceux du n° 18, et nous l'exprimerons d'une manière plus brève en disant que notre pseudo-fonction admet, sur toute l'étendue de l'arc donné, des rayons de convergence au moins égaux à δ_x, δ_y, ...

En désignant par s, t, ... les indéterminées réelles dont dépend l'arc donné, soit ω une constante positive telle que, pour deux points

$$(s', t', \ldots), \quad (s'', t'', \ldots),$$

arbitrairement choisis sur cet arc, les différences formées avec les coordonnées imaginaires semblables présentent des modules respectivement inférieurs à δ_x, δ_y, ..., aussitôt que les différences $s''-s'$, $t''-t'$, ... sont numériquement inférieurs à ω (7) : il n'est pas inutile d'observer que *la constante positive ω, ainsi déterminée, peut servir de régulateur à la pseudo-fonction sur l'arc donné.*

II. *Lorsqu'une pseudo-fonction de x, y, ..., calculable sur un arc donné, admet, sur toute l'étendue de cet arc, les rayons de convergence δ_x, δ_y, ...* (I), *respectivement supérieurs aux constantes positives δ'_x, δ'_y, ..., on peut assigner une dernière constante positive au-dessous de laquelle tombe sans cesse le module du développement de la pseudo-fonction, quels que soient et le point de l'arc auquel ce développement se rapporte, et les valeurs, de modules inférieurs ou égaux à δ'_x, δ'_y, ..., attribuées aux accroissements variables qui y figurent.*

III. Soient

δ', Δ' deux constantes positives telles que l'on puisse assigner aux diverses pseudo-fonctions simples, tout le long de l'arc (a), quelque système (fixe) de rayons de convergence $> \delta'$, et à la composante, tout le long de l'arc (A), quelque système (également fixe) de rayons de convergence $> \Delta'$ (I);

L une quantité positive au-dessous de laquelle tombent constamment les modules des développements des diverses pseudo-fonctions simples, quels que soient et le point de l'arc (a) auquel ces développements se rapportent, et les valeurs, de modules inférieurs ou égaux à δ', attribuées aux accroissements variables qui y figurent (II);

$\mathfrak{d}$ une quantité positive inférieure à δ', et telle que l'expression

$$\mathrm{L}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\xi}{\delta'}\right)\left(1-\frac{\eta}{\delta'}\right)\cdots}-1\right]$$

tombe au-dessous de Δ' tant que les variables positives ξ, η, ... restent à la fois inférieures à $\mathfrak{d}$;

$\mathfrak{r}$ une quantité positive telle que, pour deux points

$$(s', t', \ldots), \quad (s'', t'', \ldots)$$

arbitrairement choisis sur l'arc (a), les différences formées avec les coordonnées imaginaires semblables présentent des modules inférieurs à $\mathfrak{d}$, aussitôt que les différences $s''-s'$, $t''-t'$, ... sont toutes numériquement inférieures à $\mathfrak{r}$ (7).

Cela posé, on se convaincra sans difficulté que la pseudo-fonction composée est calculable sur l'arc (a) avec le régulateur $\mathfrak{r}$, et que son développement en un point quelconque de l'arc (a) s'obtient conformément aux indications de l'énoncé.

38. La remarque suivante est parfois utile.

Si les diverses pseudo-fonctions simples sont calculables suivant un même chemin brisé (30), *si, d'autre part, la composante est une fonction indéfiniment olotrope* (12) (26), *la pseudo-fonction composée est elle-même calculable suivant le chemin brisé dont il s'agit; chacun des développements successifs qu'elle fournit alors admet comme rayons de convergence ceux qu'admettent à la fois les développements de même rang des pseudo-fonctions simples, et s'obtient en combinant ces derniers avec celui de la composante.*

39. Soient

$$(41)\qquad U(x, y, \ldots),\quad V(x, y, \ldots),\quad \ldots$$

diverses pseudo-fonctions de $x, y, \ldots$ (en nombre limité);

$$\Phi(x, y, \ldots), \ldots$$

quelques-unes de leurs dérivées (en nombre également limité) (35);

$$(x_0, y_0, \ldots)$$

le point fondamental commun à toutes ces pseudo-fonctions, et

$$u_0,\quad v_0,\quad \ldots,\quad \varphi_0,\quad \ldots$$

leurs valeurs fondamentales. Soit, d'autre part,

$$(42)\qquad f(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \varphi, \ldots)$$

une pseudo-fonction composante avec

$$(x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots, \varphi_0, \ldots)$$

comme point fondamental.

Si l'on trace à partir de $(x_0, y_0, \ldots)$ *un arc praticable pour les diverses pseudo-fonctions* (41), *si l'on suppose en outre que l'arc correspondant* (36) *décrit par le point*

$$[x, y, \ldots, U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots, \Phi(x, y, \ldots), \ldots]$$

soit lui-même praticable pour la pseudo-fonction composante (42), *le simple rapprochement des n*[os] 35 *et* 37 *nous fait voir que le premier de ces deux arcs est praticable pour la pseudo-fonction composée, et nous apprend à former le développement de cette dernière en un point quelconque de l'arc dont il s'agit, connaissant les développements correspondants des pseudo-fonctions* (41) *et* (42).

Considérons maintenant deux pseudo-fonctions composées, finies ou différentielles, et supposons que les diverses données fondamentales définissant de part et d'autre, comme ci-dessus, les pseudo-fonctions simples et composantes, aient été choisies de telle manière que les développements fondamentaux des deux pseudo-fonctions composées soient identiques. Si l'on trace alors, à partir du point fondamental commun à ces dernières, un arc tel que la proposition précédente soit applicable à toutes deux, leurs développements construits, d'après le mécanisme indiqué, en un même point quelconque de l'arc dont il s'agit, seront, eux aussi, identiques l'un à l'autre.

40. *Désignons par*

$$f_1(x, y, \ldots),\quad f_2(x, y, \ldots),\quad \ldots,\quad f_g(x, y, \ldots),\quad \ldots \tag{43}$$

des pseudo-fonctions toutes calculables sur un même arc continu partant du point fondamental commun, et supposons que, pour chaque point particulier de l'arc dont il s'agit (c'est-à-dire pour chaque système de valeurs particulières attribuées aux indéterminées réelles s, t, ... dont il dépend), on puisse assigner : 1° un système de rayons de convergence $\delta_x, \delta_y, \ldots$, *commun en ce point à toutes les pseudo-fonctions de la suite, mais variable d'un point à l'autre; 2° un groupe de quantités positives*

$$\delta'_x < \delta_x,\quad \delta'_y < \delta_y,\quad \ldots,$$

et une série convergente à termes positifs

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_g + \ldots,$$

variables encore d'un point à l'autre, et tels que les développements des diverses pseudo-fonctions (43) au point considéré conservent des modules respectivement inférieurs à $M_1, M_2, \ldots, M_g, \ldots$, *lorsqu'on attribue aux accroissements variables qui y figurent des valeurs quelconques de modules respectivement inférieurs ou égaux à* $\delta'_x, \delta'_y, \ldots$.

Cela étant, si l'on considère la série ayant pour termes les sommes des développements fondamentaux des pseudo-fonctions proposées, qu'on la transforme en une autre procédant suivant les termes élémentaires de ces séries partielles, et qu'on opère finalement la réduction des termes semblables, la pseudo-fonction définie par le développement résultant est elle-même calculable sur l'arc donné, et son développement en un point quelconque de celui-ci peut se déduire, à l'aide du même mécanisme, des développements correspondants des pseudo-fonctions proposées.

On démontrera, par des raisonnements analogues à ceux du n° 18, que les quantités δ'_x, δ'_y, ..., variables d'un point à l'autre de l'arc donné, restent toujours au moins égales à certaines constantes positives $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, ...; puis, on désignera par $\mathfrak{r}$ une constante positive telle que, pour deux points

$$(s', t', \ldots), \quad (s'', t'', \ldots),$$

arbitrairement choisis sur l'arc donné, les différences formées avec les coordonnées imaginaires semblables présentent des modules respectivement inférieurs à $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, ..., aussitôt que les différences $s''-s'$, $t''-t'$, ... sont toutes numériquement inférieures à $\mathfrak{r}$ (7), et l'on fera voir que la pseudo-fonction déduite des proposées par le mécanisme indiqué est calculable sur l'arc donné avec le régulateur $\mathfrak{r}$.

41. Les fonctions proprement dites (et c'est là une observation de la plus haute importance) se définissent très souvent à l'aide de pseudo-fonctions ; le mécanisme de cette génération est d'ailleurs très facile à saisir.

Étant donnés une pseudo-fonction de $x, y, \ldots$, et un espace continu (4) comprenant le point fondamental, considérons, parmi les arcs tracés à partir de ce point dans l'espace donné, ceux qui satisfont à tel ou tel groupe de conditions (comme, par exemple, de dépendre d'indéterminées réelles en tel ou tel nombre, ou bien encore d'en dépendre par des relations de telle ou telle nature, etc.). Si tout point $(x, y, \ldots)$ de l'espace donné se trouve situé sur quelqu'un des arcs dont il s'agit, si de plus ces derniers sont tous praticables, si enfin le développement auquel on est conduit à l'extrémité de chacun d'eux dépend uniquement des coordonnées imaginaires de cette extrémité, et non de l'arc suivi pour y arriver, il est clair que l'on peut, à l'aide de notre pseudo-fonction, définir dans l'espace donné une fonction proprement dite de $x, y, \ldots$.

42. *Deux arcs continus, praticables par rapport à un développement fondamental donné, et aboutissant respectivement en deux points de mêmes coordonnées imaginaires, conduisent au même développement final, si les deux chemins brisés à l'aide desquels celui-ci s'obtient de part et d'autre* (33) *peuvent être choisis de manière à constituer les deux termes extrêmes de*

quelque suite de chemins brisés, ayant tous mêmes points initial et final que les arcs proposés, et satisfaisant à la triple condition :

1° *Que les sommets soient en même nombre sur deux quelconques d'entre eux;*

2° *Qu'en désignant par δ_x, δ_y, ... certaines constantes positives, les différences formées avec les coordonnées imaginaires semblables de deux sommets consécutifs appartenant à un même chemin, ou de deux sommets de même rang appartenant à deux chemins consécutifs, présentent toujours des modules respectivement inférieurs à $\frac{\delta_x}{2}$, $\frac{\delta_y}{2}$, ...;*

3° *Enfin, que les développements successifs auxquels conduit l'un quelconque de ces chemins admettent tous comme rayons de convergence les constantes δ_x, δ_y, ...*

Il suffit évidemment de démontrer l'équivalence de deux chemins consécutifs pris dans la suite dont parle l'énoncé. Or, si l'on désigne par

$$(a)_0\,(a)_1\,(a)_2\ldots(a)_i\,(\mathrm{A})$$

et

$$(a)_0\,(\alpha)_1\,(\alpha)_2\ldots(\alpha)_i\,(\mathrm{A})$$

les deux chemins en question, nos hypothèses, combinées avec le n° 31 et l'alinéa I du n° 32, donnent successivement

$$\Psi[(a)_0\,(\alpha)_1] = \Psi[(a)_0\,(a)_1\,(\alpha)_1],$$

puis

$$\begin{aligned}&\Psi[(a)_0(\alpha)_1(\alpha)_2]\\&\quad= \Psi[(a)_0(a)_1(\alpha)_1(\alpha)_2] = \Psi[(a)_0(a)_1(\alpha)_2] = \Psi[(a)_0(a)_1(a)_2(\alpha)_2],\end{aligned}$$

d'où

$$\Psi[(a)_0(\alpha)_1(\alpha)_2] = \Psi[(a)_0(a)_1(a)_2(\alpha)_2];$$

puis encore

$$\begin{aligned}\Psi[(a)_0(\alpha)_1(\alpha)_2(\alpha)_3] &= \Psi[(a)_0(a)_1(a)_2(\alpha)_2(\alpha)_3]\\&= \Psi[(a)_0(a)_1(a)_2(\alpha)_3] = \Psi[(a)_0(a)_1(a)_2(a)_3(\alpha)_3],\end{aligned}$$

d'où

$$\Psi[(a)_0(\alpha)_1(\alpha)_2(\alpha)_3] = \Psi[(a)_0(a)_1(a)_2(a)_3(\alpha)_3];$$

etc.

On arrivera ainsi à

$$\Psi[(a)_0(\alpha)_1(\alpha)_2\ldots(\alpha)_i]=\Psi[(a)_0(a)_1(a)_2\ldots(a)_i(\alpha)_i],$$

et finalement à

$$\begin{aligned}&\Psi[(a)_0(\alpha_1)(\alpha)_2\ldots(\alpha)_i(\mathrm{A})]\\&\quad=\Psi[(a)_0(a)_1(a)_2\ldots(a)_i(\alpha)_i(\mathrm{A})]=\Psi[(a)_0(a)_1(a)_2\ldots(a)_i(\mathrm{A})].\end{aligned}$$

Application des théories précédentes.

43. Désignant par u une fonction inconnue des variables imaginaires x, y, ..., et par x_0, y_0, ... des valeurs fixes respectivement attribuées à ces dernières, considérons un système d'équations différentielles ayant respectivement pour premiers membres certaines dérivées d'ordres partiels donnés de la fonction inconnue, et pour seconds membres autant de développements entiers en $x-x_0$, $y-y_0$, ... La recherche de tous les développements de même forme qui, substitués à u dans ces diverses équations, en rendent les premiers membres respectivement identiques aux seconds, se trouve contenue tout entière dans les considérations suivantes, que nous nous bornerons à rappeler comme étant connues de tout le monde.

I. Nous nommerons *dérivées principales* de la fonction inconnue celles qui figurent dans les divers premiers membres du système proposé, ou qui peuvent se déduire de quelqu'un d'entre eux par des différentiations convenables. Les autres dérivées porteront le nom de *paramétriques* (1).

Par exemple, si les dérivées du premier ordre de la fonction inconnue sont toutes données, ses dérivées de tous ordres sont nécessairement principales.

Si les dérivées d'ordre total K, sans aucune d'ordre inférieur, sont toutes données, les dérivées d'ordre inférieur à K sont paramétriques, et toutes les autres sont principales.

---

(1) Les locutions de *dérivées principales* et de *dérivées paramétriques* se trouvent déjà employées dans un Mémoire publié par M. Méray avec notre collaboration et intitulé : *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles* (*Annales de l'École Normale,* janvier, février et mars 1890).

Dans le système

$$\frac{d^2 u}{dy\,dz} = P, \qquad \frac{d^2 u}{dz\,dx} = Q, \qquad \frac{d^2 u}{dx\,dy} = R,$$

où u désigne une fonction inconnue et P, Q, R trois fonctions connues des variables indépendantes x, y, z, les dérivées de u qui contiennent au dénominateur de leur notation la différentielle d'une seule variable sont paramétriques, tandis que toutes les autres sont principales.

II. *Si la somme de quelque développement entier en* $x - x_0, y - y_0, \ldots$ *vérifie identiquement les diverses équations du système, elle vérifie encore toutes celles qu'il est possible d'en déduire par des différentiations quelconques.*

Une identité constante entre les diverses expressions ainsi obtenues pour une même dérivée principale quelconque est donc une condition absolument *nécessaire* à l'existence des intégrales cherchées. D'ailleurs, les relations mutuelles que cette condition impose aux divers seconds membres se ramènent à un nombre fini d'entre elles, dont les autres ne sont que de simples conséquences, et que nous nommerons, suivant l'usage, *conditions d'intégrabilité*.

III. *Tout développement entier en* $x - x_0, y - y_0, \ldots$, *dont la somme* $f(x, y, \ldots)$ *vérifie identiquement les équations proposées, peut être reconstruit, dès que l'on connaît seulement les valeurs prises en* $x_0, y_0, \ldots$ *par* $f(x, y, \ldots)$ *et ses diverses dérivées paramétriques.*

Nous nommerons *détermination initiale* (1) de l'intégrale la partie du développement qui correspond à l'ensemble des dérivées paramétriques, par opposition avec la partie restante, que nous nommerons *partie principale*.

IV. *Les conditions d'intégrabilité* (II) *étant supposées satisfaites, il existe, pour une détermination initiale arbitrairement choisie (sous la seule restriction d'être convergente), un développement et un seul dont la somme vérifie identiquement les équations proposées; la partie principale*

(1) Locution déjà employée dans le Mémoire cité à la page précédente.

de ce développement converge dans les limites où les divers seconds membres jouissent à la fois de cette propriété.

Nous nommerons *intégrale principale* l'intégrale particulière qui correspond à une détermination identiquement nulle.

44. Nous considérerons maintenant des systèmes de la forme suivante :

Les n variables indépendantes étant partagées en deux groupes déterminés, tels que

$$(44) \qquad x, \quad y, \quad \ldots,$$

$$(45) \qquad x', \quad y', \quad \ldots :$$

1° *Les seconds membres du système considéré se réduisent à de simples développements entiers en*

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad \ldots, \quad x' - x'_0, \quad y' - y'_0, \quad \ldots;$$

2° *Les dérivées de la fonction inconnue qui en constituent respectivement les premiers membres, ne renferment, aux dénominateurs de leurs notations, aucune des différentielles dx', dy', ... des variables* (45);

3° *Le système dont il s'agit renferme quelque groupe d'équations en nombre égal à celui des variables* (44), *et ayant respectivement pour premiers membres*

$$\frac{d^h u}{dx^h}, \quad \frac{d^k u}{dy^k}, \quad \ldots,$$

où h, k, ... désignent des entiers positifs quelconques.

Il est bien facile de voir que, *dans la détermination initiale* (43, III), *ordonnée par rapport à $x - x_0$, $y - y_0$, ..., certains termes, d'exposants déterminés, et en nombre essentiellement limité, ont alors pour coefficients des séries arbitraires en $x' - x'_0$, $y' - y'_0$, ..., tandis que tous les autres ont pour coefficients zéro.* Nous nommerons, pour abréger, *coefficients de la détermination initiale* les séries arbitraires dont nous venons de parler.

45. Les variables imaginaires étant partagées, comme au numéro précédent, en deux groupes (44), (45), qui en contiennent chacun un

nombre quelconque, traçons dans l'espace indéfini relatif aux variables $x, y, \ldots$, un arc continu partant de $(x_0, y_0, \ldots)$, puis, dans l'espace indéfini relatif aux variables $x', y', \ldots$, un deuxième arc continu partant de $(x'_0, y'_0, \ldots)$: la considération simultanée de ces deux arcs, que nous supposerons dépendre respectivement de deux groupes d'indéterminées réelles

$$s, \quad t, \quad \ldots,$$
$$s', \quad t', \quad \ldots,$$

n'ayant aucune indéterminée commune, fournit un troisième arc continu tracé à partir de $(x_0, y_0, \ldots, x'_0, y'_0, \ldots)$ dans l'espace indéfini relatif à toutes les variables imaginaires. Pour abréger, nous désignerons respectivement ces trois arcs par A, A' et (A, A').

Cela posé, et *le système différentiel donné étant de la forme définie au numéro précédent, une intégrale particulière du système en question est calculable sur l'arc* (A, A'), *si les seconds membres jouissent tous de cette propriété, et qu'en même temps les coefficients de la détermination initiale* (44) *soient tous calculables sur l'arc* A'.

I. *Si les divers seconds membres du système défini au n° 44 sont calculables suivant un chemin brisé, pour tous les sommets duquel les variables imaginaires $x, y, \ldots$ du premier groupe restent fixes, l'intégrale principale* (43, IV) *est également calculable suivant le chemin dont il s'agit, et chacun des développements successifs qu'elle fournit alors admet comme rayons de convergence ceux qu'admettent à la fois les développements de même rang fournis par les divers seconds membres.*

En vertu du n° 35, toute dérivée de l'intégrale principale jouit comme elle de cette propriété.

En effet, le développement de l'intégrale principale, construit à partir du sommet initial de notre chemin brisé, admet, comme on sait, les rayons de convergence communs aux développements correspondants des divers seconds membres (43, IV), et un cheminement direct permettra, pour lui comme pour eux, de passer du premier sommet au second. Si, dans le système donné, on remplace alors les seconds membres par leurs développements respectifs construits à partir du deuxième sommet, on voit immédiatement que le développement de notre intégrale, construit à partir du même sommet, est encore intégrale *principale* relativement au nouveau système. On raisonnera de la même manière sur ce nouveau système, puis sur un troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on soit parvenu au sommet final.

II. *Considérons un chemin brisé*

$$
\begin{array}{c}
[(a)_0, (a')_0] = [(x_0, y_0, \ldots), (x'_0, y'_0, \ldots)] \\
[(a)_0, (a')_1] = [(x_0, y_0, \ldots), (x'_1, y'_1, \ldots)] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[(a)_0, (a')_k] = [(x_0, y_0, \ldots), (x'_k, y'_k, \ldots)] \\
[(a)_0, (a')_{k+1}] = [(x_0, y_0, \ldots), (x'_{k+1}, y'_{k+1}, \ldots)] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[(a)_0, (a')_g] = [(x_0, y_0, \ldots), (x'_g, y'_g, \ldots)]
\end{array}
$$

satisfaisant à la double condition : 1° que les coordonnées imaginaires correspondant aux variables $x, y, \ldots$ conservent, pour tous les sommets, des valeurs fixes $x_0, y_0, \ldots$; 2° que, pour deux sommets consécutifs quelconques, les différences formées avec les coordonnées imaginaires de mêmes noms, parmi celles qui correspondent aux variables $x', y', \ldots$, présentent des modules toujours inférieurs aux constantes positives $\delta_{x'}, \delta_{y'}, \ldots$.

Considérons en outre une pseudo-fonction de $x, y, \ldots, x', y', \ldots$, calculable suivant le chemin brisé dont il s'agit, de telle manière que les $g+1$ développements successifs auxquels ce dernier conduit admettent tous comme rayons de convergence les constantes positives $\delta_x, \delta_y, \ldots, \delta_{x'}, \delta_{y'}, \ldots$.

Cela étant, si, parvenu en un sommet quelconque $[(a)_0, (a')_k]$, on ordonne par rapport à $x' - x'_k, y' - y'_k, \ldots$ le développement correspondant, et que l'on attribue ensuite à $x, y, \ldots$ des valeurs particulières vérifiant les relations

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < \delta_x, \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) < \delta_y, \qquad \ldots,$$

le chemin brisé

$$(a')_k\,(a')_{k+1}\,\ldots\,(a')_g$$

est praticable pour le développement résultant.

Le seul énoncé de cette proposition subsidiaire suffit presque à en faire apercevoir l'évidence.

III. Revenant à notre énoncé général, désignons par

$$(46) \qquad \partial_x, \quad \partial_y, \quad \ldots, \quad \partial_{x'}, \quad \partial_{y'}, \quad \ldots$$

des constantes positives telles, que, en un point quelconque de l'arc (A, A'), les pseudo-fonctions définies par les seconds membres de notre système admettent comme rayons de convergence les constantes dont il s'agit (37, I). Désignons ensuite par ω une constante positive suffisamment petite : 1° pour que les coefficients de la détermination initiale admettent tous sur l'arc A' le régulateur ω ; 2° pour que, deux points

$$(\sigma, \tau, \ldots, \sigma', \tau', \ldots),$$
$$(\mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \ldots, \mathfrak{s}', \mathfrak{t}', \ldots)$$

étant arbitrairement choisis sur l'arc (A, A'), les différences formées avec leurs coordonnées imaginaires semblables présentent des modules respectivement inférieurs aux constantes (46), dès que les différences

$$\sigma - \mathfrak{s}, \quad \tau - \mathfrak{t}, \quad \ldots, \quad \sigma' - \mathfrak{s}', \quad \tau' - \mathfrak{t}', \quad \ldots$$

sont toutes numériquement inférieures à ω. Cela posé, nous effectuerons notre démonstration en prouvant que l'intégrale particulière considérée est calculable suivant tout chemin de régulateur ω, inscrit dans (A, A') (5) (32).

Désignons en effet par

$$(47) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [(a)_0, (a')_0] = [(x_0, y_0, \ldots), (x'_0, y'_0, \ldots)], \\ [(a_1), (a')_1] = [(x_1, y_1, \ldots), (x'_1, y'_1, \ldots)], \\ [(a)_2, (a')_2] = [(x_2, y_2, \ldots), (x'_2, y'_2, \ldots)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [(a)_g, (a')_g] = [(x_g, y_g, \ldots), (x'_g, y'_g, \ldots)] \end{array} \right.$$

les points de l'espace à $2n$ dimensions qui correspondent aux sommets successifs d'un semblable chemin inscrit. L'intégrale particulière que nous considérons s'obtient en ajoutant à l'intégrale principale P_0 du système donné Σ_0 la détermination initiale D_0. En vertu de notre hypothèse, combinée avec l'observation du n° 38, la pseudo-fonction définie par D_0 est calculable suivant le chemin brisé (47), et tout revient alors à faire voir que la pseudo-fonction définie par P_0 jouit de la même propriété.

En premier lieu, puisque le développement P_0 admet les rayons de convergence communs à tous les seconds membres de Σ_0 (43, IV), on pourra, pour lui comme pour eux, cheminer directement du sommet $[(a)_0, (a')_0]$ au sommet $[(a)_1, (a')_1]$. Cela posé, si dans les équations du système donné Σ_0 on remplace les divers seconds membres par leurs développements construits à partir des valeurs

$$x_1, y_1, \ldots, x'_1, y'_1, \ldots,$$

le développement de l'intégrale P_0, construit à partir des mêmes valeurs, vérifie identiquement le système ainsi formé Σ_1. Ce développement peut d'ailleurs se décomposer en deux parties P_1, D_1, jouant, à l'égard du système Σ_1, les rôles respectifs d'intégrale principale et de détermination initiale. Tout revient alors à faire voir : 1° que l'intégrale principale P_1 est calculable suivant le chemin brisé

$$(48) \qquad \left\{\begin{array}{l} [(a)_1, (a')_1], \\ [(a)_2, (a')_2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [(a)_g, (a')_g]; \end{array}\right.$$

2° que les coefficients de la détermination initiale D_1 le sont suivant le chemin brisé

$$(49) \qquad (a')_1\ (a')_2\ \ldots\ (a')_g.$$

Or, à un facteur numérique près, chaque coefficient de D_1 est la valeur que prend, pour $x = x_1$, $y = y_1$, ... (et pour des valeurs de x', y', ... suffisamment voisines de x'_1, y'_1, ...) l'intégrale P_0 ou quelqu'une de ses dérivées relatives aux seules variables x, y, ... Au même facteur près, ce coefficient peut donc s'obtenir en développant P_0 ou la dérivée dont il s'agit à partir des valeurs

$$x_0, \quad y_0, \quad \ldots, \quad x'_1, \quad y'_1, \quad \ldots,$$

ordonnant par rapport aux différences $x' - x'_1$, $y' - y'_1$, ... et faisant dans le résultat $x = x_1$, $y = y_1$, ... Cela posé, il résulte de nos hypothèses que le chemin brisé

$$\begin{aligned}
&[(a)_0, (a')_0] = [(x_0, y_0, \ldots), (x'_0, y'_0, \ldots)],\\
&[(a)_0, (a')_1] = [(x_0, y_0, \ldots), (x'_1, y'_1, \ldots)],\\
&[(a)_0, (a')_2] = [(x_0, y_0, \ldots), (x'_2, y'_2, \ldots)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&[(a)_0, (a')_g] = [(x_0, y_0, \ldots), (x'_g, y'_g, \ldots)],
\end{aligned}$$

est praticable pour chacun des développements (entiers en $x - x_0$, $y - y_0, \ldots, x' - x'_0, y' - y'_0, \ldots$) figurant dans les seconds membres du système donné Σ_0, et conduit, pour chacun d'entre eux, à des développements successifs admettant les rayons de convergence (46) ; il jouit donc des mêmes propriétés par rapport au développement P_0 ou à l'une quelconque de ses dérivées (I). D'ailleurs, pour deux sommets consécutifs quelconques, les différences telles que $x'_{k+1} - x'_k$, $y'_{k+1} - y'_k, \ldots$ présentent des modules respectivement inférieurs à $\delta_{x'}$, $\delta_{y'}, \ldots$. Finalement, comme les valeurs particulières $x_1, y_1, \ldots$, satisfont aux conditions

$$\operatorname{mod}(x_1 - x_0) < \delta_x, \qquad \operatorname{mod}(y_1 - y_0) < \delta_y, \qquad \ldots,$$

notre lemme de l'alinéa II est applicable et montre que chaque coefficient (44) de D_1, obtenu à l'aide des opérations décrites ci-dessus, est calculable suivant le chemin brisé (49).

Tout revient alors à prouver que l'intégrale principale P_1 est calculable suivant le chemin brisé (48). On fera pour cela un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire sur P_0, et l'on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on soit parvenu au sommet final du chemin brisé (47).

46. *En désignant par $x, y, \ldots$ les n variables indépendantes imaginaires (que nous supposons cette fois former un groupe unique), si le système donné a pour seconds membres de simples développements entiers en $x - x_0, y - y_0, \ldots$, et s'il renferme quelque groupe de n équations ayant respectivement pour premiers membres*

$$\frac{d^h u}{dx^h}, \quad \frac{d^k u}{dy^k}, \quad \ldots,$$

tout chemin brisé praticable à la fois pour les divers seconds membres l'est aussi pour une intégrale particulière quelconque; en outre, chacun des développements successifs que fournit alors le calcul par cheminement de l'intégrale considérée admet comme rayons de convergence ceux qu'admettent à la fois les développements de même rang fournis par les divers seconds membres.

On le voit sans peine en observant que la détermination initiale est ici un simple polynôme en $x, y, \ldots$.