ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE FOUCHÉ

Sur les courbes algébriques à torsion constante

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 335-344

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__335_0>

SUR LES

COURBES ALGÉBRIQUES A TORSION CONSTANTE,

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, PROFESSEUR A SAINTE-BARBE.

Dans son Ouvrage sur la *Théorie des surfaces*, M. G. Darboux signale comme question intéressante la recherche des courbes algébriques à torsion constante. Quoique je n'aie pu parvenir à traiter complètement la question, en ce sens que je n'ai pu trouver un moyen de former les équations de *toutes ces courbes*, je suis cependant arrivé à certains résultats qui me paraissent présenter quelque intérêt. Je me propose d'établir les propositions suivantes :

1° Il existe une courbe, et une seule, dont le rayon de torsion est constamment égal à une constante donnée et telle que le cône formé par des parallèles aux binormales soit égal à un cône donné. Quand on connaît l'équation de ce cône, la détermination de la courbe à torsion constante ne dépend que de simples quadratures.

2° Pour que la courbe soit algébrique, il faut et il suffit : 1° que le cône parallèle aux binormales soit algébrique ; 2° que l'intersection de ce cône avec une sphère ayant son centre au sommet se projette sur *un plan quelconque* suivant une courbe algébriquement carrable, de sorte que la question se trouve ramenée à la recherche des courbes sphériques dont la projection sur un plan quelconque est algébriquement carrable.

3° La détermination d'une pareille courbe dépend de la détermination de deux fonctions algébriques d'une seule variable qui doivent vérifier une certaine équation différentielle, qui est du second ordre et du second degré par rapport à l'une des fonctions et qui est une équation de Riccati par rapport à l'autre.

4° On peut trouver une infinité de courbes algébriques à torsion constante; en particulier, tout polynôme entier en fournira une.

1. Désignons par X, Y, Z, S les coordonnées d'un point et l'arc de la courbe; par x, y, z les cosinus directeurs de la binormale, et par T le rayon de torsion. Les cosinus directeurs de la tangente seront

$$\frac{dX}{dS},\quad \frac{dY}{dS},\quad \frac{dZ}{dS}$$

et ceux de la normale principale

$$y\frac{dZ}{dS} - z\frac{dY}{dS},$$
$$z\frac{dX}{dS} - x\frac{dZ}{dS},$$
$$x\frac{dY}{dS} - y\frac{dX}{dS}.$$

On aura donc, en vertu des formules de Frenet,

$$\frac{dx}{dS} = \frac{1}{T}\left(y\frac{dZ}{dS} - z\frac{dY}{dS}\right)$$

ou

$$dx = \frac{1}{T}(y\,dZ - z\,dY),$$

$$dy = \frac{1}{T}(z\,dX - x\,dZ),$$

$$dz = \frac{1}{T}(x\,dY - y\,dX),$$

d'où l'on tire

$$z\,dy - y\,dz = \frac{1}{T}[(y^2 + z^2)\,dX - xz\,dz - xy\,dY].$$

Si l'on remarque que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad x\,dX + y\,dY + z\,dZ = 0,$$

on aura

$$(1)\qquad \begin{cases} dX = T(z\,dy - y\,dz), \\ dY = T(x\,dz - z\,dx), \\ dZ = T(y\,dx - x\,dy). \end{cases}$$

Si T est une constante donnée, et si x, y, z sont connues en fonction d'une variable quelconque, on obtiendra X, Y, Z par de simples quadratures. Les constantes introduites par l'intégration se rapportent à un transport parallèle des axes ou à une translation de la courbe. Il n'y a donc qu'une seule courbe répondant à la question.

Les conclusions précédentes, qui n'ont rien de nouveau, subsisteraient si T, au lieu d'être constant, était *donné en fonction de la même variable* que x, y, z.

2. Les trois cosinus directeurs x, y, z de la binormale sont liés par la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Ils satisfont de plus à l'équation homogène

$$f(x, y, z) = 0$$

du cône parallèle aux binormales.

On peut donc les considérer comme les coordonnées d'un point de l'intersection de ce cône avec la sphère de rayon 1 décrite du sommet du cône comme centre, intersection qu'on appelle l'*indicatrice des binormales*.

Il est bien certain que l'indicatrice des binormales d'une courbe algébrique est elle-même algébrique.

De plus, en vertu des formules (1), où l'on suppose T constant, les coordonnées d'un point de la courbe cherchée sont au facteur constant près $\frac{T}{2}$ les aires en coordonnées polaires des projections de cette indicatrice sur les trois plans coordonnés. Il est évident du reste qu'on peut modifier le rayon de la sphère, tout en conservant le cône, sans changer la nature algébrique des aires des projections. De plus, si l'on change la constante T, on obtient des courbes homothétiques. Donc, *à chaque courbe sphérique dont les projections sur les plans coor-*

donnés et, par suite, sur un plan quelconque, seront algébriquement carrables, correspondra une infinité de courbes algébriques à torsion constante, différant par la valeur de la torsion et homothétiques entre elles, et réciproquement.

3. Si l'on prend pour coordonnées d'un point de la sphère deux variables qui restent constantes chacune sur l'une des génératrices imaginaires de la sphère, on pourra poser

$$x + iy = u(1 - z) = - v(1 + z),$$
$$x - iy = \frac{1}{u}(1 + z) = - \frac{1}{v}(1 - z),$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{1 - uv}{u - v}, \qquad y = \frac{i(1 + uv)}{u - v}, \qquad z = \frac{u + v}{u - v}$$

et ensuite

$$z\,dy - y\,dz = \frac{i(-du - dv + v^2 du + u^2 dv)}{(u - v)^2},$$
$$x\,dz - z\,dx = \frac{du + dv + v^2 du + u^2 dv}{(u - v)^2},$$
$$y\,dx - x\,dy = - \frac{2i(v\,du + u\,dv)}{(u - v)^2}.$$

Une courbe algébrique de la sphère sera définie par une équation algébrique entre u et v, ou bien par deux fonctions algébriques qui donneront u et v en fonction d'une troisième variable. D'après les conditions de notre problème, il faudra que les trois différentielles ci-dessus soient des différentielles algébriques de la même variable. Il en sera évidemment de même des deux combinaisons linéaires

$$x\,dz - z\,dx \pm i(z\,dy - y\,dz),$$

et réciproquement. Donc il faut et il suffit que les trois quantités

$$(2) \qquad \frac{du + dv}{(u - v)^2}, \quad \frac{v^2 du + u^2 dv}{(u - v)^2}, \quad \frac{v\,du + u\,dv}{(u - v)^2}$$

soient des différentielles algébriques.

Nous remarquerons que

$$dx = \frac{-du + dv + v^2 du - u^2 dv}{(u-v)^2},$$

$$dy = \frac{i(-du + dv - v^2 du + u^2 dv)}{(u-v)^2},$$

$$dz = \frac{-2(v\,du - u\,dv)}{(u-v)^2}$$

seront aussi des différentielles algébriques.

Il en sera de même de

$$dx + i\,dy = \frac{2(v^2 du - u^2 dv)}{(u-v)^2},$$

$$dx - i\,dy = \frac{-2(du - dv)}{(u-v)^2}.$$

En combinant linéairement ces trois différentielles avec les différentielles (2), on voit que les six quantités

$$\frac{du}{(u-v)^2}, \quad \frac{v\,du}{(u-v)^2}, \quad \frac{v^2 du}{(u-v)^2},$$

$$\frac{dv}{(u-v)^2}, \quad \frac{u\,dv}{(u-v)^2}, \quad \frac{u^2 dv}{(u-v)^2}$$

seront des différentielles algébriques. Réciproquement, il suffira que trois de ces quantités prises dans trois colonnes différentes soient des différentielles algébriques.

Nous poserons

(3) $$\frac{dv}{(u-v)^2} = da,$$

et nous aurons à exprimer que

$$da, \quad u\,da, \quad u^2 da$$

sont des différentielles algébriques. On remarquera que, d'après les identités

$$\int u\,da = au - \int a\,du,$$

$$\int u^2 da = au^2 - 2\int au\,du,$$

on pourra remplacer $u\,da$ et $u^2\,da$ par $a\,du$ et $au\,du$, puisque a doit être une fonction algébrique.

Si de plus on pose

$$a\,du = db,$$

on a

$$au\,du = u\,db,$$

qu'on pourra de même remplacer par $b\,du$.

Soit donc

$$b\,du = dc,$$

d'où

$$b = \frac{dc}{du}.$$

On a

$$a = \frac{db}{du} = \frac{d^2c}{du^2} = c''.$$

Ainsi la fonction a devra être la dérivée seconde d'une fonction algébrique de u. Si a est connu, la fonction v sera déterminée par l'équation différentielle (3); de sorte que la condition nécessaire et suffisante est que l'équation (3), qu'on peut écrire

$$\frac{dv}{du} = (u - v)^2 \frac{da}{du},$$

ou encore

$$v' = (u - v)^2 c''',$$

soit vérifiée par deux fonctions algébriques v et c de u.

Si l'on pose

$$u - v = \frac{1}{f},$$

l'équation précédente prend la forme

$$f' + f^2 = c'''. \tag{4}$$

Si l'on peut trouver deux fonctions algébriques de u vérifiant cette équation, la courbe correspondante sera représentée par l'équation algébrique

$$u - v = \frac{1}{f}.$$

L'équation (4) est une équation de Riccati par rapport à f; on peut la transformer de manière qu'elle ne renferme que la dérivée seconde de c au lieu de la dérivée tierce. Pour y arriver, on remarquera que f^2 doit être une différentielle algébrique. Alors on posera $f^2 = g'$, et l'on aura, en intégrant et faisant passer la constante dans la fonction c'',

$$f + g - c'' = 0 \qquad \text{ou} \qquad g + \sqrt{g'} - c'' = 0,$$

ou, en chassant le radical,

$$g' = (g - c'')^2. \tag{5}$$

Il est à remarquer que la fonction g qui figure dans cette équation n'est autre que la fonction

$$\int \frac{du}{(u-v)^2} = \int f^2\, du.$$

4. Quoique l'équation (4) contienne une dérivée tierce, elle paraît cependant plus facile à appliquer que l'équation (5). Nous allons donner les expressions des coordonnées d'un point de la courbe au moyen des fonctions f et c. Si l'on voulait ces expressions au moyen des fonctions g et c, il suffirait de se rappeler l'équation

$$f + g - c'' = 0,$$

de sorte qu'il n'y aurait qu'à remplacer f par $c'' - g$.

On a

$$\int \frac{dv}{(u-v)^2} = a = c'',$$

$$\int \frac{du}{(u-v)^2} = \int f^2\, du = \int (c''' - f')\, du = c'' - f,$$

$$\int \frac{u\, dv}{(u-v)^2} = \int u\, da = au - \int a\, du = uc'' - b = uc'' - c',$$

$$\begin{aligned}\int \frac{v\, du}{(u-v)^2} &= \int \left(u - \frac{1}{f}\right) f^2\, du = \int uf^2 du - \int f\, du \\ &= \int uc'''\, du - \int uf'\, du - \int f\, du \\ &= uc'' - \int c''\, du - uf = uc'' - c' - uf,\end{aligned}$$

$$\int \frac{u^2 dv}{(u-v)^2} = \int u^2 da = au^2 - 2\int au\,du = au^2 - 2\int u\,db$$
$$= au^2 - 2ub + 2\int b\,du = u^2c'' - 2uc' + 2c,$$

$$\int \frac{v^2 du}{(u-v)^2} = \int \left(u - \frac{1}{f}\right)^2 f^2 du = \int u^2 f^2 du - 2\int uf\,du + \int du$$
$$= \int u^2 c''' du - \int u^2 f' du - 2\int uf\,du + \int du$$
$$= u^2 c'' - 2\int uc'' du - u^2 f + u$$
$$= u^2 c'' - 2uc' + 2c - u^2 f + u.$$

Si l'on transporte ces valeurs dans les expressions

$$X = T\int (z\,dy - y\,dz) = Ti\int \frac{-du - dv + v^2 du + u^2 dv}{(u-v)^2},$$
$$Y = T\int (x\,dz - z\,dy) = T\int \frac{du + dv + v^2 du + u^2 dv}{(u-v)^2},$$
$$Z = T\int (y\,dx - x\,dy) = -2Ti\int \frac{v\,du + u\,dv}{(u-v)^2},$$

on aura les expressions de X, Y, Z en fonction de la variable u

$$(6) \qquad \begin{cases} X = Ti[-(2c''-f)(1-u^2) - 4uc' + 4c + u], \\ Y = T[(2c''-f)(1+u^2) - 4uc' + 4c + u], \\ Z = -2Ti[(2c''-f)u - 2c']. \end{cases}$$

5. Pour que la courbe soit réelle, il suffit évidemment que l'indicatrice des binormales le soit, c'est-à-dire que $-\frac{1}{v}$ soit conjugué de u. Or u et v sont liés par l'équation

$$u - v = \frac{1}{f}, \qquad \text{d'où} \qquad -\frac{1}{v} = \frac{f}{1-uf}.$$

Il faudrait donc, pour trouver une courbe algébrique réelle à torsion constante, qu'on pût trouver deux fonctions algébriques de u, f et c vérifiant l'équation (4) et telles que u et $\frac{f}{1-uf}$ soient des fonctions conjuguées d'une même variable réelle.

Il y a une remarque à faire au sujet des constantes qui entrent dans la fonction c. L'indicatrice des binormales qui a pour équation

$$u - v = \frac{1}{f}$$

ne dépend pas de cette fonction c, de sorte qu'elle ne change pas quand on fait varier les constantes introduites par l'intégration de c'''. Comme à cette indicatrice ne correspond qu'une seule courbe ayant une torsion donnée, il s'ensuit que ces constantes n'ont d'autre effet que de faire varier la position de la courbe; c'est du reste ce qu'on pourrait vérifier directement sur les formules (6). Il en résulte que, lorsqu'on aura trouvé une fonction f vérifiant l'équation (4), on pourra choisir arbitrairement les trois constantes de c, qui est défini par sa dérivée tierce, sans changer la courbe correspondante.

6. Il est facile de trouver une infinité de fonctions vérifiant l'équation (4) : il faut et il suffit que $f^2 + f'$ soit la différentielle tierce d'une fonction algébrique. C'est évidemment ce qui arrivera si f est un polynôme entier ou si f est une somme de termes en nombre fini de la forme

$$f = \Sigma A_n u^n,$$

la lettre n désignant un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif, à condition toutefois qu'aucune valeur de n ne soit égale à -1, -2, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, et que la somme de deux valeurs différentes de n ne soit jamais égale à -1, -2 ou -3. Ces restrictions proviennent de ce qu'il ne doit pas y avoir dans $f' + f^2$ de termes donnant des logarithmes dans l'une des trois intégrations successives. Elles ne sont cependant pas absolues, car il pourrait arriver que des termes à intégrale transcendante disparussent en se trouvant répétés avec des signes contraires dans f' et dans f^2.

On peut encore prendre pour f une expression de la forme

$$f = (u - a)^n,$$

n étant un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif, différent de

7. *Exemples :*

1° $$f = 0, \qquad c''' = 0, \qquad c = 0.$$

L'équation de l'indicatrice des binormales est

$$u - v = \infty.$$

Les formules (6) donnent, en faisant $T = 1$,

$$X = iu, \qquad Y = -u, \qquad Z = 0.$$

C'est l'une des droites isotropes du plan des XY.

2° $$f = \text{const.}, \qquad c''' = f^2, \qquad c = \tfrac{1}{6} f^2 u^3.$$

L'équation de l'indicatrice des binormales est

$$u - v = \frac{1}{f},$$

d'où l'on tire

$$x - iy = \text{const.}$$

C'est donc une courbe plane, et, comme le plan

$$x - iy = 0$$

est tangent au cône asymptote de la sphère, cette courbe est une parabole. Les formules (6) donnent, en supprimant une constante f,

$$\begin{aligned}
X &= i\left[\tfrac{2}{3} f^2 u^3 - f u^2 - (2f^2 - 1) u\right],\\
Y &= \tfrac{2}{3} f^2 u^3 - f u^2 + (2f^2 + 1) u,\\
Z &= 2ifu(1 - fu).
\end{aligned}$$

On reconnaît aisément que la courbure de cette courbe est aussi constante : c'est l'hélice algébrique imaginaire qui est connue depuis longtemps.