ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

Sur le déplacement d'une figure invariable

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 323-326

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__323_0>

SUR LE

DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE INVARIABLE,

PAR M. G. DARBOUX [1].

Non seulement on a étudié d'une manière générale le mouvement d'une figure plane dans son plan, mais on a aussi considéré plusieurs espèces de mouvements particuliers dont les propriétés ont trouvé d'importantes applications dans la théorie des mécanismes. En ce qui concerne le mouvement d'une figure dans l'espace, la Géométrie est, il me semble, moins avancée; on possède, il est vrai, des propositions générales applicables à tout déplacement, mais on connaît peu de mouvements particuliers. Je demande à l'Académie la permission de lui faire connaître les résultats que j'ai obtenus sur ce sujet. Je commence par les mouvements à une variable indépendante, ceux dans lesquels les points décrivent des courbes trajectoires.

Il existe une infinité de mouvements dans lesquels tous les points de la figure mobile décrivent des courbes unicursales de degré donné. En laissant de côté la translation, le plus simple de ces mouvements est celui dans lequel tous les points de la figure mobile décrivent des coniques. Voici comment on peut le définir géométriquement.

Considérons un cylindre de révolution (C); il est clair qu'on peut le faire rouler intérieurement sur un cylindre de révolution (C′) de rayon double, tout en le faisant glisser d'une quantité quelconque parallèlement aux génératrices rectilignes de (C′). Si l'on assujettit un point de (C) à décrire une droite qui rencontrera nécessairement l'axe

---

[1] Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCII, p. 118.

du cylindre (C′), le mouvement du cylindre (C) sera complètement défini et tout point invariablement lié à ce cylindre décrira une conique.

On voit qu'il sera très aisé, soit au moyen d'engrenages et de glissières, soit au moyen de tiges articulées, de réaliser un tel mouvement.

Ce mouvement est le plus général dans lequel tous les points de la figure mobile décrivent des ellipses. Je dis que, en excluant le cas d'un déplacement parallèle à un plan fixe, il est *le seul dans lequel tous les points de la figure mobile puissent décrire des courbes planes.*

En effet, supposons d'abord que tous les plans de l'espace soient décrits par un des points de la figure mobile. Alors, dans le mouvement inverse, c'est-à-dire dans le mouvement de la figure primitivement fixe par rapport à la figure mobile, tous les plans passeront par des points fixes. Il résulte de là qu'ils envelopperont nécessairement des cônes de révolution. En effet, soit (π) un plan, (π') un plan parallèle au premier. Le plan (π') passant par un point fixe, le plan parallèle (π) devra être tangent à une sphère fixe; comme il passe d'ailleurs par un point fixe, il enveloppera nécessairement un cône de révolution.

Si l'on s'appuie maintenant sur cette proposition presque évidente, *l'ordre des trajectoires des points dans un mouvement donné est égal à la classe des enveloppes des plans dans le mouvement inverse*, on verra tout de suite que, dans le mouvement primitif, les trajectoires de tous les points sont nécessairement des coniques.

Si, au contraire, les points de la figure mobile ne décrivent pas tous les plans de l'espace, les plans qui contiennent les trajectoires planes dépendront seulement d'un ou de deux paramètres variables, et, par conséquent, chacun d'eux contiendra plusieurs trajectoires planes. Une infinité de droites de la figure mobile seront ainsi assujetties à décrire des plans fixes; et, par conséquent, si par un point fixe O on mène des parallèles à chacune de ces droites dans une position déterminée de la figure mobile, on formera une figure invariable dont tous les points devront décrire des plans passant par O. L'analyse détaillée et facile de cette hypothèse conduit à la seule solution suivante : mouvement de la figure mobile parallèlement à un plan fixe. Et, en effet, dans ce mouvement tous les points décrivent des courbes planes qui peuvent être de degré quelconque ([1]).

Je laisse de côté quelques propositions relatives à différents mouvements dans lesquels les points de la figure mobile décrivent des cubiques gauches ou des courbes du quatrième ordre, pour arriver aux mouvements qui dépendent de deux paramètres et dans lesquels les points de la figure mobile décrivent des surfaces.

On sait que, dans le plan, il existe un mouvement dans lequel tous les points décrivent des ellipses. Il n'existe pas, dans l'espace, de mouvement dans lequel tous les points décrivent des surfaces du second degré. On sait que, dans certaines questions de Géométrie, pour étendre à l'espace des propriétés des coniques, il faut considérer non plus une surface du second ordre, mais la surface de Steiner. C'est ce qui se présente ici. *Il existe un mouvement d'une figure invariable dans lequel tous les points de la figure mobile décrivent des surfaces de Steiner. Dix points particuliers de la figure mobile décrivent des plans.*

Le mouvement le plus général de cette nature ne donne pour les surfaces trajectoires que des surfaces de Steiner, ou des plans pour les dix points dont il vient d'être question. Mais, dans certaines hypothèses particulières, il peut arriver que les points d'une droite, ou même les points de deux droites décrivent des ellipsoïdes. Dans ce dernier cas, si l'on fait intervenir les éléments imaginaires, il existe un tétraèdre ayant au plus deux arêtes réelles, qui donne lieu aux propriétés suivantes :

Tout point en dehors des faces décrit une surface de Steiner. Tout point sur une des faces en dehors des arêtes décrit une surface réglée du troisième ordre. Tout point sur une des arêtes décrit une surface du deuxième ordre ou un plan.

([1]) M. Mannheim (*Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 106) a déjà démontré que, si quatre points d'une droite décrivent des courbes planes, tous les points de la droite décrivent des ellipses. Au sujet de ce mouvement particulier, on peut présenter la remarque suivante : si l'on considère une surface du second degré (Q) décrite par un point d'une droite (d), dont trois points déterminés sont dans les plans principaux de (Q), on peut transformer homographiquement la surface (Q) de telle manière que les transformées homographiques des diverses positions de la droite (d) deviennent les normales à la transformée de (Q). De là résultent de nombreuses conséquences, sur lesquelles je n'insiste pas en ce moment.

Lorsqu'on assujettit les quatre sommets d'un tétraèdre à décrire quatre plans fixes, le mouvement ainsi obtenu est unicursal. Les points de la figure mobile décrivent des surfaces du huitième ordre, admettant deux séries de sections coniques. Ces surfaces peuvent se décomposer exceptionnellement en deux surfaces de Steiner.

Lorsqu'on assujettit les cinq sommets d'un tétraèdre à décrire cinq plans fixes, les courbes trajectoires des différents points sont des courbes du huitième ordre et du genre elliptique.