ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. GUICHARD

Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 233-264

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__233_0>

RECHERCHES

SUR LES

SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE

ET SUR

CERTAINES SURFACES QUI S'Y RATTACHENT,

PAR M. C. GUICHARD,

CHARGÉ D'UN COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND.

Les trois groupes suivants de surfaces : 1° les surfaces F à courbure totale constante; 2° les nappes focales S_1, S_2 d'une congruence C, telle que les développables de C touchent S_1 et S_2 suivant leurs lignes de courbure; 3° les surfaces Σ qui admettent un réseau conjugué formé de lignes géodésiques, ont entre eux des relations très étroites.

Établir les relations qui existent, soit entre les surfaces d'un même groupe, soit entre surfaces de groupes différents; profiter de ces relations pour déduire de surfaces connues d'autres surfaces : tel est le but que je me propose dans ce travail.

Les surfaces à courbure totale constante sont étudiées depuis longtemps. Je ramène leur détermination à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = \sin\varphi \tag{1}$$

et à la résolution d'une équation de Riccati, ce qui, au fond, ne diffère pas de la méthode de M. Weingarten. Malheureusement, on n'a pas pu jusqu'ici intégrer l'équation (1); la recherche des surfaces à courbure constante est une des questions difficiles en Géométrie. On a cherché alors des méthodes qui permettent de déduire d'une surface F connue une infinité de surfaces analogues.

Parmi ces méthodes, je citerai surtout celle de M. Bäcklund, qui comprend comme cas particulier celle de MM. Bianchi et Ribeaucour. M. Bäcklund montre que, si, dans une congruence, la distance focale est constante, si, de plus, les plans focaux font un angle constant, les surfaces focales sont des surfaces à courbure constante. J'ai donné une nouvelle expression analytique de la transformation de M. Bäcklund, parce que certains résultats ainsi obtenus me sont utiles dans la recherche de quelques surfaces S particulières.

Les surfaces S et Σ n'ont pas encore été étudiées jusqu'ici. Je montre qu'un couple S_1, S_2 peut être obtenu à l'aide de quadratures quand on connaît une surface F rapportée à ses lignes asymptotiques et une solution de l'équation correspondante

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} = \rho \cos\varphi. \tag{2}$$

L'équation (2) admet comme solutions particulières $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$; dans ce cas, l'une des surfaces S_1, S_2 est une sphère. La congruence formée par les tangentes communes à deux sphères est évidemment une congruence C; il y correspond des solutions particulières de l'équation (1), qu'on peut obtenir par des quadratures elliptiques.

Les cosinus α_1, β_1, γ_1 de la normale à F sont solutions de l'équation (2); il y correspond des congruences C, dont la surface centrale est un plan.

Enfin l'équation (2) admet une infinité de systèmes distincts de trois solutions ξ, η, ζ liées par la relation

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \text{const.},$$

f étant homogène et du second ordre. Les surfaces S correspondantes sont telles que les lignes de courbure d'un système sont coupées sous un angle constant par les rayons vecteurs issus d'un point fixe.

La détermination analytique des surfaces Σ est identique à celle des surfaces S. Les coordonnées du plan tangent à Σ sont en effet α_1, β_1, γ_1 et ρ, ρ étant une solution quelconque de (2).

Entre les surfaces S et Σ il y a une relation géométrique simple. L'une des nappes de la surface des centres de courbure de S est une surface Σ. Inversement, les tangentes aux géodésiques conjuguées de Σ sont normales à des surfaces S.

Il en résulte que, lorsqu'une congruence C est donnée, on peut en général en déduire une infinité d'autres. La méthode de transformation pourra être continuée tant que la surface Σ obtenue existera réellement, c'est-à-dire tant qu'on ne tombera pas sur une surface S qui est une sphère.

Au point de vue analytique, il y correspond une transformation de l'équation (2); les seules solutions que cette transformation multiplie par un facteur constant sont les solutions ξ, η, ζ.

I. — Détermination des surfaces S.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M_1 d'une surface S_1; ces coordonnées sont exprimées en fonction de deux variables u et v; de plus, nous supposons que les courbes de paramètres u et v sont les lignes de courbures de la surface; enfin nous supposerons que la congruence C est formée par les tangentes aux courbes $v =$ const. Par le point M_1 nous ferons passer un trièdre trirectangle; l'axe des X normal à la surface a pour cosinus directeurs α, β, γ; l'axe des Y tangent à la courbe $v =$ const. a pour cosinus directeurs α_1, β_1, γ_1; enfin l'axe des Z tangent à la courbe $u =$ const. a pour cosinus directeurs α_2, β_2, γ_2. On sait (voir le *Cours de Géométrie* de M. Darboux) que l'on a les formules

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial \alpha}{\partial u} = r\alpha_1, & \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u} = - r\alpha + p\alpha_2, & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial v} = - p\alpha_1, \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} = - q_1\alpha_2, & \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial v} = p_1\alpha_2, & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u} = q_1\alpha - p_1\alpha_1, \end{array} \right.$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial r}{\partial v} = - pq_1, \qquad \frac{\partial q_1}{\partial u} = - rp_1, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} = rq_1,$$

$$\text{(C)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial x}{\partial u} = h\alpha_1, & \dfrac{\partial l}{\partial u} = hp_1, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = l\alpha_2, & \dfrac{\partial h}{\partial v} = - lp, \end{array} \right.$$

auxquelles il faut joindre les formules analogues, obtenues en remplaçant x et les α par y et les β ou par z et les γ.

Cela posé, un point M_2, pris sur l'axe des Y, a pour coordonnées

$$x_2 = x_1 + \lambda\alpha_1,$$
$$y_2 = y_1 + \lambda\beta_1,$$
$$z_2 = z_1 + \lambda\gamma_1;$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = \alpha_1\left[h + \frac{\partial\lambda}{\partial u}\right] - \lambda r\alpha + \lambda p\,\alpha_2,$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial v} = \alpha_1\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \alpha_2(l + \lambda p_1).$$

Si M_2 est le second foyer, on aura alors

$$\lambda = -\frac{l}{p_1}.$$

Le point M_2 décrit alors une surface S_2, sur laquelle les courbes de paramètre u et v forment un réseau conjugué. Ce réseau sera formé de lignes de courbure si ces courbes sont orthogonales, c'est-à-dire si l'on a

$$h + \frac{\partial\lambda}{\partial u} = 0$$

ou bien

$$h - \frac{1}{p_1}\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{l}{p_1^2}\frac{\partial p_1}{\partial u} = 0.$$

En tenant compte des équations C, on a la condition

$$\frac{\partial p_1}{\partial u} = 0.$$

En remplaçant v par une fonction de v, on pourra supposer alors

$$p_1 = 1.$$

De plus, les équations (B) donnent

$$r\frac{\partial r}{\partial v} + p\frac{\partial p}{\partial v} = 0.$$

Un choix convenable de la variable u permet de supposer

$$r^2 + p^2 = 1.$$

Nous poserons alors

$$r = \sin\varphi, \qquad p = -\cos\varphi.$$

Les équations (B) donnent ensuite

$$q_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = \sin\varphi.$$

Si enfin dans les équations (C) on suppose $l = -2\rho$, on trouve

$$h = -2\frac{\partial \rho}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} = \rho\cos\varphi.$$

Ainsi, pour la surface S_1, rapportée à ses lignes de courbures, nous avons le tableau de formules

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial \alpha}{\partial u} = \sin\varphi\,\alpha_1, & \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u} = -\sin\varphi\,\alpha - \cos\varphi\,\alpha_2, & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u} = \cos\varphi\,\alpha_1, \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\alpha_2, & \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial v} = \alpha_2, & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial v} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\alpha - \alpha_1, \end{array} \right.$$

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = \sin\varphi$$

et

$$(\mathrm{C}) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = -2\frac{\partial \rho}{\partial u}\alpha_1, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -2\rho\alpha_2,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} = \rho\cos\varphi.$$

Le point correspondant de la surface S_2 est donné par les formules

$$x_2 = x_1 + 2\rho\alpha_1,$$
$$y_2 = y_1 + 2\rho\beta_1,$$
$$z_2 = z_1 + 2\rho\gamma_1.$$

Si l'on désigne par α', β', γ' les cosinus directeurs de la normale à S_2; par α'_1, β'_1, γ'_1 les cosinus directeurs de la tangente aux courbes $u =$ const.; par α'_2, β'_2, γ'_2 ceux de la tangente aux courbes $v =$ const., on aura la série de formules

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -\alpha\cos\varphi + \alpha_2 \sin\varphi,\\
\alpha'_1 &= -\alpha_1,\\
\alpha'_2 &= \alpha\sin\varphi + \alpha_2\cos\varphi;
\end{aligned}$$

$$(\mathrm{A}')\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\alpha'}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\alpha'_2, &&\frac{\partial\alpha'_1}{\partial u} = \alpha'_2, &&\frac{\partial\alpha'_2}{\partial u} = -\frac{\partial\varphi}{\partial u}\alpha' - \alpha'_1,\\
&\frac{\partial\alpha'}{\partial v} = \sin\varphi\,\alpha'_1, &&\frac{\partial\alpha'_1}{\partial v} = -\sin\varphi\,\alpha' - \cos\varphi\,\alpha'_2, &&\frac{\partial\alpha'_2}{\partial v} = \cos\varphi\,\alpha'_1;
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{C}')\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x_2}{\partial u} = -2\rho\alpha'_2 \quad = -2\rho(\alpha\sin\varphi + \alpha_2\cos\varphi),\\
&\frac{\partial x_2}{\partial u} = -2\frac{\partial\rho}{\partial v}\alpha'_1 = \quad 2\frac{\partial\rho}{\partial v}\alpha_1.
\end{aligned}\right.$$

On trouve facilement les rayons de courbure principaux des surfaces S_1 et S_2; on a

$$\text{Pour la surface } S_1 \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{aligned}
&R_1 = \frac{2\dfrac{\partial\rho}{\partial u}}{\sin\varphi},\\
&R_2 = \frac{2\rho}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}},
\end{aligned}\right.$$

$$\text{Pour la surface } S_2 \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{aligned}
&R'_1 = \frac{2\rho}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}},\\
&R'_2 = \frac{2\dfrac{\partial\rho}{\partial v}}{\sin\varphi}.
\end{aligned}\right.$$

D'autre part, l'équation (1) montre que $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ sont des solutions particulières de l'équation (2). Si l'on prend $\rho = \pm m\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, la surface S_1 sera une sphère de rayon $2m$; si, au contraire, $\rho = \pm n\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, la surface S_2 sera une sphère de rayon $2n$. Ce sont d'ailleurs les seules solutions qui donnent des sphères.

Il peut se faire que les deux surfaces S_1 et S_2 soient des sphères.

Dans ce cas, φ satisfait à l'équation (1) et à une équation de la forme

$$m\frac{\partial\varphi}{\partial v} = n\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

On peut alors déterminer φ par une quadrature elliptique.

Remarquons que la propriété des surfaces S ne dépend que de la représentation sphérique de ces surfaces. On peut, par exemple, remplacer la surface S_1 par une surface parallèle.

II. — Propriété caractéristique des équations (2).

Les formules (A) du paragraphe précédent montrent que α_1, β_1, γ_1 sont des solutions particulières de l'équation (2). Réciproquement, toute équation de la forme

$$(a) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta,$$

qui admet trois solutions particulières, ξ, η, ζ, liées par la relation

$$(b) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

peut, par un choix convenable des variables u et v, faire partie du groupe des équations (2). J'ai montré déjà [1] que, si l'on pose

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

ξ, η, ζ sont trois solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = C\frac{\partial\theta}{\partial u} + D\frac{\partial\theta}{\partial v} - f\theta,$$

$$C = \frac{g\dfrac{\partial e}{\partial v} - f\dfrac{\partial g}{\partial u}}{2(eg - f^2)}, \qquad D = \frac{-f\dfrac{\partial e}{\partial v} + e\dfrac{\partial g}{\partial u}}{2(eg - f^2)}.$$

ξ, η, ζ vérifiant, par hypothèse, l'équation (a), on doit avoir

$$C = 0, \qquad D = 0$$

ou

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

---

(1) Voir *Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques*, etc. (*Annales de l'École Normale*, 1889).

On peut, en choisissant convenablement les variables u et v, poser

$$e = g = 1;$$

f satisfait alors à l'équation

$$(c) \qquad (1-f^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} + f\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} = (1-f^2)^2$$

Si l'on fait $f = -\cos\varphi$, la condition (c) devient

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} = \sin\varphi.$$

III. — Recherches des surfaces Σ.

Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les cosinus directeurs de la normale en un point de Σ et

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = r$$

l'équation du plan tangent en ce point; nous supposerons que les courbes de paramètre u et v soient les géodésiques conjuguées de la surface. On sait déjà que $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ et r sont quatre solutions particulières d'une équation de Laplace.

De plus, on a, en désignant par x, y, z les coordonnées du point de contact,

$$(a) \qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1\frac{\partial x}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial y}{\partial u} + \gamma_1\frac{\partial z}{\partial u} = 0,\\ &\alpha_1\frac{\partial x}{\partial v} + \beta_1\frac{\partial y}{\partial v} + \gamma_1\frac{\partial z}{\partial v} = 0;\end{aligned}\right.$$

$$(b) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = 0,\\ &\frac{\partial \alpha_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \beta_1}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.\end{aligned}\right.$$

Les équations (b) expriment que les courbes de paramètre u et v sont conjuguées. La direction qui a pour paramètres directeurs $\frac{\partial \alpha_1}{\partial v}$, $\frac{\partial \beta_1}{\partial v}$, $\frac{\partial \gamma_1}{\partial v_1}$ est perpendiculaire à la section normale qui contient la tangente à la courbe $v = \text{const.}$, c'est-à-dire au plan osculateur de cette courbe.

On a donc

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial\beta_1}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial\gamma_1}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=0,\\ &\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial\beta_1}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u}+\frac{\partial\gamma_1}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Des équations (b) et (c) on déduit évidemment

$$(d)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2\beta_1}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}=0,\\ &\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2\beta_1}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}=0.\end{aligned}\right.$$

La comparaison des équations (a) et (d) donne

$$\frac{\dfrac{\partial^2\alpha_1}{\partial u\,\partial v}}{\alpha_1}=\frac{\dfrac{\partial^2\beta_1}{\partial u\,\partial v}}{\beta_1}=\frac{\dfrac{\partial^2\gamma_1}{\partial u\,\partial v}}{\gamma_1};$$

α_1, β_1, γ_1 vérifient une même équation de la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\mathrm{R}\theta.$$

D'après le paragraphe précédent, cette équation est l'équation (2) du § I; r est une solution de la même équation; α_1, β_1, γ_1 sont les cosinus qui ont été introduits au § I.

Si r n'est pas linéairement indépendant de α_1, β_1, γ_1, la surface Σ correspondante se réduit à un point. Ce sont d'ailleurs les seules solutions de l'équation (2) qui ne donnent pas de surfaces Σ.

Quand r est connu, on peut avoir facilement les coordonnées ponctuelles de la surface Σ. Joignons, en effet, à l'équation du plan tangent

$$\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=r$$

les deux équations obtenues en dérivant par rapport à u et v; on aura

$$\begin{aligned} &\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z=\frac{\partial r}{\partial v},\\ &\alpha x\ +\beta y\ +\gamma z\ =-\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial r}{\partial u}-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial r}{\partial v};\end{aligned}$$

d'où

$$x = -\frac{\alpha}{\sin\varphi}\left(\frac{\partial r}{\partial u} + \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \alpha_1 r + \alpha_2\frac{\partial r}{\partial v},$$

$$y = -\frac{\beta}{\sin\varphi}\left(\frac{\partial r}{\partial u} + \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \beta_1 r + \beta_2\frac{\partial r}{\partial v},$$

$$z = -\frac{\gamma}{\sin\varphi}\left(\frac{\partial r}{\partial u} + \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial v}\right) + \gamma_1 r + \gamma_2\frac{\partial r}{\partial v}.$$

En différentiant maintenant par rapport à u et v, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h\alpha,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = l\alpha' = l(-\alpha\cos\varphi + \alpha_2\sin\varphi).$$

Ces formules mettent en évidence les propriétés déjà données des surfaces Σ. D'abord, les courbes de paramètre u et v forment un système conjugué; car

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v}\alpha + h\frac{\partial\varphi}{\partial v}\alpha_2.$$

$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$ sont des fonctions linéaires et homogènes des dérivées du premier ordre; enfin, $\frac{\partial\alpha}{\partial u}$, $\frac{\partial\alpha'}{\partial v}$ étant proportionnels à α_1, les normales principales aux courbes de paramètres u et v sont la normale à la surface : ces courbes sont des géodésiques.

IV. — Relations entre les surfaces S et Σ.

Le lieu des centres de courbure de S_1 *qui correspondent aux courbes de paramètre* v *est une surface* Σ.

Ce lieu est l'enveloppe des plans menés par M_1 perpendiculairement à la droite M_1M_2 de la congruence C. Les coordonnées tangentielles de ce plan sont α_1, β_1, γ_1 et r:

$$r = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1;$$

d'où, en tenant compte des formules (A), (C) du § I,

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u\, \partial v} = \cos\varphi(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1) = r \cos\varphi.$$

C'est la définition de Σ en coordonnées tangentielles. De même :

Le lieu des centres de courbure de S_2 *qui correspondent aux courbes de paramètre u est aussi une surface* Σ, *que nous désignerons par* Σ_1.

Sur la droite $M_1 M_2$ de la congruence C, prenons un point M, tel que l'on ait

$$\frac{MM_1}{M_1 M_2} = - k,$$

k étant une constante; menons par M un plan Π perpendiculaire à $M_1 M_2$. Les coordonnées de ce plan sont

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad r + 2k\rho;$$

donc il enveloppe une surface Σ. En particulier, la surface moyenne de la congruence est une surface Σ, que nous désignerons par Σ'.

Inversement, *les tangentes aux courbes* $v =$ const. *d'une surface* Σ *sont normales à une surface* S_1; *les tangentes aux courbes* $u =$ const. *sont normales à une surface* S_2.

En effet, les cosinus directeurs de la tangente aux courbes $v =$ const., par exemple, sont α, β, γ. Les surfaces qui coupent orthogonalement ces droites sont des surfaces S_1.

Ces relations montrent que, une congruence C ou une surface S étant données, on peut en déduire, en général, une infinité d'autres. En effet, les tangentes aux courbes $v =$ const. de la surface Σ_1 sont normales à une surface S'_1 en un point M'_1, ce qui détermine une nouvelle congruence C_1; on pourra opérer sur cette congruence comme sur C. A la congruence C correspond une solution ρ de l'équation (2); à la congruence C_1 une nouvelle solution ρ_1; quand ρ est donné, ρ_1 est défini à un terme près de la forme $k\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, car on peut remplacer S'_1 par une surface parallèle. Nous avons une transformation de l'équation (2) en elle-même, transformation qui s'effectue à l'aide de quadratures et que nous désignerons par s; de sorte que

$$\rho_1 = s\rho.$$

On peut faire la transformation en sens inverse; les tangentes aux courbes $u=$ const. de Σ sont normales en M''_2 à une surface S''_2, à laquelle correspond une congruence C''. Si ρ'_1 est la solution correspondante, ρ_1 est déterminé à un terme près de la forme $k\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot$ Nous désignerons cette transformation par t :

$$\rho'_1 = t\rho.$$

Ces deux transformations sont évidemment inverses l'une de l'autre; car, si l'on applique la seconde à S'_1, on retombe sur la surface S_2 ou une surface parallèle, de sorte qu'on doit avoir

$$ts\rho = \rho + k\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

et, de même,

$$st\rho = \rho + k\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot$$

V. — Expression analytique des transformations s et t.

Le point M'_1 étant dans le plan mené par M_2 perpendiculairement à M_1M_2, ses coordonnées x'_1, y'_1, z'_1 sont données par les formules

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 + 2\xi\alpha + 2\eta\alpha_2, \\ y'_1 &= y_2 + 2\xi\beta + 2\eta\beta_2, \\ z'_1 &= z_2 + 2\xi\gamma + 2\eta\gamma_2. \end{aligned}$$

En différentiant, on trouve

$$\frac{\partial x'_1}{\partial u} = 2\alpha\left(\frac{\partial\xi}{\partial u} - \rho\sin\varphi\right) + 2\alpha_1(\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi) + 2\alpha_2\left(\frac{\partial\eta}{\partial u} - \rho\cos\varphi\right),$$

$$\frac{\partial x'_1}{\partial v} = 2\alpha\left(\frac{\partial\xi}{\partial v} - \eta\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + 2\alpha_1\left(\frac{\partial\rho}{\partial v} - \eta\right) + 2\alpha_2\left(\frac{\partial\eta}{\partial v} + \xi\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right).$$

Pour que le point M'_1 décrive une surface S_1, il faut annuler dans

$\frac{\partial x'_1}{\partial u}$ les coefficients de α et α_2, et dans $\frac{\partial x'_1}{\partial v}$ ceux de α et α_1; on a alors

$$\eta = \frac{\partial \rho}{\partial v}.$$

ξ est donné par les deux équations compatibles

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= \rho \sin\varphi, \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Le coefficient de $-2\alpha_2$ dans $\frac{\partial x'_1}{\partial u}$ doit être ρ_1; celui de $-2\alpha_1$ dans $\frac{\partial x'_1}{\partial u}$ doit être $\frac{\partial \rho_1}{\partial u}$, de sorte que l'on a

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} \rho_1 &= -\xi \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial u} &= -\xi \sin\varphi - \frac{\partial \rho}{\partial v}\cos\varphi. \end{aligned} \right.$$

La transformation s est définie par les formules (3) et (4). De même, la transformation t serait définie par les formules

$$(3')\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial u} &= \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} &= \rho \sin\varphi; \end{aligned} \right.$$

$$(4')\qquad \left\{ \begin{aligned} \rho'_1 &= -\xi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial \rho'_1}{\partial v} &= -\xi_1 \sin\varphi - \frac{\partial \rho}{\partial u}\cos\varphi. \end{aligned} \right.$$

Ces formules analytiques mettent bien en évidence ce fait que les transformations s et t donnent les solutions nouvelles respectivement à des termes près de la forme $k\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, $k\frac{\partial \varphi}{\partial u}$. J'ai démontré ailleurs [1],

---

[1] *Sur une classe particulière d'équations aux dérivées partielles à invariants égaux* (*Annales de l'École Normale*, janvier 1890).

par une voie purement analytique, que les transformations s et t sont inverses l'une de l'autre.

Nous allons chercher quel doit être ρ pour que ρ_1 soit nul. Des deux équations

$$o = \xi \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2},$$

$$o = \xi \sin\varphi + \frac{\partial \rho}{\partial v} \cos\varphi$$

on déduit

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} \sin\varphi - \frac{\partial \rho}{\partial v} \cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = o.$$

On trouve, en intégrant,

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = A \sin\varphi = A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v},$$

$$\rho = A \frac{\partial \varphi}{\partial u} + B,$$

A et B étant des fonctions de u. Cette valeur de ρ donne

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \, \partial v} = A' \sin\varphi + A \cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

On doit donc avoir

$$A' \sin\varphi = B \cos\varphi$$

et, par suite,

$$A' = o, \qquad B = o,$$

A est constant. On vérifie directement que, dans ce cas, ρ_1 peut être nul. La surface S_2 est une sphère. De même ρ'_1 ne peut être nul que si $\rho = k \frac{\partial \varphi}{\partial v}$; la surface S_1 est alors une sphère.

VI. — Propriétés diverses.

Nous allons donner d'abord la relation existant entre la solution r de la surface Σ à la solution ρ qui donne la surface correspondante S_1. Nous savons que l'on a déjà

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1 = r.$$

En différentiant, par rapport à v, on trouve

$$\alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1 = \frac{\partial r}{\partial v}.$$

Posons alors

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \mu,$$

d'où

$$x_1 = \alpha\mu + \alpha_1 r + \alpha_2 \frac{\partial r}{\partial v},$$

$$y_1 = \beta\mu + \beta_1 r + \beta_2 \frac{\partial r}{\partial v},$$

$$z_1 = \gamma\mu + \gamma_1 r + \gamma_2 \frac{\partial r}{\partial v}.$$

Différentions. On a

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \alpha\left(\frac{\partial \mu}{\partial u} - r\sin\varphi\right) + \alpha_1\left(\frac{\partial r}{\partial u} + \mu\sin\varphi + \frac{\partial r}{\partial v}\cos\varphi\right),$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \alpha\left(\frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial^2 r}{\partial v^2} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial v} + r\right).$$

Si l'on identifie avec les formules du § I, on aura

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = r\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$-2\rho = \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial v} + r,$$

$$-2\frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{\partial r}{\partial u} + \mu\sin\varphi + \frac{\partial r}{\partial v}\cos\varphi;$$

ρ et r sont donc liés par la relation

$$2\rho = sr - r.$$

La comparaison de Σ et S''_2 donnerait aussi

$$2\rho'_1 = -tr + r,$$

qui peut se déduire de la précédente en y appliquant la transformation t.

Il est facile de déduire de là tous les cas où la transformation s ou t

reproduisent la même fonction. Si l'on désigne par r cette fonction, on voit que ρ est nul; x, y, z sont des constantes; r est de la forme

$$r = a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1,$$

et, réciproquement, dans ce cas, on a, en choisissant convenablement la constante qui entre dans la quadrature,

$$sr = tr = r.$$

Si l'on prend

$$\rho = a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1,$$

la congruence C est telle que sa surface centrale (le lieu des milieux de M_1M_2) est un plan. C'est d'ailleurs le seul cas où la congruence C jouit de cette propriété. Toutes les congruences qui se déduisent de C, par notre méthode, seront identiques à C, si l'on choisit convenablement les constantes d'intégration qui les déterminent.

Nous avons déjà montré (§ IV) que le plan II, mené perpendiculairement à M_1M_2 en un point M tel que l'on ait

$$\frac{M_1M}{M_1M_2} = k,$$

k étant constant, enveloppe une surface Σ correspondant à la solution $r + 2k\rho$. A cette surface Σ on peut faire correspondre une surface S_1. Si ρ' est la solution qui donne S_1, on aura

$$\begin{aligned} 2\rho' &= s(r + 2k\rho) - r - 2k\rho \\ &= 2\rho + 2ks\rho - 2k\rho. \end{aligned}$$

Nous trouverons plus tard une infinité de solutions ρ vérifiant la relation

$$s\rho = m\rho.$$

Si l'on prend une telle solution et si l'on fait

$$\frac{k-1}{k} = m,$$

ρ' sera nul, le plan II passera par un point fixe.

VII. — Les surfaces à courbure totale constante.

J'ai déjà établi [1] que, si une surface à courbure constante est rapportée à ses lignes asymptotiques, les cosinus directeurs de la normale à la surface sont solutions d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = R\theta.$$

Il en résulte alors, d'après le § II, que ces cosinus directeurs sont les quantités α_1, β_1, γ_1 qui ont été définies au § I. En désignant par x, y, z les coordonnées d'un point de la surface, on aura facilement, si la courbure de cette surface est -1,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\alpha' = \alpha \cos\varphi - \alpha_2 \sin\varphi,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = \alpha.$$

Les lignes de courbure ont pour équation

$$u + v = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad u - v = \text{const.}$$

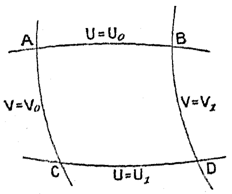
Enfin les rayons de courbure principaux sont donnés par l'équation

$$r^2 \sin\varphi - 2r\cos\varphi - \sin\varphi = 0.$$

On a, pour le ds^2 de la surface,

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\, du\, dv \cos\varphi;$$

φ est l'angle des deux lignes asymptotiques. Si ABCD est un quadrila-



tère formé de lignes asymptotiques, les côtés AB et CD correspondant

[1] *Voir* le Mémoire déjà cité dans les *Annales de l'École Normale.*

aux valeurs u_0 et u_1 de u, les côtés AC et BD aux valeurs v_0 et v_1 de v, on aura

$$AB = CD = v_1 - v_0,$$
$$AC = BD = u_1 - u_0.$$

Les côtés opposés dans ce quadrilatère sont égaux.

Enfin l'aire du quadrilatère ABCD a pour expression

$$\int\int \sin\varphi\, du\, dv = \int\int \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\, \partial v}\, du\, dv = A + B + C + D - 2\pi.$$

VIII. — Transformation de M. Bäcklund.

Soient ξ et η deux solutions quelconques du système

$$(1)\qquad \begin{cases} h\dfrac{\partial\xi}{\partial u} = \sin h\eta, \\ l\dfrac{\partial\eta}{\partial v} = \sin l\xi, \end{cases}$$

h et l étant des constantes. On déduit de (1)

$$l\frac{\partial^2\xi}{\partial u\, \partial v} = \cos h\eta \sin l\xi,$$
$$h\frac{\partial^2\eta}{\partial u\, \partial v} = \cos l\xi \sin h\eta.$$

Si donc on pose

$$(2)\qquad \varphi = h\eta - l\xi, \qquad \psi = h\eta + l\xi,$$

on aura

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\, \partial v} = \sin\varphi, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial u\, \partial v} = \sin\psi.$$

A la solution φ on peut faire correspondre une surface f de courbure -1; de même, à la solution ψ on peut faire correspondre une surface F ayant aussi une courbure -1. Je vais montrer, de plus, que si ξ, η, f sont donnés, on peut déterminer F. Désignons par

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

les cosinus directeurs du trièdre relatif à la surface f; par

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

les quantités analogues pour la surface F.

Définissons un angle constant θ par la formule

$$\operatorname{colog}\frac{\theta}{2} = \frac{h}{l},$$

de sorte que l'on a aussi

$$(3)\qquad h(1-\cos\theta) = l\sin\theta \quad \text{et} \quad h\sin\theta = l(1+\cos\theta).$$

Je dis que l'on peut poser

$$(4)\qquad \begin{cases} a_1 = \alpha_1\cos\theta - \alpha\sin l\xi\sin\theta + \alpha_2\cos l\xi\sin\theta, \\ b_1 = \beta_1\cos\theta - \beta\sin l\xi\sin\theta + \beta_2\cos l\xi\sin\theta, \\ c_1 = \gamma_1\cos\theta - \gamma\sin l\xi\sin\theta + \gamma_2\cos l\xi\sin\theta. \end{cases}$$

D'abord ces trois quantités sont les cosinus directeurs d'une droite; il suffit donc de vérifier qu'ils satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = \lambda\cos\psi.$$

La vérification, un peu longue il est vrai, ne présente pas de difficultés : on différentie les formules (4) en tenant compte des équations (A) du § I et des équations (1), (2), (3) de ce paragraphe; a_1, b_1, c_1 étant connus, on en déduit facilement les six autres cosinus. Nous donnerons seulement les valeurs de a et a_2, les autres s'en déduisant immédiatement; on trouve

$$\begin{aligned} a &= \alpha(\cos^2 l\xi - \cos\theta\sin^2 l\xi) \\ &\quad - \alpha_1\sin\theta\sin l\xi + \alpha_2(\cos l\xi\sin l\xi + \cos\theta\cos l\xi\sin l\xi), \\ a_2 &= -\alpha(\cos\theta\cos l\xi\sin l\xi + \cos l\xi\sin l\xi) \\ &\quad - \alpha_1\sin\theta\cos l\xi + \alpha_2(\cos\theta\cos^2 l\xi - \sin^2 l\xi). \end{aligned}$$

Ces neuf cosinus vérifient les formules (A) du § I, dans lesquelles φ serait remplacé par ψ.

Maintenant, nous pourrons déterminer par des quadratures une fonction ρ satisfaisant aux deux équations

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial u} &= -\rho\frac{l}{h}\cos h\eta, \\ \frac{\partial\rho}{\partial v} &= -\rho\frac{h}{l}\cos l\xi. \end{aligned}\right.$$

Ces deux équations sont compatibles en vertu de (1). En différentiant la première, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} &= -\frac{l}{h}\frac{\partial\rho}{\partial v}\cos h\eta + \rho\sin h\eta\, l\frac{\partial\eta}{\partial v} \\ &= \rho(\cos h\eta\cos l\xi + \sin h\eta\sin l\xi) = \rho\cos\varphi. \end{aligned}$$

On voit de même que l'on a

$$\frac{\partial^2\frac{1}{\rho}}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\rho}\cos\psi.$$

La solution ρ est donc celle qui, dans la méthode de M. Moutard, transforme l'équation

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = \lambda\cos\varphi$$

dans l'équation

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = \lambda\cos\psi.$$

Les solutions $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ de la première se transforment en a_1, b_1, c_1. Il résulte de cette remarque et d'un théorème que nous avons établi ailleurs (1), que les surfaces f et F peuvent être placées de telle sorte qu'elles soient les focales d'une congruence à lignes asymptotiques correspondantes. Voici comment on peut vérifier ce fait : x, y, z étant les coordonnées d'un point m de f, déterminons un point M de coor-

(1) *Sur les congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces focales* (*Comptes rendus*, janvier 1890).

données X, Y, Z par les formules

$$\begin{aligned} X &= x + \alpha \cos l\xi \sin\theta + \alpha_2 \sin l\xi \sin\theta, \\ Y &= y + \beta \cos l\xi \sin\theta + \beta_2 \sin l\xi \sin\theta, \\ Z &= z + \gamma \cos l\xi \sin\theta + \gamma_2 \sin l\xi \sin\theta. \end{aligned}$$

On trouvera, en différentiant,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= a \cos\psi - a_2 \sin\psi, \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= a, \end{aligned}$$

ce qui prouve que le point M décrit une surface égale à F. Comme, d'ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \alpha_1(X - x) + \beta_1(Y - y) + \gamma_1(Z - z) &= 0, \\ a_1(X - x) + b_1(Y - y) + c_1(Z - z) &= 0, \end{aligned}$$

la droite Mm est tangente aux surfaces f et F. Les lignes asymptotiques se correspondent évidemment sur ces deux surfaces, puisque ce sont les courbes de paramètres u et v. Il en est de même des lignes de courbure. Dans cette congruence, l'angle des deux plans focaux est égal à θ; la distance des foyers à $\sin\theta$. Si l'on suppose $h = l$, $\theta = 90°$, la distance focale est égale à 1; on obtient la congruence qui intervient dans la transformation de MM. Ribaucour et Bianchi.

IX. — Étude des équations (1) du § VIII.

La solution ξ, η des équations (1) du § VIII peuvent, d'une infinité de manières, être choisies de telle sorte que φ soit une solution quelconque de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v} = \sin\varphi.$$

Si, en effet, on suppose φ donné et si, dans les équations (1), on remplace η par

$$\frac{l}{h}\xi + \frac{\varphi}{h},$$

on a, pour déterminer ξ, deux équations, qui sont compatibles chaque fois que φ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = \sin\varphi.$$

En d'autres termes, il existe une infinité de congruences telles que celles que nous avons considérées au paragraphe précédent, et dont l'une des surfaces focales est une surface quelconque à courbure constante. L'une de ces congruences étant connue, toutes les autres peuvent être déterminées à l'aide de quadratures. La congruence donnée, ayant pour surfaces focales f et F, qui correspondent aux solutions ξ, η des équations (1); soient f et F_1 les focales d'une congruence inconnue qui correspond aux solutions ξ_1, η_1 des équations (1). φ étant la même pour les deux congruences, on doit avoir

$$h\eta_1 - l\xi_1 = h\eta - l\xi.$$

Nous poserons alors

$$\eta_1 = \eta + l\lambda,$$
$$\xi_1 = \xi + h\lambda,$$

λ étant une fonction inconnue qui doit vérifier les deux équations

$$h\frac{\partial}{\partial u}(\xi + h\lambda) = \sin(h\eta + hl\lambda),$$

$$l\frac{\partial}{\partial v}(\eta + l\lambda) = \sin(l\xi + hl\lambda),$$

ou, en tenant compte des équations (1),

$$h^2\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \sin(h\eta + hl\lambda) - \sin h\eta,$$

$$l^2\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \sin(l\xi + hl\lambda) - \sin l\xi,$$

ou bien

$$h^2\frac{\partial\lambda}{\partial u} = -\sin h\eta(1 - \cos hl\lambda) + \cos h\eta \sin hl\lambda,$$

$$l^2\frac{\partial\lambda}{\partial v} = -\sin l\xi(1 - \cos hl\lambda) + \cos l\xi \sin hl\lambda.$$

Posons maintenant

$$r = \cot\frac{hl\lambda}{2},$$

on aura alors

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial u} = -\dfrac{l}{h}\cos h\eta\, r + \dfrac{l}{h}\sin h\eta, \\[2mm] \dfrac{\partial r}{\partial v} = -\dfrac{h}{l}\cos l\xi\, r + \dfrac{h}{l}\sin l\xi. \end{cases}$$

Pour intégrer le système (6), nous nous servirons de la solution ρ, définie par les équations (5) du paragraphe précédent, et nous poserons

$$r = \theta\rho.$$

On trouvera

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{1}{\rho}\,\frac{l}{h}\sin h\eta,$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{1}{\rho}\,\frac{h}{l}\sin l\xi.$$

Ces deux équations sont compatibles, car elles donnent toutes deux

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\rho}\sin\psi.$$

Si r_1 est une solution particulière des équations (6), la solution générale sera

$$r = r_1 + a\rho.$$

On vérifie facilement que l'on a aussi

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} = r\cos\varphi;$$

on obtient ainsi une infinité de couples de surfaces f, F, f, F_1, ..., f, F_n, ... Désignons par ξ_n, η_n les solutions du système (1) qui correspondent au couple f, F_n; par ρ_n la solution du système (5) dans lequel on a remplacé ξ, η par ξ_n, η_n. Nous pourrons, en outre, poser

$$\xi_n = \xi + h\lambda_n,$$
$$\eta_n = \eta + l\lambda_n,$$
$$r_n = \cot\frac{hl\lambda_n}{2}.$$

r_n est une solution du système (6); on peut donc écrire

$$r_n = r_1 + a\rho,$$

a étant une constante. Nous aurions pu partir du couple f, F_1; fermer les équations (6′), obtenues en remplaçant ξ, η dans (6) par ξ_1, η_1, ... Le système (6′) admet la solution particulière $-r_1$ qui forme le passage de F_1 à F. Son intégrale générale sera

$$-r_1 + b\rho_1.$$

Ce système admet, en outre, la solution $\cot\dfrac{hb(\lambda_n - \lambda_1)}{2}$, qui fournit le passage de F_1 à F_n. Des trois relations

$$\cot\frac{hl\lambda_1}{2} = r_1, \qquad \cot\frac{hl\lambda_n}{2} = r_1 + a\rho, \qquad \cot\frac{hl(\lambda_n - \lambda_1)}{2} = -r_1 + b\rho_1,$$

on déduit

$$ab\rho\rho_1 = -1 - r_1^2.$$

On peut supposer $ab = +1$; cela revient à changer les facteurs arbitraires qui entrent dans ρ et ρ_1 et à écrire

$$\rho\rho_1 = -1 - r_1^2.$$

De même, en choisissant convenablement le facteur arbitraire qui entre dans ρ_n, on pourra écrire

$$\rho\rho_n = -1 - r_n^2 = -1 - r_1^2 - 2ar_1\rho - a^2\rho^2 = \rho\rho_1 - 2ar_1\rho - a^2\rho^2,$$

d'où

$$\rho_n = \rho_1 - 2ar_1 - a^2\rho.$$

Cette formule nous apprendrait, si nous ne le savions déjà, que r_1 est solution de l'équation

$$(7) \qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = \lambda\cos\varphi.$$

Toutes les solutions analogues, r, ρ, s'expriment linéairement à l'aide de trois d'entre elles : ρ, ρ_1, r, entre lesquelles existe la relation

$$r_1^2 + \rho\rho_1 = -1.$$

On pourra déduire de là trois solutions ξ, η, ζ de (7), vérifiant la relation

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1.$$

Ce système ξ, η, ζ est linéairement distinct de α_1, β_1, γ_1; car on a

$$d\alpha_1^2+d\beta_1^2+d\gamma_1^2=du^2-2\cos\varphi\,du\,dv+dv^2$$

et

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=-\frac{h^2}{l^2}du^2-2\cos\varphi\,du\,dv-\frac{l^2}{h^2}dv^2.$$

On voit que si, dans les formules qui donnent ξ, η, ζ, on remplace u par $\frac{il}{h}u$ et v par $\frac{h}{il}v$, ξ, η, ζ seront encore solution de l'équation (7), dans laquelle, cependant, φ aura changé de valeur. A cette nouvelle fonction φ correspond une nouvelle surface à courbure constante; ξ, η, ζ remplaceront, pour la détermination de cette nouvelle surface, les quantités α_1, β_1, γ_1. Nous retombons ainsi sur la transformation de M. Lie.

L'équation (7) possède la propriété d'admettre un nombre illimité de systèmes de trois solutions liées par la relation

$$F(\xi,\eta,\zeta)=\text{const.},$$

F étant homogène et du second degré. Pour abréger, nous donnerons le nom de *solutions quadratiques* à ces solutions particulières.

Quand on transforme, suivant la méthode de M. Moutard, l'équation

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}=\lambda\cos\varphi$$

dans l'équation

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}=\lambda\cos\psi,$$

les solutions quadratiques de la première équation deviennent des solutions quadratiques de la seconde. Il suffit, pour la voir, de faire le changement indiqué sur les variables u et v, et de remarquer que les cosinus qui correspondent à la première surface deviennent, par la transformation, les cosinus de la seconde.

On pourra de même déduire du couple $f_1 F_n$ une infinité de couples analogues dont fait partie la surface F_n. L'opération n'exigera que des quadratures. Les surfaces F_n renferment une constante arbitraire; l'opération qui vient d'être indiquée introduira une nouvelle constante arbitraire. On voit qu'on pourra former des surfaces à courbure constante, renfermant autant de constantes arbitraires que l'on voudra, par une suite de quadratures (¹).

X. — Recherche des congruences ayant pour surfaces focales des surfaces à courbure constante et telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces.

Soient f et F les deux nappes focales; on peut toujours supposer que la courbe de F est -1; celle de f sera désignée par $-m^2$. Les cosinus directeurs de la normale à f étant les quantités α_1, β_1, γ_1 déjà introduites; ceux de F étant désignés par a_1, b_1, c_1, on pourra évidemment poser

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1 = \alpha_1 \cos\theta - \alpha \sin x \sin\theta + \alpha_2 \cos x \sin\theta, \\ b_1 = \beta_1 \cos\theta - \beta \sin x \sin\theta + \beta_2 \cos x \sin\theta, \\ c_1 = \gamma_1 \cos\theta - \gamma \sin x \sin\theta + \gamma_2 \cos x \sin\theta, \end{cases}$$

θ et x étant des fonctions inconnues de u et v.

Nous nous appuierons maintenant sur les résultats que j'ai donnés dans une Note insérée dans les *Comptes rendus* (²). Les quantités ξ, η, ζ qui figurent dans ce Mémoire doivent être remplacées par $\sqrt{m}\alpha_1$, $\sqrt{m}\beta_1$, $\sqrt{m}\gamma_1$, et les quantités ξ_1, η_1, ζ_1 par a_1, b_1, c_1. On devra donc avoir

$$(2)\qquad \rho\frac{\partial a_1}{\partial u} + a_1\frac{\partial \rho}{\partial u} = m\left(-\rho\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} + \alpha_1\frac{\partial \rho}{\partial u}\right),$$

$$(3)\qquad \rho\frac{\partial a_1}{\partial v} + a_1\frac{\partial \rho}{\partial v} = m\left(\rho\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \alpha_1\frac{\partial \rho}{\partial v}\right),$$

(¹) Sur cette suite de quadratures, consulter une Note de M. Darboux (*Annales de l'École Normale*; 1890).

(²) Les congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces focales (janvier 1890).

et les équations analogues obtenues en remplaçant α_1 et a_1 par β_1 et b_1 ou par γ_1 et c_1, ρ étant une solution

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \, \partial v} = \rho \cos\varphi. \tag{4}$$

Différentions les formules (1), en tenant compte des formules A du § I; on trouve

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial a_1}{\partial u} = {}& \alpha\left(-\cos\theta\sin\varphi - \cos x\sin\theta\frac{\partial x}{\partial u} - \sin x\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\\
&+\alpha_1\left[-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} + \sin\theta\cos(x+\varphi)\right]\\
&+\alpha_2\left(-\cos\theta\cos\varphi - \sin x\sin\theta\frac{\partial x}{\partial u} + \cos x\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}\right),\\
\frac{\partial a_1}{\partial v} = {}& \alpha\left(-\cos x\sin\theta\frac{\partial(x+\varphi)}{\partial v} - \sin x\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\\
&+\alpha_1\left(-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} - \cos x\sin\theta\right)\\
&+\alpha_2\left(\cos\theta - \sin x\sin\theta\frac{\partial(x+\varphi)}{\partial v} + \cos x\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial v}\right).
\end{aligned}\right.$$

Multiplions les trois équations (2), d'abord par a_1, b_1, c_1 et ajoutons; puis par α_1, β_1, γ_1 et ajoutons; on aura

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} = m\left[\rho\sin\theta\cos(x+\varphi) + \cos\theta\frac{\partial\rho}{\partial u}\right],$$

$$\rho\left[-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial u} + \sin\theta\cos(x+\varphi)\right] + \cos\theta\frac{\partial\rho}{\partial u} = m\frac{\partial\rho}{\partial u}.$$

En éliminant entre ces équations $\frac{\partial\rho}{\partial u}$ et $\rho\sin\theta$, on a

$$(1 - m\cos\theta)\left[\cos(x+\varphi) - \frac{\partial\theta}{\partial u}\right] = m\cos(x+\varphi)(m - \cos\theta),$$

$$(1 - m\cos\theta)\frac{\partial\theta}{\partial u} = (1 - m^2)\cos(x+\varphi).$$

Opérons de même sur les trois équations (3); on aura

$$\frac{\partial\rho}{\partial v} = m\left(\rho\cos x\sin\theta - \cos\theta\frac{\partial\rho}{\partial v}\right),$$

$$\rho\left(-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} - \sin\theta\cos x\right) + \cos\theta\frac{\partial\rho}{\partial v} = -m\frac{\partial\rho}{\partial v},$$

$$(1 + m\cos\theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial v} + \cos x\right) = (m + \cos\theta)m\cos x,$$

$$(1 + m\cos\theta)\frac{\partial\theta}{\partial v} = -(1 - m^2)\cos x.$$

Nous avons donc les deux groupes suivants d'équations :

$$(6)\qquad \begin{cases} (1 - m\cos\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial u} = (1 - m^2)\cos(x + \varphi), \\ (1 + m\cos\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -(1 - m^2)\cos x \end{cases}$$

et

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial u} = \dfrac{m\sin\theta}{1 - m\cos\theta}\cos(x + \varphi), \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial v} = \dfrac{m\sin\theta}{1 + m\cos\theta}\cos x. \end{cases}$$

Si $1 - m^2 = 0$, θ est constant; en continuant les calculs, on retrouvera les congruences que nous avons introduites dans la méthode de M. Bäcklund.

Si $1 - m^2 \gtrless 0$, la comparaison des systèmes (6) et (7) donnera

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u} = \frac{m}{1 - m^2}\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial u},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v} = -\frac{m}{1 - m^2}\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial v};$$

on en déduit

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\right) = 0,$$

$$\rho = f(u)f_1(v);$$

mais l'équation (4) n'a pas de solutions de cette forme; l'hypothèse $1 - m^2 \gtrless 0$ est impossible.

Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants :

Si une congruence admet pour surfaces focales des surfaces à courbure totale constante, si, de plus, les lignes asymptotiques se correspondent, on a les propriétés :

1° *La courbure des deux surfaces est la même ;*

2° *L'angle des plans focaux a une valeur constante* θ ;

3° *La distance des foyers est égale à* $m \sin \theta$, *la courbure commune des deux surfaces étant* $-m^2$.

XI. — Sur quelques surfaces S particulières.

Remarquons d'abord que les coordonnées x, y, z du point central N de la congruence C satisfont aux équations

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\alpha_1 \frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho \frac{\partial \alpha_1}{\partial u},$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = \alpha_1 \frac{\partial \rho}{\partial v} - \rho \frac{\partial \alpha_1}{\partial v},$$

avec les formules analogues pour y et z. Si maintenant on prend pour ρ la solution particulière qui a été introduite au § VIII, on voit que l'on aura

$$x = \rho \alpha_1, \qquad y = \rho b_1, \qquad z = \rho c_1.$$

Les coordonnées des points M_1, M_2 des surfaces S_1 et S_2 seront

$$x_1 = \rho(a_1 - \alpha_1), \qquad y_1 = \rho(b_1 - \beta_1), \qquad z_1 = \rho(c_1 - \gamma_1);$$
$$x_2 = \rho(a_1 + \alpha_1), \qquad y_2 = \rho(b_1 + \beta_1), \qquad z_2 = \rho(c_1 + \gamma_1);$$

O étant l'origine, on voit que l'on aura

$$\overline{OM}_1^2 = \rho^2(2 - 2\cos\theta), \qquad OM_1 = 2\rho \sin\frac{\theta}{2},$$
$$\overline{OM}_1^2 = \rho^2(2 + 2\cos\theta), \qquad OM_2 = 2\rho \cos\frac{\theta}{2}.$$

Le triangle OM_1M_2 reste semblable à lui-même ; ses côtés sont entre eux comme les nombres $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$, 1. Ce triangle est rectangle en O. L'angle en M_1 est égal à $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$; l'angle en M_2, à $\frac{\theta}{2}$. On voit que, sur les surfaces S_1 et S_2, les lignes de courbure d'un système sont coupées sous un angle constant par les rayons vecteurs issus d'un point fixe.

La projection M de O sur M_1M_2 partage cette droite dans un rapport constant; le plan mené par M, perpendiculairement à M_1M_2, passe par le point fixe O. On en conclut (§ VI) que la transformation s multiplie ρ par un facteur constant. Voici comment on peut vérifier ce fait : rappelons que l'on a

$$s\rho = -\theta\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2},$$

θ étant défini par les quadratures

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = \rho\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

En tenant compte des formules du § VIII, on pourra prendre

$$\theta = \frac{h}{l}\sin l\xi\rho;$$

on trouvera alors

$$s\rho = -\frac{h^2}{l^2}\rho.$$

Toutes les fonctions qui jouissent de cette propriété s'expriment linéairement à l'aide des quantités ρ, ρ_1, r_1 du § IX. Il suffit, pour le voir, de faire le changement de variables indiqué dans ce paragraphe; le multiplicateur $-\frac{h^2}{l^2}$ devient l'unité. Or les fonctions ρ dont le multiplicateur est 1 s'expriment linéairement à l'aide de trois d'entre elles (§ VI).

Formons maintenant les surfaces S'_1, S'_2, qui correspondent à la fonction ψ et à la solution $\frac{1}{\rho}$. En désignant par x'_1, y'_1, z'_1; x'_2, y'_2, z'_2 les coordonnées des points M'_1, M'_2 de ces surfaces qui correspondent à M_1 et M_2, on aura

$$x'_1 = \frac{1}{\rho}(\alpha_1 - a_1), \qquad y'_1 = \frac{1}{\rho}(\beta_1 - b_1), \qquad z'_1 = \frac{1}{\rho}(\gamma_1 - c_1),$$

$$x'_2 = \frac{1}{\rho}(\alpha_1 + a_1), \qquad y'_2 = \frac{1}{\rho}(\beta_1 + b_1), \qquad z'_1 = \frac{1}{\rho}(\gamma_1 + c_1).$$

Les longueurs des rayons vecteurs seront

$$OM'_1 = \frac{2}{\rho}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad OM'_2 = \frac{2}{\rho}\cos\frac{\theta}{2}.$$

On voit que S'_1 est la transformée par inversion de S_1, la puissance d'inversion étant $-4\sin^2\frac{\theta}{2}$; de même, S'_2 est la transformée de S_2 par la puissance $4\cos^2\frac{\theta}{2}$.

Les coordonnées d'un point M de la surface centrale de la congruence C étant

$$\rho a_1, \quad \rho b_1, \quad \rho c_1,$$

sa polaire réciproque, par rapport à une sphère de rayon 1 ayant son centre à l'origine, sera enveloppée par un plan dont les coordonnées sont

$$a_1, \quad b_1, \quad c_1, \quad \frac{1}{\rho}.$$

Cette enveloppe est une surface Σ correspondant aux fonctions ψ et $\frac{1}{\rho}$.

XII. — Sur d'autres surfaces S particulières.

Les surfaces que nous avons obtenues au § XI proviennent, au point de vue analytique, d'une solution la plus générale de l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \sin\varphi$$

et d'une solution particulière de l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} = \rho\cos\varphi.$$

Mais on peut se placer à un autre point de vue pour obtenir des surfaces S et Σ particulières. On prendra, pour obtenir de telles surfaces, des solutions particulières des équations (1) et (2). Nous avons déjà vu que, si la solution φ de l'équation est une fonction de $mu + nv$, m et n étant constants; si, de plus, on prend pour solution de l'équation (2)

$$\rho = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

le système des surfaces S_1, S_2 est composé de deux sphères. La méthode de transformation des surfaces S et Σ est arrêtée dès le début. On peut alors chercher d'autres systèmes de surfaces, tels que cette transformation soit arrêtée après la première, la deuxième, ..., la $n^{\text{ième}}$ opération. J'espère pouvoir donner bientôt des développements sur cette question.