CH. MÉRAY

Extension de la méthode de Jacobi pour intégrer une seule équation aux dérivées partielles à une fonction inconnue, dont les dérivées y entrent linéairement, au cas d'un système passif d'équations de cette sorte en nombre quelconque

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 217-232

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__217_0>

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE JACOBI

POUR INTÉGRER

UNE SEULE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A UNE FONCTION INCONNUE

DONT LES DÉRIVÉES Y ENTRENT LINÉAIREMENT, AU CAS D'UN SYSTÈME PASSIF D'ÉQUATIONS DE CETTE SORTE EN NOMBRE QUELCONQUE,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

1. La solution, maintenant classique, donnée par Jacobi au problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et linéaire, est extrêmement remarquable parce qu'elle semble marquer d'un premier jalon la route à suivre pour venir à bout du problème si ardu et si important de la recherche des intégrales d'un système quelconque d'équations différentielles : *ramener ce système à la forme linéaire* (ce qui est facile), *puis faire dépendre son intégration de celle d'un système auxiliaire dont les intégrales contiennent comme éléments d'indétermination, non plus des fonctions, mais de simples constantes arbitraires*. A ce titre, aucune extension de la méthode de Jacobi n'est dépourvue d'intérêt, si limitée d'ailleurs qu'elle soit. Je vais en indiquer une des plus naturelles et profiter de l'occasion pour améliorer en plusieurs points la démonstration en usage.

Je commencerai par l'exposition sommaire de certaines considérations générales, qui sont indispensables pour traiter la question et même pour la poser convenablement.

2. Pour exprimer qu'à partir de tout système de valeurs particu-

lières de $x, y, \ldots$, tombant à l'intérieur d'aires données S_x, S_y, ..., $f(x+h, y+k, \ldots)$ est développable en une série entière par rapport à h, k, ..., dont les rayons de convergence sont au moins égaux à des quantités positives données δ_x, δ_y, ..., je dis que la fonction $f(x, y, \ldots)$ est *olotrope dans les aires* S_x, S_y, ... *avec les olomètres* δ_x, δ_y, ...

Puis, revenant aux idées de Lagrange, j'appelle simplement *dérivée* de $f(x, y, \ldots)$ *d'ordres* p, q, ... *par rapport* à x, y, ... respectivement, le produit $f^{(p,q,\ldots)}(x, y, \ldots)$ obtenu en multipliant par $(1, 2, \ldots, p)(1, 2, \ldots, q)\ldots$ le coefficient de $h^p k^q$, ... dans la série dont il s'agit.

A ce point de vue, *les intégrales des équations différentielles ne peuvent être conçues autrement qu'olotropes*, puisque, si elles ne jouissaient pas de cette propriété, on ne saurait même pas former leurs dérivées dont la substitution dans ces équations est exigée par leur vérification.

3. Un système quelconque d'équations différentielles étant donné, des moyens très simples en théorie permettent toujours de l'amener, cela même souvent de plusieurs manières, à la forme spéciale que j'ai nommée *immédiate* et sur laquelle seulement il devient possible d'établir des propositions générales.

Les caractères fondamentaux d'un système immédiat sont les suivants :

I. *Il est du premier ordre par rapport à toutes les fonctions inconnues, et les équations qui le composent ont pour premiers membres des dérivées (premières) des fonctions inconnues, pour seconds membres des fonctions composées données, tant des variables indépendantes que des fonctions inconnues et de celles de leurs dérivées (premières) qui ne figurent dans aucun premier membre.*

Pour la clarté des choses, il convient d'écrire ces équations dans les cases d'un Tableau quadrillé, en plaçant toujours dans une même colonne celles dont les premiers membres sont des dérivées d'une même fonction inconnue, toujours dans une même ligne celles dont les premiers membres sont des dérivées de diverses fonctions inconnues prises par rapport à une même variable.

II. Pour chaque fonction inconnue, j'ai appelé *principales,* celles des variables indépendantes par rapport auxquelles sont prises les dérivées de cette fonction constituant les premiers membres des équations de la colonne correspondante du Tableau du système, et *paramétriques,* les variables qui ne sont pas principales pour la même fonction.

J'ai appelé encore *dérivées paramétriques* d'une fonction inconnue, ses dérivées de tous ordres engendrées par des différentiations intéressant ses variables paramétriques seules, à l'exclusion de toute variable principale, et *dérivées principales,* toutes celles dont la formation exige une différentiation au moins par rapport à quelque variable principale.

En différentiant de toutes les manières possibles les équations du système considéré, on obtient une infinité d'autres équations différentielles auxquelles les fonctions inconnues doivent également satisfaire, et les premiers membres de l'ensemble fourni par ces nouvelles équations et par les proposées sont précisément les diverses dérivées principales de ces fonctions. Quand le nombre des variables principales pour quelque fonction inconnue surpasse 1, on peut même retrouver une même dérivée principale dans les premiers membres de *plusieurs* équations distinctes de l'ensemble en question.

Cela posé, le second caractère d'un système immédiat consiste en ce qu'*il est possible de ranger les équations de l'ensemble indéfini dont il s'agit, dans un ordre tel, que toutes les dérivées principales figurant dans leurs seconds membres puissent en être éliminées par la simple substitution faite à chacune d'elles, de l'une de ses expressions débarrassée de toute dérivée principale, que les éliminations antérieures ont fournies.*

Cette élimination progressive des dérivées principales transforme l'ensemble des équations différentielles dont nous venons de parler en un autre équivalent, *qui fournit ainsi toutes les dérivées principales des fonctions inconnues* (*cela souvent même de plus d'une manière*) *en fonctions composées des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques seulement.*

J'ai appelé *ultimes,* les expressions spéciales des dérivées principales et aussi les formules les fournissant, qui résultent des éliminations successives ci-dessus mentionnées.

4. Les intégrales possibles d'un système immédiat se partagent en deux classes à distinguer soigneusement :

I. Les intégrales *ordinaires* dont les valeurs à elles-mêmes et à leurs dérivées paramétriques tombent toujours, avec les valeurs des variables indépendantes auxquelles elles correspondent, en dedans des limites où les fonctions composantes qui ont servi à former les seconds membres des équations différentielles du système proposé sont toutes olotropes;

II. Les intégrales *singulières* pour lesquelles une au moins de ces composantes cesse d'être olotrope dans les circonstances ci-dessus définies (I).

5. On ne peut pas différentier les équations proposées après y avoir substitué des intégrales singulières aux fonctions inconnues, parce que, si les fonctions simples entrant dans leurs seconds membres sont olotropes, les composantes ayant servi à former ceux-ci ne le sont plus toutes, et qu'ainsi les conditions essentielles de la règle de différentiation des fonctions composées ne sont plus remplies. Les formules ultimes ne sont donc pas applicables à de pareilles intégrales, et leur existence même est précaire. Leur recherche (quand il y en a) se ramène toujours, en dernière analyse, à celle des intégrales ordinaires de quelque système immédiat auxiliaire.

6. Mais les formules ultimes sont applicables aux intégrales ordinaires. En appelant alors

$$x_0, \quad y_0, \quad \ldots \tag{1}$$

un système de valeurs initiales attribuées aux variables indépendantes x, y, ..., elles donnent, quand on y réalise l'hypothèse numérique $x = x_0$, $y = y_0$, ..., les valeurs initiales de toutes les dérivées principales d'un groupe déterminé de semblables intégrales, exprimées au moyen de celles des variables indépendantes, de ces intégrales elles-mêmes et de leurs dérivées paramétriques.

Si donc *on connaît simplement ces deux dernières sortes de valeurs initiales ou, ce qui revient au même, pour chaque intégrale, sa détermination initiale, je veux dire la fonction de ses seules variables paramétriques à* *laquelle la réduit l'attribution à ses variables principales de leurs valeurs dans la suite* (1), *les formules ultimes fournissent tous les éléments complémentaires qui sont nécessaires à la reconstruction par la formule de Taylor, des développements des intégrales considérées en séries entières par rapport aux différences* $x - x_0$, $y - y_0$, ...

Il résulte de cette observation qu'*on obtiendra les seules fonctions pouvant être des intégrales ordinaires, en sommant toutes les séries convergentes que peuvent ainsi fournir les formules ultimes, quand on adopte pour déterminations initiales hypothétiques des fonctions inconnues, tous les systèmes imaginables de fonctions de leurs divers groupes de variables paramétriques* [à condition, bien entendu, que ces dernières fonctions soient olotropes, que leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées premières tombent avec les quantités (1) en dedans des limites où les composantes des seconds membres des équations différentielles proposées sont toutes olotropes].

7. Dans cette recherche des intégrales ordinaires, il faut encore distinguer deux cas bien différents :

I. *Il y a des dérivées principales des fonctions inconnues, pour chacune desquelles les formules ultimes donnent plusieurs expressions en fonctions composées à composantes distinctes, des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques.*

Ce cas ne peut se présenter que si quelque fonction inconnue offre plus d'une variable principale. Quand on s'y trouve, la coïncidence numérique indispensable entre les valeurs initiales fournies par les formules ultimes, pour une même dérivée principale de cette espèce, est essentiellement subordonnée à la possibilité de choisir les déterminations initiales de manière à l'assurer. Cette possibilité n'existe pas toujours non plus que les intégrales; à cause de leur existence contingente analogue à celle des intégrales singulières, je leur ai donné le nom d'*intégrales exceptionnelles*.

II. *Au contraire, les formules ultimes fournissent toujours, pour une dérivée principale quelconque, soit une seule expression, soit plusieurs qui sont identiques les unes aux autres.*

La coïncidence numérique mentionnée ci-dessus est alors assurée, quelles que soient les fonctions des variables paramétriques choisies pour déterminations initiales des fonctions inconnues. Pour exprimer que le système dés équations différentielles considérées jouit de cette propriété, je dis qu'il est *passif*.

Les systèmes passifs sont de beaucoup les plus importants, et la recherche des intégrales exceptionnelles d'un système qui ne l'est pas revient toujours finalement à l'intégration d'un système auxiliaire qui l'est.

8. En appelant *complexes* les dérivées principales d'une fonction inconnue, dont les différentiations génératrices intéressent plusieurs variables principales différentes, la condition nécessaire à la *passivité* d'un système immédiat d'équations différentielles se formule dans les termes suivants :

Il faut et il suffit, ou bien qu'aucune fonction inconnue n'ait de dérivées complexes, c'est-à-dire que, pour chacune d'elles, le nombre des variables qui sont principales se réduise soit à 0, *soit à* 1, *ou bien que, pour chacune de leurs dérivées complexes du second ordre, les expressions fournies par les formules ultimes soient des fonctions composées à composantes toutes identiques, tant des variables indépendantes que des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques.*

9. *La convergence des développements des intégrales hypothétiques d'un système immédiat passif et, par suite, l'existence effective d'intégrales répondant à des déterminations initiales données, sont certaines dans le cas où ce système est, en outre, régulier ou bien semi-régulier, mais incertaines dans les autres cas.*

Pour abréger, je n'entrerai dans aucun développement sur cette condition complémentaire qui est remplie pour les systèmes que nous avons à considérer ici.

10. *Quand les développements dont il s'agit sont convergents, leurs sommes sont toujours des intégrales du système des équations différentielles considérées.*

11. Les diverses propositions qui précèdent sont exposées en détail dans deux Mémoires que j'ai publiés récemment avec le concours de

M. Riquier (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. VI et VII; 1889 et 1890); celles que je vais encore énoncer le seront bientôt dans l'Ouvrage en préparation dont ces deux Mémoires ont été extraits.

Les systèmes immédiats se partagent en deux grandes classes, selon la qualification des variables indépendantes relativement aux fonctions inconnues.

La première contient les systèmes d'équations différentielles *totales*, pour chaque fonction inconnue desquels *toutes* les variables sont principales.

En appelant g le nombre des fonctions inconnues $u, v, \ldots$; h celui des variables indépendantes $x, y, \ldots$; et $U_x, U_y, \ldots, V_x, V_y, \ldots$, gh composantes données à $h+g$ places, un pareil système est de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = U_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \dfrac{dv}{dx} = V_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \ldots; \\ \dfrac{du}{dy} = U_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \dfrac{dv}{dy} = V_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \ldots; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots. \end{cases}$$

Les seconds membres ne contiennent aucune dérivée; les déterminations initiales des intégrales se réduisent aux simples constantes qui constituent leurs valeurs initiales. Il y a $g\dfrac{h(h-1)}{1.2}$ conditions de passivité dont le type est

$$\frac{dU_x}{dy} + \frac{dU_x}{du} U_y + \frac{dU_x}{dv} V_y + \ldots = \frac{dU_y}{dx} + \frac{dU_y}{du} U_x + \frac{dU_y}{dv} V_x + \ldots \left(= \frac{d^2 u}{dx\, dy}\right),$$

quelles que soient $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, considérées un instant comme $h+g$ variables, toutes indépendantes les unes des autres.

La deuxième classe contient tous les systèmes dans lesquels une variable au moins est paramétrique pour quelque fonction inconnue; on peut les appeler des systèmes d'équations différentielles *partielles*. Elle comprend notamment toutes les équations dites *aux dérivées partielles*.

La variété sans limite des systèmes de cette sorte en rend impossible toute notation précise. Leurs propriétés générales ne sont encore qu'entrevues. On considère leur intégration comme achevée quand on l'a ramenée à celle d'un système auxiliaire d'équations différentielles totales. C'est précisément une réduction de ce genre que nous allons exécuter.

12. Nous aurons à nous appuyer sur ces diverses propositions générales concernant le système (2).

I. *Quand il est passif, toutes ses intégrales ordinaires sont contenues dans des intégrales générales*

$$(3)\qquad \begin{cases} u = \upsilon(x, y, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_g), \\ u = \varphi(x, y, \ldots, C_1, C_2, \ldots, C_g), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

formules où υ, φ, ... *sont g certaines fonctions olotropes de* x, y, ... *et de g nouvelles variables (ou constantes arbitraires)* $C_1, C_2, \ldots, C_g$, *dont le déterminant différentiel par rapport à* $C_1, C_2, \ldots, C_g$ *(déterminant des* g^2 *dérivées premières de ces g fonctions prises par rapport à ces g variables) est essentiellement différent de* o.

II. *La résolution des formules* (3) *par rapport aux constantes arbitraires donne les g équations*

$$\begin{aligned} C_1 &= \Gamma_1(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \\ C_2 &= \Gamma_2(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_g &= \Gamma_g(x, y, \ldots, u, v, \ldots), \end{aligned}$$

dans lesquelles, en considérant un instant x, y, ..., u, v, ... *comme* $h + g$ *variables indépendantes, les g fonctions* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_g$ *sont olotropes et ont, par rapport aux g variables* u, v, ..., *un déterminant différentiel non identiquement nul.*

III. Chacune de ces fonctions Γ satisfait au système de h équations différentielles partielles

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\Gamma}{dx} + U_x \dfrac{d\Gamma}{du} + V_x \dfrac{d\Gamma}{dv} + \ldots = 0, \\ \dfrac{d\Gamma}{dy} + U_y \dfrac{d\Gamma}{du} + V_y \dfrac{d\Gamma}{dv} + \ldots = 0, \end{cases}$$

13. Nous aurons encore besoin du théorème suivant, emprunté à une autre théorie :

Si les $\frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1.2\ldots(m+1)}$ *déterminants différentiels des* $m+1$ *fonctions*

$$\begin{gathered} f_1\,(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ f_2\,(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ f\;\,(t_1, t_2, \ldots, t_n), \end{gathered}$$

pris par rapport à toutes les combinaisons $m+1$ *à* $m+1$ *des* $n(>m)$ *variables indépendantes* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *sont tous identiquement nuls et si, parmi les* $\frac{m(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$ *déterminants différentiels des* m *premières pris par rapport aux diverses combinaisons* m *à* m *des mêmes variables, il s'en trouve au moins un qui ne l'est pas, la dernière fonction* f *se réduit à quelque fonction composée des* m *premières.*

14. Nous pouvons maintenant aborder le problème à résoudre :

Trouver toutes les intégrales ordinaires d'un système immédiat passif de p *équations différentielles*

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx_1} = -A_{1,0} + A_{1,1}\dfrac{du}{du_1} + \ldots + A_{1,q}\dfrac{du}{du_q}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du}{dx_p} = -A_{p,0} + A_{p,1}\dfrac{du}{du_1} + \ldots + A_{p,q}\dfrac{du}{du_q}, \end{array}\right.$$

à une seule fonction inconnue u *des* p *variables principales* $x_1, x_2, \ldots, x_p$, *et des* q *variables paramétriques* $u_1, u_2, \ldots, u_q$, *toutes ces équations étant essentiellement supposées linéaires par rapport aux dérivées de* u, *et, par suite,* $\ldots, A_{m,i}, \ldots$ *désignant certaines fonctions composées données,* $\ldots, A_{m,i}(x_1, x_2, \ldots, x_p, u_1, u_2, \ldots, u_q, u), \ldots$ *de* $x_1, x_2, \ldots, x_p, u_1, u_2, \ldots, u_q, u$ *seulement.*

I. Nous avons d'abord à former les conditions de passivité du système (5).

La différentiation par rapport à x_n de la $m^{\text{ième}}$ équation donne une première expression *primitive* de la dérivée complexe seconde $\frac{d^2 u}{dx_m\, dx_n}$, savoir

$$\frac{d^2 u}{dx_m\, dx_n} = -\frac{d\mathrm{A}_{m,0}}{dx_n} + \sum_{i=1}^{i=q} \frac{d\mathrm{A}_{m,i}}{dx_n}\frac{du}{du_i}$$
$$+\left(-\frac{d\mathrm{A}_{m,0}}{du} + \sum_{i=1}^{i=q}\frac{d\mathrm{A}_{m,i}}{du}\frac{du}{du_i}\right)\frac{du}{dx_n} + \sum_{i=1}^{i=q}\mathrm{A}_{m,i}\frac{d^2 u}{du_i\, dx_n}.$$

En y substituant à $\frac{du}{dx_n}$ le second membre de la $n^{\text{ième}}$ équation (5) et à $\frac{d^2 u}{du_i\, dx_n}$ celui de la même équation différentiée par rapport à u_i

$$\frac{d^2 u}{du_i\, dx_n} = -\frac{d\mathrm{A}_{n,0}}{du_i} + \sum_{j=1}^{j=q}\frac{d\mathrm{A}_{n,j}}{du_i}\frac{du}{du_j}$$
$$+\left(-\frac{d\mathrm{A}_{n,0}}{du} + \sum_{j=1}^{j=q}\frac{d\mathrm{A}_{n,j}}{du}\frac{du}{du_j}\right)\frac{du}{du_i} + \sum_{j=1}^{j=q}\mathrm{A}_{n,j}\frac{d^2 u}{du_i\, du_j},$$

on obtient une première expression ultime $[m, n]$ de la même dérivée complexe seconde.

On trouve ainsi (en modifiant très légèrement la notation des indices courants)

$$[m, n] = -\frac{d\mathrm{A}_{m,0}}{dx_n} + \mathrm{A}_{n,0}\frac{d\mathrm{A}_{m,0}}{du} - \sum_{i=1}^{i=q}\mathrm{A}_{m,i}\frac{d\mathrm{A}_{n,0}}{du_i}$$
$$+\sum_{j=1}^{j=q}\left[\left(\frac{d\mathrm{A}_{m,j}}{dx_n} - \mathrm{A}_{n,0}\frac{d\mathrm{A}_{m,j}}{du} + \sum_{i=1}^{i=q}\mathrm{A}_{m,i}\frac{d\mathrm{A}_{n,j}}{du_i} - \mathrm{A}_{m,j}\frac{d\mathrm{A}_{n,0}}{du} - \mathrm{A}_{n,j}\frac{d\mathrm{A}_{m,0}}{du}\right)\frac{du}{du_j}\right]$$
$$+\sum_{i=1}^{i=q}\sum_{j=1}^{j=q}\frac{d(\mathrm{A}_{m,i}\mathrm{A}_{n,j})}{du}\frac{du}{du_i}\frac{du}{du_j} + \sum_{i=1}^{i=q}\sum_{j=1}^{j=q}\mathrm{A}_{m,i}\mathrm{A}_{n,j}\frac{d^2 u}{du_i\, du_j}.$$

Si maintenant on permute m, n dans cette formule, on obtient une deuxième et dernière expression ultime possible $[n, m]$ de $\frac{d^2 u}{dx_m\, dx_n}$, et la relation

$$[m, n] = [n, m], \tag{6}$$

quelles que soient $x_1, \ldots, x_p$, $u_1, \ldots, u_q$, u et les dérivées paramétriques premières et secondes $\frac{du}{du_i}$, $\frac{d^2 u}{du_i^2}$, $\frac{d^2 u}{du_i\,du_j}$ (toutes ces quantités étant considérées comme autant de variables indépendantes les unes des autres) fournit le type des conditions de passivité du système (5). Pour les écrire toutes, il suffit de substituer successivement à m, n toutes les combinaisons deux à deux des entiers $1, 2, \ldots, p$.

Comme les dérivées paramétriques entrent d'une manière entière dans les deux membres de la condition générale (6), on les décomposera en d'autres intéressant des fonctions de $x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q, u$ seulement, en égalant dans les deux membres les coefficients des termes qui sont semblables relativement à ces dérivées. Si l'on néglige celles de ces nouvelles conditions qui sont satisfaites d'elles-mêmes et si l'on écrit convenablement les autres après la suppression des termes qui s'y détruisent, il reste définitivement les conditions

$$(7)\qquad -\frac{dA_{m,J}}{dx_n}+\sum_{I=0}^{I=q}\frac{dA_{m,J}}{du_I}A_{n,I}=-\frac{dA_{n,J}}{dx_m}+\sum_{I=0}^{I=q}\frac{dA_{n,J}}{du_I}A_{m,I},$$

quelles que soient $x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q, u$.

Dans chacune d'elles, il faut lire $\frac{d}{du}$, partout où le jeu des notations conduit à écrire $\frac{d}{du_0}$. Il faut ensuite, pour les former toutes, prendre successivement pour J les nombres $0, 1, 2, \ldots, q$, puis pour m, n toutes les combinaisons deux à deux des entiers $1, 2, \ldots, p$. Leur nombre total est ainsi égal à $(q+1)\frac{p(p-1)}{1.2}$ et *nous les supposons toutes satisfaites*.

II. *L'intégrale particulière du système* (5) *qui, pour* $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}, \ldots, x_p = x_p^{(0)}$, *a pour détermination initiale*

$$u^{(0)} + \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_q),$$

$u^{(0)}$ *désignant une constante arbitraire et* $\varphi(u_1, \ldots, u_q)$ *une fonction olotrope des variables paramétriques s'annulant quand celles-ci prennent leurs valeurs initiales* $u_1^{(0)}, \ldots, u_q^{(0)}$, *est de la forme*

$$(8)\qquad u = \upsilon(x_1, \ldots, x_p, u_1, u_2, \ldots, u_q, u^{(0)}),$$

où υ est une fonction olotrope de $x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q$, et $u^{(0)}$, *dont la dérivée, par rapport à cette dernière constante arbitraire est essentiellement différente de* o.

Pour abréger, je supprime la démonstration de cette proposition qui se fait exactement comme celle du théorème analogue mentionné ci-dessus (n° 12, I).

On en conclut immédiatement que l'expression de $u^{(0)}$, tirée de cette relation, est une fonction olotrope de $x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q, u$, dont la dérivée par rapport à u ne peut s'évanouir, et qu'ainsi *toute intégrale ordinaire u du système* (5) *est fournie par la résolution d'une équation de la forme*

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q, u) = u^{(0)},$$

c'est-à dire obtenue en égalant à une constante arbitraire quelque fonction olotrope de $x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q, u$, dont la dérivée par rapport à u ne s'évanouit pas et jouissant de la propriété de fournir des intégrales pour toutes valeurs attribuées à $u^{(0)}$.

III. *Toute fonction telle que $\Gamma(x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q, u)$ satisfait au système d'équations différentielles partielles, aux variables principales $x_1, \ldots, x_p$, aux variables paramétriques $u, u_1, \ldots, u_q$,*

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\Gamma}{dx_1} = A_{1,0}\dfrac{d\Gamma}{du} + A_{1,1}\dfrac{d\Gamma}{du_1} + \ldots + A_{1,q}\dfrac{d\Gamma}{du_q}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d\Gamma}{dx_p} = A_{p,0}\dfrac{d\Gamma}{du} + A_{p,1}\dfrac{d\Gamma}{du_1} + \ldots + A_{p,q}\dfrac{d\Gamma}{du_q}, \end{array}\right.$$

linéaire comme le proposé (5), *mais en outre homogène et dont les coefficients $\ldots, A_{m,i}, \ldots$ ne renferment pas la nouvelle fonction inconnue* Γ.

Soient $\xi_1, \ldots, \xi_p, \mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_q$ des valeurs particulières de $x_1, \ldots, x_p, u, u_1, \ldots, u_q$ pour lesquelles on veut constater que les équations (9) sont satisfaites, et considérons celle des fonctions u de $x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q$ fournies par la résolution de l'équation

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q, u) = \Gamma(\xi_1, \ldots, \xi_p, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_q, \mathfrak{z}),$$

qui se réduit à $\mathfrak{z}$ pour $x_m = \xi_m$, $u_i = \mathfrak{z}_i$.

Cette fonction satisfaisant au système (5), comme nous l'avons vu dans l'alinéa II, et la différentiation de l'équation précédente donnant

$$(10) \qquad \frac{du}{dx_m} = -\frac{\frac{d\Gamma}{dx_m}}{\frac{d\Gamma}{du}}, \qquad \frac{du}{du_i} = -\frac{\frac{d\Gamma}{du_i}}{\frac{d\Gamma}{du}},$$

elle satisfait aussi aux équations (9), pourvu qu'on y considère u, non pas comme une nouvelle variable indépendante, mais bien toujours comme une fonction de $x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q$. Cela posé, si, dans les équations (9) envisagées de cette manière, on fait $x_m = \xi_m$, $u_i = z_i$, u prend la valeur z. Ces mêmes équations subsistent donc encore pour les valeurs quelconques $\xi_1, \ldots, \xi_p, z_1, \ldots, z_q, z$ des quantités $x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q$ quand on les considère comme les $p+q+1$ variables indépendantes de la fonction Γ.

Il est évident d'ailleurs que Γ *est une intégrale ordinaire du système* (9); car, u étant une intégrale de cette espèce pour le système (5), les coefficients $\ldots, A_{m,i}, \ldots$ sont tous olotropes pour les valeurs correspondantes de $x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q$ et de u, lesquelles sont indépendantes les unes des autres à cause de la relation (8) et de l'indétermination absolue de $u^{(0)}$.

IV. Réciproquement, *toute intégrale ordinaire* Γ *du système* (9), *dont la dérivée par rapport à u n'est pas identiquement nulle, fournit, quand on l'égale à une constante arbitraire $u^{(0)}$, une équation dont la racine u est, quel que soit $u^{(0)}$, une intégrale ordinaire du système proposé* (5).

C'est ce que rendent évident la division des équations (9) par $-\frac{d\Gamma}{du}$ et la prise en considération des formules (10).

Ainsi donc, *pour obtenir toutes les intégrales ordinaires du système proposé* (5), *il suffit de résoudre par rapport à u les équations formées en égalant à des constantes arbitraires toutes les intégrales ordinaires du système* (9), *dont les dérivées par rapport à u ne sont pas identiquement nulles.*

V. *Le système* (9) *est passif.*

Il est évident, en effet, que ses conditions de passivité, formées comme dans l'alinéa I pour le système (5), se résolvent exactement dans les conditions (7) que nous supposons essentiellement satisfaites.

VI. *En considérant maintenant u, u_1, ..., u_q comme $q+1$ fonctions des p variables indépendantes x_1, ..., x_p, le système des équations différentielles totales*

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx_1} = -A_{1,0}, & \dfrac{du_1}{dx_1} = -A_{1,1}, & \ldots, & \dfrac{du_q}{dx_1} = -A_{1,q}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{du}{dx_p} = -A_{p,0}, & \dfrac{du_1}{dx_p} = -A_{p,1}, & \ldots, & \dfrac{du_q}{dx_p} = -A_{p,q}, \end{cases}$$

est passif.

Car la condition exprimant que les deux expressions ultimes de $\dfrac{d^2 u_s}{dx_m\, dx_n}$ sont égales entre elles, quelles que soient a_1, ..., a_p; u, u_1, ..., u_q, est précisément celle des conditions de passivité (7) qui a été écrite en évidence (11).

VII. *Les fonctions $\Gamma_1(x_1, \ldots, x_p, u, u_1, \ldots, u_q)$, Γ_2, ..., Γ_{q+1}, obtenues en résolvant, par rapport à leurs $q+1$ constantes arbitraires, les formules qui donnent les intégrales générales du système (11), constituent autant d'intégrales ordinaires du système (9), dont le déterminant différentiel, par rapport à u, u_1, ..., u_q n'est pas identiquement nul.*

Ces deux points sont de simples conséquences particulières des propositions générales énoncées ci-dessus (n° 12, II, III) sur les systèmes d'équations différentielles totales.

VII. *Toute intégrale ordinaire Γ du système (9) se réduit à quelque fonction composée des fonctions Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{q+1}.*

Les $q+2$ équations linéaires coexistant entre les $q+2$ quantités 1, $-A_{1,0}$, ..., $-A_{1,q}$ dont la première n'est pas nulle,

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Gamma_1}{dx_1} - \dfrac{d\Gamma_1}{du} A_{1,0} - \ldots - \dfrac{d\Gamma_1}{du_q} A_{1,q} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d\Gamma_{q+1}}{dx_1} - \dfrac{d\Gamma_{q+1}}{du} A_{1,0} - \ldots - \dfrac{d\Gamma_{q+1}}{du_q} A_{1,q} = 0, \\ \dfrac{d\Gamma}{dx_1} - \dfrac{d\Gamma}{du} A_{1,0} - \ldots - \dfrac{d\Gamma}{du_q} A_{1,q} = 0, \end{cases}$$

entrainent immédiatement l'identité

$$\begin{vmatrix} \frac{d\Gamma_1}{du} & \cdots & \frac{d\Gamma_1}{du_q} & \frac{d\Gamma}{dx_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\Gamma_{q+1}}{du} & \cdots & \frac{d\Gamma_{q+1}}{du_q} & \frac{d\Gamma_{q+1}}{dx_1} \\ \frac{d\Gamma}{du} & \cdots & \frac{d\Gamma}{du_q} & \frac{d\Gamma}{dx_1} \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on prouve de la même manière que les autres déterminants différentiels des fonctions $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{q+1}$, Γ pris par rapport à toutes les combinaisons de leurs $q+1$ variables $u, u_1, \ldots, u_q$, avec soit x_2, soit $x_3, \ldots$, soit x_p sont tous identiquement nuls. Comme, en vertu des groupes de relations linéaires analogues à (12), chacun des autres déterminants différentiels de ces $q+2$ fonctions se réduit à une expression où les précédents entrent d'une manière linéaire et homogène, tous aussi sont nuls identiquement. La dernière fonction Γ est donc composée des autres $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{q+1}$ (13), puisque le déterminant différentiel de ces $q+1$ dernières, par rapport à $u, u_1, \ldots, u_q$, n'est pas nul (VII).

IX. Il est évident, réciproquement, que toute fonction composée d'intégrales du système (9) en est une aussi. *On obtiendra donc toutes les intégrales de ce système en prenant toutes les fonctions composées possibles des fonctions* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{q+1}$.

X. La marche à suivre pour intégrer le système proposé (5) est donc exactement celle indiquée par Jacobi pour le cas d'une seule variable principale :

On écrira le système auxiliaire (11) *d'équations différentielles totales; on obtiendra les fonctions* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{q+1}$ *en résolvant, par rapport aux constantes arbitraires qu'elles contiennent, les formules fournissant ses intégrales générales; on résoudra enfin, par rapport à* u, *l'équation*

$$\Omega(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{q+1}) = 0,$$

formée en égalant à 0 (*ce qui revient au même que si l'on égalait à une constante arbitraire*) *une fonction composée de* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{q+1}$ *dont la composante* Ω *est arbitraire, sauf la condition d'engendrer une fonction composée dont la dérivée par rapport à* u *ne soit pas identiquement nulle.*

15. Comme application très simple, considérons le cas où les fonctions $A_{i,j}$ sans indice nul se réduisent à des constantes, et où l'on a

$$A_{1,0} = -a_1 u - V_1, \qquad A_{2,0} = -a_2 u - V_2, \qquad \ldots, \qquad A_{p,0} = -a_p u - V_p,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ désignant aussi des constantes quelconques et V_1, $V_2, \ldots, V_p$ des fonctions données des variables principales $x_1, \ldots, x_p$, c'est-à-dire où *le système* (5) *se compose exclusivement d'équations linéaires proprement dites et à coefficients constants, avec ou sans seconds membres fonctions des variables principales.*

Les conditions de passivité (7) se réduisent alors à

$$a_i V_j + \frac{dV_i}{dx_j} = a_j V_i + \frac{dV_j}{dx_i}.$$

Quand elles sont satisfaites, l'expression

$$e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2 - \ldots - a_p x_p}(V_1\, dx_1 + V_2\, dx_2 + \ldots + V_p\, dx_p)$$

est une différentielle exacte, et, en représentant par U quelque détermination de son intégrale indéfinie, la résolution des équations intégrales générales du système auxiliaire (11) par rapport à leurs constantes arbitraires donne immédiatement

$$\Gamma_1 = \frac{u}{e^{a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p}} - U,$$

avec

$$\Gamma_{1+i} = u_i + A_{1,i} x_1 + A_{2,i} x_2 + \ldots + A_{p,i} x_p$$

pour $i = 1, 2, \ldots, q$.

En appelant donc $\omega(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{q+1})$ une fonction composante arbitraire de q variables, l'intégrale générale du système considéré est

$$u = [\omega(\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_{q+1}) + U]\, e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_p x_p},$$

formule dont l'exactitude est évidente.

De simples quadratures permettraient encore d'achever les calculs, si $V_1, \ldots, V_p$ contenaient en outre les variables paramétriques u_1, $u_2, \ldots, u_q$, ou bien si les seconds membres des équations (11) étaient tous des expressions linéaires à coefficients constants en $u, u_1, \ldots, u_q$ augmentées de fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.